А. М. Райгородский, О хроматическом числе пространства, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2(332), 147–148

DOI: https://doi.org/10.4213/rm281

О ХРОМАТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ ПРОСТРАНСТВА

А. М. Райгородский

1. Введение и основной результат. Определим величину $\chi(\mathbb{R}^n)$ – *хроматическое число евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$ – как минимальное число красок, необходимых для такой раскраски точек в $\mathbb{R}^n$, при которой между точками одного цвета никогда не реализуется евклидово расстояние, равное единице. Иными словами, $\chi(\mathbb{R}^n)$ – это хроматическое число следующего графа: множество вершин этого графа совпадает со всем $\mathbb{R}^n$, а ребрами соединены те и только те вершины, расстояние между которыми равно единице. Фактически, задача нахождения величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ была впервые рассмотрена в работе [1] Хадвигером, который показал, что если имеется произвольное покрытие $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} \Omega_i$ замкнутыми множествами Ω_i, то найдется такой элемент Ω_i этого покрытия, что $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \{|x-y| : x, y \in \Omega_i\}$. Известно (см. [2]–[4]), что $4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$ и что, кроме того, $5 \leqslant \chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 18$. В [5] Райский получил оценку $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant n+2$. Эта оценка неоднократно улучшалась: так, в [6] было доказано, что $\chi(\mathbb{R}^n) \gg n^2$, затем в [7] было получено неравенство $\chi(\mathbb{R}^n) \gg n^3$, и, наконец, в [8] была установлена экспоненциальность роста величины $\chi(\mathbb{R}^n)$. Иначе говоря, в работе [8] была доказана оценка $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.207 + o(1))^n$ (здесь следует отметить, что согласно [6] имеет место неравенство $\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n$). В настоящей работе с помощью техники, предложенной в [9], будет доказана следующая

Теорема. *Положим* $A_1 = \frac{1}{2}(x+2y)$, $A_2 = \sqrt{-3A_1^2 + 6A_1 + 1}$, $A_3 = \frac{1}{4}\bigl(1 + \frac{A_1 - 1}{A_2}\bigr)$ *и* $A_4 = \frac{1}{6}(1 + 3A_1 - A_2)$ *(здесь* x *и* y *– независимые вещественные переменные). Определим, далее, величины* x_0, y_0 *как такие корни системы нелинейных уравнений*

$$2A_3 \log A_4 + (1 - 4A_3)\log(A_1 - 2A_4) + (2A_3 - 1)\log(1 - A_1 + A_4) - \log y + \log(x - y) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{(1-x)^2 y}{(x-y)^3} = 1, \tag{2}$$

что $x_0 = 0.36063\ldots$, *а* $y_0 = 0.063907\ldots$. *Наконец, зададим величину* γ *равенством*

$$\gamma^{-1} = (A_4^0)^{A_4^0}(A_1^0 - 2A_4^0)^{A_1^0 - 2A_4^0}(1 - A_1^0 + A_4^0)^{1 - A_1^0 + A_4^0}(1 - x_0)^{1 - x_0}(x_0 - y_0)^{x_0 - y_0} y_0^{y_0},$$

где $A_i^0 = A_i(x_0, y_0)$. *Тогда* $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (\gamma + o(1))^n = (1.239\ldots + o(1))^n$.

2. Доказательство теоремы. Сперва заметим, что если $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ есть (M, D)-критическая конфигурация в $\mathbb{R}^n$ с критическим расстоянием $d > 0$ (т.е. $\operatorname{card}\Sigma = M$ и во всяком множестве $Q \subset \Sigma$ таком, что $\operatorname{card} Q = D+1$, найдется пара элементов $x, y \in Q$, расстояние между которыми равно d), то $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant M/D$ (см. [6]), и, стало быть, для завершения доказательства теоремы нам достаточно построить некоторую (M, D)-критическую конфигурацию Σ с $M/D \geqslant (\gamma + o(1))^n$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ достаточно велико, $a = [x_0 n]$, $b = [y_0 n]$, а p – наименьшее нечетное простое число, большее величины $[(a+2b)/2]$. Известно (см. [10; с. 364]), что для достаточно большого x и для некоторого $\alpha < 1$ (например, для $\alpha = 38/61$) между x и $x + x^\alpha$ лежит простое число. Поэтому можно считать, что $p < [(a+2b)/2] + [(a+2b)/2]^\alpha$. Заметим, что выбор величины α влияет исключительно на оценку величины $o(1)$ из формулировки теоремы. Положим $\Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{0, 1, -1\};\ \operatorname{card}\{x_i = \pm 1\} = a;\ \operatorname{card}\{x_i = -1\} = b\} \subset \mathbb{R}^n$. Понятно тогда, что $M = \operatorname{card}\Sigma = C_n^a C_a^b$. Ясно, кроме того, что $\operatorname{conv}\Sigma$ есть кросс-политоп. В то же

