Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Г. Эдельсбруннер, Н. П. Стрелкова, О конфигурационном пространстве для кратчайших сетей, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 6(408), 203–204

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9503

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 106.51.226.7
4 августа 2022 г., 22:01:45

2012 г. ноябрь — декабрь *т. 67, вып. 6 (408)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

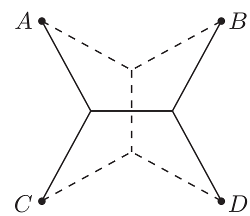
В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О конфигурационном пространстве для кратчайших сетей

Г. Эдельсбруннер, Н. П. Стрелкова

1. Введение. Пусть S – конечное множество в $\mathbb{R}^d$. *Сетью, затягивающей* S, мы будем называть конечное семейство спрямляемых кривых, каждая из которых соединяет пару точек в $\mathbb{R}^d$ (не обязательно из S), если объединение этих кривых связно и содержит S. В этой статье мы предполагаем, что различные кривые не имеют общих точек, за исключением их общих концов. Длина сети измеряется в евклидовой метрике. *Кратчайшая сеть* для множества S – это сеть, имеющая наименьшую длину среди всех сетей, затягивающих S. Известно, что кратчайшая сеть всегда существует и удовлетворяет следующим свойствам [1]: 1) это дерево, ребра которого – отрезки, а вершины имеют степень 1, 2 или 3; 2) все вершины степени 1 и 2 – это точки из S; 3) углы между ребрами в вершинах степени 3 равны 120°, а в вершинах степени 2 – не меньше 120°.



Кратчайшие сети часто называют *минимальными деревьями Штейнера*. Данное конечное множество точек может иметь несколько кратчайших сетей. Например, существует две кратчайших сети, затягивающих вершины квадрата; см. рис. Заметим, что эти сети имеют различную комбинаторную структуру, если считать, что вершины занумерованы. Например, точки A и B в пунктирной сети соединены путем из двух ребер, а в сплошной сети – путем из трех ребер. Пусть требуется найти кратчайшую сеть для некоторого множества S из четырех точек на плоскости. Если мы знаем, сколько в кратчайшей сети дополнительных (т. е. не лежащих в S) вершин и как они соединяются между собой и с четырьмя данными точками, то, учитывая, что углы равны 120°, мы можем легко определить, где находятся дополнительные вершины. Обобщение такой процедуры для n точек реализовано в алгоритме Мелзака [2]. Но априори мы не знаем, при какой комбинаторной структуре достигается минимум, и не известно ни одного метода, позволяющего избежать перебора всех возможных структур в худшем случае. Из-за этого задача построения кратчайшей сети в $\mathbb{R}^d$ оказывается NP-трудной, даже в случае $d = 2$; см. [3].

Для конечного упорядоченного множества $S \subseteq \mathbb{R}^d$ рассмотрим все кратчайшие сети, затягивающие S. Каждая из этих сетей будет иметь свой комбинаторный тип [1] (мы определим это понятие ниже). Нам интересен вопрос: **как выглядит (хотя бы топологически) пространство всех множеств S, для которых кратчайшая сеть имеет данный комбинаторный тип?** Более формально, поставим в соответствие множеству из n точек в $\mathbb{R}^d$ точку в $\mathbb{R}^{dn}$, полученную в результате выписывания

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053. Н. Стрелкова также поддержана программой “Ведущие научные школы” (грант НШ-1410.2012.1).

подряд координат n точек. Для заданного комбинаторного типа мы рассматриваем множество $M \subseteq \mathbb{R}^{dn}$, точки которого соответствуют тем n-точечным подмножествам в $\mathbb{R}^d$, для которых кратчайшая сеть единственна и имеет заданный комбинаторный тип. Оказывается, множество M всегда связно, – в этом заключается наш основной результат.

Отметим, что при $d \geqslant 3$ не известно, имеет ли меру нуль множество конфигураций $S \subseteq \mathbb{R}^d$, для которых кратчайшая сеть не единственна. При $d = 2$ известно, что оно имеет меру нуль, но доказательство в [4] длинное и непростое. В [5] изложен подход, приводящий к более короткому доказательству.

2. Определения и формулировки результатов. Пусть S – упорядоченное n-точечное подмножество $\mathbb{R}^d$. Нам будет удобно ставить в соответствие каждой сети Γ, затягивающей S, *частично упрядоченный* (*абстрактный*) *граф* $G = (V \sqcup W, E)$, в котором *ребра* из E соответствуют кривым, задающим сеть, (*граничные*) *вершины* из V соответствуют точкам из S, а (*внутренние*) *вершины* из W соответствуют дополнительным концам кривых. Два частично упорядоченных графа называются *эквивалентными*, если существует сохраняющая порядок биекция между множествами их граничных вершин и биекция между множествами их внутренних вершин, индуцирующие биекцию между множествами ребер. Мы говорим, что две кратчайшие сети Γ_1 и Γ_2 в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, имеют одинаковый *комбинаторный тип*, если соответствующие частично упорядоченные графы эквивалентны. В размерности $d = 2$ нам потребуется дополнительное условие: фиксируя для каждой вершины степени 3 циклический порядок трех ребер, инцидентных ей, мы требуем, чтобы биекция между множествами вершин двух сетей сохраняла эти порядки.

Каждому упорядоченному набору S из n точек в $\mathbb{R}^d$ мы ставим в соответствие точку $s \in \mathbb{R}^{dn}$, как было описано выше. *Клетка* $\operatorname{cell}(\Gamma)$ кратчайшей сети Γ – это множество точек $s \in \mathbb{R}^{dn}$, соответствующих тем наборам S, для которых существует кратчайшая сеть того же типа, что и Γ. *Собственная клетка* $\operatorname{pcell}(\Gamma)$ сети Γ – это подмножество клетки $\operatorname{cell}(\Gamma)$, состоящее из точек $s \in \mathbb{R}^{dn}$, для которых S имеет единственную кратчайшую сеть.

ТЕОРЕМА 1. *Если Γ – кратчайшая сеть для конечного упорядоченного множества в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, то собственная клетка* $\operatorname{pcell}(\Gamma)$ *связна.*

ТЕОРЕМА 2. *Если Γ – кратчайшая сеть для конечного упорядоченного множества в $\mathbb{R}^2$ и все ее граничные вершины имеют степень* 1, *то клетка* $\operatorname{cell}(\Gamma)$ *связна.*

Авторы благодарят А. О. Иванова, З. Н. Овсянникова и А. А. Тужилина за полезные обсуждения.

Список литературы

[**1**] E. N. Gilbert, H. O. Pollak, *SIAM J. Appl. Math.*, **16** (1968), 1–29. [**2**] Z. A. Melzak, *Canad. Math. Bull.*, **4** (1961), 143–148. [**3**] M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson, *Proc. 8th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1976, 10–22. [**4**] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Матем. сб.*, **197** (2006), 55–90. [**5**] К. Л. Облаков, *Вест. Моск. ун-та*, **64** (2009), 62–66.

Г. Эдельсбруннер (H. Edelsbrunner)
IST Austria (Institute of Science and Technology Austria), Klosterneuburg, Austria; Ярославский государственный университет им. П. Демидова
E-mail: edels@ist.ac.at

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
16.10.2012

Н. П. Стрелкова (N. P. Strelkova)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Ярославский государственный университет им. П. Демидова
E-mail: nstrelk@gmail.com