П. А. Терехин, О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в пространствах $L^p[0,1]$, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 722–740

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm4046

Математические заметки

Том 83 выпуск 5 май 2008

УДК 517.51

О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в пространствах $L^p[0,1]$

П. А. Терехин

Получены условия сходимости в пространствах $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, биортогональных рядов вида

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n)\varphi_n$$

по системе $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ. Предложенные условия формулируются в терминах принадлежности функций пространству $\mathfrak{L}^p$ абсолютно сходящихся по пачкам рядов Фурье–Хаара с нормой

$$\|f\|_p^* = |(f,\chi_0)| + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \biggl(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f,\chi_n)|^p\biggr)^{1/p},$$

где (f,χ_n), $n = 0,1,\dots,$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L^p[0,1]$ по системе Хаара $\{\chi_n\}_{n\geqslant 0}$. В частности, даны условия базисности системы $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ в пространствах $L^p[0,1]$ и $\mathfrak{L}^p$.

Библиография: 30 названий.

1. Введение. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $L^p = L^p[0,1]$ – пространство Лебега всех измеримых на отрезке $[0,1]$ функций $f(t)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_p = \biggl(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\biggr)^{1/p} < \infty.$$

Обозначим $\{\chi_n\}_{n\geqslant 0}$ систему функций Хаара [1]. Именно, $\chi_0(t) \equiv 1$ и для любого натурального $n \in \mathbb{N}$

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{при } t \in [j2^{-k}, (j+1/2)2^{-k}), \\ -2^{k/2}, & \text{при } t \in [(j+1/2)2^{-k}, (j+1)2^{-k}), \\ 0, & \text{при } t \notin [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}), \end{cases}$$

где $k = k(n)$ и $j = j(n)$ определяются из *стандартного представления* $n = 2^k + j$, в котором $k = 0,1,\dots$ и $j = 0,\dots,2^k-1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2970.2008.1).

Известно, что система Хаара $\{\chi_n\}_{n\geqslant 0}$ образует базис пространства L^p (см. Шаудер [2]), т.е. для любой функции $f\in L^p$ справедливо представление

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}(f,\chi_n)\chi_n,$$

ряд в правой части которого сходится по норме пространства L^p. Здесь

$$(f,\chi_n)=\int_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt,\qquad n=0,1,\dots,$$

– коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе Хаара.

Пусть функция $\varphi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi\subset[0,1]$. Для $n\in\mathbb{N}$ по стандартному представлению $n=2^k+j$ положим

$$\varphi_n(t)=\varphi_{k,j}(t)=2^{k/2}\varphi(2^kt-j),\qquad k=0,1,\dots,\quad j=0,\dots,2^k-1.$$

Кроме того, пусть $\varphi_0(t)\equiv 1$. Система функций $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ называется *системой сжатий и сдвигов функции* φ.

Нетрудно видеть, что система Хаара $\{\chi_n\}_{n\geqslant 0}$ является системой сжатий и сдвигов функции $\chi=\chi_{[0,1/2)}-\chi_{[1/2,1)}$, где $\chi_{[a,b)}$ – характеристическая функция полуинтервала $[a,b)$.

Рассмотрим *пространство $\mathfrak{L}^p$ абсолютно сходящихся по пачкам рядов Фурье–Хаара.* По определению функция f принадлежит пространству $\mathfrak{L}^p$, если $f\in L^p$ и ее коэффициенты Фурье–Хаара удовлетворяют условию

$$\|f\|_p^*=|(f,\chi_0)|+\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(1/2-1/p)}\Biggl(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}|(f,\chi_n)|^p\Biggr)^{1/p}<\infty.$$

Далее, пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных чисел $\lambda_k\geqslant 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k<\infty.$$

Скажем, что функция f принадлежит классу $\mathfrak{L}^p(\Lambda)$, если для ее коэффициентов Фурье–Хаара, во-первых, выполняются условия нормировки

$$(f,\chi_0)=0,\qquad (f,\chi_1)=1,\tag{1}$$

и, во-вторых, выполняются неравенства

$$2^{k(1/2-1/p)}\Biggl(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}|(f,\chi_n)|^p\Biggr)^{1/p}\leqslant\lambda_k,\qquad k=1,2,\dots.\tag{2}$$

Сразу заметим, что $\mathfrak{L}^p(\Lambda)\subset\mathfrak{L}^p\subset L^p$ и $\|f\|_p\leqslant\|f\|_p^*$. Кроме того, условия нормировки (1) для порождающей функции φ системы сжатий и сдвигов означают, что

$$\int_0^1\varphi(t)\,dt=0,\qquad 2\int_0^{1/2}\varphi(t)\,dt=1.$$

Можно показать, что если $\varphi \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, и $\varphi \neq 0$, то условие $\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0$ равносильно минимальности системы $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$, а условие $\int_0^{1/2} \varphi(t)\,dt \neq 0$ необходимо для полноты системы $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$, поскольку в противном случае функция Хаара χ ортогональна всем функциям системы сжатий и сдвигов.

Предположим, что порождающая функция $\varphi \in L^p$ системы сжатий и сдвигов $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ удовлетворяет условиям нормировки (1). Рассмотрим биортогональное разложение

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n)\varphi_n \tag{3}$$

функции $f \in L^p$ по системе $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$. Явный вид биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ будет указан в пункте 2, лемма 2. Следует отметить, что система $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ не является системой сжатий и сдвигов за исключением того единственного случая, при котором $\varphi = \psi = \chi$ и разложение (3) является ортогональным рядом Фурье–Хаара.

Основной вопрос данной работы заключается в нахождении условий, обеспечивающих сходимость биортогонального ряда (3) как по норме пространства L^p, так и по норме пространства $\mathfrak{L}^p$. Ответ на основной вопрос будет дан в терминах принадлежности порождающей функции φ классу $\mathfrak{L}^p(\Lambda)$.

