Л. А. Бекларян, Об аналогах альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов окружности и прямой, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 3, 334–347

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm350

Математические заметки

том 71 выпуск 3 март 2002

УДК 515.1

ОБ АНАЛОГАХ АЛЬТЕРНАТИВЫ ТИТСА ДЛЯ ГРУПП ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ

Л. А. Бекларян

Г. Маргулисом была доказана гипотеза Гиза о справедливости аналога альтернативы Титса: для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ гомеоморфизмов окружности или существует свободная подгруппа с двумя образующими, или существует инвариантная вероятностная мера на S^1. В этой заметке мы усиливаем результат Маргулиса: для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ инвариантная вероятностная мера существует тогда и только тогда, когда факторгруппа G/H_G не содержит свободной подгруппы с двумя образующими (здесь H_G – некоторая каноническим образом определяемая подгруппа группы G). Сформулированы и доказаны аналоги альтернативы Титса для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ гомеоморфизмов прямой.

Библиография: 7 названий.

Введение. В своем докладе на симпозиуме по динамическим системам, проходившем в Париже в июне 1998 года, Э. Гиз высказал предположение о справедливости для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ аналога знаменитой альтернативы Титса: конечно-порожденная линейная группа либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является почти разрешимой. В [1] Маргулис доказал гипотезу Гиза: для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ или существует свободная подгруппа с двумя образующими, или существует инвариантная вероятностная мера на S^1. В этой заметке мы в качестве следствия из теоремы 6.1 в [2] формулируем следующий критерий существования инвариантной меры (теорема A): для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ инвариантная вероятностная мера существует тогда и только тогда, когда факторгруппа G/H_G не содержит свободной подгруппы с двумя образующими (здесь H_G – некоторая каноническим образом определяемая подгруппа группы G). Очевидно, такой критерий является усилением результата Маргулиса в [1]. В действительности, приводимый критерий допускает эквивалентную переформулировку в виде аналога альтернативы Титса (теорема A$'$): для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ факторгруппа G/H_G либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо содержит коммутативную подгруппу индекса не более двух.

Далее, приводится критерий существования инвариантной меры для подгрупп группы $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ всех гомеоморфизмов прямой (теорема B): для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$

Работа выполнена при поддержке Государственной программы поддержки научных школ, грант № 96-15-96135.

инвариантная борелевская мера, конечная на компактах, существует тогда и только тогда, когда минимальное множество непусто, а факторгруппа G/H_G не содержит свободной подполугруппы с двумя образующими. В действительности, приводимый критерий также допускает эквивалентную переформулировку в виде аналога альтернативы Титса (теорема B$'$): для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ с непустым минимальным множеством факторгруппа G/H_G либо содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо содержит коммутативную подгруппу индекса не более двух.

Отмеченная выше теорема 6.1 из [2] позволяет получить критерий существования проективно-инвариантной меры для подгрупп группы $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ (теорема C): для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$, содержащей нормальную подгруппу $\Gamma \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с инвариантной мерой и свободно действующим элементом, проективно-инвариантная борелевская мера, конечная на компактах, существует тогда и только тогда, когда факторгруппа G/H_G не содержит свободной подгруппы с двумя образующими. В действительности, приводимый критерий также допускает эквивалентную переформулировку в виде аналога альтернативы Титса (теорема C$'$): для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$, содержащей нормальную подгруппу $\Gamma \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с инвариантной мерой и свободно действующим элементом, факторгруппа G/H_G либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо содержит разрешимую подгруппу ступени и индекса не более двух.

В. Солодовым в [3] для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ получен результат, эквивалентный альтернативе из [1], а в [4] для специальных конечно-порожденных групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ получен результат, эквивалентный следующей, более слабой, альтернативе: или группа G не содержит свободной подполугруппы с двумя образующими, или существует инвариантная борелевская мера, конечная на компактах.

1. Критерий существования инвариантной меры для групп гомеоморфизмов окружности. Определение подгруппы H_G связано с минимальными множествами для группы G, поэтому вначале приведем основные определения и факты, относящиеся к этим понятиям.

В дальнейшем X обозначает либо $\mathbb{R}$, либо S^1. Пусть

$\mathrm{Homeo}(X)$ – группа всех гомеоморфизмов X, а $\mathrm{Homeo}_+(X)$ – нормальная подгруппа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов;

$\widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$ – группа всех гомеоморфизмов прямой, являющихся накрытиями гомеоморфизмов из $\mathrm{Homeo}(S^1)$, а $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ – нормальная подгруппа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов.

Наряду с группой $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ будем рассматривать ее нормальную подгруппу

$$G_+ = G \cap \mathrm{Homeo}_+(X),$$

объединение стабилизаторов точек X, принадлежащих подгруппе G_+,

$$G^s = \{g : g \in G_+,\ \exists t \in X\ \ g(t) = t\}$$

и подмножества

$$G^s_\infty = \bigl\{g : g \in G^s,\ \inf\{t : g(t) = t\} = -\infty,\ \sup\{t : g(t) = t\} = +\infty\bigr\},$$
$$C = (G \setminus G^s) \cup G^s_\infty$$

в случае $X = \mathbb{R}$, которые не всегда являются подгруппами. Заметим, что нормальная подгруппа G_+ индекса не более двух. Для произвольного множества гомеоморфизмов Q через $\langle Q\rangle$ будем обозначать группу, порожденную этими гомеоморфизмами, а также определим топологическую характеристику в виде множества неподвижных точек

$$\operatorname{Fix} Q = \{t : t \in X,\ \forall q \in Q\ \ q(t) = t\}.$$

Гомеоморфизм g называется *свободно действующим*, если $\operatorname{Fix}\langle g\rangle = \varnothing$.

