А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 5, 33–58

DOI: https://doi.org/10.4213/sm225

УДК 517.53

А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин

Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа

Изучаются аппроксимации Эрмита–Паде для введенных в работе систем марковских функций, структура которых определяется заданным графом. Результаты асимптотического характера формулируются в терминах, связанных с теоретико-потенциальной задачей равновесия для векторных потенциалов.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

1. В классической работе Ш. Эрмита [1] о трансцендентности числа e была введена конструкция рациональных аппроксимаций, сыгравшая важную роль в ряде задач анализа и теории чисел. В дальнейшем соответствующие рациональные функции стали называться аппроксимациями Эрмита–Паде. Один из вариантов этой конструкции состоит в построении рациональных аппроксимаций с общим знаменателем для конечного набора $f = (f_1, \dots, f_m)$ степенных рядов с центром в точке $z = \infty$:

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{j,k}}{z^{k+1}}, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{1}$$

А именно, фиксируем мультииндекс

$$n = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m;$$

в дальнейшем полагаем $|n| = n_1 + \dots + n_m$. Нетрудно видеть, что существует многочлен $Q_n(z)$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{gathered} Q_n(z) \not\equiv 0, \qquad \deg Q_n \leqslant |n|, \\ (Q_n f_j - P_{n,j})(z) = \frac{A_{n,j}}{z^{n_j+1}} + \cdots, \qquad j = 1, \dots, m, \end{gathered} \tag{2}$$

где справа стоят ряды по возрастающим степеням $1/z$, $P_{n,j}$ – полиномиальная часть степенного разложения $Q_n f_j$ в точке $z = \infty$. Действительно, построение многочлена Q_n сводится к нахождению нетривиального решения однородной системы линейных уравнений, в которой число уравнений равно $|n|$, а число неизвестных (коэффициентов многочлена Q_n) равно $|n| + 1$; тем самым, нетривиальное решение всегда существует. Для любого решения задачи (2) рациональные функции

$$R_{n,j} = \frac{P_{n,j}}{Q_n}, \qquad j = 1, \dots, m,$$

называются *аппроксимациями Эрмита–Паде* (или *совместными аппроксимациями Паде*) для набора степенных рядов (1).

Если любой многочлен Q_n, удовлетворяющий соотношениям (2), с необходимостью имеет степень $|n|$, то соответствующий мультииндекс n называется *нормальным* (для набора f). Если n – нормальный индекс, то существует *единственный* (с точностью до нормирующего числового множителя) многочлен Q_n, удовлетворяющий соотношениям (2), и, тем самым, *единственный* набор $\{R_{n,j}\}$ аппроксимаций Эрмита–Паде для степенных рядов (1).

Подробнее об аппроксимациях Эрмита–Паде см. [2]–[5].

2. В этой работе изучаются аппроксимации Эрмита–Паде для систем функций *марковского типа*:

$$f_j(z) = \hat{s}_j(z) = \int \frac{ds_j(x)}{z-x}, \qquad j = 1, \dots, m, \tag{3}$$

где s_j – конечные положительные борелевские меры с компактными носителями на вещественной прямой $\mathbb{R}$; степенные разложения функций f_j в бесконечно удаленной точке имеют вид (1), где

$$c_{j,k} = \int x^k \, ds_j(x)$$

– моменты мер s_j.

Из условий (2) следует, что в рассматриваемом случае многочлен Q_n удовлетворяет следующей системе соотношений ортогональности:

$$\int Q_n(x) x^k \, ds_j(x) = 0, \qquad k = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, m. \tag{4}$$

Для функций марковского типа (3) эта система эквивалентна системе соотношений (2) и может служить определением многочленов Эрмита–Паде Q_n, соответствующих мультииндексу n (как и выше, вместе со стандартными условиями: $Q_n(z) \not\equiv 0, \deg Q_n \leqslant |n|$). Функции

$$\Phi_{n,j}(z) = \int \frac{Q_n(x)}{z-x} \, ds_j(x), \qquad j = 1, \dots, m,$$

называются *функциями второго рода*; из соотношений ортогональности (4) следует представление

$$\Phi_{n,j}(z) = \frac{1}{q(z)} \int \frac{Q_n(x) q(x)}{z-x} \, ds_j(x),$$

где q – произвольный многочлен степени не выше n_j; тем самым,

$$\Phi_{n,j}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \qquad z \to \infty.$$

Отсюда, используя очевидное тождество

$$Q_n(z) \int \frac{ds_j(x)}{z-x} - \int \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z-x} \, ds_j(x) = \int \frac{Q_n(x)}{z-x} \, ds_j(x),$$

получаем формулы для числителей соответствующих аппроксимаций Эрмита–Паде

$$P_{n,j}(z) = \int \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x}\, ds_j(x),$$

и формулы для остатков

$$\delta_{n,j} = f_j - R_{n,j} = \frac{\Phi_{n,j}}{Q_n}, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Через $\Delta(s_j)$ будем обозначать минимальный отрезок, содержащий носитель меры s_j. В дальнейшем удобно считать, что задается система отрезков $\Delta_j \subset \mathbb{R}$ и меры s_j такие, что $\Delta(s_j) = \Delta_j$, $j = 1, \dots, m$. В этой работе предполагается, что заданные отрезки Δ_j удовлетворяют следующему условию:

$(*)$ *для любых $j \neq k$ отрезки Δ_j и Δ_k или не пересекаются, или совпадают.*

Чтобы не усложнять дальнейших обозначений, удобно считать также, что допустимыми в определении функций марковского типа (3) являются знакопостоянные (положительные или отрицательные) меры s_j.

3. Остановимся сначала на двух частных (в некотором смысле – крайних) случаях систем вида (3), удовлетворяющих условию $(*)$, – системах Анжелеско и системах Никишина. Эти два случая достаточно хорошо изучены к настоящему времени (см. [4]–[14] и приведенную в этих работах библиографию).

Системы Анжелеско соответствуют случаю, когда отрезки Δ_j, $j = 1, \dots, m$, попарно не пересекаются: $\Delta_j \cap \Delta_k = \varnothing$ при $j \neq k$. Из соотношений ортогональности (4) следует, что многочлен $Q_n \not\equiv 0$ имеет по меньшей мере n_j нулей внутри отрезка Δ_j. Поскольку отрезки попарно не пересекаются, общее число нулей многочлена Q_n, $\deg Q_n \leqslant |n|$, не меньше $|n|$. Тем самым, это число равно $|n|$ и $\deg Q_n = |n|$ (свойство нормальности); как уже говорилось выше, отсюда следует единственность аппроксимаций Эрмита–Паде в рассматриваемом случае. Предельные распределения нулей многочленов Q_n и сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде $R_{n,j}$ для систем Анжелеско изучены в работе А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [7]; решения этих задач формулируются в терминах, связанных с задачей равновесия для векторных потенциалов (см. [15], а также § 3 ниже). Отвлекаясь от других параметров этой задачи отметим, что в случае системы Анжелеско соответствующая матрица взаимодействия имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Системы Никишина определяются для случая, когда все отрезки Δ_j совпадают: $\Delta_1 = \dots = \Delta_m = \Delta$. Для того чтобы свойство нормальности и единственность аппроксимаций имели место в случае совпадающих отрезков, на меры s_j должны быть наложены условия, гарантирующие "независимость" соотношений системы (4). С этой целью Е.М. Никишин [9] предложил специальную конструкцию мер s_j, также основанную на марковских функциях, и доказал для соответствующих функций (3) свойство нормальности.

Удобно ввести одно обозначение. Пусть F_1 и F_2 – непересекающиеся отрезки прямой $\mathbb{R}$, σ_1 и σ_2 – меры с носителями на F_1 и F_2 соответственно. Меру $\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle$ определим формулой

$$d\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle(x)=\int\frac{d\sigma_2(t)}{x-t}\,d\sigma_1(x)=\widehat{\sigma}_2(x)\,d\sigma_1(x);$$

$\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle$ – знакопостоянная мера с носителем на F_1.

Для системы отрезков $F_1,F_2,\dots,F_m$ таких, что $F_{j-1}\cap F_j=\varnothing$, $j=2,\dots,m$, и мер $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m$, $\operatorname{supp}\sigma_j\subset F_j$, индуктивно определим меры

$$\langle\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{k+1}\rangle=\big\langle\sigma_1,\langle\sigma_2,\dots,\sigma_{k+1}\rangle\big\rangle,\qquad k=2,\dots,m-1.$$

Меры s_j, приводящие к системе Никишина (3), определяются по заданным $\Delta=F_1,\,F_2,\dots,F_m$ и $\sigma_1,\dots,\sigma_m$:

$$s_1=\langle\sigma_1\rangle=\sigma_1,\ s_2=\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle,\ \dots,\ s_m=\langle\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m\rangle.$$

Метод, основанный на векторных потенциалах, позволил исследовать ряд асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита–Паде и для систем Никишина (см. [4], [5], [10], [13]). Отметим, что в соответствующей задаче равновесия роль "проводников" играют отрезки F_j, $j=1,\dots,m$, а матрица взаимодействия имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&\dots&0&0\\-1&2&-1&\dots&0&0\\0&-1&2&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&2&-1\\0&0&0&\dots&-1&2\end{pmatrix}.$$

В соответствии с этим, асимптотические свойства совместных аппроксимаций в случаях Анжелеско и Никишина принципиально различны (подробнее см. §5 ниже).

4. В этой статье рассматривается весьма общий класс систем функций марковского типа (3). Предполагается, что отрезки $\Delta_j=\Delta(s_j)$, $j=1,\dots,m$, удовлетворяют условию $(*)$. Мы используем идею Е.М. Никишина для построения "независимых" мер s_j в случае совпадения соответствующих отрезков $\Delta(s_j)$ (отказываясь – не только на первом, но и на каждом последующем этапе конструкции – от условия совпадения всех отрезков). В соответствии с этим рассматриваемые системы мы называем *обобщенными системами Никишина* (GN-системами). Каждая GN-система определяется с помощью (плоского) графа-дерева G, m вершин которого, по существу, нумеруют функции соответствующей системы (3). При $m=2$ наша конструкция не приводит к новым системам; условию $(*)$ удовлетворяют только системы Анжелеско и Никишина. Поясним здесь, как возникают новые системы уже при $m=3$.