В связи с постановкой основного вопроса нельзя не упомянуть, в первую очередь, классические работы Хаара [1], Шаудера [2], [3] и Фабера [4], посвященные рядам по системе Хаара и Фабера–Шаудера, а также работы Чантурия [5] и Сабуровой [6] о базисности систем типа Фабера–Шаудера в пространстве $C[0,1]$ непрерывных функций. Рассматриваемый основной вопрос тесно связан с теорией всплесков, в особенности, с периодическими всплесками. Задача построения всплескоподобного семейства функций в пространствах функций, заданных на отрезке, обсуждалась многими авторами. В классических монографиях Добеши [7] и Мейера [8] построены периодические всплески как периодизированные всплески в $L^2(\mathbb{R})$. Другой подход к построению всплесков на интервале и вообще, всплесков на замкнутом множестве, предложен в работах [9]–[11]. Общие периодические всплески и периодический кратно-масштабный анализ определены и изучены в работах Чуи, Вонга [12], Петухова [13], Скопиной [14]. Подробную библиографию по данному вопросу можно найти, например, в книгах Кашина, Саакяна [15] и Новикова, Протасова, Скопиной [16]. Здесь же заметим, что периодические всплески, всплески на интервале, всплески на замкнутом множестве и т.п. не являются системами сжатий и сдвигов, за единственным исключением, системы функций Хаара. Однако, рассматриваемый основной вопрос непосредственно мотивирован теорией всплесков. Наконец, заметим, что некоторые результаты о полноте и базисности системы сжатий и сдвигов функции в пространствах L^p имеются в работах автора [17]–[21].

2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Условимся о следующих обозначениях:

- $\mathscr{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{0,1\}^k$ – семейство всех конечных последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, состоящих из нулей и единиц (включая при $k = 0$ пустую последовательность);

- $|\alpha|$ – длина последовательности $\alpha \in \mathscr{A}$, т.е. $|\alpha| = k$ для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, длину пустой последовательности полагаем равной нулю;
- $\alpha\beta$ – конкатенация последовательностей $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$: если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$, то $\alpha\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l)$.

Укажем на естественное взаимнооднозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и семейством $\mathscr{A}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n = 2^k + j$ – стандартное представление. Рассмотрим двоичное разложение $j = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}$ числа $j = 0, \dots, 2^k - 1$. Набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathscr{A}$ поставим в соответствие натуральному числу n.

В дальнейшем мы будем использовать указанное взаимнооднозначное соответствие для замены индекса $c_n = c_{k,j} = c(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = c_\alpha$, где на месте семейства c может оказаться как числовая последовательность, так и система функций.

Введем в рассмотрение, следуя работе [22], операторную *структуру мультисдвига* $\{V_0, V_1\}$, полагая

$$V_0 f(t) = 2^{1/2} f(2t), \qquad V_1 f(t) = 2^{1/2} f(2t-1),$$

где для удобства определения считаем, что функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет носитель $\operatorname{supp} f \subset [0,1]$. Далее, обозначим

$$V^\alpha = V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathscr{A},$$

произведение операторов: первым действует оператор V_{α_k}, последним – V_{α_1}, пустое произведение полагаем равным тождественному оператору I. В принятых обозначениях имеем $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty = \{V^\alpha \varphi\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ – система сжатий и сдвигов функции φ без постоянной $\varphi_0(t) \equiv 1$. В самом деле, вычислим

$$\begin{aligned} V^\alpha \varphi(t) &= V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k} \varphi(t) = 2^{1/2} \cdots 2^{1/2} \varphi(2(2 \cdots (2t - \alpha_1) - \dots - \alpha_{k-1}) - \alpha_k) \\ &= 2^{k/2} \varphi(2^k t - 2^{k-1}\alpha_1 - \dots - 2\alpha_{k-1} - \alpha_k) = 2^{k/2} \varphi(2^k t - j) = \varphi_n(t). \end{aligned}$$

Пусть, по-прежнему, функция $\varphi \in L^p$ удовлетворяет нормировке (1).

Лемма 1. *Для любых $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$ имеем*

$$(\chi_\alpha, \varphi_\beta) = \begin{cases} (\chi_\gamma, \varphi), & \text{если } \alpha = \beta\gamma, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Запишем ряд Фурье–Хаара функции φ в виде

$$\varphi = \sum_{\gamma \in \mathscr{A}} (\varphi, \chi_\gamma) \chi_\gamma.$$

Отсюда находим

$$\varphi_\beta = V^\beta \varphi = \sum_{\gamma \in \mathscr{A}} (\varphi, \chi_\gamma) V^\beta \chi_\gamma = \sum_{\gamma \in \mathscr{A}} (\varphi, \chi_\gamma) \chi_{\beta\gamma}.$$

С другой стороны, имеем

$$\varphi_\beta = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} (\varphi_\beta, \chi_\alpha) \chi_\alpha.$$

Сравнивая два последних разложения с учетом единственности коэффициентов ряда Фурье–Хаара видим, что если $\alpha = \beta\gamma$ для некоторого $\gamma \in \mathscr{A}$ (такой набор γ единствен согласно определению конкатенации), то $(\varphi_\beta, \chi_\alpha) = (\varphi, \chi_\gamma)$. Если же α не представим в виде $\beta\gamma$ ни при каком $\gamma \in \mathscr{A}$, то $(\varphi_\beta, \chi_\alpha) = 0$.

Обозначим $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ последовательность коэффициентов Фурье–Хаара функции φ. Ввиду нормировки (1) имеем $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$. Построим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n\geqslant 0}$ с той же нормировкой $y_0 = 0$ и $y_1 = 1$ следующим образом. Для натуральных n воспользуемся заменой индекса $x_n = x_\alpha$ и $y_n = y_\alpha$, так что для пустой последовательности α имеем $x_\alpha = y_\alpha = 1$. Остальные y_α определяем последовательно из рекуррентных соотношений

$$\sum_{\nu=0}^{k} x(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Теперь определим систему функций $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ посредством равенств

$$\psi_n = \psi_\alpha = \sum_{\nu=0}^{k} y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

и, кроме того, $\psi_0(t) \equiv 1$.

