А. Наджафизаде, А. М. Агдам, Ф. Карими, Об идеалах колец без кручения ранга 1 и 2, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 432–439

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm9317

Математические заметки

Том 91 выпуск 3 март 2012

УДК 512.522.12

Об идеалах колец без кручения ранга 1 и 2

А. Наджафизаде, А. М. Агдам, Ф. Карими

Пусть A – абелева группа без кручения ранга 1 или 2. Получены необходимые и достаточные условия на множество типов группы A, при которых подгруппа группы A является идеалом в любом кольце с аддитивной группой A.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Здесь рассматриваются только абелевы группы с операцией сложения. Для данной абелевой группы A мы называем R *кольцом* над A, если группа A изоморфна аддитивной группе кольца R. В такой ситуации мы пишем $R=(A,*)$, где $*$ обозначает умножение в кольце. Это умножение не предполагается ассоциативным. Каждую группу можно превратить в кольцо тривиальным образом, полагая все произведения равными нулю; такое кольцо называется *нуль-кольцом*. Если это единственное умножение над группой A, то мы называем A *ниль-группой*. Фред [1] охарактеризовал подгруппы абелевой группы, которые являются идеалами в любом кольце. Страттон [2] изучил множество типов абелевой группы без кручения ранга 2, на которой существует нетривиальная структура кольца, и классифицировал все возможные множества типов таких групп. Агдам [3] использовал классификацию Страттона, чтобы описать кольца над группами без кручения ранга 2. Мы используем множество типов и кольца над абелевой группой без кручения ранга 2 A для характеризации подгрупп группы A, которые являются идеалами в каждом кольце над A.

2. Обозначения и предварительные сведения. Пусть A – абелева группа без кручения. Для данного простого числа p $h_p^A(x)$ обозначает *p-высоту* элемента x, т.е. наибольшее целое k, для которого p^k делит x в группе A; если такого максимального целого нет, то мы полагаем $h_p^A(x)=\infty$. Пусть $p_1,p_2,\dots$ – возрастающая последовательность всех простых чисел. Тогда последовательность

$$\chi_A(x)=(h_{p_1}^A(x),h_{p_2}^A(x),\dots,h_{p_n}^A(x),\dots)$$

называется *последовательностью высот* элемента x. Мы не пишем индекс A, когда ясно, о какой группе идет речь. Для любых двух последовательностей высот $\chi=(k_1,k_2,\dots,k_n,\dots)$ и $\mu=(l_1,l_2,\dots,l_n,\dots)$ мы полагаем $\chi\geqslant\mu$, если $k_n\geqslant l_n$ для всех n. Последовательности χ и μ считаются эквивалентными, если сумма $\sum_n|k_n-l_n|$ конечна (мы считаем, что $\infty-\infty=0$). Класс эквивалентности последовательности высот называется *типом*. Если $\chi(x)$ принадлежит типу $\mathbf{t}$, то мы говорим, что элемент x имеет тип $\mathbf{t}$. Произведение двух последовательностей высот $\chi = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$ и $\chi_1 = (l_1, l_2, \dots, l_n, \dots)$ определяется как

$$\chi\chi_1 = (k_1 + l_1, k_2 + l_2, \dots, k_n + l_n, \dots),$$

где ∞ плюс что угодно, естественно, считается равным ∞. Последовательность высот χ идемпотентна (т.е. $\chi^2 = \chi$), в точности когда для любого n либо $k_n = 0$, либо $k_n = \infty$. Умножение согласовано с определенным выше отношением эквивалентности, поэтому можно говорить о произведении tt_1 типов t и t_1 и об идемпотентных типах ($t^2 = t$). Для двух типов t_1 и t_2 мы пишем $t_1 \leqslant t_2$, если существуют последовательности высот $\chi \in t_1$ и $\mu \in t_2$, для которых $\chi \leqslant \mu$. Через $T(A)$ мы обозначаем частично упорядоченное множество типов $t(x)$, $x \in A \setminus 0$. Группа без кручения A, в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$, называется *однородной*. Например, любая группа A ранга 1 однородна. Мы используем обозначение $t(A)$ для множества типов группы A ранга 1, которое содержит единственный элемент – тип любого ненулевого элемента группы A. Кроме того, для любого типа $t \in \mathrm{T}(A)$ мы определяем вполне инвариантную чистую подгруппу $A(t)$ группы A как

$$A(t) = \{a \in A \mid t(a) \geqslant t\}.$$

Наконец, чистую подгруппу группы A, порожденную элементом x, мы обозначаем через $\langle x \rangle_*$. (В [4; с. 109] указано, где можно найти основные факты о типах, а также определения понятий, которые не были определены выше.)