Определение 1. Пусть $G \subseteq \operatorname{Homeo}(X)$. Непустое подмножество X называется *минимальным*, если оно замкнуто, G-инвариантно и не содержит собственных замкнутых G-инвариантных подмножеств. Если минимальное множество единственное, то его будем обозначать через $E(G)$. Если не существует минимального множества, то по определению будем полагать, что оно пустое множество.

Оказывается, что для групп, действующих на окружности, а также групп $G \subseteq \widetilde{\operatorname{Homeo}}_+(S^1)$, минимальное множество всегда не пусто, и, кроме того, существуют жесткие ограничения на его топологическую структуру как следствие одномерности фазового пространства.

Теорема 1. *Пусть $G \subseteq \operatorname{Homeo}_+(X)$. Тогда справедливо в точности одно из следующих утверждений*:

а) *любое минимальное множество дискретно и содержится в $\operatorname{Fix} G^s$, а $\operatorname{Fix} G^s$ состоит из объединения дискретных минимальных множеств*;
б) *минимальное множество единственно, является совершенным нигде не плотным подмножеством X и содержится в замыкании орбиты $\overline{G(t)}$ произвольной точки $t \in X$*;
в) *минимальное множество совпадает с X*;
г) *минимальное множество пустое (в случае $G \subseteq \operatorname{Homeo}_+(\mathbb{R})$)*.

Доказательство. Случай $X = \mathbb{R}$ рассмотрен в работе [5]. Рассмотрим случай окружности $X = S^1$. Для элемента $g \in G$ через l_g обозначим гомеоморфизм прямой, являющийся накрытием гомеоморфизма окружности g и нормированный условием $0 \leqslant l_g(0) < 1$. Образуем группу $\widehat{G} = \langle \{l_g\}_{g\in G}, \overline{g}\rangle$, где $\overline{g}(t) = t + 1$. Пусть $\lambda\colon \mathbb{R} \to S^1$ – отображение вида $\lambda(t) = t - [t]$, где $[\,\cdot\,]$ означает целую часть числа. Такое отображение индуцирует естественный эпиморфизм $\pi\colon \widehat{G} \to G$ с ядром $\ker\pi = \langle\overline{g}\rangle$. Заметим, что при отображении λ образ минимального множества группы $\widehat{G}$ совпадает с минимальным множеством группы G. В таком случае доказательство следует из справедливости теоремы для группы $\widehat{G}$.

Предложение 1. *Пусть $G \subseteq \operatorname{Homeo}(X)$. Минимальные множества группы G и нормальной подгруппы G_+ непусты одновременно. Каждое минимальное множество группы G состоит из объединения не более чем двух минималных множеств нормальной подгруппы G_+.*

Доказательство. Следует рассмотреть случай $G \neq G_+$. Мы знаем, что $G = G_+ \cup fG_+$, где f – некоторый элемент из $G \setminus G_+$. Поэтому если множество B инвариантно относительно подгруппы G_+, то множество $f(B)$ также будет инвариатным относительно подгруппы G_+. Более того, так как $f^2(B) = B$, то множество $B \cup f(B)$ будет инвариантным относительно самой группы G.

Пусть для подгруппы G_+ существует непустое минимальное множество U. Как уже отмечалось выше, множество $f(U)$ инвариантно относительно подгруппы G_+, а множество $U \cup f(U)$ будет инвариантным относительно самой группы G. Следовательно, для группы G множество $U \cup f(U)$ является минимальным.

Пусть минимальное множество группы G непусто и D является таким минимальным множеством. В силу инвариантности для любого $g \in G$ его действие на минимальном множестве является гомеоморфизмом. Предположим, что для подгруппы G_+ не существует минимального множества. Тогда существует последовательность вложенных замкнутых подмножеств $D_n, n = 0, 1, 2, \ldots, D_0 = D$, которые инвариантны относительно нормальной подгруппы G_+ и удовлетворяют условию $\bigcap_{n=0}^{\infty} D_n = \varnothing$. Выберем точку $\overline{t} \in D$. Найдется натуральное число $\overline{n}$ такое, что точки $\overline{t}, f^{-1}(\overline{t})$ не будут принадлежать множеству $D_{\overline{n}}$. В таком случае точка $\overline{t}$ не будет принадлежать замыканию множества $D_{\overline{n}} \cup f(D_{\overline{n}})$, и оно будет собственным замкнутым подмножеством множества D, инвариантным относительно группы G. Это противоречит условию минимальности множества D, откуда и следует непустота минимального множества для подгруппы G_+.

И последнее. Если минимальное множество подгруппы G_+ недискретное, то по теореме 1 оно единственное и обозначается через $E(G_+)$. Из инвариантности множества $f(E(G_+))$ относительно подгруппы G_+ и теоремы 1 следует включение $E(G_+) \subseteq f(E(G_+))$. Из полученного включения следует, что $f(E(G_+)) \subseteq f^2(E(G_+))$. С другой стороны, из инвариантности множества $E(G_+)$ относительно подгруппы G_+ и условия $f^2 \in G_+$ следует, что $f^2(E(G_+)) = E(G_+)$. Тогда из полученных включений следует, что $f(E(G_+)) = E(G_+)$, т.е. минимальные множества группы G и ее нормальной подгруппы G_+ совпадают.

Если U – дискретное минимальное множество подгруппы G_+, то множество $f(U)$ также будет дискретным минимальным множеством для подгруппы G_+. Множества U и $f(U)$ либо не пересекаются, либо совпадают, а множество $U \cup f(U)$ является минимальным множеством для исходной группы G и состоит из не более чем двух минимальных множеств подгруппы G_+.