Лемма 2. *Система функций $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ является биортогонально сопряженной к системе $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$, $|\alpha| = k$, $|\beta| = l$. Вычислим

$$(\psi_\alpha, \varphi_\beta) = \sum_{\nu=0}^{k} y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k)(\chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \varphi(\beta_1, \dots, \beta_l)).$$

В силу леммы 1 имеем

$$(\chi(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \varphi(\beta_1, \dots, \beta_l)) = \begin{cases} (\chi_\gamma, \varphi), & \text{если } (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) = \beta\gamma, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Уравнение $(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) = \beta\gamma$ разрешимо относительно γ лишь в том случае, если $l \leqslant \nu$ и $\alpha_1 = \beta_1$, …, $\alpha_l = \beta_l$. При этом $|\gamma| = \nu - l$ и $\alpha_{l+1} = \gamma_1, \dots, \alpha_\nu = \gamma_{\nu-l}$. Таким образом, устраняя заведомо равные нулю слагаемые, окончательно находим

$$\begin{aligned}(\psi_\alpha, \varphi_\beta) &= \sum_{\nu=l}^{k} y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k)(\chi(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_\nu), \varphi) \\ &= \sum_{\nu=l}^{k} x(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k).\end{aligned}$$

Применяя рекуррентные соотношения (4) с заменой $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ на $(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_k)$, получаем, что $(\psi_\alpha, \varphi_\beta) = 0$ при $k \neq l$. Если же $k = l$, то $(\psi_\alpha, \varphi_\beta)$ отлично от нуля в том и только в том случае, когда $\alpha = \beta$, при этом $(\psi_\alpha, \varphi_\beta) = x_1 y_1 = 1$.

Равенства (5) показывают, что функции биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ суть полиномы по системе Хаара и, следовательно, являются ступенчатыми функциями, постоянными на двоично-рациональных полуинтервалах вида $[j2^{-k},(j+1)2^{-k})$, где $k=k(n)+1$ и $j=0,\dots,2^k-1$. Поэтому коэффициенты (f,ψ_n) биортогонального ряда (3) корректно определены для любой суммируемой функции f.

Лемма 3. *Для любого $k\geqslant 0$ и любых c_α, $|\alpha|=k$, имеет место равенство*

$$\Big\|\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha\varphi_\alpha\Big\|_p = 2^{k(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha|^p\bigg)^{1/p}\|\varphi\|_p.$$

Доказательство. Из определения системы $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ следует, что носитель $\operatorname{supp}\varphi_\alpha\subset[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]$, где $k=|\alpha|$ и $j=\sum_{\nu=1}^k\alpha_\nu 2^{k-\nu}$. Поэтому

$$\bigg|\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha\varphi_\alpha(t)\bigg|^p = \sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha|^p|\varphi_\alpha(t)|^p,$$

по крайней мере, для всех $t\neq j2^{-k}$. Отсюда, предварительно вычислив

$$\begin{aligned}\|\varphi_\alpha\|_p &= \bigg(\int_0^1|\varphi_\alpha(t)|^p\,dt\bigg)^{1/p} = \bigg(\int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}}|2^{k/2}\varphi(2^kt-j)|^p\,dt\bigg)^{1/p}\\ &= \bigg(\int_0^1|2^{k/2}\varphi(\tau)|^p 2^{-k}\,d\tau\bigg)^{1/p} = 2^{k(1/2-1/p)}\|\varphi\|_p,\end{aligned}$$

окончательно находим

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha\varphi_\alpha\Big\|_p &= \bigg(\int_0^1\bigg|\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha\varphi_\alpha(t)\bigg|^p dt\bigg)^{1/p}\\ &= \bigg(\sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha|^p\int_0^1|\varphi_\alpha(t)|^p\,dt\bigg)^{1/p} = 2^{k(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha|^p\bigg)^{1/p}\|\varphi\|_p.\end{aligned}$$

Лемма 4. *Для любого $k\geqslant 0$ и любых c_α, $|\alpha|=k$, имеет место равенство*

$$\Big\|\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha\varphi_\alpha\Big\|_p^* = 2^{k(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha|^p\bigg)^{1/p}\|\varphi\|_p^*.$$

Доказательство. Преобразуем

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha\varphi_\alpha &= \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha V^\alpha\varphi = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha V^\alpha\sum_{\beta\in\mathscr{A}} x_\beta\chi_\beta\\ &= \sum_{|\alpha|=k}\sum_{\beta\in\mathscr{A}} c_\alpha x_\beta V^\alpha V^\beta\chi = \sum_{\gamma=\alpha\beta,\,|\alpha|=k,\,\beta\in\mathscr{A}} c_\alpha x_\beta V^\gamma\chi\\ &= \sum_{m=k}^\infty\sum_{|\gamma|=m} c(\gamma_1,\dots,\gamma_k)x(\gamma_{k+1},\dots,\gamma_m)\chi_\gamma.\end{aligned}$$

По определению нормы в пространстве $\mathfrak{L}^p$ получаем

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha\varphi_\alpha\Big\|_p^* &= \Big\|\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{|\gamma|=m} c(\gamma_1,\dots,\gamma_k)x(\gamma_{k+1},\dots,\gamma_m)\chi_\gamma\Big\|_p^* \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\gamma|=m}|c(\gamma_1,\dots,\gamma_k)x(\gamma_{k+1},\dots,\gamma_m)|^p\bigg)^{1/p} \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha|^p\sum_{|\beta|=m-k}|x_\beta|^p\bigg)^{1/p} \\ &= \bigg(\sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha|^p\bigg)^{1/p}\sum_{m=k}^{\infty} 2^{m(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\beta|=m-k}|x_\beta|^p\bigg)^{1/p} \\ &= 2^{k(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha|^p\bigg)^{1/p}\sum_{l=0}^{\infty}2^{l(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\beta|=l}|x_\beta|^p\bigg)^{1/p} \\ &= 2^{k(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha|^p\bigg)^{1/p}\|\varphi\|_p^*.\end{aligned}$$

Пусть теперь функция φ принадлежит классу $\mathfrak{L}^p(\Lambda)$. По определению этого класса для коэффициентов Фурье–Хаара функции φ выполняются неравенства (2), которые запишем в следующем виде:

$$2^{k(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\alpha|=k}|x_\alpha|^p\bigg)^{1/p} \leqslant \lambda_k, \qquad k=1,2,\dots .$$

Обозначим

$$\lambda(z) = 1-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k z^k,$$

$$\mu(z) = \frac{1}{\lambda(z)} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k z^k,$$

где числовая последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ определяется рекуррентными соотношениями

$$\mu_k = \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1}\lambda_{k-\nu}\mu_\nu, \qquad k=1,2,\dots .$$

Лемма 5. *Справедливы неравенства*

$$2^{k(1/2-1/p)}\bigg(\sum_{|\alpha|=k}|y_\alpha|^p\bigg)^{1/p} \leqslant \mu_k, \qquad k=1,2,\dots . \tag{6}$$