Теорема 2.1. *Пусть A – группа ранга 2 без кручения. Если A не является ниль-группой, то множество $T(A)$ содержит не более трех элементов, причем среди них есть единственный минимальный элемент.*

Доказательство. См. [2; теорема 3.3].

Наши рассуждения в основном основываются на рассмотрении следующих случаев, которые, как вытекает из доказательства теоремы 2.1, исчерпывают все возможности для множеств типов абелевой группы без кручения, не являющейся ниль-группой:

(a) один тип, причем этот тип обязан быть идемпотентным;

(b) два типа, причем один из них минимален, а другой максимален;

(c) три типа, причем один из этих типов минимален, а два других максимальны; в этом случае один из максимальных типов обязан быть идемпотентным.

В заключение этого пункта мы докажем две теоремы, которые дают примеры колец над группами без кручения ранга 2 с множеством типов мощности 2.

Теорема 2.2. *Пусть A – группа без кручения ранга 2 и $T(A) = \{t_1, t_2\}$, причем $t_1 < t_2$. Предположим, что $x, y \in A$, $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. Тогда*

(1) *$xy = cy$, $yx = dy$ и $y^2 = ey$ для некоторых $c, d, e \in \mathbb{Q}$;*

(2) *если $t_1^2 \neq t_1$, то $x^2 = by$ для некоторого $b \in \mathbb{Q}$;*

(3) *если $t_2^2 \neq t_2$, то $y^2 = 0$;*

(4) *если $t_1 t_2 > t_2$, то $xy = yx = 0$.*

Доказательство. 1) Из предположения $t_1 < t_2$ вытекает, что $t(xy) \geqslant t(y) = t_2$, поэтому xy и y принадлежат подгруппе $A(t_2)$, которая является подгруппой ранга 1 в группе A. Следовательно, элементы xy и y зависимы. Это означает, что $xy = cy$ для некоторого $c \in \mathbb{Q}$. Из тех же соображений вытекает, что $xy = dy$ и $y^2 = ey$ для некоторых $b, c \in \mathbb{Q}$.

2) Ясно, что $t(x^2) > t(x) = t_1$, поскольку $t_1^2 \neq t_1$. Из того, что $T(A) = \{t_1, t_2\}$, вытекает равенство $t(x^2) = t_2$. Значит, $x^2 \in A(t_2)$. Таким образом, $x^2 = by$ для некоторого $b \in \mathbb{Q}$.

3) Если тип t_2 не идемпотентен, то $t(y^2) > t(y) = t_2$. Следовательно, $t(y^2) \notin T(A)$, откуда получаем $y^2 = 0$.

4) Имеем $t(xy) \geqslant t(x)t(y) = t_1 t_2 > t_2$; значит, $t(xy) \notin T(A)$, т.е. $xy = 0$. Аналогично получаем $yx = 0$.

Теорема 2.3. *Пусть A – неразложимая группа без кручения ранга 2, и пусть $T(A) = \{t_1, t_2\}$, причем $t_1 < t_2$. Если $\{x, y\}$ – независимое множество, для которого $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$, то во всех нетривиальных кольцах над A выполнены соотношения $x^2 = by$ и $xy = yx = y^2 = 0$ для некоторого рационального числа b.*

Доказательство. См. [3; лемма 3].

3. Идеалы колец без кручения ранга 1. В этом пункте приводится необходимое и достаточное условие, при котором подгруппа группы без кручения ранга 1 является идеалом в любом кольце. Хорошо известно, что две группы без кручения ранга 1 A и B имеют одинаковый тип тогда и только тогда, когда они квазиизоморфны, т.е. существует элемент $r \in \mathbb{Q}$, для которого $A = rB$. Пусть A – абелева группа и $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A. Положим

$$\mathrm{I}(A) = \langle \varphi(A) \mid \varphi \in \mathrm{Hom}(A, E(A)) \rangle;$$

иными словами, пусть $\mathrm{I}(A)$ – подгруппа в $E(A)$, порожденная всеми гомоморфными образами группы A в кольце $E(A)$. Ясно, что $\mathrm{I}(A)$ является идеалом в $E(A)$. Ядро группы A, обозначаемое через $N(A)$, определяется как

$$N(A) = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha.x \in A \text{ для всех } x \in A\}.$$

Мы обобщаем это определение на произвольную подгруппу C группы A следующим образом:

$$N(C) = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha.x \in C \text{ для всех } x \in C\}.$$

Теорема 3.1. *Подгруппа C группы A является идеалом в любом кольце над A, если и только если подгруппа C $\mathrm{I}(A)$-допустима, т.е. $\mathrm{I}(A).C \leqslant C$.*

Доказательство. См. [4; теорема 117.2].