Системы Анжелеско и Никишина мы связываем с графами, изображенными на рисунках 1a и 1b, соответственно.

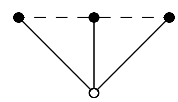

Рис. 1a.

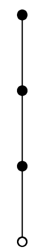

Рис. 1b.

Здесь и далее ребра графа изображаются сплошными линиями; пунктирные соединения обозначают одно из важных для дальнейшего отношений между вершинами (следование за одной и той же вершиной). Для удобства к каждому графу добавляется корневая вершина ω; эта вершина не участвует в конструкции мер s_j (функций системы (3)). Каждой из трех основных вершин графа соответствует мера σ_j с носителем на отрезке F_j. Для графа Анжелеско $\Delta_j = F_j$ и $s_j = \sigma_j$, $j = 1, 2, 3$, для графа Никишина $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = F_1$ и $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$, $s_3 = \langle\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\rangle$ (см. п. 3 выше). При $m = 3$ есть еще два графа-дерева, определяющих различные GN-системы (рис. 1c и 1d).

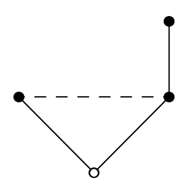

Рис. 1c.

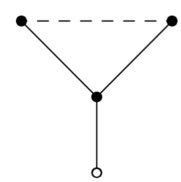

Рис. 1d.

Как и выше, каждой вершине графа (кроме корневой вершины ω) соответствуют отрезок F_j и мера σ_j, $\Delta(\sigma_j) = F_j$, $j = 1, 2, 3$. При этом, для GN-систем, соответствующих графам 1c и 1d, имеем:

$$\text{1c:}\quad \Delta_1 = F_1,\quad \Delta_2 = \Delta_3 = F_2,\quad s_1 = \sigma_1,\quad s_2 = \sigma_2,\quad s_3 = \langle\sigma_2, \sigma_3\rangle;$$
$$\text{1d:}\quad \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = F_1,\quad s_1 = \sigma_1,\quad s_2 = \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle,\quad s_3 = \langle\sigma_1, \sigma_3\rangle.$$

Основные результаты настоящей статьи относятся к асимптотическим свойствам аппроксимаций Эрмита–Паде для GN-систем. Формулируются они в терминах, связанных с равновесными мерами на “проводниках” F_j, соответствующих надлежащим задачам равновесия для векторных потенциалов. Матрицы взаимодействия зарядов в этих задачах равновесия определяются структурой графа GN-системы. Так, при $m = 3$ графам 1a–1d соответствуют следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первые две матрицы соответствуют системам Анжелеско и Никишина (см. п. 3). Уже из этих простых примеров видно, как именно матрица взаимодействия A (величины $\pm 1, 0$ вне диагонали) связана со структурой соответствующего графа.

5. В § 2 мы даем формальное определение GN-систем и доказываем для них ряд вспомогательных результатов. При этом, удобным формализмом оказывается отношение частичного порядка, естественным образом определяемое графом-деревом G. Необходимые сведения, относящиеся к задаче равновесия для векторных потенциалов, приведены в § 3. Основные результаты об асимптотических свойствах многочленов, связанных с аппроксимациями Эрмита–Паде (в частности, многочленов, удовлетворяющих системе соотношений ортогональности (4)), содержатся в § 4. В § 5 полученные асимптотические формулы применяются для изучения областей сходимости и скорости сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для GN-систем.

§ 2. Определение GN-системы. Соотношения ортогональности и свойство нормальности

1. Пусть G – граф-дерево (ниже – просто *граф*) с числом вершин, равным $m \geqslant 2$. Множество вершин графа G можно рассматривать как частично упорядоченное множество $(G, \prec)$, удовлетворяющее аксиоме индукции: каждый непустой отрезок $\{\beta : \beta \prec \alpha\}$ имеет наибольший элемент α_-. В дальнейшем удобно рассматривать также расширенный граф-дерево $\overline{G} = G \cup \{\omega\}$, где $\omega \notin G$ – наименьший элемент $\overline{G}$ (корневая вершина графа).

Отношение "непосредственного исследования" для вершин α_- и α является ребром графа G или $\overline{G}$; мы будем писать $\beta \to \alpha$, если $\beta = \alpha_-$. Через α_+ обозначим множество всех минимальных элементов множества $\{\beta : \beta \succ \alpha\}$; ясно, что α_+ – это множество всех вершин, "непосредственно следующих" за α: $\alpha_+ = \{\beta : \alpha \to \beta\}$. Отношение "соседства", в котором находятся элементы множества α_+, изображается пунктирной линией на рисунках 1. Мы будем писать $\beta \leftrightarrow \gamma$, если для некоторого α элементы β и γ принадлежат α_+ или, что то же самое, "непосредственно следуют" за α.

Пусть каждому $\alpha \in G$ приведены в соответствие отрезок F_α вещественной прямой $\mathbb{R}$ и (конечная положительная борелевская) мера σ_α с носителем на отрезке F_α. Всюду в дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия:

i) *два отрезка из множества* $\{F_\alpha : \alpha \in G\}$ *не пересекаются, если их индексы связаны отношением "непосредственного следования"* $\to$ *или отношением "соседства"* $\leftrightarrow$.

ii) *производная* $\sigma'_\alpha = d\sigma_\alpha/dx$ *от абсолютно непрерывной составляющей меры* σ_α *положительна почти всюду* (*относительно меры Лебега*) *на отрезке* F_α:

$$\sigma'_\alpha(x) > 0 \quad \text{п.в. на} \quad F_\alpha, \qquad \alpha \in G.$$

Каждому элементу $\alpha \in G$ соответствует единственная цепочка элементов графа G, имеющая вид:

$$\gamma \to \cdots \to \beta \to \alpha, \qquad \gamma \in \omega_+;$$

эту цепочку будем называть *определяющей* для элемента $\alpha \in G$.

Определение. *Обобщенной системой Никишина* (GN*-системой*), соответствующей графу G и заданному набору мер $\{\sigma_\alpha : \alpha \in G\}$, назовем систему марковских функций

$$f_\alpha(z) = \hat{s}_\alpha(z) = \int \frac{ds_\alpha(x)}{z-x}, \qquad s_\alpha = \langle \sigma_\gamma, \dots, \sigma_\beta, \sigma_\alpha \rangle, \quad \alpha \in G, \tag{5}$$

где $\gamma \to \dots \to \beta \to \alpha$ – цепочка, определяющая элемент α.

Непосредственно в терминах $\sigma_\gamma, \dots, \sigma_\alpha$ функции f_α определяются по формулам:

$$f_\alpha(z) = \int \frac{d\sigma_\gamma(x_1) \cdots d\sigma_\beta(x_{j-1})\, d\sigma_\alpha(x_j)}{(z-x_1)(x_1-x_2)\cdots(x_{j-1}-x_j)}\,, \qquad \alpha \in G. \tag{6}$$

Для GN-системы $f = \{f_\alpha : \alpha \in G\}$ и мультииндекса $n = \{n_\alpha : \alpha \in G\}$ рассмотрим задачу Эрмита–Паде. Существует многочлен Q_n, удовлетворяющий условиям

$$\begin{gathered} Q_n(z) \not\equiv 0, \qquad \deg Q_n \leqslant |n| = \sum_{\alpha \in G} n_\alpha, \\ (Q_n f_\alpha - P_{n,\alpha})(z) = O\biggl(\frac{1}{z^{n_\alpha+1}}\biggr), \qquad z \to \infty, \quad \alpha \in G, \end{gathered} \tag{7}$$

где $P_{n,\alpha}$ – некоторые многочлены (полиномиальные части степенных разложений функций $Q_n f_\alpha$ в бесконечно удаленной точке). Фигурирующие здесь многочлены называются многочленами Эрмита–Паде, а рациональные функции

$$R_{n,\alpha} = \frac{P_{n,\alpha}}{Q_n}\,, \qquad \alpha \in G,$$

– *аппроксимациями Эрмита–Паде* (или *совместными аппроксимациями Паде*) системы f, соответствующими мультииндексу n.

Из соотношений (7) следует, что многочлен Q_n удовлетворяет следующей системе соотношений ортогональности

$$\int Q_n(x) x^k \, ds_\alpha(x) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n_\alpha - 1, \quad \alpha \in G. \tag{8}$$

Справедливы формулы, приведенные в п. 2, § 1 в связи с функциями второго рода

$$\Phi_{n,\alpha}(z) = \int \frac{Q_n(x)}{z-x}\, ds_\alpha(x), \qquad \alpha \in G$$

(во всех этих формулах индекс j заменяется индексом α).

Носителями мер s_α, $\alpha \in G$, являются (попарно непересекающиеся) отрезки F_γ, $\gamma \in \omega_+$; при этом, число мер s_α с носителями на фиксированном отрезке F_γ, отличных от σ_γ, равно числу элементов множества $\{\beta : \beta \succ \gamma\}$.

2. Всюду в дальнейшем будем считать, что компоненты мультииндекса n удовлетворяют следующему условию:

$$\textit{если}\ \ \alpha \prec \beta, \quad \textit{то}\ \ n_\beta \leqslant n_\alpha + 1 \tag{9}$$

(иначе говоря, функция $n\colon G \to \mathbb{Z}_+$ почти монотонна на графе G). В этом параграфе мы считаем, что мультииндекс n фиксирован; зависимость рассматриваемых функций от n не указывается явно в дальнейших обозначениях (в этом параграфе).

Исходя из многочлена Q рассмотрим функции Ψ_α, определяемые по индукции:

$$\Psi_\omega(z) = Q(z), \qquad \Psi_\alpha(z) = \int \frac{\Psi_{\alpha_-}(x)}{z-x}\, d\sigma_\alpha(x), \quad \alpha \in G. \tag{10}$$

Фиксируем $\alpha \in \overline{G}$; положим

$$G_\alpha = \{\beta : \beta \succ \alpha\}, \qquad \overline{G}_\alpha = G_\alpha \cup \{\alpha\}$$

(α – корневая вершина графа $\overline{G}_\alpha$). Для любого $\beta \in G_\alpha$ определим меры s^α_β по графу G_α так, как были определены выше меры s_α по графу $G = G_\omega$ (для $\beta \in G_\alpha$ единственным образом определена цепочка $\gamma \to \cdots \to \beta$, где $\gamma \in \alpha_+$; полагаем $s^\alpha_\beta = \langle \sigma_\gamma, \dots, \sigma_\beta \rangle$).