Доказательство. Для $|\alpha|=k=1$ имеем $y_\alpha=-x_\alpha$. Поэтому

$$2^{1/2-1/p}\bigg(\sum_{|\alpha|=1}|y_\alpha|^p\bigg)^{1/p} = 2^{1/2-1/p}\bigg(\sum_{|\alpha|=1}|x_\alpha|^p\bigg)^{1/p} \leqslant \lambda_1=\mu_1.$$

Предположим, что (6) уже доказано для всех $\nu < k$. Для $|\alpha| = k$ имеем

$$-y_\alpha = x_\alpha + \sum_{\nu=1}^{k-1} x(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k),$$

откуда с учетом неравенства треугольника для ℓ^p-нормы находим

$$\begin{aligned}\Biggl(\sum_{|\alpha|=k} |y_\alpha|^p\Biggr)^{1/p} &\leqslant \Biggl(\sum_{|\alpha|=k} |x_\alpha|^p\Biggr)^{1/p} + \sum_{\nu=1}^{k-1} \Biggl(\sum_{|\alpha|=k} |x(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k)|^p\Biggr)^{1/p} \\ &= \Biggl(\sum_{|\alpha|=k} |x_\alpha|^p\Biggr)^{1/p} + \sum_{\nu=1}^{k-1} \Biggl(\sum_{|\beta|=\nu} |x_\beta|^p \sum_{|\gamma|=k-\nu} |y_\gamma|^p\Biggr)^{1/p} \\ &\leqslant 2^{-k(1/2-1/p)}\lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} 2^{-\nu(1/2-1/p)}\lambda_\nu 2^{-(k-\nu)(1/2-1/p)}\mu_{k-\nu} \\ &= 2^{-k(1/2-1/p)}\Biggl(\lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_\nu \mu_{k-\nu}\Biggr) = 2^{-k(1/2-1/p)}\mu_k.\end{aligned}$$

Неравенства (6) установлены по индукции.

Лемма 6. *Имеют место эквивалентности*

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_k < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty \mu_k < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_k < 1 \ \ \text{и} \ \ \sum_{k=1}^\infty k\lambda_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty k\mu_k < \infty.$$

Доказательство. Условие $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k < 1$ означает, во-первых, что ряд Тейлора аналитической функции $\lambda(z)$ абсолютно сходится в замкнутом единичном круге ($|z| \leqslant 1$) и, во-вторых, что в этом круге функция $\lambda(z)$ не имеет нулей. Указанные два свойства функции $\lambda(z)$ равносильны согласно аналога теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье [23] (см. также, например, [24; с. 140]), абсолютной сходимости ряда Тейлора функции $\mu(z) = 1/\lambda(z)$. Последнее означает выполнение условия $\sum_{k=1}^\infty \mu_k < \infty$. Этим установлена первая эквивалентность леммы. Теперь вторая эквивалентность непосредственно следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^\infty k\mu_k &= \sum_{k=1}^\infty k\Biggl(\lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu}\mu_\nu\Biggr) = \sum_{k=1}^\infty k\lambda_k + \sum_{k=1}^\infty \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu}\mu_\nu \\ &= \sum_{k=1}^\infty k\lambda_k + \sum_{\nu=1}^\infty \sum_{k=\nu+1}^\infty \lambda_{k-\nu}\mu_\nu = \sum_{k=1}^\infty k\lambda_k + \sum_{\nu=1}^\infty \mu_\nu \sum_{k=1}^\infty \lambda_k\end{aligned}$$

с учетом неотрицательности числовых последовательностей λ_k, $\mu_k \geqslant 0$.

3. Теоремы о равносходимости. Пусть

$$S_N^{(0)} f = (f, 1)1 + \sum_{|\alpha|<N} (f, \chi_\alpha)\chi_\alpha = \sum_{n=0}^{2^N-1} (f, \chi_n)\chi_n$$

– частная сумма порядка 2^N ряда Фурье–Хаара функции f и

$$S_N f = (f, 1)1 + \sum_{|\alpha|<N} (f, \psi_\alpha)\varphi_\alpha = \sum_{n=0}^{2^N-1} (f, \psi_n)\varphi_n$$

– частная сумма порядка 2^N биортогонального разложения функции f по системе $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ. Пусть, далее,

$$E_N = \|\chi - S_N\chi\|_p, \qquad N = 1, 2, \dots,$$

– уклонение частных сумм биортогонального разложения от функции χ в метрике пространства L^p и

$$E_N^* = \|\chi - S_N\chi\|_p^*, \qquad N = 1, 2, \dots,$$

– уклонение частных сумм биортогонального разложения от функции χ в метрике пространства $\mathfrak{L}^p$.

Для функции $f \in L^p$ и $k = 0, 1, \dots$ положим

$$F_k(f) = 2^{k(1/2-1/p)} \biggl(\sum_{|\alpha|=k} |(f, \chi_\alpha)|^p\biggr)^{1/p} = 2^{k(1/2-1/p)} \biggl(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^p\biggr)^{1/p}.$$

Сначала найдем условия равносходимости частных сумм $S_N^{(0)} f$ ряда Фурье–Хаара и частных сумм $S_N f$ биортогонального ряда по системе $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ в метрике пространства L^p.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и функция $\varphi \in L^p$ удовлетворяет условиям нормировки* (1).

Тогда справедливы следующие утверждения:

(a) *для того, чтобы для любой функции $f \in \mathfrak{L}^p$ выполнялось предельное соотношение*

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p = 0,$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{N\to\infty} E_N = 0;$$

(b) *если*

$$\sum_{N=1}^{\infty} E_N < \infty,$$

то для любой функции $f \in L^p$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p = 0.$$

Доказательство. Установим равенство

$$S_N f = S_N S_N^{(0)} f. \tag{7}$$

Для этого вычислим при $|\alpha| = k < N$ величину

$$
\begin{aligned}
(f,\psi_\alpha) - (S_N^{(0)} f,\psi_\alpha) = (f - S_N^{(0)} f,\psi_\alpha) &= \biggl(\sum_{|\beta|\geqslant N} (f,\chi_\beta)\chi_\beta,\psi_\alpha\biggr) \\
&= \sum_{|\beta|\geqslant N} (f,\chi_\beta)\biggl(\chi_\beta, \sum_{\nu=0}^{k} y(\alpha_{\nu+1},\dots,\alpha_k)\chi(\alpha_1,\dots,\alpha_\nu)\biggr) \\
&= \sum_{|\beta|\geqslant N} (f,\chi_\beta) \sum_{\nu=0}^{k} y(\alpha_{\nu+1},\dots,\alpha_k)(\chi_\beta,\chi(\alpha_1,\dots,\alpha_\nu)) = 0
\end{aligned}
$$

