Д. И. Пионтковский, О градуированных алгебрах глобальной размерности 3, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 3, 139–152

DOI: https://doi.org/10.4213/im339

УДК 512.552

Д. И. Пионтковский

О градуированных алгебрах глобальной размерности 3

Пусть градуированная ассоциативная алгебра A над полем k минимальным образом представлена как факторалгебра свободной алгебры F по идеалу I, порожденному множеством однородных элементов f. В работе изучаются свойства двух расширений алгебры A: алгебры $\overline{F} = F/I \oplus I/I^2 \oplus \cdots$, ассоциированной с F относительно I-адической фильтрации, и алгебры H гомологий некоммутативного варианта комплекса Козюля – комплекса Шафаревича $\mathrm{Sh}(f, F)$. При этом получено несколько характеризаций для алгебр глобальной размерности три: в частности, A-алгебра H в этом случае свободна, а алгебра $\overline{F}$ изоморфна фактору свободной A-алгебры по идеалу, порожденному так называемым *сильно свободным* (или *инертным*) множеством.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

В этой статье устанавливается связь между некоторыми гомологическими инвариантами градуированных ассоциативных алгебр. Это дает новые критерии для алгебр глобальной размерности 3, аналогичные критериям алгебр глобальной размерности 2, рассмотренных в [1].

Мы будем называть векторное пространство над основным полем k, ассоциативную k-алгебру или модуль над ней *градуированными*, если они $\mathbf{Z}_+$-градуированы и конечномерны в каждой компоненте. Градуированная алгебра $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots$ называется *связной*, если ее нулевая компонента A_0 одномерна: по умолчанию мы рассматриваем только связные алгебры. Через $H_i(A)$ обозначим i-ю гомологию A, т.е. градуированное пространство

$$\mathrm{Tor}_i^A(k, k) \approx \mathrm{Ext}_A^i(k, k).$$

Если a – однородный элемент, то через $\tilde{a}$ обозначается свободная переменная той же степени, что и a; для множества однородных элементов $\alpha = \{\alpha_i\}$ положим $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_i\}$. Для двух алгебр A, B через $A * B$ обозначается их свободное произведение. Через $A\langle x\rangle$ обозначается свободная ассоциативная A-алгебра от множества

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-01144).

переменных x, так что $A\langle x\rangle = k\langle x\rangle * A$; если V – векторное пространство, порожденное x, то ту же алгебру мы будем обозначать и как $A\langle V\rangle$.

Зафиксируем также следующие обозначения: A – связная алгебра, x – некоторое минимальное множество ее порождающих, так что A изоморфна факторалгебре свободной алгебры $F = k\langle\tilde{x}\rangle$ по идеалу I, минимально порожденному некоторым множеством однородных элементов f. На алгебре $F\langle\tilde{f}\rangle$ можно ввести структуру дифференциально градуированной алгебры, задав гомологическую градуировку как $|F| = 0$, $|\tilde{f}_i| = 1$, и дифференцирование, удовлетворяющее формуле Лейбница и соотношениям

$$dF = 0, \qquad d\tilde{f}_i = f_i.$$

Получившийся комплекс называется *комплексом Шафаревича* [2], [3]; он обозначается как $\mathrm{Sh}(f, F)$, а его алгебра гомологий – как $H(f, F)$; например, A-бимодуль $H_1(f, F)$ – это бимодуль соотношений множества f по модулю тривиальных соотношений. Ацикличность комплекса $\mathrm{Sh}(f, F)$ в положительных степенях равносильна тому, что $\mathrm{gl.\,dim}\, A = 2$ [1].

Ключевым элементом нашей конструкции является некоторое множество ϕ однородных элементов свободного F-бимодуля $F\otimes k\tilde{f}\otimes F$, обладающее следующими свойствами:

1) ϕ состоит из циклов комплекса $\mathrm{Sh}(f, F)$, причем его образ в гомологиях минимальным образом порождает A-алгебру $H(f, F)$;

2) образ $\bar{\phi}$ множества ϕ в бимодуле $A \otimes k\tilde{f} \otimes A \subset A\langle\tilde{f}\rangle$ минимальным образом порождает ядро отображения $A\langle\tilde{f}\rangle \to \overline{F}$, где

$$\overline{F} = F/I \oplus I/I^2 \oplus \cdots ;$$

3) существует изморфизм градуированных пространств $k\phi \approx H_3(A)$; более того, образ $\bar{\phi}$ при естественном отображении

$$A \otimes k\tilde{f} \otimes A \to k\tilde{f} \otimes A \simeq H_2(A) \otimes A$$

минимальным образом порождает соответствующий модуль сизигий $\Omega^3(k_A)$ в минимальной резольвенте тривиального A-модуля k.

Эти связи дают описания алгебр $H(f, F)$ (предложение 3.1) и $\overline{F}$ (теорема 3.2). Структура этих алгебр особенно проста в случае, когда $\mathrm{gl.\,dim}\, A = 3$: тогда $H(f, F)$ – свободная A-алгебра, а $\overline{F}$ – факторалгебра свободной A-алгебры по идеалу, порожденному так называемым *сильно свободным* [1] множеством, т.е. ее свойства также очень близки к свойствам свободной A-алгебры. Например, естественное вложение $A \hookrightarrow \overline{F}$ индуцирует изоморфизм в третьих и высших гомологиях этих алгебр. Эти и другие критерии алгебр глобальной размерности 3 содержатся в теореме 3.3.

Автор хотел бы поблагодарить Е. С. Голода за ценные замечания и внимание к этой работе.