Предложение 1. *Для любого $\alpha \in \overline{G}$ функция Ψ_α удовлетворяет следующей системе соотношений ортогональности*:

$$\int \Psi_\alpha(x) x^k\, ds^\alpha_\beta(x) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n_\beta - 1, \quad \beta \in G_\alpha. \tag{11}$$

Доказательство. Применим индукцию по α. Поскольку $\Psi_\omega = Q$, $s^\omega_\beta = s_\beta$ и $G_\omega = G$, система (11) при $\alpha = \omega$ совпадает с системой (8). Проведем шаг индукции; предположим, что соотношения (11) справедливы для функции Ψ_{α_-}. Имеем

$$\begin{aligned}
\int \Psi_\alpha(x) x^k\, ds^\alpha_\beta(x) &= \int x^k\, ds^\alpha_\beta(x) \int \frac{\Psi_{\alpha_-(t)}}{x-t}\, d\sigma_\alpha(t) \\
&= \int \Psi_{\alpha_-}(t)\, d\sigma_\alpha(t) \int \frac{(x^k - t^k) + t^k}{x-t}\, ds^\alpha_\beta(x) \\
&= \int \Psi_{\alpha_-}(t) p_{k-1}\, d\sigma_\alpha(t) - \int \Psi_{\alpha_-}(t) t^k \int \frac{ds^\alpha_\beta(x)}{t-x}\, d\sigma_\alpha(t),
\end{aligned}$$

где p_{k-1} – многочлен степени не выше $k-1$. Поскольку $\alpha \in (\alpha_-)_+$, имеем $\sigma_\alpha = s^{\alpha_-}_\alpha$; по предположению индукции,

$$\int \Psi_{\alpha_-(t)} p_{k-1}(t)\, ds^{\alpha_-}_\alpha(t) = 0$$

для $k \leqslant n_\alpha$. Так как $\alpha \prec \beta$ для всех $\beta \in G_\alpha$, имеем $n_\beta - 1 \leqslant n_\alpha$ (см. условие (9)) и, тем самым, этот интеграл равен нулю для всех рассматриваемых k.

Для данного β цепочка индексов, определяющая меру $s_\beta^{\alpha_-}$, имеет вид $\alpha \to \gamma \to \dots \to \beta$, где $\gamma \to \dots \to \beta$ – цепочка, определяющая меру s_β^α; тем самым,

$$ds_\beta^{\alpha_-}(t) = d\langle \sigma_\alpha, s_\beta^\alpha \rangle(t) = \int \frac{ds_\beta^\alpha(x)}{t-x}\, d\sigma_\alpha(t).$$

Из сказанного выше и индуктивного предположения получаем требуемые соотношения

$$\int \Psi_\alpha(x) x^k \, ds_\beta^\alpha(x) = \int \Psi_{\alpha_-}(x) x^k \, ds_\beta^{\alpha_-}(x) = 0$$

для $k = 0, 1, \dots, n_\beta - 1$ и $\beta \in G_\alpha$. Предложение доказано.

Применяя предложение 1 к функции Ψ_{α_-} при $\beta = \alpha$ и используя тот факт, что $s_\alpha^{\alpha_-} = \sigma_\alpha$, и соответствующие соотношения ортогональности

$$\int \Psi_{\alpha_-}(x) x^k \, d\sigma_\alpha(x) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n_\alpha - 1, \tag{12}$$

получаем

$$\Psi_\alpha(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_\alpha+1}}\right), \qquad z \to \infty, \quad \alpha \in G.$$

Для доказательства достаточно разложить ядро $1/(z-x)$ в представлении (10) по степеням $1/z$ и воспользоваться последними соотношениями ортогональности.

3. Введем ряд важных для дальнейшего обозначений. Для любого $\alpha \in G$ положим:

$$N_\alpha = \sum_{\kappa \in \overline{G}_\alpha} n_\kappa.$$

Через q_α обозначим многочлен с единичным старшим коэффициентом, множество нулей которого совпадает с множеством нулей функции Ψ_{α_-} на отрезке F_α (с учетом их кратностей). Положим $N_\alpha^* = \deg q_\alpha$ и

$$q_{\alpha_+} = \prod_{\kappa \in \alpha_+} q_\kappa;$$

если $\alpha_+ = \varnothing$, последнее выражение по определению считаем равным единице.

Предложение 2. *Для индексов $\beta \in \overline{G}$ таких, что $\beta_+ \neq \varnothing$, справедлива следующая система соотношений ортогональности*:

$$\int \Psi_\beta(x) x^k \frac{d\sigma_\alpha(x)}{q_{\alpha_+}(x)} = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, N_\alpha - 1, \quad \alpha \in \beta_+. \tag{13}$$

Докажем предложение по индукции. Заметим, что если при доказательстве предложения 1 мы применили индукцию "по возрастанию" элементов графа, то теперь мы применим индукцию "по убыванию" этих элементов. Для индекса $\beta \in \overline{G}$, $\beta_+ \neq \varnothing$, рассмотрим все цепочки вида

$$\beta \to \beta_1 \to \dots \to \beta_l, \qquad (\beta_l)_+ = \varnothing,$$

принадлежащие графу $\overline{G}$; максимально возможную длину (число ребер $\to$) цепочек такого вида обозначим через $l(\beta)$. Для рассматриваемых β имеем

$$1 \leqslant l(\beta) \leqslant l(\omega).$$

Базой индукции являются индексы β такие, что $l(\beta)=1$. Для таких β и $\alpha \in \beta_+$ имеем $\alpha_+ = \varnothing$; из предложения 1 следуют соотношения ортогональности

$$\int \Psi_{\alpha_-}(x) x^k \, d\sigma_\alpha(x) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n_\alpha - 1$$

(ср. (12)). Эти соотношения для рассматриваемых индексов совпадают с соотношениями (13), поскольку для этих индексов $\alpha_- = \beta$, $N_\alpha = n_\alpha$ и $q_{\alpha_+} = 1$.

Предположим, что соотношения (13) справедливы для всех β таких, что $1 \leqslant l(\beta) \leqslant l < l(\omega)$ и докажем их справедливость для индексов γ, $l(\gamma) = l+1$.

Фиксируем такой индекс γ; из нашего предположения следует, что соотношения (13) имеют место *для всех* $\beta \in \gamma_+$. Поскольку отрезки F_α и F_κ, $\kappa \in \alpha_+$, не пересекаются, соотношения (13) представляют собой соотношения ортогональности для Ψ_β со знакопостоянной мерой $d\sigma_\alpha / q_{\alpha_+}$ (на F_α, $\alpha \in \beta_+$). Следовательно, функция Ψ_β имеет по меньшей мере N_α перемен знака внутри отрезка F_α и, тем самым, $N^*_\alpha \geqslant N_\alpha$.

Рассмотрим функцию

$$\psi_\beta = \frac{\Psi_\beta}{q_{\beta_+}} = \frac{\Psi_\beta}{\prod_{\kappa \in \beta_+} q_\kappa}\,. \tag{14}$$

Поскольку $\beta = \alpha_-$, функция $\psi_\beta(z)$ голоморфна в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_\beta$ и

$$\psi_\beta(z) = O\biggl(\frac{1}{z^{N+1}}\biggr), \qquad z \to \infty, \tag{15}$$

где

$$N = n_\beta + \sum_{\alpha \in \beta_+} N^*_\alpha = N_\beta + \sum_{\alpha \in \beta_+} (N^*_\alpha - N_\alpha). \tag{16}$$

Используя формулу Коши для коэффициентов степенного разложения функции ψ_β в точке $z = \infty$ и интегральное представление (10), из (15)–(16) получаем

$$\int \Psi_{\beta_-}(x) x^k \, \frac{d\sigma_\beta(x)}{q_{\beta_+}(x)} = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, N_\beta - 1 + \sum_{\alpha \in \beta_+} (N^*_\alpha - N_\alpha). \tag{17}$$

Поскольку $\beta_- = \gamma$, соотношения (17) имеют место для любого $\beta \in \gamma_+$ и $N^*_\alpha \geqslant N_\alpha$ для всех $\alpha \in \beta_+$, мы доказали справедливость соотношений (13) для функции Ψ_γ. Предложение доказано.

4. Вернемся к доказательству предложения 2 и вновь используем соотношения (17). Предположим, что для некоторого $\alpha \in G$ имеет место строгое неравенство $N^*_\alpha > N_\alpha$. Тогда из (17) в применении к $\beta = \alpha_-$ следует, что число перемен знака функции Ψ_{β_-} на отрезке F_β строго больше N_β и тем самым, $N^*_\beta > N_\beta$, $\beta = \alpha_-$. Шаг за шагом "спускаясь" вдоль цепочки вида $\omega \to \gamma \to \dots \to \beta \to \alpha$, приходим к следующему утверждению: если $N^*_\alpha > N_\alpha$ для некоторого $\alpha \in G$, то существует $\gamma \in \omega_+$ такое, что $N^*_\gamma > N_\gamma$.

Покажем теперь, что $N^*_\alpha = N_\alpha$ *для всех* $\alpha \in G$. Рассмотрим многочлен $Q = \Psi_\omega$; напомним, что $Q \not\equiv 0$ и $\deg Q \leqslant |n|$. Число нулей этого многочлена на отрезке F_γ, $\gamma \in \omega_+$, равно N^*_γ; отрезки F_γ, $\gamma \in \omega_+$, попарно не пересекаются. С учетом сказанного имеем

$$|n| \geqslant \deg Q \geqslant \sum_{\gamma\in\omega_+} N^*_\gamma \geqslant \sum_{\gamma\in\omega_+} N_\gamma = |n|.$$

Предположение о том, что $N^*_\gamma > N_\gamma$ для некоторого $\gamma \in \omega_+$, приводит к противоречию, а доказанное выше утверждение – к требуемому равенству. Кроме того, из последней цепочки неравенств следует равенство

$$\deg Q = |n|.$$

Другими словами, для GN-системы (5) рассматриваемые мультииндексы n (см. условие (9)) *нормальны* и, тем самым, для данного n *существует единственный* (*с точностью до числового множителя*) *многочлен Эрмита–Паде* $Q = Q_n$ *и единственный набор аппроксимаций Эрмита–Паде* $R_\alpha = R_{n,\alpha}$, $\alpha \in G$.