– учли определение (5) биортогонально сопряженной системы $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ и соотношения ортогональности $(\chi_\beta,\chi(\alpha_1,\dots,\alpha_\nu)) = 0$ при $\nu \leqslant k < N \leqslant |\beta|$. Отсюда находим

$$
\begin{aligned}
S_N f - S_N S_N^{(0)} f &= (f,1)1 + \sum_{|\alpha|<N} (f,\psi_\alpha)\varphi_\alpha - (S_N^{(0)} f,1)1 - \sum_{|\alpha|<N} (S_N^{(0)} f,\psi_\alpha)\varphi_\alpha \\
&= \sum_{|\alpha|<N} \{(f,\psi_\alpha) - (S_N^{(0)} f,\psi_\alpha)\}\varphi_\alpha = 0.
\end{aligned}
$$

Равенство (7) установлено. Далее, при $|\alpha| = k < N$ выполняется равенство

$$
S_N\chi_\alpha = (S_{N-k}\chi)_\alpha. \tag{8}
$$

В самом деле, вычислим

$$
S_N\chi_\alpha = \sum_{|\beta|<N} (\chi_\alpha,\psi_\beta)\varphi_\beta.
$$

Подобно утверждению леммы 1 имеем

$$
(\chi_\alpha,\psi_\beta) = \begin{cases} (\chi,\psi_\gamma), & \text{если } \beta = \alpha\gamma, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}
$$

Действительно, пусть $|\beta| = l$. Тогда

$$
(\chi_\alpha,\psi_\beta) = \sum_{\nu=0}^{l} y(\beta_{\nu+1},\dots,\beta_l)(\chi_\alpha,\chi(\beta_1,\dots,\beta_\nu)).
$$

В силу ортогональности системы Хаара последнее выражение отлично от нуля в том и только том случае, когда $k \leqslant l$ и $\alpha_1 = \beta_1,\dots,\alpha_k = \beta_k$. Ясно, что при этом $\beta = \alpha\gamma$ для единственного набора $\gamma = (\beta_{k+1},\dots,\beta_l)$ и $(\chi_\alpha,\psi_\beta) = y_\gamma$. Заметим, что для любого $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_m)$ имеем

$$
(\chi,\psi_\gamma) = \sum_{\nu=0}^{m} y(\gamma_{\nu+1},\dots,\gamma_m)(\chi,\chi(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)) = y_\gamma.
$$

Таким образом, либо $\beta = \alpha\gamma$ и в этом случае $(\chi_\alpha,\psi_\beta) = y_\gamma = (\chi,\psi_\gamma)$, либо $(\chi_\alpha,\psi_\beta) = 0$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
S_N\chi_\alpha &= \sum_{|\beta|<N} (\chi_\alpha,\psi_\beta)\varphi_\beta = \sum_{|\gamma|<N-k} (\chi,\psi_\gamma)\varphi_{\alpha\gamma} \\
&= V^\alpha \sum_{|\gamma|<N-k} (\chi,\psi_\gamma)\varphi_\gamma = V^\alpha S_{N-k}\chi = (S_{N-k}\chi)_\alpha.
\end{aligned}
$$

Равенство (8) проверено. Перейдем непосредственно к доказательству равносходимости частных сумм $S_N f$ и $S_N^{(0)} f$. Ввиду равенств (7) и (8) будем иметь

$$\begin{aligned}
\|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p &= \|S_N^{(0)} f - S_N S_N^{(0)} f\|_p \\
&= \Bigl\| \sum_{|\alpha|<N} (f, \chi_\alpha)\chi_\alpha - S_N \sum_{|\alpha|<N} (f, \chi_\alpha)\chi_\alpha \Bigr\|_p \\
&= \Bigl\| \sum_{|\alpha|<N} (f, \chi_\alpha)(\chi_\alpha - S_N \chi_\alpha) \Bigr\|_p \\
&= \Bigl\| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} (f, \chi_\alpha)(\chi - S_{N-k}\chi)_\alpha \Bigr\|_p \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \Bigl\| \sum_{|\alpha|=k} (f, \chi_\alpha)(\chi - S_{N-k}\chi)_\alpha \Bigr\|_p .
\end{aligned}$$

Применяя лемму 3 с заменой φ на $\chi - S_{N-k}\chi$, получаем

$$\begin{aligned}
\|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p &\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \Bigl\| \sum_{|\alpha|=k} (f, \chi_\alpha)(\chi - S_{N-k}\chi)_\alpha \Bigr\|_p \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} 2^{k(1/2-1/p)} \biggl(\sum_{|\alpha|=k} |(f, \chi_\alpha)|^p \biggr)^{1/p} \|\chi - S_{N-k}\chi\|_p \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} E_{N-k} F_k(f).
\end{aligned}$$

(a) *Необходимость.* Предположим, что $E_N \to 0$ при $N \to \infty$. Для функции $f \in \mathfrak{L}^p$ по определению пространства $\mathfrak{L}^p$ абсолютно сходящихся рядов Фурье–Хаара выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k(f) < \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|S_N^{(0)} f - S_N f\|_p &\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} E_{N-k} F_k(f) \\
&= \sum_{k=0}^{[N/2]-1} E_{N-k} F_k(f) + \sum_{k=[N/2]}^{N-1} E_{N-k} F_k(f) \\
&\leqslant \sup_{k \geqslant [N/2]} E_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} F_k(f) + \sup_{k \geqslant 1} E_k \cdot \sum_{k=[N/2]}^{\infty} F_k(f) \to 0
\end{aligned}$$

при $N \to \infty$. Необходимость доказана.