§ 2. Предварительные сведения: алгебры глобальной размерности 2

2.1. Обозначения. Для градуированного пространства V (в частности, алгебры или модуля) через $V(z)$ обозначим его ряд Гильберта

$$\sum_{i\geqslant 0} \dim V_i z^i.$$

Для множества однородных элементов $\alpha \in V$ через $\alpha(z)$ обозначим производящую функцию множества α: если α содержит d_i элементов степени i, то $\alpha(z) = \sum_{i\geqslant 0} d_i z^i$. Неравенства между степенными рядами понимаются покоэффициентно, т.е. запись $\sum_i a_i z^i \geqslant \sum_i b_i z^i$ означает, что $a_i \geqslant b_i$ для всех $i \geqslant 0$.

Через $H_i(A)$ обозначается i-я гомология алгебры A, т.е. градуированное пространство $\operatorname{Tor}_i^A(k,k) \approx \operatorname{Ext}_A^i(k,k)$. Как показано в [4], справедливы изоморфизмы

$$H_{2n}(A) \approx F_+ I^{n-1} F_+ \cap I^n / F_+ I^n + I^n F_+,$$
$$H_{2n+1}(A) \approx F_+ I^n \cap I^n F_+ / F_+ I^n F_+ + I^{n+1},$$

где $F_+ = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots$ – пополняющий идеал алгебры F. В частности,

$$H_0(A) = k, \qquad H_1(A) \approx kx, \qquad H_2(A) \approx kf, \qquad H_3(A) \approx F_+ I \cap I F_+ / F_+ I F_+ + I^2.$$

2.2. Сильно свободные множества (подробности см. в [1]). Пусть R – связная k-алгебра, $J \triangleleft R$ – однородный собственный двусторонний идеал, минимальным образом порожденный некоторым множеством однородных элементов $\alpha \subset R$, и $A = R/J$. Пусть $C = A\langle\tilde{\alpha}\rangle$. Очевидно, имеет место неравенство рядов Гильберта

$$C(z) \geqslant R(z). \qquad (*)$$

Те множества α, для которых выполняется равенство, называются *сильно свободными* [1], или *инертными* [5], [6]: они являются некоммутативными аналогами хорошо известных в коммутативной алгебре *регулярных последовательностей*. Обозначив ассоциированную с J-адической фильтрацией на R алгебру как $\overline{R} = R/J \oplus J/J^2 \oplus \cdots$, получаем, что α сильно свободно тогда и только тогда, когда естественный эпиморфизм

$$\pi \colon C \to \overline{R}$$

является изоморфизмом. Еще одно эквивалентное условие состоит в том, что $H_i(A) \approx H_i(R)$ при $i \geqslant 3$: если $\alpha \subset \mathbb{R}_+^2$, то это означает, что $H_i(A) \approx H_i(R)$ при $i \neq 2$, а $H_2(A) \approx H_2(R) \oplus k\alpha$.

В частности, если в прежних обозначениях $A = F/I$, то $\operatorname{gl.dim} A = 2$ в том и только том случае, когда f сильно свободно в F. Это равносильно тому, что неравенство Голода–Шафаревича [2]

$$A(z)(1 - x(z) + f(z)) \geqslant 1$$

обращается в равенство. Легко проверяемое достаточное условие состоит в том, что сильно свободным в свободной алгебре является всякое *комбинаторно свободное* множество, т.е. такое, что старшие члены его элементов не имеют попарных зацеплений и включений (старшие члены можно при этом определять относительно любого нётерового порядка на мономах, согласованного с умножением и такого, что пустой моном минимален).

2.3. Комплекс Шафаревича (подробности см. в [2], [7], [8]). Пусть $\alpha = \{\alpha_i\} \subset R$ – однородное подмножество в связной алгебре. Введем на алгебре $R\langle\tilde{\alpha}\rangle$ дополнительную градуировку, положив $|\tilde{\alpha}_i| = 1,\ |R| = 0$. Задав на $R\langle\tilde{\alpha}\rangle$ дифференцирование

$$d\colon d\tilde{\alpha}_i = \alpha_i, \qquad dR = 0, \qquad d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|}ad(b),$$

мы превратим эту алгебру в дифференциально градуированную: она называется *комплексом Шафаревича* и обозначается как $\mathrm{Sh}(\alpha, R)$. Его гомологии вычисляются относительно градуировки $|\cdot|$ и обозначаются как $H_i(\alpha, R)$.

Простейший комплекс Шафаревича $\mathrm{Sh}(1, R)$ – это (неаугментированная) бар-конструкция алгебры R, или, в терминологии [9], стандартная резольвента $B(A)$. В общем случае комплекс Шафаревича можно рассматривать как некоммутативный комплекс Козюля [1], [7], [3], [10].

Комплекс $\mathrm{Sh}(\alpha, R)$ ацикличен в положительных степенях (равносильно в первой степени) тогда и только тогда, когда множество α сильно свободно [1].

В частности, условие $\mathrm{gl.\,dim}\, A = 2$ эквивалентно тому, что алгебра $H_*(f, F)$ изоморфна A. В общем случае можно утверждать лишь, что алгебра гомологий комплекса Шафаревича свободной алгебры $H_*(f, F)$ порождается элементами нулевого и первого модуля гомологий [8].