Определение 2. Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ определим нормальную подгруппу H_G следующим образом:

1) если минимальное множество непусто и недискретно, то положим

$$H_G = \{h : h \in G_+,\ E(G) \subseteq \mathrm{Fix}\langle h\rangle\};$$

2) если минимальное множество непусто и дискретно, то положим $H_G = G^s$ (по теореме 1 из дискретности минимального множества следует непустота множества $\mathrm{Fix}\, G^s$; из непустоты $\mathrm{Fix}\, G^s$ следует, что G^s является группой, а из инвариантности множества $\mathrm{Fix}\, G^s$ следует нормальность подгруппы G^s);
3) если минимальное множество пусто,то положим $H_G = \langle e\rangle$.

Определение 3. Борелевская мера μ, конечная на компактах, называется *проективно-инвариантной* относительно группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$, если для любого $g \in G$

существует число $c(g) > 0$ такое, что для всякого борелевского множества B выполняется условие $\mu(g^{-1}(B)) = c(g)\mu(B)$.

Если для любого $g \in G$ $c(g) = 1$, то такая проективно-инвариантная мера является инвариантной. В дальнейшем, говоря о мере, мы будем подразумевать, что это борелевская мера, конечная на компактах. В случае окружности мы будем предполагать, что это вероятностная мера.

Приведем наиболее важный топологический критерий существования инвариантной меры.

Теорема 2. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда множество* $\mathrm{Fix}\, G^s$ *непусто.*

Доказательство. Случай $X = \mathbb{R}$ рассмотрен в работе [6]. Рассмотрим случай окружности $X = S^1$. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}, \lambda, \pi$ те же, что и при доказательстве теоремы 1. Несложно заметить, что множества $\mathrm{Fix}\, \widehat{G}^s$ и $\mathrm{Fix}\, G^s$ непусты одновременно и при отображении λ образ множества $\mathrm{Fix}\, \widehat{G}^s$ совпадает с множеством $\mathrm{Fix}\, G^s$. С другой стороны, для группы $\widehat{G}$ инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда для группы G существует инвариантная вероятностная мера. Тогда утверждение теоремы в случае окружности S^1 будет следовать из утверждения теоремы для случая $X = \mathbb{R}$, примененного к группе $\widehat{G}$.

В работе [6] были изучены свойства инвариантных мер и, в частности, их носители.

Теорема 3. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. Тогда носитель $\mathrm{supp}\, \mu$ инвариантной меры μ состоит из некоторого объединения минимальных множеств. Если минимальное множество недискретно, а μ_1 и μ_2 – инвариантные меры, то $\mu_2 = d\mu_1$, где $d > 0$.*

Доказательство. Случай $X = \mathbb{R}$ рассмотрен в работе [6]. Рассмотрим случай окружности $X = S^1$. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}, \lambda, \pi$ те же, что и при доказательстве теоремы 1. Заметим, что для группы $\widehat{G}$ инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда для группы G существует инвариантная вероятностная мера. С другой стороны, минимальное множество группы G недискретно тогда и только тогда, когда недискретно минимальное множество. Тогда утверждение теоремы в случае окружности S^1 будет следовать из утверждения теоремы для случая $X = \mathbb{R}$, примененного к группе $\widehat{G}$.

Предложение 2. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$. Для группы G инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда существует инвариантная мера для нормальной подгруппы G_+.*

Доказательство. В одну сторону доказательство очевидно. Пусть для нормальной подгруппы G_+ существует инвариантная мера μ. Следует рассмотреть случай $G \neq G_+$. Мы знаем, что $G = G_+ \cup fG_+$, где f – некоторый элемент из $G \setminus G_+$. Пусть минимальное множество подгруппы G_+ дискретное. Обозначим его через D. Тогда дискретное множество $f(D)$ также является минимальным множеством подгруппы G_+ и по предложению 1 объединение $D \cup f(D)$ будет дискретным минимальным множеством самой группы G. Имея дискретное минимальное множество группы G, очевидным образом строится мера, инвариантная относительно G. Пусть минимальное множество нормальной подгруппы G_+ недискретное. Если q – гомеоморфизм, то определим меру $q_*\mu$ по следующему правилу: для любого борелевского множества B должно выполняться условие $q_*\mu(B) = \mu(q^{-1}(B))$. Из нормальности подгруппы G_+ следует, что для любого элемента $g \in G$ мера $g_*\mu$ также инвариантна относительно подгруппы G_+. Так как минимальное множество подгруппы G_+ недискретное, то по теореме 3 $g_*\mu = d_g\mu$, где $d_g > 0$. Очевидно, что для элементов $g \in G_+$ значение d_g равно единице. Для элемента $g \neq G_+$ справедливо условие $g^2 \in G_+$, поэтому должно выполняться равенство $d_g^2 = 1$. Следовательно, для любого элемента $g \in G$ также должно выполняться условие $d_g = 1$, откуда и следует инвариантность меры μ относительно исходной группы G.

Сформулируем одно утверждение, непосредственно вытекающее из следствия 7.3 работы [5].

Предложение 3. *Пусть $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Для группы G проективно-инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда существует инвариантная мера.*

Определение 4. Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Нормальная подгруппа $M \subseteq G$ называется 0-*максимальной*, если существует борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно подгруппы M, и M не является собственной подгруппой какой-либо нормальной подгруппы группы G, для которой также существует инвариантная борелевская мера, конечная на компактах.

В [2] было показано, что для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с непустым минимальным множеством существует 0-максимальная подгруппа M и справедливо включение $H_G \subseteq M$.

Приведем формулировку теоремы 6.1 из работы [2].

Теорема 4. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, для которой существует непустое минимальное множество и 0-максимальная подгруппа M со свойством $M \neq H_G$. Тогда для существования борелевской меры, конечной на компактах и проективно-инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы факторгруппа G/H_G не содержала свободной подгруппы с двумя образующими.*

Для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ теорема 4 может быть уточнена.