Для любого $\alpha \in G$ из соотношений (13) в применении к Ψ_β, $\beta = \alpha_-$, следует, что функция Ψ_α имеет N_α перемен знака внутри отрезка F_α. Поскольку общее число нулей этой функции на F_α также равно N_α, все они – простые и лежат внутри F_α. Нами доказано

Предложение 3. *Для любого* $\alpha \in G$ *многочлен* q_α *имеет* N_α *простых нулей внутри отрезка* F_α *и* $\deg q_\alpha = N_\alpha$.

Отметим, наконец, что для многочлена Эрмита–Паде Q, нормированного условием: $Q(z) = z^{|n|} + \cdots$, имеет место равенство

$$Q = q_{\omega_+} = \prod_{\gamma\in\omega_+} q_\gamma. \tag{18}$$

Из этого равенства, с учетом предложения 3, приходим к следующему выводу о структуре нулей многочлена Q: все они – простые, лежат внутри отрезков F_γ, $\gamma \in \omega_+$, и их число внутри F_γ равно N_γ, $\gamma \in \omega_+$.

§ 3. Задача равновесия для векторных потенциалов. Равновесная мера

1. В этом параграфе мы остановимся на некоторых результатах теории потенциала, лежащих в основе изучения асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита–Паде для марковских функций. Эти результаты были получены в работах

А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [7], [15]–[17]; они применялись в ряде последующих работ, связанных с ортогональными многочленами и рациональными аппроксимациями. Детальные доказательства можно найти в монографии Е. М. Никишина и В. Н. Сорокина [4]. Здесь мы ограничиваемся формулировкой результатов в предположениях, достаточных для целей настоящей статьи.

Пусть ν – конечная положительная борелевская мера с компактным носителем в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $S(\nu)$ – носитель меры ν, $|\nu|$ – ее величина (полная вариация). Через $M_\tau(K)$, где K – компакт в $\mathbb{C}$, $\tau > 0$, будем обозначать множество мер ν таких, что $S(\nu) \subset K$ и $|\nu| = \tau$.

Логарифмический потенциал меры ν будем обозначать через V^ν:

$$V^\nu(z) = \int \log \frac{1}{|z-x|}\, d\nu(x), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Интеграл всегда существует (конечный или бесконечный); функция V^ν – гармоническая в дополнении к носителю меры и супергармоническая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Взаимной энергией мер ν_1, ν_2 называется интеграл

$$J(\nu_1, \nu_2) = \iint \log \frac{1}{|x-t|}\, d\nu_1(x)\, d\nu_2(t);$$

$J(\nu) = J(\nu, \nu)$ – энергия меры ν.

2. Пусть I – произвольное конечное множество индексов. Исходными данными задачи равновесия для векторных потенциалов являются:

$F = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ – *множество отрезков вещественной прямой* $\mathbb{R}$;
$\theta = \{\theta_\alpha : \alpha \in I\}$ – *вектор с положительными координатами*;
$A = (a_{\alpha,\beta})$, *где* $\alpha, \beta \in I$, – *вещественная симметричная матрица.*

Предполагается, что A – *положительно определенная матрица и* $a_{\alpha,\beta} = 0$ *для индексов* α, β *таких, что* $F_\alpha \cap F_\beta \neq \varnothing$.

В электростатистической интерпретации речь идет о распределении положительных зарядов на проводниках F_α при условии, что величина заряда на каждом проводнике фиксирована (равна θ_α на F_α), а взаимодействие точечных зарядов, принадлежащих одному и тому же или различным проводникам, характеризуется *матрицей взаимодействия* A.

Определим множество векторных мер $M = M_\theta(F)$ как прямое произведение множеств $M_{\theta_\alpha}(F_\alpha)$, $\alpha \in I$; элементами множества M являются меры $\mu = \{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ такие, что $S(\mu_\alpha) \subset F_\alpha$ и $|\mu_\alpha| = \theta_\alpha$ для всех $\alpha \in I$.

Для меры $\mu \in M$ определяется векторный потенциал

$$W^\mu = \bigl\{W^\mu_\alpha(x),\, x \in F_\alpha : \alpha \in I\bigr\},$$

где

$$W^\mu_\alpha(z) = \sum_{\beta \in I} a_{\alpha,\beta} V^{\mu_\beta}(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Энергия векторной меры μ, соответствующая матрице взаимодействия A, определяется формулой:

$$J(\mu)=J_A(\mu)=\sum_{\alpha,\beta\in I}a_{\alpha,\beta}J(\mu_\alpha,\mu_\beta).$$

Удобно ввести еще одно обозначение; для любой меры $\mu\in M$ положим:

$$w_\alpha^\mu=\min_{x\in F_\alpha}W_\alpha^\mu(x),\qquad \alpha\in I.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Каждая из следующих задач имеет единственное решение λ в классе M; решения этих задач совпадают*:

(A) $J(\lambda)=\min\limits_{\mu\in M}J(\mu)$;

(B) $W_\alpha^\lambda(x)=w_\alpha^\lambda,\ \ x\in S(\lambda_\alpha),\ \ \alpha\in I$;

(C) $\max\limits_{\mu\in M^\alpha(\lambda)}w_\alpha^\mu=w_\alpha^\lambda,\ \ \alpha\in I$,

где $M^\alpha(\lambda)$ – множество мер $\mu\in M$ таких, что $\mu_\beta=\lambda_\beta$ для всех $\beta\in I$, $\beta\neq\alpha$.

Мера $\lambda=\lambda(F,\theta,A)$, являющаяся решением задач (A), (B), (C), называется *экстремальной* или *равновесной мерой*, соответствующей исходным данным (F,θ,A). Наиболее важной для приложений является характеризация меры λ как решения задачи равновесия (B). Соответствующее утверждение теоремы можно сформулировать так: *существует единственная мера $\lambda\in M$ такая, что* (*для некоторых констант w_α*) *имеют место соотношения*: $W_\alpha^\lambda(x)=w_\alpha$ *на* $S(\lambda_\alpha)$ *и* $W_\alpha^\lambda(x)\geqslant w_\alpha$ *на всем отрезке* F_α, $\alpha\in I$. Отметим, что это свойство равновесия однозначно определяет и меру λ, и набор *равновесных констант* $w_\alpha=w_\alpha^\lambda$, $\alpha\in I$.

Теорема справедлива и при более общих предположениях относительно исходных данных. В частности, она справедлива (для положительно определенных матриц A) при выполнении следующего условия: если $a_{\alpha,\beta}\neq0$ (для некоторых $\alpha\neq\beta$), то отрезки F_α и F_β *не перекрываются* (если $a_{\alpha,\beta}=0$, то никаких условий на соответствующие отрезки не накладывается).

3. В этом пункте мы приведем одну теорему о предельном распределении нулей многочленов, формулируемую в терминах равновесной меры для (скалярной) задачи равновесия при наличии внешнего поля. Определение равновесной меры дается в удобном для дальнейшего виде.

Пусть Δ – отрезок вещественной прямой, g – непрерывная функция на отрезке Δ. *Существует единственная мера $\lambda\in M(\Delta)=M_1(\Delta)$ такая, что справедливо соотношение равновесия*

$$\text{(D)}\qquad 2V^\lambda(x)+g(x)=\min_\Delta(2V^\lambda+g)=w,\qquad x\in S(\lambda).$$

При этом, *равновесная мера* λ совпадает с экстремальной мерой, минимизирующей интеграл энергии (с учетом внешнего поля):

$$J_g(\lambda) = \min_{\nu \in M(\Delta)} J_g(\nu),$$

где

$$J_g(\nu) = J(\nu) + \int g \, d\nu.$$

Для любого многочлена $q \not\equiv 0$ через $\mu(q)$ будем обозначать дискретную меру, ассоциированную с его нулями (в каждом нуле многочлена q сосредотачивается масса, равная его кратности). Здесь и в дальнейшем запись $\nu_n \to \nu$ (в применении к последовательностям мер) означает *слабую сходимость*.

Теорема 2. *Пусть Λ – произвольная последовательность натуральных чисел. Предположим, что последовательность многочленов q_l, $l \in \Lambda$ ($\deg q_l = l$, старший коэффициент q_l равен единице) удовлетворяет следующим соотношениям ортогональности*:

$$\int q_l(x) x^k \, d\sigma_l(x) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, l-1, \quad l \in \Lambda,$$

где

$$d\sigma_l = e^{-g_l} \, d\sigma,$$

σ – положительная мера на отрезке Δ такая, что $d\sigma/dx > 0$ почти всюду на Δ, g_l, $l \in \Lambda$, – последовательность непрерывных функций на Δ, удовлетворяющая условию:

$$\lim_{l \in \Lambda} \frac{1}{l} g_l(x) = g(x), \qquad x \in \Delta;$$

сходимость – равномерная на отрезке Δ.

Тогда имеют место соотношения:

$$\frac{1}{l} \mu(q_l) \to \lambda, \qquad l \in \Lambda,$$

$$\lim_{l \in \Lambda} \left(\int q_l^2 \, d\sigma_l \right)^{1/l} = e^{-w},$$

где λ – решение задачи равновесия (D), *w – соответствующая равновесная константа.*

Доказательство теоремы (при более общих предположениях) содержится в работе [16].

§ 4. Предельные распределения нулей многочленов Q_n и $q_{n,\alpha}$

1. В этом параграфе мы продолжим изучение основных функций, связанных с аппроксимациями Эрмита–Паде GN-систем. Сохраняются обозначения, введенные в параграфах 2, 3; при этом, рассматривая асимптотические свойства соответствующих функций, мы явно указываем зависимость от n в их обозначениях (в отличие от пп. 2–4, § 2). Остаются в силе предположения, сделанные в § 2 относительно отрезков F_α, мер σ_α, $S(\sigma_\alpha)=F_\alpha$, и мультииндексов n.

Фиксируем распределение вероятностей $\{p_\alpha:\alpha\in G\}$ на графе G, удовлетворяющее условию: *если* $\alpha\prec\beta$, *то* $p_\alpha\geqslant p_\beta$.