Если S – дифференциально-градуированная алгебра, β – множество однородных циклов в ней, то дифференцирование на комплексе Шафаревича можно считать продолжением дифференцирования на R: для этого надо положить в определении $|\tilde{\alpha}_i| = |\alpha_i| + 1$. В терминах такого комплекса имеется еще одна харктризация алгебр глобальной размерности два [7]: $\mathrm{gl.\,dim}\, A = 2$ тогда и только тогда, когда $H_i(\beta, \mathrm{Sh}(x, A)) = 0$ при $i > 0$, где образ множества β в гомологиях составляет базис линейного пространства $H_1(x, A)$. Это условие эквивалентно тому, что

$$H_*(x, A) \simeq T(H_1(x, A)).$$

§ 3. Основные результаты

Выпишем начало минимальной резольвенты тривиального A-модуля k_A:

$$0 \leftarrow k \overset{d_0}{\leftarrow} A \overset{d_1}{\leftarrow} \tilde{x}k \otimes A \overset{d_2}{\leftarrow} \tilde{f}k \otimes A \overset{d_3}{\leftarrow} \Omega^3(k_A) \leftarrow 0,$$

где $\Omega^3(k_A)$ – соответствующий модуль сизигий. Пространство порождающих модуля $\Omega^3(k_A)$ изоморфно$H_3(A) \approx F_+I \cap IF_+/F_+IF_+ + I^2$, причем действие дифференциала $d_3\colon \Omega^3(k_A) \to fk \otimes A$ на порождающих индуцировано отображением

$$IF_+/(F_+IF_+ + I^2) \to \tilde{f}k \otimes A\colon f \mapsto \tilde{f}.$$

Выберем в этом пространстве какой-нибудь однородный базис $\gamma = \{\gamma_j\}$. Каждый элемент такого базиса представим в виде

$$\gamma_j = \sum_i \tilde{f}_i a_j^i \in \tilde{f}k \otimes A, \qquad \deg a_j^i \geqslant 1.$$

Обозначая через $\hat{a}$ какой-нибудь прообраз той же степени однородного элемента $a \in A$ в F, получаем, что элемент $\hat{\gamma}_j := \sum_i f_i \hat{a}_j^i \in F$ представим в виде

$$\sum_i b_j^i f_i + \sum_k u_j^k f_{i_k} v_j^k,$$

причем $k\{\hat{\gamma}_j\} \cap (F_+IF_+ + I^2) = 0$. Пусть черта сверху обозначает образ данного элемента из F в A. Положим

$$\gamma_j' := \sum_i \overline{b_j^i} \tilde{f}_i \in A \otimes \tilde{f}k.$$

Легко видеть, что множество $\gamma' := \{\gamma_j'\}$ составляет базис левого модуля сизигий $\Omega^3({}_Ak)$.

Положим $\bar{\phi}_j := \gamma_j - \gamma_j' - \sum_k \bar{u}_j^k \tilde{f}_{i_k} \bar{v}_j^k \in A \otimes \tilde{f}k \otimes A$ и $\bar{\phi} = \{\bar{\phi}_j\}$. Через ϕ обозначим прообраз этого множества в $F \otimes \tilde{f}k \otimes F$:

$$\phi = \{\phi_j\}, \qquad \phi_j = \sum_i \tilde{f}_i \hat{a}_j^i - \sum_i b_j^i \tilde{f}_i - \sum_k u_j^k \tilde{f}_{i_k} v_j^k.$$

Очевидно, $\phi(z) = \bar{\phi}(z) = H_3(A)(z)$, и при естественном отображении $A \otimes \tilde{f}k \otimes A \to \tilde{f}k \otimes A$ подмодуль, порожденный $\bar{\phi}$, переходит в модуль $\Omega^3(k_A)$. В частности, если $\operatorname{gl.dim} A \leqslant 2$, то $\bar{\phi} = 0$. Отметим, что выбор множеств ϕ и $\bar{\phi}$, вообще говоря, неоднозначен.

Поскольку дифференцирование $d_1\colon F\tilde{f}F \to F$ в комплексе Шафаревича $\mathrm{Sh}(f, F)$ переводит элемент ϕ_j в $\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_j' - \sum_k u_j^k f_{i_k} v_j^k = 0$, то $\phi \subset F\langle \tilde{f} \rangle \simeq \mathrm{Sh}(f, F)$, и можно рассмотреть его образ $h\phi$ в алгебре гомологий $H_*(f, F)$. При этом справедливо следующее утверждение, которое уточняет свойства гомологий комплекса Шафаревича свободной алгебры, описанные в [1], [8] (см. выше п. 2.3).

Предложение 3.1. а) $H_1(f, F)/A_+H_1(f, F) \simeq \Omega_3(k_A)$.

б) *A-алгебра $H_*(f, F)$ порождается множеством $h\phi$.*

в) *Существует сюръективное отображение из алгебры $H_*(f, F)$ на A-подалгебру в $A\langle \tilde{f} \rangle$, порожденную множеством $\bar{\phi}$.*

При этом следующие условия эквивалентны:

(i) $H_i(f,F)=0$ *для некоторого* $i>0$;

(ii) $H_i(f,F)=0$ *для всех* $i>0$, *т.е.* $f\subset F$ – *сильно свободное множество.*

Обозначим ассоциированную с I-адической фильтрацией на F алгебру через $\overline{F} = F/I\oplus I/I^2\oplus\cdots$, а через Δ – ядро естественного отображения $A\langle\tilde f\rangle\to\overline{F}$. Вторая ($I$-адическая) градуировка на $\overline{F}$ задается как $\overline{F}_{(i)} = I^i/I^{i+1}$. Если $\operatorname{gl.dim} A\leqslant 2$, то $\overline{F}\simeq A\langle\tilde f\rangle$. В общем же случае имеет место

Теорема 3.2. а) *Идеал* Δ *порождается множеством* $\bar\phi$, *т.е.* $\overline{F}\simeq A\langle\tilde f\rangle/\operatorname{id}(\bar\phi)$.