Достаточность. Очевидно, что $\chi \in \mathfrak{L}^p$. Поэтому

$$E_N = \|\chi - S_N \chi\|_p = \|S_N^{(0)} \chi - S_N \chi\|_p \to 0, \qquad N \to \infty.$$

(b) Аналогично доказательству необходимости утверждения (a) находим

$$\begin{aligned}\|S_N^{(0)}f - S_N f\|_p &\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} E_{N-k} F_k(f) \\ &= \sum_{k=0}^{[N/2]-1} E_{N-k} F_k(f) + \sum_{k=[N/2]}^{N-1} E_{N-k} F_k(f) \\ &\leqslant \sum_{k=[N/2]}^{\infty} E_k \cdot \sup_{k\geqslant 0} F_k(f) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \cdot \sup_{k\geqslant [N/2]} F_k(f) \to 0\end{aligned}$$

при $N\to\infty$, так как по условию $\sum_{N=1}^{\infty} E_N < \infty$ и

$$\lim_{k\to\infty} F_k(f) = \lim_{k\to\infty} \Bigl\| \sum_{|\alpha|=k} (f,\chi_\alpha)\chi_\alpha \Bigr\|_p = 0$$

в силу необходимого условия сходимости ряда Фурье–Хаара

$$f = (f,1)1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} (f,\chi_\alpha)\chi_\alpha$$

функции $f\in L^p$. Теорема 1 доказана.

Теперь укажем условия равносходимости частных сумм $S_N^{(0)}f$ ряда Фурье–Хаара и частных сумм $S_N f$ биортогонального ряда по системе $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ в метрике пространства $\mathfrak{L}^p$.

Теорема 2. *Пусть $1\leqslant p<\infty$ и функция $\varphi\in\mathfrak{L}^p$ удовлетворяет условиям нормировки* (1).

Тогда для того, чтобы для любой функции $f\in\mathfrak{L}^p$ выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N^{(0)}f - S_N f\|_p^* = 0,$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{N\to\infty} E_N^* = 0.$$

Доказательство. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 1 используя равенства (7) и (8), с заменой нормы $\|\cdot\|_p$ на $\|\cdot\|_p^*$, получаем оценку

$$\|S_N^{(0)}f - S_N f\|_p^* \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \Bigl\| \sum_{|\alpha|=k} (f,\chi_\alpha)(\chi - S_{N-k}\chi)_\alpha \Bigr\|_p^*.$$

Далее, применяя лемму 4 с заменой φ на $\chi - S_{N-k}\chi$, находим

$$\|S_N^{(0)}f - S_N f\|_p^* \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \Bigl\| \sum_{|\alpha|=k} (f,\chi_\alpha)(\chi - S_{N-k}\chi)_\alpha \Bigr\|_p^*$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} 2^{k(1/2-1/p)} \biggl(\sum_{|\alpha|=k} |(f,\chi_\alpha)|^p \biggr)^{1/p} \|\chi - S_{N-k}\chi\|_p^*$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} E_{N-k}^* F_k(f).$$

Наконец, завершаем доказательство теоремы 2 дословным повторением доказательства части (a) теоремы 1, заменяя E_N на E_N^* и $\|\cdot\|_p$ на $\|\cdot\|_p^*$.

Следствие 1. *В предположениях теоремы 1 условие*

$$\lim_{N\to\infty} E_N = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы любая функция $f \in \mathfrak{L}^p$ являлась суммой сходящегося по норме пространства L^p биортогонального ряда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f,\psi_n)\varphi_n.$$

Следствие 2. *В предположениях теоремы 1 и при выполнении условия*

$$\sum_{N=1}^{\infty} E_N < \infty$$

система $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ является базисом пространства L^p.

Следствие 3. *В предположениях теоремы 2 условие*

$$\lim_{N\to\infty} E_N^* = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ являлась базисом пространства $\mathfrak{L}^p$.

Доказательство следствий 1–3. В силу теорем о равносходимости 1 и 2 требуется доказать, что наряду с представлением

$$f = (f,\psi_0)\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f,\psi_n)\varphi_n \tag{9}$$

справедливо также представление

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f,\psi_n)\varphi_n.$$

Пусть $2^N \leqslant n < 2^{N+1}$. С учетом лемм 3 и 4 будем иметь

$$\biggl\| f - \sum_{k=0}^{n-1} (f,\psi_k)\varphi_k \biggr\| \leqslant \biggl\| f - \sum_{k=0}^{2^N-1} (f,\psi_k)\varphi_k \biggr\| + \biggl\| \sum_{k=2^N}^{n-1} (f,\psi_k)\varphi_k \biggr\|$$
$$= \|f - S_N f\| + 2^{N(1/2-1/p)} \biggl(\sum_{k=2^N}^{n-1} |(f,\psi_k)|^p \biggr)^{1/p} \|\varphi\| \to 0$$

при $n\to\infty$ в силу необходимого условия сходимости ряда (9). Здесь $\|\cdot\|$ – одна из норм $\|\cdot\|_p$ или $\|\cdot\|_p^*$.

4. Базисность систем сжатий и сдвигов функции. В следствиях 1–3 условия сходимости биортогональных рядов по системе $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ сформулированы в терминах величин E_N и E_N^*. Для окончательного решения основного вопроса данной статьи укажем условия на порождающую функцию φ системы сжатий и сдвигов, обеспечивающих выполнение посылок следствий 1–3. Как уже отмечалось, такие условия будут даны в терминах принадлежности порождающей функции φ классам $\mathfrak{L}^p(\Lambda)$.

Теорема 3. *Пусть $\varphi\in\mathfrak{L}^p(\Lambda)$, $1\leqslant p<\infty$, и выполняются условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k<1,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}k\lambda_k<\infty.$$

Тогда система $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ является базисом пространства L^p.

Доказательство. На основании следствия 2 достаточно проверить условие

$$\sum_{N=1}^{\infty}E_N<\infty.$$

В начале покажем, что биортогонально сопряженная система $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ является тотальной, т.е. если функция $f\in L^p$ такая, что $(f,\psi_n)=0$ для всех $n\geqslant 0$, то $f=0$. По определению биортогонально сопряженной системы (5) имеем

$$\begin{aligned}0=(f,\psi_n)=(f,\psi_\alpha)&=\sum_{\nu=0}^{k}y(\alpha_{\nu+1},\dots,\alpha_k)(f,\chi(\alpha_1,\dots,\alpha_\nu))\\&=(f,\chi_\alpha)+\sum_{\nu=0}^{k-1}y(\alpha_{\nu+1},\dots,\alpha_k)(f,\chi(\alpha_1,\dots,\alpha_\nu)).\end{aligned}$$

Равенство $(f,\chi_\alpha)=0$ установим индукцией по $k=|\alpha|$. При $k=0$ для пустого набора α имеем $0=(f,\psi_\alpha)=(f,\chi_\alpha)$. Предположим, что равенство $(f,\chi_\beta)=0$ имеет место для всех $|\beta|<k$. Тогда при $|\alpha|=k$ находим

$$(f,\chi_\alpha)=-\sum_{\nu=0}^{k-1}y(\alpha_{\nu+1},\dots,\alpha_k)(f,\chi(\alpha_1,\dots,\alpha_\nu))=0.$$

Таким образом, $(f,\chi_\alpha)=0$ для всех $\alpha\in\mathscr{A}$. Поскольку $(f,\chi_0)=(f,\psi_0)=0$, то $(f,\chi_n)=0$ для всех $n\geqslant 0$. Отсюда $f=0$ ввиду полноты системы Хаара.