Теорема 5. *Пусть $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Тогда для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы факторгруппа G/H_G не содержала свободной подгруппы с двумя образующими.*

Доказательство. По предложению 3 для группы G проективно-инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда существует инвариантная мера. Образуем группу $\Pi = \langle G, \overline{g} \rangle$, где $\overline{g}(t) = t+1$. Для произвольной группы $Q \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ (см. [5]) минимальное множество непусто, а инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда существует инвариантная мера для группы $\langle Q, \overline{g} \rangle$. Отсюда следует, что для группы Π 0-максимальная подгруппа M существует и содержит элемент $\overline{g}$. Поэтому

$M \neq H_\Pi$ и для группы Π выполняются условия теоремы 4. Для завершения доказательства остается заметить, что факторгруппы G/H_G и Π/H_Π одновременно либо содержат свободную подгруппу с двумя образующими, либо ее не содержат.

Теперь мы можем сформулировать и доказать наш основной результат для групп, действующих на окружности.

Теорема A. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$. Для существования вероятностной меры, инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы факторгруппа G/H_G не содержала свободной подгруппы с двумя образующими.*

Доказательство. Заметим, что $H_G = H_{G_+}$. По предложению 2 для группы G и ее нормальной подгруппы G_+ инвариантная мера либо существует, либо нет одновременно. С другой стороны, для факторгрупп $G/H_G, G_+/H_G$ свободные подгруппы с двумя образующими либо существуют, либо нет также одновременно. Поэтому нам достаточно доказать теорему для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Для элемента $g \in G$ через l_g обозначим гомеоморфизм прямой, являющийся накрытием гомеоморфизма окружности g и нормированный условием $0 \leqslant l_g(0) < 1$. Образуем группу $\widehat{G} = \langle \{l_g\}_{g\in G}, \overline{g}\rangle$, где $\overline{g}(t) = t + 1$. Для группы G инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда она существует для группы $\widehat{G}$. Пусть $\Gamma = \langle H_{\widehat{G}}, \overline{g}\rangle$. Ядро естественного эпиморфизма $\pi\colon \widehat{G} \to G$ равно $\ker \pi = \langle \overline{g}\rangle$ и $\pi(\Gamma) = H_G$. Следовательно, факторгруппы $\widehat{G}/\Gamma$ и G/H_G изоморфны. С другой стороны, факторгруппы $\widehat{G}/\Gamma$ и $\widehat{G}/H_{\widehat{G}}$ одновременно либо содержат свободную подгруппу с двумя образующими, либо ее не содержат. В таком случае для группы $\widehat{G}$ выполняются все условия теоремы 5, откуда и следует доказательство.

Замечание 1. Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ факторгруппа G/H_G может быть реализована как группа действий на X (см. [6]). Для любого класса смежности gH_G соответствующее ей действие на минимальном множестве совпадает с действием элемента g, а вне минимального множества действует растяжениями на максимальных открытых интервалах. При этом инвариантная мера для группы G является инвариантной мерой для факторгруппы G/H_G, и наоборот.

Замечание 2. Для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ в работе В. Солодова [3] сформулирована альтернатива, эквивалентная альтернативе из [1], в которой условие существования инвариантной меры заменено на эквивалентное ей условие непустоты множества $\mathrm{Fix}\, G^s$. Эквивалентность этих двух условий устанавливается теоремой 2.

Теорема A допускает эквивалентную переформулировку в виде аналога альтернативы Титса. Для этого приведем теорему о факторгруппе.

Теорема 6. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. Тогда факторгруппа $G/\langle G^s\rangle$ коммутативна и изоморфна подгруппе группы X.*

Доказательство. В случае $X = \mathbb{R}$ доказательство приведено в [7]. Рассмотрим случай окружности $X = S^1$. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}, \lambda, \pi$ те же, что и при доказательстве теоремы 1. Очевидно, что $\pi(\mathscr{T}) = \langle G^s\rangle$, где $\mathscr{T} = \langle \widehat{G}^s, \overline{g}\rangle$. В таком случае существуют эпиморфизм $\widehat{G}/\langle \widehat{G}^s\rangle \to \widehat{G}/\mathscr{T}$ и изоморфизм $\widehat{G}/\mathscr{T} \simeq G/\langle G^s\rangle$. Так как факторгруппа $\widehat{G}/\langle \widehat{G}^s\rangle$ изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$, то факторгруппа G/G^s будет изоморфна подгруппе группы S^1.

Теперь мы можем сформулировать и доказать аналог альтернативы Титса для групп, действующих на окружности.

Лемма 1. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ факторгруппа G/H_G либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является коммутативной.*

Доказательство. Пусть G/H_G не содержит свободной подгруппы с двумя образующими. По теореме A для группы G существует инвариантная вероятностная мера, а по теореме 2 множество $\mathrm{Fix}\, G^s$ непусто. Из непустоты множества $\mathrm{Fix}\, G^s$ следует, что множество G^s образует группу, т.е. $\langle G^s \rangle = G^s$. В силу инвариантности множества $\mathrm{Fix}\, G^s$ минимальное множество будет принадлежать $\mathrm{Fix}\, G^s$. Если минимальное множество дискретное, то по определению $H_G = G^s$. Если минимальное множество недискретное, то в силу определения множества $\mathrm{Fix}\, G^s$ также справедливо условие $H_G = G^s$. В таком случае коммутативность факторгруппы $G/\langle H_G \rangle$ будет следовать из теоремы 6. Обратное утверждение очевидно.