б) *Умножение в* $\overline{F}$ *задает изоморфизм* A-*бимодулей* $\overline{F}_{(i)}\otimes_A\overline{F}_{(j)}\to\overline{F}_{(i+j)}$ *для любых* $i,j\geqslant 0$.

в) *Справедливы изоморфизмы градуированных пространств*

$$H_0(\overline{F})=k,\qquad H_i(\overline{F})\approx H_i(A)\oplus H_{i+1}(A)\quad\text{при}\quad i\geqslant 1.$$

В частности, $\operatorname{gl.dim}\overline{F}=\operatorname{gl.dim}A$.

Теперь сформулируем условия, характеризующие алгебры глобальной размерности 3. Здесь идеалы $\tilde I$, $\tilde J$ в свободной алгебре $F\langle\tilde f\rangle$ порождены соответственно множествами f и ϕ.

Теорема 3.3. *Предположим, что* $\operatorname{gl.dim}A\geqslant 3$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $\operatorname{gl.dim}A=3$;

(ii) $\operatorname{gl.dim}\overline{F}=3$;

(iii) *множество* $\bar\phi\subset A\langle\tilde f\rangle$ *сильно свободно*;

(iv) $\tilde I\cap\tilde J=\tilde I\tilde J+\tilde J\tilde I$;

(v) $H_*(f,F)\simeq A\langle H_3(A)\rangle$;

(vi) A-*алгебра* $H_*(f,F)$ *свободна*;

(vii) *правый* A-*модуль* $H_1(f,F)/A_+H_1(f,F)$ *свободен.*

Отметим, что условие (iii) здесь эквивалентно тому, что естественное вложение $A\hookrightarrow\overline{F}$ индуцирует изоморфизм в третьих и высших (равносильно в третьих) гомологиях этих алгебр, а условие (vi) – тому, что естественное вложение $A\hookrightarrow H_*(f,F)$ индуцирует изоморфизм во вторых и высших (равносильно во вторых) гомологиях.

§ 4. Алгебра $H_*(f,F)$

Доказательство предложения 3.1. Рассмотрим следующую точную последовательность комплексов правых A-модулей, описанную в [2]:

$$0\to\tilde x\operatorname{Sh}(f,F)\xrightarrow{\lambda}\overline{\operatorname{Sh}(f,F)}\xrightarrow{\nu}\tilde f\operatorname{Sh}(f,F)\to 0.$$

Здесь черта обозначает пополняющий идеал, отображение λ переводит $\tilde x$ в x.

Из точной последовательности гомологий получаем

$$\tilde{x}H_1(f,F) \xrightarrow{\lambda_*} H_1(f,F) \xrightarrow{d_*} \tilde{f}H_0(f,F) \to \tilde{x}H_0(f,F) \to H_0(f,F) \to k \to 0.$$

Здесь $H_0(f,F) = A$ и последние четыре члена представляют собой начало минимальной резольвенты k_A. Таким образом, имеем точную последовательность

$$\tilde{x}H_1(f,F) \xrightarrow{\lambda_*} H_1(f,F) \xrightarrow{d_*} \Omega_3(k_A) \to 0,$$

откуда $H_1(f,F)/xH_1(f,F) \simeq \Omega_3(k_A)$, что доказывает а).

Так как модуль $\Omega_3(k_A)$ порожден множеством γ, в качестве прообраза которого при отображении d_* можно выбрать $h\phi$, то $H_1(f,F) = xH_1(f,F) + h\phi H_1(f,F)$. Следовательно, бимодуль $H_1(f,F)$ порожден множеством $h\phi$.

Поскольку $H_0(f,F) = A$, а алгебра $H_*(f,F)$ порождается образами циклов нулевой и первой степени [7], то она порождается $h\phi$. Утверждение б) доказано.

Докажем в). Пусть идеал $\tilde{I}$ порожден множеством f в алгебре $F\langle\tilde{f}\rangle$. Можно рассматривать его как подкомплекс в $\mathrm{Sh}(f,F)$, так что получаем точную последовательность дифференциально градуированных алгебр

$$0 \to \tilde{I} \xrightarrow{i} \mathrm{Sh}(f,F) \xrightarrow{\mu} A\langle\tilde{f}\rangle \to 0, \qquad (**)$$

где дифференциал на $A\langle\tilde{f}\rangle$ нулевой. Ее точный гомологический треугольник имеет вид

$$\begin{tikzcd} & H_*\tilde{I} \arrow[d, "i_*"] \\ A\langle\tilde{f}\rangle \arrow[ur, "d_*"] & H_*(f,F) \arrow[l, "\mu_*"] \end{tikzcd}$$

Здесь отображение μ_* индуцировано естественным гомоморфизмом $\mu\colon F\langle\tilde{f}\rangle \to A\langle\tilde{f}\rangle$, так что μ_0 – изоморфизм $A \to A$. Так как A-алгебра $H_*(f,F)$ порождается множеством $h\phi$, то образ отображения μ_* – в точности A-подалгебра E в $A\langle\tilde{f}\rangle$, порожденная $\bar{\phi}$.

Импликация (ii)$\Longrightarrow$(i) очевидна. Из утверждения в) следует, что для импликации (i)$\Longrightarrow$(ii) достаточно доказать, что если $\mathrm{gl.\,dim}\,A \geqslant 3$, то $E_{(i)} \neq 0$ при любом $i > 0$.