Теперь рассмотрим биортогональное разложение по системе $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ функции Хаара χ:

$$\chi\sim\sum_{n=0}^{\infty}(\chi,\psi_n)\varphi_n=\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}y_\alpha\varphi_\alpha. \tag{10}$$

Во-первых, заметим, что биортогональный ряд (10) абсолютно сходится по пачкам в пространстве L^p. В самом деле, с учетом лемм 3, 5 и 6 получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\biggl\|\sum_{|\alpha|=k}y_\alpha\varphi_\alpha\biggr\|_p=\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(1/2-1/p)}\biggl(\sum_{|\alpha|=k}|y_\alpha|^p\biggr)^{1/p}\|\varphi\|_p\leqslant\|\varphi\|_p\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k<\infty.$$

Обозначим χ' сумму биортогонального ряда (10). Итак, $\chi' \in L^p$ и

$$\chi' = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi, \psi_n)\varphi_n.$$

Отсюда $(\chi', \psi_n) = (\chi, \psi_n)$ для всех $n \geqslant 0$. В силу доказанной тотальности биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ имеем $\chi' = \chi$. Следовательно, снова с учетом лемм 3, 5 и 6 получаем

$$\begin{aligned} E_N = \|\chi - S_N\chi\|_p &= \bigg\|\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} y_\alpha\varphi_\alpha\bigg\|_p \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \bigg\|\sum_{|\alpha|=k} y_\alpha\varphi_\alpha\bigg\|_p \\ &= \sum_{k=N}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \bigg(\sum_{|\alpha|=k} |y_\alpha|^p\bigg)^{1/p} \|\varphi\|_p \leqslant \|\varphi\|_p \sum_{k=N}^{\infty} \mu_k. \end{aligned}$$

Окончательно на основании второй эквивалентности леммы 6 и в силу условий теоремы будем иметь

$$\sum_{N=1}^{\infty} E_N \leqslant \|\varphi\|_p \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=N}^{\infty} \mu_k = \|\varphi\|_p \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{k} \mu_k = \|\varphi\|_p \sum_{k=1}^{\infty} k\mu_k < \infty.$$

Теорема 4. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{L}^p(\Lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$, и выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1.$$

Тогда система $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ является базисом пространства $\mathfrak{L}^p$.

Доказательство. На основании следствия 3 достаточно проверить условие

$$\lim_{N\to\infty} E_N^* = 0.$$

Так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, рассмотрим биортогональное разложение (10) и с учетом лемм 4, 5 и 6 установим его абсолютную сходимость по пачкам в пространстве $\mathfrak{L}^p$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bigg\|\sum_{|\alpha|=k} y_\alpha\varphi_\alpha\bigg\|_p^* = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \bigg(\sum_{|\alpha|=k} |y_\alpha|^p\bigg)^{1/p} \|\varphi\|_p^* \leqslant \|\varphi\|_p^* \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty.$$

Далее, в силу тотальности биортогонально сопряженной системы $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ и включения $\mathfrak{L}^p \subset L^p$ получаем представление

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi, \psi_n)\varphi_n = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} y_\alpha\varphi_\alpha.$$

Отсюда окончательно находим

$$E_N^* = \|\chi - S_N\chi\|_p^* = \biggl\|\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} y_\alpha\varphi_\alpha\biggr\|_p^* \leqslant \sum_{k=N}^{\infty}\biggl\|\sum_{|\alpha|=k} y_\alpha\varphi_\alpha\biggr\|_p^*$$
$$= \sum_{k=N}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)}\biggl(\sum_{|\alpha|=k}|y_\alpha|^p\biggr)^{1/p}\|\varphi\|_p^* \leqslant \|\varphi\|_p^*\sum_{k=N}^{\infty}\mu_k \to 0, \qquad N\to\infty.$$

Пример. Предположим, что существует постоянная $C>0$ такая, что

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k \leqslant C\lambda_n, \qquad n=1,2,\dots . \tag{11}$$

Следует отметить, что условие (11) известно как *условие Бари* (см. [25; с. 22]) и при выполнении дополнительного условия $\lambda_k\downarrow 0$ равносильно тому, что последовательность Λ является объединением конечного набора последовательностей, убывающих не медленнее, чем геометрическая прогрессия. Например, условию Бари (11) удовлетворяет последовательность $\lambda_k = M2^{-\alpha k}$, $k=1,2,\dots$, где $M>0$ и $\alpha>0$.

Зададим функцию $\varphi\in\mathfrak{L}^p(\Lambda)$ посредством равенства

$$\varphi = \chi - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k 2^{-k/2}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\chi_n.$$

Заметим, что $r_k = 2^{-k/2}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\chi_n$ – функции системы Радемахера [26].

Покажем, что *система $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ является базисом пространства L^p (или пространства $\mathfrak{L}^p$) в том и только том случае, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k < 1.$$

Достаточность сразу следует из теорем 3 и 4 с учетом условия (11), обеспечивающего сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\lambda_k = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\lambda_k = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty.$$

Необходимость. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ сжатий и сдвигов функции φ является базисом пространства L^p или $\mathfrak{L}^p$. Разложение функции Хаара χ по базису $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ имеет вид

$$\chi = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k 2^{-k/2}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\varphi_n. \tag{12}$$

Учитывая леммы 3 и 4, получим

$$\biggl\|2^{-k/2}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\varphi_n\biggr\| = \biggl\|2^{-k/2}\sum_{|\alpha|=k}\varphi_\alpha\biggr\| = \|\varphi\|,$$

где $\|\cdot\|$ – одна из норм $\|\cdot\|_p$ или $\|\cdot\|_p^*$. Отсюда и в силу необходимого условия сходимости ряда (12) находим

$$\lim_{k\to\infty}\mu_k = 0. \tag{13}$$

Теперь предположим противное, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \geqslant 1$. Индукцией по n установим неравенство

$$\mu_n \geqslant \frac{1}{C}, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{14}$$

При $n = 1$, используя (11), находим $\mu_1 = \lambda_1 \geqslant 1/C\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \geqslant 1/C$. Пусть неравенство (14) имеет место для всех $k < n$. Тогда

$$\mu_n = \lambda_n + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{n-k}\mu_k \geqslant \frac{1}{C}\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k + \frac{1}{C}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{n-k} = \frac{1}{C}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \geqslant \frac{1}{C}.$$

Неравенство (14) установлено, что противоречит предельному соотношению (13). Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k < 1$.