Рассмотрим векторную задачу равновесия, соответствующую следующим исходным данным:

$F=\{F_\alpha:\alpha\in G\}$, *где* F_α *– носители мер* σ_α;
$\theta=\{\theta_\alpha:\alpha\in G\}$, *где*

$$\theta_\alpha=\sum_{\kappa\in\overline{G}_\alpha}p_\kappa$$

– функция распределения, соответствующая фиксированным выше p_α;
$A=(a_{\alpha,\beta})$ *– матрица взаимодействия, элементы* $a_{\alpha,\beta}$ *которой определяются следующим образом*:

$a_{\alpha,\beta}=2$, *если* $\alpha=\beta$;
$a_{\alpha,\beta}=-1$, *если индексы связаны отношением “непосредственного следования”* $\to$ $(\alpha\to\beta$ *или* $\beta\to\alpha)$;
$a_{\alpha,\beta}=1$, *если индексы связаны соотношением “соседства”* $\leftrightarrow$ $(\alpha\leftrightarrow\beta)$;
$a_{\alpha,\beta}=0$ *в остальных случаях.*

Эти данные удовлетворяют условиям теоремы 1 (см. условие i), п. 1, § 2). Всюду в дальнейшем соответствующую равновесную (экстремальную) меру обозначаем через $\lambda=\{\lambda_\alpha:\alpha\in G\}$.

2. Рассмотрим произвольную последовательность $\Theta:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}_+^m$ мультииндексов $n=\{n_\alpha:\alpha\in G\}$, $|n|\to\infty$, для которой выполнены условия:

$$\lim_{n\in\Theta}\frac{n_\alpha}{|n|}=p_\alpha,\qquad \alpha\in G. \tag{19}$$

Пусть $q_{n,\alpha}=q_\alpha$ – многочлены, определенные в п. 3, § 2. Нули многочлена $q_{n,\alpha}$ лежат внутри отрезка F_α, все они – простые и

$$\deg q_{n,\alpha}=N_{n,\alpha}=\sum_{\kappa\in\overline{G}_\alpha}n_\kappa$$

(см. предложение 3). Из (19) следуют соотношения

$$\lim_{n\in\Theta}\frac{N_{n,\alpha}}{|n|}=\theta_\alpha,\qquad \alpha\in G.$$

Как и выше, через $\mu(q)$ обозначается дискретная мера, ассоциированная с многочленом q (совокупность единичных масс, сосредоточенных в нулях многочлена q). Следующая теорема характеризует предельное распределение нулей многочленов $q_{n,\alpha}$, $n\in\Theta$ (или, что то же самое, предельное распределение нулей функций $\Psi_{n,\alpha_-}=\Psi_{\alpha_-}$ на отрезке F_α; см. (10)).

Теорема 3. *Для любого $\alpha \in G$ справедливы предельные соотношения*

$$\frac{1}{|n|}\mu(q_{n,\alpha}) \to \lambda_\alpha, \qquad n \in \Theta. \tag{20}$$

Соотношения (20) можно записать в эквивалентной форме:

$$\lim_{n\in\Theta} |q_{n,\alpha}(z)|^{1/|n|} = \exp\bigl(-V^{\lambda_\alpha}(z)\bigr), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus F_\alpha, \quad \alpha \in G;$$

сходимость – равномерная внутри (на компактных подмножествах) дополнения к отрезку F_α.

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся предложением 2 (соотношениями ортогональности (13)). Фиксируем произвольное $\alpha \in G$; пусть $\beta = \alpha_-$. Из (14) (с учетом зависимости фигурирующих ниже функций от n) следует

$$\Psi_{n,\beta} = \psi_{n,\beta} \prod_{\kappa\in\beta_+} q_{n,\kappa}; \tag{21}$$

выделяя в этом произведении множитель $q_{n,\alpha}$, из (13) получаем

$$\int q_{n,\alpha}(x)x^k h_{n,\alpha}(x)\,d\sigma_\alpha(x) = 0, \qquad k = 0,1,\dots,N_\alpha - 1, \quad \alpha \in G, \tag{22}$$

где

$$h_{n,\alpha} = |\psi_{n,\beta}| \left| \frac{\prod_{\kappa\in\beta_+,\kappa\neq\alpha} q_{n,\kappa}}{\prod_{\kappa\in\alpha_+} q_{n,\kappa}} \right|. \tag{23}$$

Тем самым, многочлены $q_{n,\alpha}$ – ортогональные многочлены относительно переменных (зависящих от n) мер

$$d\sigma_{n,\alpha} = h_{n,\alpha}\,d\sigma_\alpha.$$

Далее положим

$$\mu_{n,\alpha} = \frac{1}{|n|}\mu(q_{n,\alpha}), \qquad \alpha \in G.$$

Пусть $\mu_n = \{\mu_{n,\alpha} : \alpha \in G\}$ – соответствующая векторная мера. Докажем, что равновесная мера λ – *единственная* предельная точка последовательности μ_n, $n \in \Theta$; отсюда, очевидно, следует (слабая) сходимость $\mu_n \to \lambda$, $n \in \Theta$, что эквивалентно утверждению теоремы 3.

Пусть $\mu = \{\mu_\alpha : \alpha \in G\}$ – произвольная предельная точка последовательности μ_n, $n \in \Theta$. Это означает, что $\mu_n \to \mu$ по некоторой подпоследовательности $\Lambda \subset \Theta$. Все предельные переходы ниже (в процессе доказательства теоремы) осуществляются по этой подпоследовательности.

Рассмотрим предельное поведение весовых функций $h_{n,\alpha}$. Индексы κ, фигурирующие в (23), связаны с индексом α одним из соотношений: $\leftrightarrow$ или $\to$. Следовательно, для этих индексов отрезки F_κ не пересекаются с отрезком F_α (§ 2, условие i)) и

$$-\lim \frac{1}{|n|}\log\bigl|q_{n,\kappa}(x)\bigr| = \lim V^{\mu_{n,\kappa}}(x) = V^{\mu_\kappa}(x), \qquad x \in F_\alpha;$$

тем самым,

$$-\lim \frac{1}{|n|} \log\left|\frac{\prod_{\kappa\in\beta_+,\kappa\neq\alpha} q_{n,\kappa}(x)}{\prod_{\kappa\in\alpha_+} q_{n,\kappa}(x)}\right| = \sum_{\kappa\in\beta_+,\kappa\neq\alpha} V^{\mu_\kappa}(x) - \sum_{\kappa\in\alpha_+} V^{\mu_\kappa}(x), \quad x\in F_\alpha; \tag{24}$$

сходимость – равномерная на F_α.

Перейдем теперь к функциям $\psi_{n,\beta}$ (см. (23)). Заметим, что $\psi_{n,\omega}\equiv 1$ (см. (14)) и рассмотрим сначала случай, когда $\alpha\in\omega_+$, $\beta=\omega$. Воспользуемся теоремой 2; из соотношений ортогональности (22) и формул (23) (с $\psi_{n,\omega}\equiv 1$), (24) (мы используем также условие ii), § 2, наложенное на меры σ_α) следует, что функция

$$W^\mu_\alpha = 2V^{\mu_\alpha} + \sum_{\kappa\in\beta_+,\kappa\neq\alpha} V^{\mu_\kappa} - \sum_{\kappa\in\alpha_+} V^{\mu_\kappa},$$

(α-компонента векторного потенциала W^μ для рассматриваемой матрицы A и $\alpha\in\omega_+$) удовлетворяет условиям равновесия

$$W^\mu_\alpha(x) = \min_{F_\alpha} W^\mu_\alpha = w_\alpha, \qquad x\in S(\mu_\alpha),$$

и

$$-\lim \frac{1}{|n|}\log\left(\int q^2_{n,\alpha}\,d\sigma_{n,\alpha}\right) = w_\alpha, \qquad \alpha\in\omega_+. \tag{25}$$

В связи с приведенной выше формулой для W^μ_α отметим, что сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю.

Для $\beta=\alpha_-\in G$ представим функцию $\psi_{n,\beta}$ по интегральной формуле Коши (в дополнении к F_β); используя (10), получаем

$$\psi_{n,\beta}(z) = \int \frac{q_{n,\beta}(t)}{z-t}\,d\sigma_{n,\beta}(t).$$

С учетом соотношений ортогональности (22) (в применении к $q_{n,\beta}$) отсюда приходим к формуле

$$\psi_{n,\beta}(z) = \frac{1}{q_{n,\beta}(z)}\int \frac{q^2_{n,\beta}(t)}{z-t}\,d\sigma_{n,\beta}(t), \qquad z\in\mathbb{C}\setminus F_\beta. \tag{26}$$

Поскольку $\beta\to\alpha$, отрезок F_β не пересекается с F_α и, тем самым, последняя формула справедлива для $z=x\in F_\alpha$.

Продолжим доказательство теоремы, сделав следующее *предположение*: для индекса $\beta=\alpha_-$ существует конечный предел

$$v_\beta = -\lim \frac{1}{|n|}\log\left(\int q^2_{n,\beta}\,d\sigma_{n,\beta}\right). \tag{27}$$

В этом предположении из (26) получаем

$$-\lim \frac{1}{|n|}\log\bigl|\psi_{n,\beta}(x)\bigr| = -V^{\mu_\beta}(x) + v_\beta, \qquad x\in F_\alpha, \quad \beta=\alpha_-. \tag{28}$$

Из (23), учитывая (24) и (28), на F_α получаем

$$-\lim \frac{1}{|n|} \log h_{n,\alpha} = g_\alpha = \sum_{\kappa\in\beta_+,\kappa\neq\alpha} V^{\mu_\kappa} - \sum_{\kappa\in\alpha_+} V^{\mu_\kappa} - V^{\mu_\beta} + v_\beta, \qquad \beta = \alpha_-;$$

переход к пределу – равномерный на F_α. Тем самым, к многочленам $q_{n,\alpha}$ применима теорема 2; из этой теоремы следует, что функция

$$W^\mu_\alpha = 2V^{\mu_\alpha} + g_\alpha - v_\beta = \sum_{\kappa\in G} a_{\alpha,\kappa} V^{\mu_\kappa}$$

(α-компонента векторного потенциала W^μ, соответствующего рассматриваемой матрице A и векторной мере $\mu \in M_\theta(F)$ для $\alpha \notin \omega_+$) удовлетворяет условиям равновесия:

$$W^\mu_\alpha(x) = \min_{F_\alpha} W^\mu_\alpha = w_\alpha, \qquad x \in S(\mu_\alpha). \tag{29}$$

Кроме того, существует конечный предел

$$v_\alpha = -\lim \frac{1}{|n|} \log \left(\int q^2_{n,\alpha}\, d\sigma_{n,\alpha} \right) = w_\alpha + v_\beta, \qquad \beta = \alpha_-. \tag{30}$$

Отметим сначала следующее. Предположив, что существует конечный предел (27) для индекса $\beta = \alpha_-$, мы доказали то же для индекса α; для индексов, принадлежащих ω_+, соответствующее утверждение доказано выше (см. (25)). Следовательно (индукция вдоль цепочки $\gamma \to \dots \to \beta \to \alpha$, где $\gamma \in \omega_+$), наше *предположение доказано* (для любого индекса графа G); при этом, величины v_α определяются через константы равновесия индуктивно: $v_\alpha = w_\alpha + v_{\alpha_-}$ и из (25) следует, что можно положить $v_\omega = 0$.