Действительно, если $\mathrm{gl.\,dim}\,A \geqslant 3$, то множества f и $\bar{\phi}$ содержат по крайней мере по одному ненулевому элементу f_1 и $\bar{\phi}_1$. При этом можно считать, что разложение элемента γ_1 содержит ненулевое слагаемое $\tilde{f}_1 a$, так что образ элемента $\bar{\phi}_1$ при факторизации $A\langle\tilde{f}\rangle \to A\langle\tilde{f}_1\rangle$ имеет вид $e = \tilde{f}_1 a - \sum_k \bar{u}_j^k \tilde{f}_1 \bar{v}_j^k$. Следовательно, образ подалгебры E в $A\langle\tilde{f}_1\rangle$ содержит все элементы $e^n = (\tilde{f}_1 a)^n + c$, где $c \in A_+ A\langle\tilde{f}_1\rangle$. Поскольку $a \neq 0$, все эти элементы ненулевые, и $E_{(n)} \neq \{0\}$ при любых $n > 0$.

§ 5. Описание алгебры $\overline{F}$

Доказательство теоремы 3.2. Введем на алгебрах $A\langle\tilde{f}\rangle$ и $\overline{F}$ еще одну градуировку, положив $|A| = 0,\ |\tilde{f}_i| = |f_i| = 1$. Градуированные компоненты относительно новой градуировки будем обозначать как $A\langle\tilde{f}\rangle_{(i)}$ и $\overline{F}_{(i)}$. Отметим, что в точной последовательности

$$0 \to \Delta \to A\langle\tilde{f}\rangle \to \overline{F} \to 0$$

отображения однородны относительно обеих градуировок.

Теперь доказательство теоремы 3.2 разбивается на несколько лемм.

Лемма 5.1. $\bar{\phi} \subset \Delta_{(1)}$.

Доказательство. Очевидно, $\bar{\phi} \subset A\langle\tilde{f}\rangle_{(1)}$. При этом множество $\pi\phi$ составляют образы элементов

$$\sum_i f_i \hat{a}^i_j - \sum_i b^i_j f_i - \sum_k \bar{u}^k_j f_{i_k} \bar{v}^k_j$$

в I/I^2, т.е. оно нулевое.

Лемма 5.2. *A-бимодуль $\Delta_{(1)}$ порождается множеством $\bar{\phi}$.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность $(**)$ из доказательства предложения 3.1. Начальный сегмент ее точной последовательности гомологий выглядит так:

$$H_1(f,F) \overset{\mu_1}{\leftarrow} A\langle\tilde{f}\rangle_{(1)} \overset{d_*}{\leftarrow} H_0\tilde{I} \overset{i_0}{\leftarrow} H_0(f,F) \overset{\mu_0}{\leftarrow} A \to 0.$$

Здесь $H_0(f,F) = A,\ H_0\tilde{I} = I/I^2$ и A-бимодуль $\operatorname{im}\mu_1$ порождается образом множества $h\phi$, т.е. множеством $\bar{\phi} \in A\tilde{f}A$. Получаем точную последовательность

$$0 \to A\bar{\phi}A \to A\tilde{f}A \to I/I^2 \to 0.$$

Значит, $\Delta_{(1)} = \ker\bigl(A\tilde{f}A \to F_{(1)}\bigr) = A\bar{\phi}A$.

Лемма 5.3. а) *Пусть R – правый, L – левый идеалы в свободной алгебре F. Тогда естественное отображение*

$$\xi\colon R \otimes_F L \to RL$$

является изоморфизмом векторных пространств.

б) *Умножение в $\overline{F}$ задает изоморфизм A-бимодулей $\overline{F}_{(i)} \otimes_A \overline{F}_{(j)} \to \overline{F}_{(i+j)}$ для любых $i, j \geqslant 0$.*

Доказательство. Как известно [11], всякий односторонний идеал в свободной алгебре является свободным модулем.

а) Пусть $r = \{r_i\}$ – свободный базис R, $l = \{l_i\}$ – свободный базис L. Если элемент $e = \sum_{i,j} r_i \otimes_F l_j$ лежит в $\ker \xi$, то в алгебре F элемент $\sum_{i,j} r_i a_{ij} l_j$ нулевой. Поскольку r – свободный базис, то для всякого i имеем $\sum_j a_{ij} l_j = 0$. Поскольку базис l также свободный, то $a_{ij} = 0$ для всех i, j, откуда $e = 0$.

б) Из изоморфизма правых A-модулей

$$\overline{F}_{(i)} = I^i / I^{i+1} = I^i / I^i \cdot I \simeq I^i \otimes_F F/I = I^i \otimes_F A$$

следует, что $\overline{F}$ – свободный правый (аналогично левый) A-модуль, откуда следует утверждение б) при $ij = 0$.

Пусть $i, j > 0$. Из изоморфизма векторных пространств

$$\overline{F}_{(i)} \otimes_F \overline{F}_{(j)} \approx I^i \otimes_F A \otimes_F I^j$$

и точной последовательности

$$0 \to I^{i+j+1} \to I^i \otimes_F F \otimes_F I^j \to I^i \otimes_F A \otimes_F I^j \to 0,$$

где $I^i \otimes_F F \otimes_F I^j \approx I^{i+j}$ в силу а), получаем равенство рядов Гильберта:

$$\big(\overline{F}_{(i)} \otimes_F \overline{F}_{(j)}\big)(z) = I^{i+j}(z) - I^{i+j+1}(z) = \overline{F}_{(i+j)}(z).$$

Следовательно, сюръективное отображение, описанное в условии леммы, биективно.