Теорема A$'$. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ факторгруппа G/H_G либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является разрешимой ступени не более двух (содержит коммутативную подгруппу индекса не более двух).*

Доказательство. Заметим, что $H_G = H_{G_+}$. Для факторгрупп $G/H_G, G_+/H_G$ свободные подгруппы с двумя образующими либо существуют, либо нет одновременно. Если факторгруппа G_+/H_G не содержит свободной подгруппы с двумя образующими, то по лемме 1 она является коммутативной. В таком случае факторгруппа G/H_G будет содержать коммутативную подгруппу индекса не более двух.

2. Критерий существования инвариантной меры для групп гомеоморфизмов прямой. Для исследования групп, действующих на прямой, приведем один признак непустоты множества $\mathrm{Fix}\, G^s$, который является непосредственным следствием теоремы 8.4 из [5].

Предложение 4. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Если группа G не содержит свободной подполугруппы с двумя образующими и $G \setminus G^s_\infty \neq \varnothing$, то множество $\mathrm{Fix}\, G^s$ непусто.*

Теперь мы можем сформулировать наш основной результат для групп, действующих на прямой.

Теорема B. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) *для группы G существует непустое минимальное множество;*
2) *факторгруппа G/H_G не содержит свободной подполугруппы с двумя образующими.*

Доказательство. Заметим,что $H_G = H_{G_+}$, а минимальные множества группы G и подгруппы G_+ непусты одновременно (предложение 1). По предложению 2 для группы G и ее нормальной подгруппы G_+ инвариантная мера либо существует, либо нет одновременно. С другой стороны, для факторгрупп $G/H_G, G_+/H_G$ свободные подполугруппы с двумя образующими либо существуют, либо нет также одновременно. В таком случае доказательство теоремы достаточно провести для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$.

Необходимость. Пусть существует σ-конечная борелевская мера μ, инвариантная относительно группы G. Тогда по теореме 2 $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$. Из непустоты множества $\mathrm{Fix}\, G^s$ и его инвариантности следует, что минимальное множество непусто и содержится в $\mathrm{Fix}\, G^s$. С другой стороны, из условия $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$ следует, что G^s является группой, т.е. $\langle G^s \rangle = G^s$. Если минимальное множество дискретное, то по определению $H_G = G^s$ и в силу теоремы 6 факторгруппа G/H_G будет коммутативной группой, а потому не может содержать свободных подполугрупп с двумя образующими. Если минимальное множество недискретное, то в силу определения множества $\mathrm{Fix}\, G^s$ так же, как и в предыдущем случае, $H_G = G^s$ и по теореме 6 факторгруппа G/H_G будет коммутативной. Необходимость доказана.

Достаточность. Если минимальное множество дискретное, то по теореме 1 оно содержится в множестве $\mathrm{Fix}\, G^s$ и поэтому $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$. Из условия $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$ и теоремы 2 следует существование меры, инвариантной относительно группы G, что и требовалось доказать.

Пусть минимальное множество недискретное и в силу теоремы 1 оно единственное (обозначается через $E(G)$). Если $G \backslash G^s_\infty \neq \varnothing$, то из условия 2) и предложения 4 следует, что для группы G выполняется свойство $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$. Тогда по теореме 2 существует инвариантная мера.

Остается рассмотреть случай, когда $G = G^s_\infty$. Покажем, что для любого элемента $g \in G$ и любой точки $t \in E(G)$ выполняется условие $g(t) = t$, т.е. точка t является неподвижной для элемента g. Действительно, пусть для некоторой точки $\bar{t} \in E(G)$ и некоторого элемента $g_1 \in G$ выполняется условие $g_1(\bar{t}) \neq \bar{t}$. Заметим, что такой элемент g_1 не принадлежит подгруппе H_G. Для определенности будем полагать, что $g_1(\bar{t}) > \bar{t}$. Определим точки

$$t_1 = \sup\{t : g_1(t) = t,\ t < \bar{t}\}, \qquad t_2 = \inf\{t : g_1(t) = t,\ t > \bar{t}\}.$$

Так как $G = G^s_\infty$ и $g_1(\bar{t}) > \bar{t}$, то t_1, t_2 конечны и удовлетворяют условию $t_1 < \bar{t} < t_2$. Из условия $\bar{t} \in E(G)$ в силу свойства б) теоремы 1 следует, что точка $\bar{t}$ принадлежит замыканию орбиты $G(t_1)$. В таком случае найдутся элемент $g_2 \in G$ и натуральное число k, для которых справедливы условия $g_1^{-k} g_2(t_1) > t_1$, $t_1 < \widetilde{t} < \bar{t}$, где $\widetilde{t} = \inf\{t : g_1^{-k} g_2(t) = t,\ t > t_1\}$. Заметим, что элемент $g_1^{-k} g_2$ также не принадлежит подгруппе H_G. Рассмотрим интервал $[t_1, \widetilde{t}]$. Для элемента g_1 выполняется условие $g_1(t_1) = t_1$, а на полуинтервале $]t_1, \widetilde{t}]$ нет неподвижных точек. Для элемента $g_1^{-k} g_2$ выполняется условие $g_1^{-k} g_2(\widetilde{t}) = \widetilde{t}$, а на полуинтервале $[t_1, \widetilde{t}[$ нет неподвижных точек. В таком случае (см. [4, лемма 3.1]) группа $\langle g_1, g_1^{-k} g_2 \rangle$ содержит свободную подполугруппу с двумя образующими. Так как элементы g_1 и $g_1^{-k} g_2$ не принадлежат нормальной подгруппе H_G, то отсюда следует, что факторгруппа H_G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими. Противоречие. Следовательно, для любых $g \in G$ и $t \in E(G)$ справедливо условие $g(t) = t$. Но это означает, что $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$ и по теореме 2 существует мера, инвариантная относительно группы G. Теорема доказана.