Разобранный пример показывает неусиляемость условий теорем 3 и 4 в предположении, что последовательность Λ удовлетворяет условию Бари.

Следствие 4. *Пусть* $\lambda_k = M2^{-\alpha k}$, $k = 1, 2, \dots$, *где* $M > 0$ *и* $\alpha > 0$.

Тогда условие $M < 2^{\alpha} - 1$ *необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции* $\varphi \in \mathfrak{L}^p(\Lambda)$ *система* $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ *ее сжатий и сдвигов была базисом пространства* L^p *(или пространства* $\mathfrak{L}^p$*).*

Доказательство непосредственно следует из теорем 3 и 4 и примера.

Замечание 1. Пусть $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, и

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{0<h\leqslant\delta}\left(\int_0^{1-h}|f(t+h) - f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

– модуль непрерывности функции f в метрике пространства L^p. Тогда всякая функция f, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_p(1/n, f)}{n} < \infty,$$

принадлежит пространству $\mathfrak{L}^p$. Это следует из оценки Ульянова [27]

$$2^{k(1/2-1/p)}\left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}|(f,\chi_n)|^p\right)^{1/p} \leqslant C\omega_p(2^{-k}, f), \qquad k = 0, 1, \dots,$$

(см. также [28]). Таким образом, если f – достаточно гладкая функция, то $f \in \mathfrak{L}^p$. С другой стороны, принадлежность функции f классу $\mathfrak{L}^p(\Lambda)$ не обеспечивает даже непрерывность этой функции.

Замечание 2. Соотношение леммы 3 для системы функций Хаара хорошо известно (см. [29; с. 210]).

Замечание 3. Вопросы представления функций рядами по системе сжатий и сдвигов изучались в статье Филиппова, Освальда [30]. В частности, в [30] показано, что при выполнении условия $\int_0^1 \varphi(t)\,dt \neq 0$ система сжатий и сдвигов функции φ переполнена и поэтому базисом быть не может.

Замечание 4. Леммы 2 и 5, а также следствие 2 содержатся в работе автора [21]. Их доказательства приведены здесь для полноты изложения и для сравнения результатов о базисности системы сжатий и сдвигов функции в пространствах L^p и $\mathfrak{L}^p$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Haar, "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", *Math. Ann.*, **69**:3 (1910), 331–371.

[2] J. Schauder, "Eine Eigenshaft des Haarschen Orthogonalsystems", *Math. Z.*, **28**:1 (1928), 317–320.

[3] J. Schauder, "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen", *Math. Z.*, **26**:1 (1927), 47–65.

[4] G. Faber, "Uber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar", *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.*, **19** (1910), 104–112.

[5] З. А. Чантурия, "О базисах пространства непрерывных функций", *Матем. сб.*, **88**:4 (1972), 589–608.

[6] Т. Н. Сабурова, "О базисах в $C[0,1]$ типа Фабера–Шаудера", *Теория функций и приближений*, ч. 3 (Саратов, 1986), Тр. 3-й Саратовской зимней школы, Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1988, 44–46.

[7] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, НИЦ РХД, Ижевск, 2001.

[8] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., **37**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[9] A. Cohen, I. Daubechies, P. Vial, "Wavelets on the interval and fast wavelets transform", *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **1**:1 (1993), 54–81.

[10] A. Cohen, I. Daubechies, B. Jawerth, P. Vial, "Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on an interval", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **316**:5 (1993), 417–421.

[11] L. Andersson, N. Hall, B. Jawerth, G. Peters, "Wavelets on closed subset of the real line", *Recent Advances in Wavelet Analysis*, Wavelet Anal. Appl., **3**, Academic Press, Boston, MA, 1994, 1–61.

[12] C. K. Chui, J.-Z. Wang, "A general framework of compact supported splines and wavelets", *J. Approx. Theory*, **71**:3 (1992), 263–304.

[13] А. П. Петухов, "Периодические всплески", *Матем. сб.*, **188**:10 (1997), 69–94.

[14] M. Skopina, "Multiresolution analysis of periodic functions", *East J. Approx.*, **3**:2 (1997), 203–224.

[15] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.

[16] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

[17] П. А. Терехин, "О представляющих свойствах системы сжатий и сдвигов функций на отрезке", *Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. матем., мех., информ.*, **4**:1 (1998), 136–138.

[18] П. А. Терехин, "Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов", *Изв. вузов. Матем.*, **43**:8 (1999), 74–81.

[19] П. А. Терехин, "Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке", *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 547–560.

[20] П. А. Терехин, "К вопросу о возмущениях системы Хаара", *Матем. заметки*, **75**:3 (2004), 466–469.

[21] П. А. Терехин, “Условия базисности систем сжатий и сдвигов функций в пространстве $L_p[0,1]$”, *Изв. Саратовского ун-та. Сер. матем., мех., информ.*, **7**:1 (2007), 39–44.

[22] П. А. Терехин, “Мультисдвиг в гильбертовом пространстве”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 69–81.

[23] N. Wiener, “Tauberian theorem”, *Ann. of Math.* (2), **33**:1 (1932), 1–100.

[24] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций*, ИЛ, М., 1963.

[25] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.

[26] H. Rademacher, “Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen”, *Math. Ann.*, **87**:1–2 (1922), 112–138.

[27] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63**:3 (1964), 356–391.

[28] Б. И. Голубов, “Ряды по системе Хаара”, Итоги науки и техники. Матем. анализ, ВИНИТИ, М., 1971, 109–146.

[29] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения*, Наука, М., 1987.

[30] V. I. Filippov, P. Oswald, “Representation in L^p by series of translates and dilates of one function”, *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15–29.

П. А. Терехин
Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Поступило
19.04.2007
Исправленный вариант
11.11.2007