Тем самым, доказано, что мера μ удовлетворяет условиям равновесия (29) для всех индексов $\alpha \in G$. Из теоремы 1 следует, что $\mu = \lambda$ (единственность равновесной меры).

Теорема доказана.

3. Учитывая равенство (18), получаем основное следствие теоремы 3 – теорему о предельном распределении нулей многочленов Эрмита–Паде Q_n (многочленов, удовлетворяющих системы соотношений ортогональности (8)) для GN-систем.

Теорема 4. *Справедливо предельное соотношение*

$$\frac{1}{|n|}\mu(Q_n) \to \sum_{\kappa\in\omega_+} \lambda_\kappa, \qquad n \in \Theta.$$

Выделим также соотношение, полученное нами в процессе доказательства теоремы 3 (с учетом того, что сходимость векторных мер μ_n доказана для $n \in \Theta$; ср. (30)):

$$\lim_{n\in\Theta} \left(\int q^2_{n,\alpha}\, d\sigma_{n,\alpha} \right)^{1/|n|} = e^{-v_\alpha}, \qquad \alpha \in G, \tag{31}$$

где

$$v_\alpha = w_\alpha + v_{\alpha_-}, \qquad v_\omega = 0; \tag{32}$$

w_α – равновесные константы рассматриваемой задачи равновесия. Из (32) следует, что $v_\alpha = w_\gamma + \dots + w_\beta + w_\alpha$, $\gamma \to \dots \to \beta \to \alpha$ – цепочка, определяющая индекс α.

Из интегрального представления (26) (для индекса α вместо β) следует, что $\psi_{n,\alpha}(z) \neq 0$ для $z \in \mathbb{C} \setminus F_\alpha$; тем самым, функция $\Psi_{n,\alpha}$ не имеет в дополнении к F_α нулей, отличных от нулей многочленов $q_{n,\kappa}$, $\kappa \in \beta_+$. Следующая теорема является следствием теоремы 3 и соотношений, полученных в процессе ее доказательства (см. (21), (26), с заменой β на α, и (31)–(32)).

Теорема 5. *Для любого $\alpha \in G$ справедлива следующая асимптотическая формула*:

$$\lim_{n \in \Theta} |\Psi_{n,\alpha}|^{1/|n|} = \exp\biggl(V^{\lambda_\alpha} - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\lambda_\kappa} - v_\alpha\biggr), \tag{33}$$

где $v_\alpha = w_\gamma + \ldots + w_\alpha$ (суммирование – по цепочке индексов, определяющей индекс α).

Формула (33) справедлива в дополнении к объединению отрезков F_α и F_κ, $\kappa \in \alpha_+$ (равномерно – внутри этого дополнения). При этом, на отрезках F_κ, $\kappa \in \alpha_+$, имеет место оценка

$$\limsup_{n \in \Theta} |\Psi_{n,\alpha}|^{1/|n|} \leqslant \exp\biggl(V^{\lambda_\alpha} - \sum_{\kappa \in \alpha_+} V^{\lambda_\kappa} - v_\alpha\biggr);$$

верхняя регуляризация левой части восстанавливает равенство и на этих отрезках.

§ 5. О сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для GN-систем

1. В основе асимптотического анализа вопросов сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для марковских функций (в частности, для GN-систем) лежат формулы для остатков (см. § 1, п. 2):

$$\delta_{n,\alpha} = f_\alpha - R_{n,\alpha} = \frac{1}{Q_n} \Phi_{n,\alpha}, \qquad \alpha \in G. \tag{34}$$

Наша цель – изучить области геометрической сходимости (и расходимости) рассматриваемых аппроксимаций для GN-систем. Из теоремы 4 следует, что равномерно внутри области

$$D = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\kappa \in \omega_+} F_\kappa$$

имеет место соотношение

$$\lim_{n \in \Theta} |Q_n|^{1/|n|} = \exp\biggl(-\sum_{\kappa \in \omega_+} V^{\lambda_\kappa}\biggr). \tag{35}$$

Тем самым, вопрос о предельном поведении последовательности $|\delta_{n,\alpha}|^{1/|n|}$ сводится к соответствующему вопросу для функций второго рода $\Phi_{n,\alpha}$. Установив связь между функциями типа Φ и Ψ, мы сможем применить результаты предыдущего параграфа для анализа рассматриваемой задачи.

2. Заметим сначала, что для индексов $\alpha \in \omega_+$ (и только для этих индексов) функции $\Phi_{n,\alpha}$ и $\Psi_{n,\alpha}$ совпадают:

$$\Phi_{n,\alpha}(z) = \Psi_{n,\alpha}(z) = \int \frac{Q_n(x)}{z-x}\, d\sigma_\alpha(x), \qquad \alpha \in \omega_+.$$

Отсюда, с учетом (33) и (35), следует

Предложение 4. *Для любого графа G и индексов $\alpha \in \omega_+$ справедливы соотношения*

$$\lim_{n\in\Theta} |\delta_{n,\alpha}(z)|^{1/|n|} = \exp\bigl(W_\alpha^\lambda(z) - w_\alpha\bigr), \qquad z \in D \setminus \bigcup_{\kappa\in\alpha_+} F_\kappa. \tag{36}$$

Для верхнего предела (вместо предела) в левой части (36) соответствующая оценка сверху имеет место во всей области D (см. замечание к теореме 5).

Системы Анжелеско соответствуют графам G, для которых $G = \omega_+$. Последнее предложение для этих систем доказано в работе [7]. В этом случае для любого $\alpha \in G$ область

$$\Omega_\alpha^c = \bigl\{z \in D : W_\alpha^\lambda(z) - w_\alpha < 0\bigr\},$$

где

$$W_\alpha^\lambda = V^{\lambda_\alpha} + \sum_{\kappa\in G} V^{\lambda_\kappa},$$

является *областью сходимости* аппроксимаций $R_{n,\alpha}$ к функции f_α. Поскольку $W_\alpha^\lambda(z) \to -\infty$ при $z \to \infty$, эта область содержит окрестность бесконечно удаленной точки; тем самым, $\Omega_\alpha^c \neq \varnothing$ для любого α. Открытое множество

$$\Omega_\alpha^d = \bigl\{z \in D : W_\alpha^\lambda(z) - w_\alpha > 0\bigr\}$$

(которое может быть пустым) является *областью расходимости* последовательности $R_{n,\alpha}$. Возникновение областей расходимости связано с эффектом отталкивания положительных зарядов, принадлежащих различным отрезкам F_κ, $\kappa \in G$. Если (в результате такого отталкивания) имеем $S(\lambda_\alpha) \neq F_\alpha$, то граница области сходимости Ω_α^c содержит носитель $S(\lambda_\alpha)$ и кривую

$$\Gamma_\alpha = \bigl\{z \in D : W_\alpha^\lambda(z) = w_\alpha\bigr\},$$

охватывающую множество $F_\alpha \setminus S(\lambda_\alpha)$, на котором $W_\alpha^\lambda > w_\alpha$ (см. условие равновесия в задаче (B) теоремы 1). Часть области D, лежащая внутри кривой Γ_α, принадлежит области расходимости Ω_α^d; кривая Γ_α может состоять из одной или двух компонент, охватывающих концевые точки отрезка F_α (подробнее см. [7]).

Сказанное выше в связи с системами Анжелеско, по существу, остается в силе для индексов $\alpha \in \omega_+$ произвольного графа G – при условии, что число элементов множества $\omega_+ \geqslant 2$ (случай, когда множество ω_+ состоит из одного элемента α, мы отдельно обсудим ниже). Для индексов $\alpha \in \omega_+$ таких, что $\alpha_+ = \varnothing$, картина совершенно аналогична описанной выше. Если $\alpha_+ \neq \varnothing$, то выражение для

α-компоненты W_α^λ векторного потенциала равновесной меры λ содержит дополнительные слагаемые (потенциалы отрицательных зарядов $-V^{\lambda_\kappa} = V^{-\lambda_\kappa}$), соответствующие индексам $\kappa \in \alpha_+$:

$$W_\alpha^\lambda = V^{\lambda_\alpha} + \sum_{\kappa\in\omega_+} V^{\lambda_\kappa} - \sum_{\kappa\in\alpha_+} V^{\lambda_\kappa}.$$

Это связано с интересным фактом – наличием дополнительных (кроме $z = \infty$) точек, в которых аппроксимации $R_{n,\alpha}$ интерполируют функцию f_α. Для рассматриваемых α ($\alpha \in \omega_+$, $\alpha_+ \neq \varnothing$) имеем

$$\Phi_{n,\alpha}(z) = \frac{\prod_{\kappa\in\alpha_+} q_{n,\kappa}(z)}{q_{n,\alpha}(z)} \int \frac{q_{n,\alpha}^2(x)}{z-x}\, d\sigma_{n,\alpha}(x), \qquad z \in \mathbb{C}\setminus F_\alpha.$$

Тем самым, разность $f - R_{n,\alpha}$ обращается в нуль во всех нулях многочленов $q_{n,\kappa}$, $\kappa \in \alpha_+$ (кроме нуля порядка $|n| + n_\alpha + 1$ в точке $z = \infty$; общий порядок интерполяции равен $|n| + N_\alpha + 1$). Отрицательные слагаемые в формуле для W_α^λ связаны с этими нулями (точнее, их предельными распределениями λ_κ, $\kappa \in \alpha_+$). Для рассматриваемых индексов области сходимости Ω_α^c содержат окрестность бесконечности (тем самым, $\Omega_\alpha^c \neq \varnothing$); отмеченный выше эффект и в этом случае может привести к (непустым) областям расходимости Ω_α^d.