Лемма 5.4. *Идеал Δ порождается множеством $\Delta_{(1)}$.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность A-бимодулей

$$0 \to \Delta_{(i)} \to A\langle \tilde{f} \rangle_{(i)} \xrightarrow{\pi_i} \overline{F}_{(i)} \to 0,$$

где $i \geqslant 0$. Здесь $\overline{F}_{(i)} \simeq I^i \otimes_F A$ – свободный правый A-модуль. Следовательно, он выделяется как свободное слагаемое, т.е. имеется изоморфизм правых A-модулей

$$A\langle \tilde{f} \rangle_{(i)} \simeq \overline{F}_{(i)} \oplus \Delta_{(i)}.$$

Аналогично, для любого $j \geqslant 0$ существует изоморфизм левых A-модулей

$$A\langle \tilde{f} \rangle_{(j)} \simeq \overline{F}_{(j)} \oplus \Delta_{(j)}.$$

Пусть $i, j \geqslant 1$ и по предположению индукции $\Delta_{(i)}$ и $\Delta_{(j)}$ содержатся в $K = \mathrm{id}(\Delta_{(1)})$. Имеем

$$A\langle\tilde{f}\rangle_{(i+j)} = A\langle\tilde{f}\rangle_{(i)} \cdot A\langle\tilde{f}\rangle_{(j)} \simeq \overline{F}_{(i)}\overline{F}_{(j)} + (\Delta_{(i)}A\langle\tilde{f}\rangle_{(j)} + A\langle\tilde{f}\rangle_{(i)}\Delta_{(j)}),$$

где второе слагаемое лежит в $K_{(i+j)}$, в первом слагаемом перемножаются подмножества алгебры $A\langle\tilde{f}\rangle$.

Из леммы 5.3 получаем неравенство рядов Гильберта

$$\big(\overline{F}_{(i)}\overline{F}_{(j)}\big)(z) \leqslant \big(\overline{F}_{(i)} \otimes_F \overline{F}_{(j)}\big)(z) = \overline{F}_{(i+j)}(z).$$

Следовательно,

$$A\langle\tilde{f}\rangle_{(i+j)}(z) \leqslant (\overline{F}_{(i)}\overline{F}_{(j)})(z) + K_{(i+j)}(z) \leqslant \overline{F}_{(i+j)}(z) + \Delta_{(i+j)}(z) = A\langle\tilde{f}\rangle_{(i+j)}(z).$$

Значит, все неравенства обращаются в равенства; в частности, $K_{(i+j)}(z) = \Delta_{(i+j)}(z)$ и $K_{(i+j)} = \Delta_{(i+j)}$.

Лемма 5.5. *Гомологии алгебры $\overline{F}$ вычисляются по формулам*

$$H_0(\overline{F}) = k, \qquad H_i(\overline{F}) \approx H_i(A) \oplus H_{i+1}(A) \quad \textit{при} \quad i \geqslant 1.$$

Доказательство. Рассмотрим стандартную спектральную последовательность

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^A_p\big(\mathrm{Tor}^{\overline{F}}_q(k, A), k\big) \Longrightarrow \mathrm{Tor}^{\overline{F}}_{p+q}(k, k).$$

По лемме 5.3 естественное отображение левых $\overline{F}$-модулей

$$\overline{F} \otimes_A \overline{F}_{(1)} \to \overline{F}_{(1)} \oplus \overline{F}_{(2)} \oplus \cdots$$

– изоморфизм, откуда получаем свободную $\overline{F}$-резольвенту левого модуля A

$$0 \leftarrow A \leftarrow \overline{F} \leftarrow \overline{F} \otimes_A \overline{F}_{(1)} \leftarrow 0.$$

Она, очевидно, минимальна, так что

$$\mathrm{Tor}^{\overline{F}}_0(k, A) = k, \qquad \mathrm{Tor}^{\overline{F}}_1(k, A) = k \otimes_A I/I^2, \qquad \mathrm{Tor}^{\overline{F}}_i(k, A) = 0 \ \text{ при } \ i > 1.$$

Обозначим $M = \mathrm{Tor}^{\overline{F}}_1(k, A) \simeq I/F_+I$. В свободной резольвенте Говорова [4] правого A-модуля k_A

$$0 \leftarrow k \overset{d_0}{\leftarrow} F/I \overset{d_1}{\leftarrow} F_+/F_+I \overset{d_2}{\leftarrow} I/I^2 \overset{d_3}{\leftarrow} \cdots \leftarrow F_+I^{n-1}/F_+I^n \leftarrow I^n/I^{n+1} \leftarrow \cdots$$

имеем $\operatorname{im} d_2 \simeq M$, следовательно,

$$\operatorname{Tor}_i^A(M,k) \approx \operatorname{Tor}_{i+2}^A(k,k) \quad \text{для всех} \quad i \geqslant 0.$$

Таким образом,

$$E^2_{p,0} \approx H_p(A), \qquad E^2_{p,1} \approx H_{p+2}(A), \qquad E^2_{p,q} = 0 \;\; \text{при} \;\; q \geqslant 2.$$

Векторные пространства $H_i(\overline{F})$ и $E^2_{p,q}$, а также члены минимальной $\overline{F}$-резольвенты модуля k наследуют обе градуировки алгебры $\overline{F}$. При этом пространства $E^2_{p,0} \approx H_p(A)$ сосредоточены в нулевой компоненте относительно I-адической градуировки, а пространства $E^2_{p,1}$ – в компонентах положительных степеней (так как модуль M порождается в первой степени). Поскольку $\overline{F}_{(0)} = A$, то подкомплекс нулевой I-адической степени в минимальной $\overline{F}$-резольвенте тривиального модуля $k_{\overline{F}}$ является ациклическим комплексом свободных A-модулей, изоморфным минимальной A-резольвенте модуля k_A. Следовательно, $H_p(\overline{F})_{(0)} \approx H_p(A) \approx E^2_{p,0}$, т.е. члены $E^2_{p,0}$ остаются неизменными в члене $E^\infty_{p,0}$ и дифференциал на E^2 нулевой. Таким образом,

$$H_i(\overline{F}) \approx E^2_{i,0} \oplus E^2_{i-1,1} \quad \text{при} \quad i \geqslant 1.$$

Доказательство теоремы 3.2 непосредственно следует теперь из лемм 5.1–5.5.