Замечание 3. Для конечно-порожденных групп минимальное множество всегда непусто [5]. В конце введения сформулирована альтернатива, которая слабее, чем теорема B. Для специальных конечно-порожденных групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ в работе Солодова [4] доказывается эквивалентная альтернатива, в которой условие существования инвариантной меры заменено на условие непустоты множества $\operatorname{Fix} G^s$. Эквивалентность этих двух условий устанавливается теоремой 2.

Теорема B допускает эквивалентную переформулировку в виде аналога альтернативы Титса.

Лемма 2. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с непустым минимальным множеством факторгруппа G/H_G либо содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо является коммутативной.*

Доказательство. Пусть G/H_G не содержит свободной подполугруппы с двумя образующими. По теореме 4 для группы G существует инвариантная мера, а по теореме 2 множество $\operatorname{Fix} G^s$ непусто. Из непустоты множества $\operatorname{Fix} G^s$ следует, что множество G^s образует группу, т.е. $\langle G^s\rangle = G^s$. В силу инвариантности множества $\operatorname{Fix} G^s$ минимальное множество будет принадлежать $\operatorname{Fix} G^s$. Если минимальное множество дискретное, то по определению $H_G = G^s$. Если минимальное множество недискретное, то в силу определения множества $\operatorname{Fix} G^s$ также справедливо условие $H_G = G^s$. В таком случае коммутативность факторгруппы $G/\langle H_G\rangle$ будет следовать из теоремы 6. Обратное утверждение очевидно.

Теорема B$'$. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ с непустым минимальным множеством факторгруппа G/H_G либо содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо является разрешимой ступени не более двух (содержит коммутативную подгруппу индекса не более двух).*

Доказательство. Заметим, что $H_G = H_{G_+}$, а минимальные множества группы G и подгруппы G_+ непусты одновременно (предложение 1). Для факторгрупп G/H_G и G_+/H_G свободные подполугруппы с двумя образующими либо существуют, либо нет одновременно. Если факторгруппа G_+/H_G не содержит свободной подгруппы с двумя образующими, то по лемме 2 она является коммутативной. В таком случае факторгруппа G/H_G будет содержать коммутативную подгруппу индекса не более двух.

3. Критерий существования проективно-инвариантной меры для групп, действующих на прямой. Приведем одно необходимое условие пустоты минимального множества и одно достаточное условие существования инвариантной меры (см. [2, лемма 2.1, предложение 3.1]).

Теорема 7. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Если минимальное множество пустое, то $G = G^s_\infty$.*

Предложение 5. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Если множество G^s образует подгруппу и $G \setminus G^s \neq \varnothing$, то существует инвариантная мера.*

Сформулируем одно свойство групп с проективно-инвариантной мерой, описанное в теореме 7.4 из [5].

Предложение 6. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, для которой существует проективно-инвариантная мера, но не существует инвариантной меры. Тогда для любых проективно-инвариантных мер μ_1, μ_2 справедливо условие $\mu_2 = d\mu_1$, $d > 0$.*

Предложение 7. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$. Для группы G проективно-инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда существует проективно-инвариантная мера для нормальной подгруппы G_+.*

Доказательство. В одну сторону доказательство очевидно. Пусть для нормальной подгруппы G_+ существует проективно-инвариантная мера μ. Если для G_+ существует инвариантная мера, то по предложению 2 для группы G также существует инвариантная мера. Остается рассмотреть случай, когда для G_+ не существует инвариантной меры. Из нормальности подгруппы G_+ следует, что для любого $g \in G$ мера $g_*\mu$ также будет проективно-инвариантной. Тогда по предложению 6 для любого $g \in G$ $g_*\mu = d_g\mu$, $d_g > 0$, откуда и следует, что мера μ будет проективно-инвариантной относительно группы G.

Лемма 3. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Для существования непустого минимального множества и 0-максимальной подгруппы M со свойством $M \neq H_G$ необходимо и достаточно, чтобы существовала нормальная подгруппа Γ с инвариантной мерой и свободно действующим элементом.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть минимальное множество группы G будет дискретным. Тогда по определению $H_G = G^s$, а по условию теоремы $M \neq G^s$, откуда и следует, что нормальная подгруппа M содержит свободно действующий элемент. Остается выбрать подгруппу Γ равной M.

Пусть минимальное множество группы G недискретное и поэтому единственное. Так как для подгруппы M существует инвариантная мера μ, то по теореме 2 замкнутое множество $\mathrm{Fix}\, M^s$, инвариантное относительно M, непусто. В силу теорем 1 и 3 носитель меры $\mathrm{supp}\,\mu$ меры μ, состоящий из некоторого объединения минимальных множеств, будет принадлежать множеству $\mathrm{Fix}\, M^s$. В силу нормальности подгруппы M для любого $g \in G$ мера $g_*\mu$ также будет инвариантной относительно подгруппы M и, следовательно, для нее также выполняется включение $\mathrm{supp}\, g_*\mu \subseteq \mathrm{Fix}\, M^s$. Заметим, что $\mathrm{supp}\, g_*\mu = g^{-1}(\mathrm{supp}\,\mu)$. Через U обозначим замыкание объединения $\bigcup_{g\in G} g(\mathrm{supp}\,\mu)$. Очевидно, что U принадлежит замкнутому множеству $\mathrm{Fix}\, M^s$ и является инвариантным относительно группы G. С другой стороны, по теореме 1 минимальное множество $E(G)$ будет принадлежать множеству U, откуда и следует включение $E(G) \subseteq \mathrm{Fix}\, M^s$. Из последнего включения следует, что $M^s \subseteq H_G$. Тогда из условия $M \neq H_G$ будет следовать, что $M \neq M^s$, т.е. в M существует свободно действующий элемент. Остается положить Γ равной M.