В случае, когда *множество* ω_+ *состоит из одного элемента* α, имеем

$$W_\alpha^\lambda = 2V^{\lambda_\alpha} - \sum_{\kappa\in\alpha_+} V^{\lambda_\kappa}.$$

Неравенство $W_\alpha^\lambda(z) < w_\alpha$ выполняется в окрестности точки $z = \infty$; действительно,

$$W_\alpha^\lambda(z) \sim (1+p_\alpha)\log\frac{1}{|z|} \to -\infty, \qquad z \to \infty.$$

Функция W_α^λ субгармонична в области $\mathbb{C}\setminus S(\lambda_\alpha)$ и равна w_α на $S(\lambda_\alpha)$; по принципу максимума, неравенство $W_\alpha^\lambda(z) < w_\alpha$ справедливо во всей этой области. Тем самым, в рассматриваемом случае *область сходимости* Ω_α^c *совпадает со всей областью* D; *при этом* $S(\lambda_\alpha) = F_\alpha$ (см. задачу (B) теоремы 1).

3. Прежде чем обсуждать вопрос о сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для индексов $\alpha \notin \omega_+$, установим связь между функциями $\Phi_{n,\alpha}$ и $\Psi_{n,\alpha}$ для произвольных $\alpha \in G$. Воспользуемся (непосредственно следующими из определений) интегральными представлениями этих функций по мерам σ_κ, где индекс κ пробегает цепочку элементов графа G, определяющую элемент α. Пусть $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \dots \to \alpha_k = \alpha$, $\alpha_1 \in \omega_+$, – такая цепочка; полагая $\sigma_{\alpha_i} = \sigma_i$, $i = 1, \dots, k$, имеем:

$$\Phi_{n,\alpha}(z) = \int \frac{Q_n(x_1)\, d\sigma_1(x_1)\, d\sigma_2(x_2)\cdots d\sigma_k(x_k)}{(z-x_1)(x_1-x_2)\cdots(x_{k-1}-x_k)}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus F_{\alpha_1},$$

$$\Psi_{n,\alpha}(z) = \int \frac{Q_n(x_1)\, d\sigma_1(x_1)\, d\sigma_2(x_2)\cdots d\sigma_k(x_k)}{(x_2-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(z-x_k)}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus F_{\alpha_k}$$

(ср. (6)). Отсюда получаем

$$\Phi_{n,\alpha}(z)+(-1)^k\Psi_{n,\alpha}(z)=\int\frac{Q_n(x_1)(x_1-x_k)\,d\sigma_1(x_1)\,d\sigma_2(x_2)\cdots d\sigma_k(x_k)}{(z-x_1)(x_1-x_2)\cdots(x_{k-1}-x_k)(z-x_k)};$$

полагая здесь $(x_1-x_k)=(x_1-x_2)+\dots+(x_{k-1}-x_k)$, после очевидных преобразований приходим к формуле

$$\Psi_{n,\alpha}(z)=\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\hat{s}_k^l(z)\Phi_{n,\alpha_l}(z),\qquad z\in\mathbb{C}\setminus(F_{\alpha_1}\cup F_{\alpha_k}),$$

где $\hat{s}_k^l$ – марковская функция, построенная по мере $s_k^l=\langle\sigma_{l+1},\dots\sigma_k\rangle$, $\hat{s}_k^k=1$ (ср. §2, п. 2). Применяя эту формулу для $\alpha=\alpha_k,\alpha_{k-1},\dots,\alpha_1$, получаем (треугольную) систему линейных уравнений, из которой находим выражение $\Phi_{n,\alpha}$ через $\Psi_{n,\kappa}$, $\kappa=\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k=\alpha$:

$$\Phi_{n,\alpha}(z)=\sum_{l=1}^{k}u_l(z)\Psi_{n,\alpha_l}(z),\qquad z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{l=1}^{k}F_{\alpha_l};\tag{37}$$

здесь u_l – функции, не зависящие от мультииндекса n $\bigl(u_k=(-1)^{k-1}\bigr)$.

4. Формула (37) позволяет применить теорему 5 для анализа общей картины областей сходимости и расходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для GN-систем. Имея в виду соотношение (33), для любого $\alpha\in G$ положим

$$U_\alpha^\lambda=V^{\lambda_\alpha}-\sum_{\kappa\in\alpha_+}V^{\lambda_\kappa}-v_\alpha;$$

отметим, что

$$U_\alpha^\lambda(z)\sim p_\alpha\log\frac{1}{|z|}\to-\infty,\qquad z\to\infty.$$

Фиксируем элемент $\alpha\in G$; поскольку предложение 4 решает рассматриваемый вопрос для элементов $\alpha\in\omega_+$, будем считать, что $\alpha\in G-\omega_+$. Пусть, как и выше, $\alpha_1\to\dots\to\alpha_k=\alpha$ ($\alpha_1\in\omega_+$) – цепочка, определяющая элемент α. Из (33) и (37) следует, что в области D – за исключением конечного числа разрезов (аналитических дуг и кривых, в частности, некоторых из отрезков F_κ) справедлива одна из асимптотических формул вида:

$$\lim_{n\in\Theta}|\Phi_{n,\alpha}|^{1/|n|}=\exp U_{\alpha_l}^\lambda,\qquad l\in\{1,\dots,k\}.\tag{38}$$

Точнее, для любого $l\in\{1,\dots,k\}$ положим

$$D_l=\bigl\{z\in D:U_{\alpha_l}^l(z)>U_{\alpha_i}^\lambda(z)\ \textit{для любого}\ i\neq l\bigr\};$$

некоторые из множеств D_l могут быть пустыми. Соотношение (38) имеет место в D_l (кроме, быть может, дискретного множества), причем всюду в области D справедливо неравенство

$$\limsup_{n\in\Theta}|\Phi_{n,\alpha}|^{1/|n|}\leqslant\exp\varphi_\alpha,\quad \varphi_\alpha(z)=\max\bigl\{U_{\alpha_l}^\lambda(z):l\in\{1,\dots,k\}\bigr\},\ z\in D\tag{39}$$

($\varphi_\alpha(z) = U^\lambda_{\alpha_l}(z)$ для $z \in D_l$, $l \in \{1,\dots,k\}$).

Из (34), полагая

$$\varphi_{\omega_+} = \sum_{\kappa\in\omega_+} V^{\lambda_\kappa}$$

и учитывая (35), (38)–(39), получаем:

$$\lim_{n\in\Theta} |\delta_{n,\alpha}(z)|^{1/|n|} = \exp\bigl(\varphi_{\omega_+}(z) + \varphi_\alpha(z)\bigr), \qquad z \in \widetilde{D} = \bigcup_{l=1}^{k} D_l \tag{40}$$

(кроме, быть может, дискретного множества в $\widetilde{D}$) и

$$\limsup_{n\in\Theta} |\delta_{n,\alpha}(z)|^{1/|n|} \leqslant \exp\bigl(\varphi_{\omega_+}(z) + \varphi_\alpha(z)\bigr), \qquad z \in D. \tag{41}$$

Множество

$$\Omega^c_\alpha = \bigl\{z \in D : \varphi_{\omega_+}(z) + \varphi_\alpha(z) < 0\bigr\}$$

является *областью сходимости* аппроксимаций $R_{n,\alpha}$ к f_α; это множество всегда содержит окрестность бесконечно удаленной точки, так как

$$\varphi_{\omega_+}(z) + \varphi_\alpha(z) \sim (1 + p_\alpha)\log\frac{1}{|z|} \to -\infty, \qquad z \to \infty$$

(и, тем самым, не пусто). Сходимость – равномерная внутри Ω^c_α, скорость сходимости – геометрическая (она характеризуется соотношениями (40)–(41)). Как и выше, может быть не пустой и *область расходимости* аппроксимаций $R_{n,\alpha}$ (ср. п. 2)

$$\Omega^d_\alpha = \bigl\{z \in D : \varphi_{\omega_+}(z) + \varphi_\alpha(z) > 0\bigr\},$$

в которой $|R_{n,\alpha}| \to \infty$ (с геометрической скоростью).

Проведенный в этом пункте анализ оставляет открытыми многие вопросы, относящиеся к областям сходимости и скорости сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для конкретных GN-систем. Это связано, в первую очередь, с определением функции φ_α (точнее, с операцией взятия максимума по конечному набору функций $U^\lambda_{\alpha_l}$ в (39); для $\alpha \notin \omega_+$ число функций в этом наборе $\geqslant 2$). При тех или иных дополнительных ограничениях эту операцию удается расшифровать и представить решение рассматриваемой задачи в более явной форме. В следующих пунктах мы обсудим некоторые результаты в этом направлении.

5. Предельное поведение аппроксимаций $R_{n,\alpha}$ для $\alpha \in \omega_+$ *характеризуется* в терминах, связанных с α-компонентой W^λ_α векторного равновесного потенциала W^λ (см. п. 2). Для $\alpha \notin \omega_+$ это уже не так; следующее простое наблюдение показывает, что для таких α компоненты W^λ_α возникают при *сравнении* функций типа U. А именно, *для любого $\alpha \notin \omega_+$ имеем*:

$$U^\lambda_\alpha - U^\lambda_\beta = W^\lambda_\alpha - w_\alpha, \qquad \beta = \alpha_-, \tag{42}$$

где

$$W^\lambda_\alpha = 2V^{\lambda_\alpha} + \sum_{\kappa\in\beta_+,\kappa\neq\alpha} V^{\lambda_\kappa} - \sum_{\kappa\in\alpha_+} V^{\lambda_\kappa} - V^{\lambda_\beta}. \tag{43}$$

Поведение функции W_α^λ в бесконечно удаленной точке характеризуется соотношением

$$W_\alpha^\lambda(z) \sim (p_\alpha - p_\beta)\log\frac{1}{|z|}, \qquad z \to \infty;$$

тем самым, функция W_α^λ гармонична в точке $z = \infty$ при $p_\alpha = p_\beta$ и $W_\alpha^\lambda(z) \to +\infty$ при $p_\alpha < p_\beta$. Следующее предложение относится к первому случаю.