Теорема 3.2. *Кольцо без кручения ранга 1 либо является нулевым кольцом, либо изоморфно подкольцу поля рациональных чисел. Группа без кручения ранга 1 не является ниль-группой, если и только если ее тип идемпотентен.*

Доказательство. См. [4; теорема 121.1].

Предложение 3.3. *Пусть A – группа без кручения ранга 1 и C – ее подгруппа. Тогда C является идеалом в любом кольце над A, если и только если $\mathrm{I}(A) \subseteq N(C)$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если подгруппа C является идеалом в любом кольце над A, то по теореме 3.1 имеем I(A).C $\leqslant$ C. Поскольку A – группа ранга 1, она изоморфна подгруппе поля $\mathbb{Q}$; значит, $\mathrm{I}(A)$ – подкольцо поля $\mathbb{Q}$. Следовательно, из $\mathrm{I}(A).C \leqslant C$ вытекает, что $r.c \in C$ для всех $c \in C$ и всех $r \in \mathrm{I}(A)$, а это означает, что $r \in N(C)$.

($\Leftarrow$) *Необходимость* очевидна. Действительно, $\mathrm{I}(A)C \subseteq N(C)C \subseteq C$.

Теорема 3.4. *Пусть A – группа без кручения ранга 1, над которой определено ненулевое кольцо R, и пусть C – произвольная подгруппа группы A. Тогда C является идеалом в R, если и только если $C = rR$ для некоторого $r \in R$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Из предположения, что A не является ниль-группой, и теоремы 3.2 вытекает, что

$$t(A) = (k_1, k_2, \dots),$$

где $k_i = 0$ или ∞. Если C – идеал в кольце R и $t(C) = (l_1, \dots, l_j, \dots)$, то $C.R \leqslant C$, откуда $t(C.R) \leqslant t(C)$. С другой стороны, имеем

$$t(C) \leqslant t(C)t(R) \leqslant t(CR) \leqslant t(C);$$

значит, $t(C) = t(C).t(R)$, а это означает, что

$$l_i = l_i + k_i. \tag{3.1}$$

Но $t(A)$ – идемпотент; следовательно, из (3.1) получаем $l_i = k_i$, откуда вытекает, что $t(C) = t(R)$. Поскольку подгруппа C и кольцо R имеют ранг 1, имеем $C \cong R$; значит, $C = rR$ для некоторого $r \in R$.

($\Leftarrow$) Если $C = rR$, то, очевидно, C является идеалом в R.

4. Идеалы колец без кручения ранга 2. Напомним некоторые определения из [5]. Пусть $\{x, y\}$ – независимое множество в группе без кручения A ранга 2. Каждый элемент w группы A можно единственным образом представить как $w = ux + vy$, где u и v – рациональные числа. Пусть

$$U_0 = \{u_0 \in \mathbb{Q} : u_0 x \in A\}, \qquad U = \{u \in \mathbb{Q} : ux + vy \in A \text{ для некоторого } v \in \mathbb{Q}\},$$
$$V_0 = \{v_0 \in \mathbb{Q} : v_0 y \in A\}, \qquad V = \{v \in \mathbb{Q} : ux + vy \in A \text{ для некоторого } u \in \mathbb{Q}\}.$$

Тогда U_0 и V_0 – подгруппы групп U и V соответственно. Группы U, U_0, V и V_0 называются *группами ранга* 1, *индуцированными независимым множеством* $\{x, y\}$. Мы обобщаем эти определения на произвольную подгруппу C группы A следующим образом:

$$U_0^C = \{u_0 \in \mathbb{Q} : u_0 x \in C\}, \qquad U^C = \{u \in \mathbb{Q} : ux + vy \in C \text{ для некоторого } v \in \mathbb{Q}\},$$
$$V_0^C = \{v_0 \in \mathbb{Q} : v_0 y \in C\}, \qquad V^C = \{v \in \mathbb{Q} : ux + vy \in C \text{ для некоторого } u \in \mathbb{Q}\}.$$

Ясно, что $U_0^A = U_0$, $V_0^A = V_0$, $U^A = U$ и $V^A = V$. Для любых двух подгрупп R и S поля $\mathbb{Q}$ мы полагаем

$$Rx \dotplus Sy = \{rx + sy \in A : r \in R,\ s \in S\}.$$

Наконец, мы говорим, что собственная подгруппа C группы A является *сильной ниль-подгруппой* группы A, если для любого кольца $(A, .)$ над A и для любых элементов $a \in A$ и $c \in C$ выполнено условие $a.c = c.a = 0$. Подгруппа C является сильной ненииль-подгруппой группы A, если она не является сильной ниль-подгруппой.