Достаточность. Так как в Γ существует свободно действующий элемент, т.е. $\Gamma \neq \Gamma^s$, то по теореме 7 минимальное множество исходной группы G непусто. Пусть минимальное множество группы G дискретное. Тогда по теореме 1 множество $\mathrm{Fix}\, G^s$ непусто, а по теореме 2 для группы G существует инвариантная мера. С другой стороны, по определению для групп с дискретным минимальным множеством имеет место условие $H_G = G^s$. Так как $\Gamma \neq \Gamma^s$, то и $G \neq G^s$. Остается положить M равной исходной группе G.

Пусть минимальное множество группы G недискретное, а потому единственное и обозначается $E(G)$. Для подгруппы Γ, повторяя все рассуждения, проведенные для подгруппы M во втором абзаце доказательства необходимости, получим включение $E(G) \subseteq \operatorname{Fix}\Gamma^s$. Из этого включения следует, что $\Gamma^s \subseteq H_G$. Образуем группу $\mathscr{F} = \langle \Gamma, H_G \rangle$. Так как $E(G)$ инвариантно относительно подгруппы Γ, то для группы $\mathscr{F}$ будет выполняться условие $\mathscr{F}^s = H_G$. В таком случае $E(G) \subseteq \operatorname{Fix}\mathscr{F}^s$ и по теореме 2 для групп $\mathscr{F}$ также существует инвариантная мера. Заметим, что в этих рассуждениях условие $\Gamma \neq \Gamma^s$ не используется. Если $\Gamma \neq \Gamma^s$, то и $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}^s$.

В действительности мы доказали большее. Если $\widetilde{\Gamma}$ – произвольная нормальная подгруппа группы G с инвариантной мерой, то группа $F = \langle \widetilde{\Gamma}, H_G \rangle$ также является нормальной подгруппой с инвариантной мерой и $F^s = H_G$.

Рассмотрим множество всех нормальных подгрупп F с инвариантной мерой и со свойством $F^s = H_G$. Очевидно, что это множество непусто, так как к нему принадлежит подгруппа $\mathscr{F}$. Введем отношение частичного порядка следующим образом: $F_1 \prec F_2$, если $F_1 \subseteq F_2$. По лемме Цорна цепь $F_0 = \mathscr{F}$ содержится в некоторой максимальной цепи $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$. Рассмотрим объединение $M = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} F_\alpha$, которое также является нормальной подгруппой. Очевидно, что для подгруппы M также выполняется условие $M^s = H_G$. Так как $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}^s$, то и $M \neq M^s$. Тогда по предложению 5 существует мера, инвариантная относительно M. Очевидно, что M будет 0-максимальной подгруппой. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать наш основной результат о существовании проективно-инвариантной меры.

Теорема C. *Пусть $G \subseteq \operatorname{Homeo}(\mathbb{R})$ содержит нормальную подгруппу $\Gamma \subseteq \operatorname{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с инвариантной мерой и свободно действующим элементом. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и проективно-инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы факторгруппа G/H_G не содержала свободной подгруппы с двумя образующими.*

Доказательство. Заметим, что $H_G = H_{G_+}$. По предложению 5 для группы G и ее нормальной подгруппы G_+ проективно-инвариантная мера либо существует, либо нет одновременно. С другой стороны, для факторгрупп G/H_G, G_+/H_G свободные подгруппы с двумя образующими либо существуют, либо нет также одновременно. Поэтому нам достаточно доказать теорему для групп $G \subseteq \operatorname{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Но для таких групп в силу леммы 3 теорема C является переформулировкой теоремы 4.

По проективно-инвариантной мере μ мы можем определить гомоморфизм $A_G \colon G \to \mathbb{R}$, где для любого $g \in G$ $A_G(g) = c(g)$ ($c(g)$ из определения 3).

Пусть $\mathscr{C} = \ker A_G$, $\mathscr{H} = \ker A_G \cap G^s$. Приведем один результат о структуре групп с проективно-инвариантной мерой [5, теорема 7.3].

Теорема 8. *Пусть $G \subseteq \operatorname{Homeo}_+(\mathbb{R})$, для которой существует проективно-инвариантная мера μ. Тогда $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{C} \subseteq G$, $\mathscr{H}$ и $\mathscr{C}$ – нормальные подгруппы группы G, факторгруппа $G/\mathscr{H}$ изоморфна подгруппе группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$, а факторгруппы $G/\mathscr{C}$, $\mathscr{C}/\mathscr{H}$ изоморфны подгруппам аддитивной группы $\mathbb{R}$. Более того, $\mathscr{C}^s = \mathscr{H}$.*

Уточним структуру групп с проективно-инвариантной мерой [5, следствие 7.3, лемма 7.4].

Предложение 8. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, *для которой существует проективно-инвариантная мера, но не существует инвариантной меры. Тогда* $\mathscr{H} = G^s_\infty$, $G \setminus G^s \neq \varnothing$ *и* $G \setminus G^s \subseteq \mathscr{C}$, *а факторгруппа* $\mathscr{C}/\mathscr{H}$ *нециклическая.*

Приведем один результат о связи минимальных множеств группы и ее нормальных подгрупп [2, лемма 2.3].

Предложение 9. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, *а* Γ – *ее нормальная подгруппа. Если минимальное множество подгруппы* Γ *непусто и недискретно, то минимальное множество группы* G *также непусто и совпадает с минимальным множеством* Γ.

Лемма 4. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, *для которой существует проективно-инвариантная мера* μ, *но не существует инвариантной меры. Тогда* $\mathscr{H} = H_G$ *и* $\mathscr{C} = C$.