Предложение 5. *Если $\beta = \alpha_- \in G$, $\beta_+ = \{\alpha\}$ и $p_\alpha = p_\beta$, то $U_\beta^\lambda > U_\alpha^\lambda$ в дополнении к отрезку F_α и $U_\beta^\lambda = U_\alpha^\lambda$ на F_α.*

Действительно, в условиях этого предложения отсутствует второе слагаемое в правой части (43); функция $W_\alpha^\lambda - w_\alpha$ субгармонична в дополнении к $S = S(\lambda_\alpha)$ (включая точку $z = \infty$) и $= 0$ на S (условие равновесия). По принципу максимума, эта функция < 0 в дополнении к S (последнее слагаемое в (43) не может быть нулем); тем самым, $S = F_\alpha$ (снова – условие равновесия) и нужные утверждения вытекают из (42).

Системы Никишина соответствуют графам G, состоящим из одной цепочки $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \dots \to \alpha_m$ ($\alpha_1 \in \omega_+$); элементы такого графа и связанные с ними функции будем нумеровать натуральными числами (k вместо α_k). Из предложения 5 и результатов п.п. 2, 4 в *диагональном случае* ($p_k = 1/m$, $k = 1,\dots,m$) для систем Никишина получаем: $D_1 = D \setminus F_2$ и *для любого* $k \in \{1,\dots,m\}$

$$\varphi_k = U_1^\lambda, \qquad \varphi_{\omega_+} + \varphi_k = 2V^{\lambda_1} - V^{\lambda_2} - w_1 = W_1^\lambda - w_1, \qquad \Omega_k^c = D.$$

Тем самым, *при любом k диагональные аппроксимации Эрмита–Паде равномерно сходятся внутри всей области $D = \mathbb{C} \setminus F_1$, причем*

$$\lim_{n\in\Theta} |\delta_{n,k}(z)|^{1/|n|} = \exp\bigl(W_1^\lambda(z) - w_1\bigr), \qquad z \in D \setminus F_2, \quad k = 1,\dots,m;$$

для верхнего предела неравенство $\leqslant$ справедливо во всей области D (ср. (40), (41)).

Приведем несколько более общее следствие предложения 5.

Предложение 6. *Пусть G – произвольный граф, $\alpha \in G$ и $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \dots \to \alpha_k = \alpha$, $\alpha_1 \in \omega_+$, – цепочка, определяющая элемент α. Если $(\alpha_{l-1})_+ = \{\alpha_l\}$ для любого $l = 2,\dots,k$ и $p_{\alpha_1} = \dots = p_{\alpha_k}$, то*

$$\lim_{n\in\Theta} |\delta_{n,\alpha}(z)|^{1/|n|} = \lim_{n\in\Theta} |\delta_{n,\alpha_1}(z)|^{1/|n|} = \exp\bigl(W_{\alpha_1}^\lambda(z) - w_{\alpha_1}\bigr), \quad z \in D \setminus F_{\alpha_2}.$$

Здесь не предполагается, что множество ω_+ состоит из одного элемента α_1 и, тем самым, наряду с областью сходимости $\Omega_\alpha^c = \bigl\{z : W_{\alpha_1}^\lambda(z) - w_{\alpha_1} < 0\bigr\}$ может быть непустой и область расходимости $\Omega_\alpha^d = \bigl\{z : W_{\alpha_1}^\lambda(z) - w_{\alpha_1} > 0\bigr\}$; асимптотическое поведение $\delta_{n,\alpha}$, в частности, область сходимости и скорость сходимости аппроксимаций $R_{n,\alpha}$ к функции f_α, для индекса α таковы же, как и для индекса $\alpha_1 \in \Omega_+$ (ср. п. 2).

Предложение 6 дополняет результаты К. Драйвер и Г. Шталя [13] и Ж. Бустаманте [14], относящиеся к вопросам сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для систем Никишина и несколько более общих систем.

6. Рассмотрим простейший пример недиагональных аппроксимаций для $\alpha \notin \omega_+$. Пусть $m = 2$, (f_1, f_2) – система Никишина и $p_1 > p_2$. Для индекса $1 \in \omega_+$ имеем

$$\lim_{n\in\Theta} |\delta_{n,1}(z)|^{1/|n|} = \exp\bigl(W_1^\lambda(z) - w_1\bigr), \qquad z \in D \setminus F_2,$$

$W_1^\lambda(z) - w_1 < 0$, $z \in D$, и последовательность $R_{n,1}$, $n \in \Theta$, равномерно сходится к функции f_1 во всей области D (см. п. 2). Для индекса $2 \notin \omega_+$ имеем

$$U_2^\lambda - U_1^\lambda = W_2^\lambda - w_2 = 2V^{\lambda_2} - V^{\lambda_1} - w_2$$

(см. (42), (43)); при этом

$$2V^{\lambda_2}(z) - V^{\lambda_1}(z) \sim (p_1 - p_2)\log|z| \to +\infty, \qquad z \to \infty.$$

Тем самым, $\varphi_2 = U_2^\lambda = V^{\lambda_2} - w_2 - w_1$ в области $D_2 = \bigl\{z \in D : U_2^\lambda(z) > U_1^\lambda(z)\bigr\}$, содержащей окрестность бесконечно удаленной точки, и $\varphi_2 = U_1^\lambda = V^{\lambda_1} - V^{\lambda_2} - w_1$ в области $D_1 = \bigl\{z \in D : U_1^\lambda(z) > U_2^\lambda(z)\bigr\}$ (мы используем обозначения п. 4). Множество $\Gamma \subset D$, на котором $\varphi_2 = U_2^\lambda = U_1^\lambda$, состоит из общей границы этих областей и отрезка $S(\lambda_2)$ (этот отрезок принадлежит границе области D_1; отсюда, в частности, следует, что $D_1 \neq \varnothing$). Тем самым, область D разбивается на две области, в которых асимптотическое поведение остатка $\delta_{n,2} = f_2 - R_{n,2}$ различно:

$$\begin{aligned}\lim_{n\in\Theta} |\delta_{n,2}(z)|^{1/|n|} &= \exp\bigl(2V^{\lambda_1}(z) - V^{\lambda_2}(z) - w_1\bigr)\\ &= \exp\bigl(W_1^\lambda(z) - w_1\bigr), \qquad z \in D_1;\end{aligned} \tag{44}$$

$$\lim_{n\in\Theta} |\delta_{n,2}(z)|^{1/|n|} = \exp\bigl(V^{\lambda_1}(z) + V^{\lambda_2}(z) - w_1 - w_2\bigr), \qquad z \in D_2. \tag{45}$$

Правые части соотношений (44), (45) совпадают на Γ. Поскольку $W_1^\lambda - w_1 < 0$ в области D (тем самым, в D_1 и на Γ), то $V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} - w_1 - w_2 < 0$ на Γ и, по принципу максимума для гармонических функций, в области D_2 (эта функция гармонична в D_2 и $\to -\infty$ при $z \to \infty$). Следовательно, *область сходимости Ω_2^c последовательности $R_{n,2}$ к функции f_2 совпадает со всей областью D*. Скорость сходимости характеризуется соотношениями (44), (45); на Γ имеет место соответствующая оценка сверху для верхнего предела (ср. (40), (41)).

Аналогично, следуя общей схеме п. 4, решается вопрос о сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для систем Никишина $(f_1, \dots, f_m)$ при любом $m \geqslant 2$.

Предложение 7. *Для систем Никишина при любом $k = \{1, \dots, m\}$ аппроксимации $R_{n,k}$ равномерно сходятся (при $|n| \to \infty$, $n \in \Theta$) к функции f_k внутри области $D = \mathbb{C} \setminus F_1$.*

При этом для любого k число (непустых) областей D_l с различными асимптотическими формулами для $|\delta_{n,k}|^{1/|n|}$ не может превосходить более чем на единицу числа строгих неравенств $>$ в последовательности $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \dots \geqslant p_k$.

Список литературы

1. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1873. V. 77. P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
2. *Mahler K.* Perfect systems // Compositio Math. 1968. V. 19. №2. P. 95–166.
3. *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials // J. Approx. Theory. 1984. V. 42 (4). P. 259–386.
4. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
5. *Aptekarev A. I., Stahl H.* Asymptotics of Hermite–Padé polynomials // "Progress in Approximation Theory" / ed. Gonchar A. A., Saff E. B. New York: Springer-Verlag, 1992. P. 127–167.
6. *Калягин В. А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Матем. сб. 1979. Т. 110 (152). С. 609–627.
7. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы функций марковского типа // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 31–48.
8. *Аптекарев А. И.* Асимптотика многочленов совместной ортогональности в случае Анжелеско // Матем. сб. 1988. Т. 136. С. 56–84.
9. *Никишин Е. М.* О совместных аппроксимациях Паде // Матем. сб. 1980. Т. 113 (155). №4. С. 499–519.
10. *Никишин Е. М.* Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде // Изв. вузов. Матем. 1986. №2. С. 33–41.
11. *Бустаманте Ж., Лопес Г. Лагомасино* Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина аналитических функций // Матем. сб. 1992. Т. 183. №2. С. 117–138.
12. *Сорокин В. Н.* Аппроксимации Эрмита–Паде полилогарифмов // Изв. вузов. Матем. 1994. №5. С. 49–59.
13. *Driver K., Stahl H.* Simultaneous rational approximants to Nikishin systems // Acta Sci. Math. 1995. V. 61. P. 261–284.
14. *Bustamante J.* Asymptotics for Angelesco–Nikishin Systems // J. Approx. Theory. 1996. V. 85. P. 43–68.
15. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О задаче равновесия для векторных потенциалов // УМН. 1985. Т. 40. №4. С. 155–156.
16. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). С. 117–127.
17. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций // Матем. сб. 1987. Т. 134 (176). С. 306–352.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
22.01.1996