Теорема 4.1. *Пусть A – группа без кручения ранга 2 и $T(A) = \{t_0, t_1, t_2\}$, где $t_0 < t_1$ и $t_0 < t_2$. Предположим, что $x, y \in A$, $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. Тогда если $t_1^2 = t_1$ и $t_2^2 \neq t_2$, то $x^2 = ax$ и $y^2 = xy = yx = 0$ для некоторого рационального a.*

Доказательство. См. [6; лемма 3].

В теореме 4.2 мы используем подгруппу

$$T = \{r \in \mathbb{Q} : x^2 = rx,\ y^2 = xy = yx = 0 \text{ определяют кольцо над } A\}$$

группы U_0.

Теорема 4.2. *Пусть A – группа без кручения ранга 2 и*

$$T(A) = \{t_0, t_1, t_2\}, \qquad \text{где} \quad t_0 < t_1, \quad t_0 < t_2, \quad t_1^2 = t_1, \quad t_2^2 \neq t_2.$$

Предположим, что $x, y \in A$, $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. Тогда подгруппа C группы A является идеалом в каждом кольце над A, если и только если

$$TUU^C \subseteq U_0^C.$$

В частности, если подгруппа C ранга 1 является идеалом в каждом кольце над A, то она представляет собой сильную ненииль- или сильную ниль-подгруппу в A тогда и только тогда, когда $C = U_0^C(nx)$ для некоторого ненулевого целого n или, соответственно, $C \leqslant V_0 y$.

Доказательство. Пусть C – подгруппа группы A. Тогда для любых

$$\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathrm{End}(A)), \qquad a = ux + vy \in A, \quad c = \alpha x + \beta y \in C$$

имеем

$$(\varphi a)(c) = a.c.$$

С другой стороны, из теоремы 4.1 вытекает, что $a.c = ru\alpha x$ для некоторого $r \in T$; значит, $\mathrm{I}(A).C = TUU^C x$. Первое утверждение теоремы теперь следует из предложения 3.3.

Предположим, что C – подгруппа ранга 1 в группе A, которая является идеалом в любом кольце над A. Предположим также, что C является сильной ненииль-подгруппой. По теореме 4.1 в любом кольце над A выполнены соотношения

$$x^2 = rx \qquad \text{и} \qquad y^2 = xy = yx = 0$$

для некоторого $r \in T$. С другой стороны, при доказательстве теоремы 121.1 в [4] определен элемент $c \in C$, удовлетворяющий условию $c^2 = mc$ для некоторого ненулевого $m \in \mathbb{Z}$. Пусть $c = \alpha x + \beta y$ для рациональных α и β; тогда $c^2 = \alpha^2 rx$. Следовательно, $\alpha^2 rx = m\alpha x + m\beta y$, откуда получаем $\beta = 0$ и $m = \alpha r$. Значит,

$c=\alpha x\in C$. Мы заключаем, что существует целое l, для которого $lx\in C$; следовательно, $C=U_0^C(nx)$ для некоторого ненулевого целого n. Наконец, предположим, что C является сильной ниль-подгруппой. Возьмем произвольный элемент $c=\alpha x+\beta y$ подгруппы C. Если $\alpha\neq 0$, то $0=cx=\alpha rx$ для некоторого $r\in T$, откуда $0=\alpha r$. Это выполнено для всех колец над A; значит, $\alpha=0$ – мы пришли к желаемому противоречию. Следовательно, C является подгруппой группы V_0y.

Теорема 4.3. *Пусть A – группа без кручения ранга 2 и $T(A)=\{t_0,t_1,t_2\}$, где $t_0<t_1$ и $t_0<t_2$. Предположим, что $x,y\in A$, $t(x)=t_1$ и $t(y)=t_2$. Если $t_1^2=t_1$ и $t_2^2=t_2$, то $x^2=ax$, $y^2=by$ и $xy=yx=0$ для некоторых рациональных чисел a и b, не равных нулю одновременно.*

Доказательство. См. [3; предложение 9].