§ 6. Две леммы о сильно свободных множествах

Лемма 6.1. *Пусть $\alpha \subset H$ – сильно свободное подмножество в связной алгебре, $\bar{\alpha}$ – его образ в некоторой факторалгебре $R = H/I$ и $J \triangleleft H$ – порожденный им идеал. Тогда существует изоморфизм R-бимодулей*

$$H_1(\bar{\alpha}, R) \simeq J \cap I/(IJ + JI).$$

В частности, множество $\bar{\alpha} \subset R$ сильно свободно тогда и только тогда, когда $J \cap I = IJ + JI$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность дифференциальных алгебр

$$0 \to C \to \operatorname{Sh}(\alpha, H) \to \operatorname{Sh}(\bar{\alpha}, R) \to 0,$$

где C – дифференциальный идеал, порожденный I. Пусть $\bar{J}$ – идеал в R, порожденный множеством $\bar{\alpha}$. Тогда

$$H_0(\bar{\alpha}, R) = R/\bar{J} \simeq H/(I+J), \quad H_0(\alpha, H) = H/J, \quad H_0 C = C_0/dC_1 = I/(IJ+JI).$$

При этом комплекс $\operatorname{Sh}(\alpha, H)$ ацикличен в положительных степенях и начало точной последовательности гомологий выглядит так:

$$0 \to H_1(\bar{\alpha}, R) \xrightarrow{d_1} I/(IJ+JI) \to H/J \xrightarrow{\pi_0} H/(I+J) \to 0.$$

Здесь $\ker \pi_0 = I/(I \cap J)$, откуда и получаем изоморфизм

$$H_1(\bar{\alpha}, R) \simeq J \cap I/(IJ + JI).$$

Лемма 6.2. *Пусть $\alpha \subset H$ – сильно свободное подмножество в связной алгебре, $E \subset H$ – однородная подалгебра и $\alpha \subset E$, и пусть $\mathrm{id}_H\, \alpha \cap E = \mathrm{id}_E\, \alpha$. Тогда α сильно свободно в E.*

Доказательство. Обозначим $I = \mathrm{id}_H\, \alpha$, $I' = \mathrm{id}_E\, \alpha$, $B = H/I$, $C = E/I'$. Пусть $\pi_H \colon H \to B$, $\pi_E \colon E \to C$ – естественные гомоморфизмы, $\rho_H \colon B \to H$, $\rho_E \colon C \to E$ – какие-нибудь обратные отображения градуированных пространств. Так как $I' = I \cap E$, то C – подалгебра B, так что можно считать $\rho_H|_C = \rho_E$.

Согласно [1] α сильно свободно в H тогда и только тогда, когда $\rho\langle\tilde{\alpha}\rangle \colon B\langle\tilde{\alpha}\rangle \to H$ – изоморфизм градуированных пространств, т.е. если элемент $\sum b_0\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n b_n$ из $B\langle\tilde{\alpha}\rangle$ ненулевой, то и элемент $\sum \rho_H(b_0)\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n \rho_H(b_n)$ в H ненулевой. Аналогично, α сильно свободно в E в том и только том случае, когда для любого ненулевого элемента $\sum b_0\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n b_n$ из $C\langle\tilde{\alpha}\rangle$ элемент $\sum \rho_E(b_0)\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n \rho_E(b_n)$ также ненулевой. Поскольку $\rho_H|_C = \rho_E$, это условие всегда выполняется.

§ 7. Доказательство теоремы 3.3

Импликация (i)$\Longleftrightarrow$(ii) есть частный случай теоремы 3.2, в).

Докажем импликацию (i)+(ii)$\Longleftrightarrow$(iii). Условие, что $\bar{\phi}$ сильно свободно, означает, что $H_i(\overline{F}) \approx H_i(A\langle\tilde{f}\rangle)$ при $i \geqslant 3$, где $H_i(A\langle\tilde{f}\rangle) \approx H_i(A)$.

Если $\mathrm{gl.\,dim}\, A = 3$, то $H_i(A) = 0$ при $i > 3$, и в силу теоремы 3.2, в) это условие выполняется. Обратно, если $\bar{\phi}$ сильно свободно, то

$$H_3(A) \oplus H_4(A) \approx H_3(\overline{F}) \approx H_3(A),$$

откуда $H_4(A) = 0$ и $\mathrm{gl.\,dim}\, A \leqslant 3$.

Докажем (iii)$\Longleftrightarrow$(iv). Чтобы применить лемму 6.1 к алгебрам $F\langle\tilde{f}\rangle$, $A\langle\tilde{f}\rangle$ и множеству ϕ, достаточно доказать, что ϕ сильно свободно в $F\langle\tilde{f}\rangle$. Отметим сначала, что ϕ – минимальное множество порождающих некоторого идеала в $F\langle\tilde{f}\rangle$, в противном случае имеется соотношение вида

$$\phi_i = \sum_{j \neq i, m, n} a_m \phi_j b_n,$$

которое при отображении $F\tilde{f}F \to A\tilde{f}A \to \tilde{f}A$ переходит в соотношение вида

$$\gamma_i = \sum_{j \neq i, n} \gamma_j c_n,$$

т.е. γ порождает подмодуль $\Omega^3(k_A)$ не минимальным образом.