Доказательство. По предложению 8 $G \setminus G^s \neq \varnothing$, т.е. существует свободно действующий элемент $\widetilde{g} \in \mathscr{C}$. Тогда по теореме 7 для группы G существует минимальное множество. Так как элемент $\widetilde{g}$ свободно действующий, то минимальное множество неограничено ни слева, ни справа. Из условия нецикличности факторгруппы $\mathscr{C}/\mathscr{H}$ и того, что $\mathscr{C}^s = \mathscr{H}$ (теорема 8), следует, что минимальное множество группы G недискретное и обозначается через $E(G)$. Из недискретности минимального множества $E(G)$, его неограниченности слева и справа и условия $\mathscr{H} = G^s_\infty$ (см. предложение 8) следует, что $H_G \subseteq \mathscr{H}$.

С другой стороны, так как $\widetilde{g} \in \mathscr{C}$ – свободно действующий элемент, то в силу теоремы 7 минимальное множество группы $\mathscr{C}$ также непусто. Из нецикличности факторгруппы $\mathscr{C}/\mathscr{H}$ и условия $\mathscr{C}^s = \mathscr{H}$ (теорема 8) следует, что такое минимальное множество недискретное и обозначается через $E(\mathscr{C})$. Тогда по предложению 9 $E(G) = E(\mathscr{C})$. В силу определения подгруппа $\mathscr{C}$ является максимальной нормальной подгруппой, для которой проективно-инвариантная мера μ является инвариантной. Тогда по теореме 2 должно выполняться условие $\mathrm{Fix}\,\mathscr{C}^s \neq \varnothing$. Очевидно, что минимальное множество $E(\mathscr{C})$ должно принадлежать замкнутому инвариантному относительно $\mathscr{C}$ множеству $\mathrm{Fix}\,\mathscr{C}^s$. В таком случае должно выполняться включение $\mathscr{C}^s \subseteq H_G$. Так как $\mathscr{C}^s = \mathscr{H}$, то это влечет за собой включение $\mathscr{H} \subseteq H_G$. Сравнивая с полученным ранее обратным включением, получим, что $H_G = \mathscr{H}$.

Из условий $G \setminus G^s \subseteq \mathscr{C}$ и $\mathscr{H} = G^s_\infty$ (предложение 8) следует включение $C \subseteq \mathscr{C}$. Так как мера μ инвариантна относительно группы $\mathscr{C}$ и существует свободно действующий элемент $\widetilde{g} \in \mathscr{C}$, то верно и обратное включение $\mathscr{C} \subseteq C$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ *содержит нормальную подгруппу* Γ *с инвариантной мерой и свободно действующим элементом. Тогда факторгруппа* G/H_G *либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является разрешимой ступени не более двух.*

Доказательство. Пусть G/H_G не содержит свободной подгруппы с двумя образующими. По теореме С для группы G существует проективно-инвариантная мера. Если для группы G существует инвариантная мера, то по теореме 2 множество $\mathrm{Fix}\,G^s$ непусто. Из непустоты множества $\mathrm{Fix}\,G^s$ следует, что множество G^s образует группу, т.е.

$\langle G^s \rangle = G^s$. В силу инвариантности множества $\operatorname{Fix} G^s$ минимальное множество будет принадлежать $\operatorname{Fix} G^s$. Если минимальное множество дискретное, то по определению $H_G = G^s$. Если минимальное множество недискретное, то в силу определения множества $\operatorname{Fix} G^s$ также справедливо условие $H_G = G^s$. В таком случае коммутативность факторгруппы $G/\langle H_G \rangle$ будет следовать из теоремы 6.

Если для группы G не существует инвариантной меры, то по лемме 4 $H_G = \mathscr{H}$. Тогда по теореме 8 факторгруппа G/H_G является разрешимой ступени два.

Обратное утверждение очевидно.

Теорема C$'$. *Пусть $G \subseteq \operatorname{Homeo}(\mathbb{R})$ содержит нормальную подгруппу $\Gamma \subseteq \operatorname{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с инвариантной мерой и свободно действующим элементом. Тогда факторгруппа G/H_G либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является разрешимой ступени не более трех (содержит разрешимую подгруппу ступени и индекса не более двух).*

Доказательство. Заметим, что $H_G = H_{G_+}$. Для факторгрупп G/H_G, G_+/H_G свободные подгруппы с двумя образующими либо существуют, либо нет одновременно. Если факторгруппа G_+/H_G не содержит свободной подгруппы с двумя образующими, то по лемме 5 она является разрешимой ступени не более двух. В таком случае факторгруппа G/H_G будет содержать разрешимую группу ступени и индекса не более двух.

Автор признателен участникам семинара “Динамические системы и эргодическая теория” и ее руководителям Д. В. Аносову, А. М. Степину и особенно Р. И. Григорчуку за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Margulis G. Free subgroups of the homeomorphism group of the circle // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2000. V. 331. P. 669–674.

[2] Бекларян Л. А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. III. ω-проективно-инвариантные меры // Матем. сб. 1999. Т. 190. №4. С. 43–62.

[3] Солодов В. В. Гомеоморфизмы окружности и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №3. С. 599–613.

[4] Солодов В. В. Гомеоморфизмы прямой и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. №5. С. 1047–1060.

[5] Бекларян Л. А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II. Проективно-инвариантные меры // Матем. сб. 1996. Т. 187. №4. С. 3–28.

[6] Бекларян Л. А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры // Матем. сб. 1996. Т. 187. №3. С. 23–54.

[7] Бекларян Л. А. Структура факторгруппы группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, по подгруппе, порожденной объединением стабилизаторов // Докл. РАН. 1993. Т. 331. №2. С. 137–139.

Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва
E-mail: `Beklar@cemi.rssi.ru`

Поступило
29.03.2001
Исправленный вариант
29.08.2001