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 99-01-00357, 00-15-96109). Автор благодарит профессора László A. Székely за любезно предоставленный им еще неопубликованный обзор “Erdös on Unit Distances and the Szemerédi–Trotter Theorems”.

время в работе [8] оценки величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ основывались на построении критических конфигураций, выпуклая оболочка которых представляет собой $(0,1)$-многогранник. Мы покажем здесь, что методы, предложенные в [11] и [9], позволяют работать с кросс-политопами и на их основе получать лучшие нижние оценки хроматического числа. В самом деле, как уже отмечалось выше, $M = C_n^a C_a^b$. Далее, нетрудно видеть, что имеет место следующее *арифметическое свойство*: для любых двух векторов $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Sigma$ $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv a \pmod p$ в том и только том случае, когда либо $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, либо $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = a-p$.

Каждому вектору $\mathbf{x} \in \Sigma$ поставим в соответствие многочлен $F_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$, полагая

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{i \not\equiv a \ (\mathrm{mod}\ p)} (i - (\mathbf{x},\mathbf{y})),$$

а затем, последовательно применяя соотношения $x_i^3 = x_i$, $i=1,\dots,n$, перейдем от многочлена $F_{\mathbf{x}}$ к многочлену $\widetilde{F}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$. Рассмотрим теперь произвольное множество $Q = \{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_s\} \subset \Sigma$ такое, что $(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) \not\equiv a \pmod p$ $\forall\, i \neq j$. В этом случае можно показать, что многочлены $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_1},\dots,\widetilde{F}_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (см. [9]), а значит,

$$s \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{[(p-1-i)/2]} C_n^j C_{n-j}^{p-1-i-2j} = D. \tag{3}$$

Из неравенства (3) и арифметического свойства немедленно следует, что множество Σ есть (M,D)-критическая конфигурация с критическим расстоянием $d=\sqrt{2p}$ и, следовательно, $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant M/D$. Наконец, произведя несложные выкладки, нетрудно убедиться в том, что, в свою очередь, $M/D \geqslant (\gamma + o(1))^n$. Теорема доказана.

3. Замечания. 1. В доказательстве теоремы нет необходимости предполагать, что p – простое число. Достаточно считать, что $p = q^{\alpha}$, где q – простое, а $\alpha \geqslant 1$. При этом потребуется лишь внести некоторые изменения в определение многочленов $F_{\mathbf{x}}$ (см. [12]).

2. Хотя предложенный в настоящей работе метод получения нижних оценок хроматического числа пространства и дает асимптотически наилучший на данный момент результат, тем не менее в малых размерностях (по крайней мере при $n \leqslant 24$) улучшить с его помощью оценки из [5], [6] и [8] не удается. По-видимому, для получения дальнейших улучшений в рамках указанного метода необходимо существенно уточнить неравенство (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Hadwiger H. // Portugal. Math. 1944. V. 4. P. 140–144. [**2**] Hadwiger H. // Elem. Math. 1961. V. 16. P. 103–104. [**3**] Moser L., Moser W. // Canad. Math. Bull. 1961. V. 4. P. 187–189. [**4**] Coulson D. // Discrete Math. 1997. V. 170. P. 241–247. [**5**] Райский Д. Е. // Матем. заметки. 1970. Т. 7. С. 319–323. [**6**] Larman D. G., Rogers C. A. // Mathematika (London). 1972. V. 19. P. 1–24. [**7**] Larman D. G. // Comment. Math. Helv. 1978. V. 53. P. 529–535. [**8**] Frankl P., Wilson R. // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368. [**9**] Райгородский А. М. // УМН. 1999. Т. 54. № 2. С. 185–186. [**10**] Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. [**11**] Nilli A. // Contemp. Math. 1994. V. 178. P. 209–210. [**12**] Райгородский А. М. // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 181–182.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
26.01.2000