Чтобы доказать, что данное минимальное множество порождающих некоторого идеала сильно свободно, достаточно доказать, что какое-нибудь множество порождающих этого идеала сильно свободно. Выберем на мономах от переменных $\tilde{x}$, $\tilde{f}$ какой-нибудь порядок, обладающий следующими свойствами: из двух мономов разных степеней больше тот, у которого больше степень, а из двух мономов одной степени больше тот, у которого среди составляющих его переменных первой встречается какая-нибудь $\tilde{f}_i$ (мы считаем $\deg \tilde{x}_j = \deg x_j$, $\deg \tilde{f}_i = \deg f_i$). Тогда старшие члены элементов множества ϕ имеют вид $\widehat{\phi}_j = \tilde{f}_{i_j} m_j$, где m_j – одночлен из алгебры F.

Если эти старшие члены не имеют попарных зацеплений, то ϕ комбинаторно свободно и все доказано. В противном случае один из описанных старших членов должен делиться слева на другой, т.е. для некоторых j, k существует такой одночлен $s \in F$, что

$$\hat{\phi}_j = \hat{\phi}_k s.$$

Заменив в множестве ϕ элемент ϕ_j на элемент той же стпени $\phi'_j = \phi_j - \phi_k s$, получим новое множество ϕ' порождающих идеала $\tilde{J}$. Поскольку при композиции естественных отображений $F\tilde{f}F \to \tilde{f}F \to \tilde{f}A$ множество ϕ' переходит в некоторое множество порождающих модуля $\Omega^3(k_A)$, его старшие члены имеют тот же вид, что и у элементов ϕ. Применим аналогичную операцию к множеству ϕ', затем к получившемуся множеству и т.д., выбирая всякий раз из всех возможных замен ту, которая заменяет элемент наименьшей возможной степени. Поскольку после каждой замены старший член одного из элементов уменьшается, для каждого положительного числа n через конечное число шагов замены элементов степени не выше n станут невозможны и при дальнейших заменах множество ϕ'_n таких элементов будет оставаться неизменным. Взяв объединение множеств ϕ'_n при всех положительных n, мы получим некоторое комбинаторно свободное множество порождающих идеала $\tilde{J}$ (а именно, *базис Грёбнера* правого идеала $\phi F \triangleleft F\tilde{f}F$; см. [12], [13]).

Докажем (iii)$\Longrightarrow$(v). Докажем сначала, что подалгебра E, порожденная подмножеством $A \cup \bar{\phi}$ в алгебре $A\langle \tilde{f} \rangle$, является свободной A-алгеброй. Обозначим

$$I = \mathrm{id}_{A\langle \tilde{f} \rangle} \bar{\phi}, \qquad I' = \mathrm{id}_E \bar{\phi}.$$

Согласно лемме 6.2 достаточно доказать, что $I \cap E = I'$; тогда $\bar{\phi}$ сильно свободно в E и $E \simeq A\langle \tilde{\phi} \rangle$.

Действительно, поскольку $I \subset J = \mathrm{id}_{A\langle \tilde{f} \rangle} \tilde{f}$, а $J \cap E = E\bar{\phi}E = I'$, то $I \cap E \subset I'$, что и требовалось доказать.

Для доказательства импликации осталось заметить, что по предложению 3.1, в) $H_*(f, F) \simeq E \simeq A\langle \tilde{\phi} \rangle \simeq A\langle H_3(A) \rangle$.

Импликации (v)$\Longrightarrow$(vi)$\Longrightarrow$(vii) тривиальны, а импликация (i)$\Longleftrightarrow$(vii) следует из предложения 3.1, а). Теорема доказана.

Список литературы

1. *Anick D.* Non-commutative graded algebras and their Hilbert series // J. Algebra. 1982. V. 78. P. 120–140.
2. *Голод Е. С., Шафаревич И. Р.* О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. №2. С. 261–272.
3. *Golod E. S.* Standard bases and homology // Lect. Notes Math. 1988. V. 1352. P. 88–96.
4. *Говоров В. Е.* О градуированных алгебрах // Матем. заметки. 1972. Т. 12. №2. С. 197–204.
5. *Halperin S., Lemaire J.-M.* Suites inertes dans les algèbres de Lie graduées // Math. Scand. 1987. V. 61. № 1. P. 39–67.
6. *Anick D.* Inert sets and the Lie algebra associated to a group // J. Algebra. 1987. V. 111. P. 154–165.
7. *Голод Е. С.* Гомологии комплекса Шафаревича и некоммутативные полные пересечения // Фундам. и прикл. математика. 1999. Т. 5. №1. С. 85–95.
8. *Голод Е. С.* Об алгебре гомологий комплекса Шафаревича свободной алгебры // Фундам. и прикл. математика. 1999. Т. 5. №1. С. 97–100.
9. *Бурбаки Н.* Гомологическая алгебра. М.: Наука, 1987.
10. *Пионтковский Д. И.* О рядах Гильберта и гомологиях PI-алгебр // Матем. сб. 1998. Т. 189. №11. С. 103–120.
11. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
12. *Латышев В. Н.* Компьютерная алгебра. Стандартные базисы. М.: Изд-во МГУ, 1988.
13. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Современная математика и ее приложения. 1990. Т. 57. С. 5–177.

Центральный экономико-математический
институт РАН

Поступило в редакцию
4.V.2000