В дальнейшем нам понадобятся следующие подгруппы T и S групп U_0 и V_0 соответственно:

$$T=\{r\in\mathbb{Q}: x^2=rx,\ y^2=sy,\ xy=yx=0 \text{ для некоторой кольцевой структуры на } A \text{ и некоторого } s\in\mathbb{Q}\},$$
$$S=\{s\in\mathbb{Q}: x^2=rx,\ y^2=sy,\ xy=yx=0 \text{ для некоторой кольцевой структуры на } A \text{ и некоторого } r\in\mathbb{Q}\}.$$

Теорема 4.4. *Пусть A – группа без кручения ранга 2 и*

$$T(A)=\{t_0,t_1,t_2\},\qquad \text{где}\quad t_0<t_1,\quad t_0<t_2,\quad t_1^2=t_1,\quad t_2^2=t_2.$$

Пусть $x,y\in A$, где $t(x)=t_1$ и $t(y)=t_2$. Тогда подгруппа C группы A является идеалом в любом кольце над A, если и только если

$$TUU^C\subseteq U^C\qquad \text{и}\qquad SVV^C\subseteq V^C.$$

В частности, подгруппа C ранга 1, которая является идеалом в любом кольце над A, представляет собой сильную ненильподгруппу и $C=U_0^C(nx)$ или $V_0^C(my)$ для некоторых целых m и n.

Доказательство. Пусть C – подгруппа в A. Тогда для любых

$$\varphi\in\operatorname{Hom}(A,\operatorname{End}(A)),\qquad a=ux+vy\in A,\quad c=\alpha x+\beta y\in C$$

имеем

$$(\varphi a)(c)=a.c=u\alpha rx+v\beta sy,\qquad \text{где}\quad r\in T,\quad s\in S.$$

Следовательно,

$$\mathrm{I}(A).C=TUU^Cx\dotplus SVV^Cy.$$

Теперь первое утверждение вытекает из предложения 3.3.

Пусть C – подгруппа ранга 1 группы A, которая является идеалом в любом кольце над A. Рассуждая от противного, предположим, что C является сильной ниль-подгруппой. Пусть R – произвольное кольцо над A. Тогда $x^2=rx$, $y^2=sy$ и $xy=yx=0$ ля некоторых $r,s\in\mathbb{Q}$. С другой стороны, для произвольного элемента $c=\alpha x+\beta y$ подгруппы C имеем $c^2=0=\alpha^2rx+\beta^2sy$, откуда вытекает, что $\alpha^2 r = \beta^2 s = 0$. Это условие выполнено в любом кольце над A, т.е. для любых $r \in T$ и $s \in S$; следовательно, $\alpha = \beta = 0$, а значит, $C = 0$. Мы получили противоречие, которое доказывает, что C является сильной ниль-подгруппой в A. Если $c = \alpha x + \beta y \in C$, где $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то $xc = \alpha rx \in C$ и $yc = \beta sy \in C$. Отсюда вытекает, что все ненулевые кратные элементов x и y лежат в C. Поэтому C имеет ранг 2, а это противоречит предположению, что C – подгруппа ранга 1. Мы заключаем, что $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. Из тех же соображений, что и в доказательстве теоремы 4.2, имеем $C = U_0^C(nx)$ или $C = V_0^C(my)$ для некоторых целых m и n.

Пусть A – неразложимая группа без кручения ранга 2 и $T(A) = \{t_1, t_2\}$, где $t_1 < t_2$. Если $\{x, y\}$ – независимое множество, причем $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$, то по теореме 2.3 во всех нетривиальных кольцах над A выполнены соотношения $x^2 = by$ и $xy = yx = y^2 = 0$ для некоторого рационального числа b. Во втором случае определим такую подгруппу группы V_0:

$$W = \{r \in \mathbb{Q} \mid x^2 = ry,\ y^2 = xy = yx = 0 \text{ определяют кольцо над } A\}.$$

Теорема 4.5. *Пусть A – неразложимая группа без кручения ранга 2 и $T(A) = \{t_1, t_2\}$, где $t_1 < t_2$. Предположим, что $\{x, y\}$ – независимое множество, причем $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. Тогда произвольная подгруппа C группы A является идеалом в любом кольце над A, если и только если*

$$WUU^C \subseteq V_0^C.$$

Более того, если подгруппа группы A имеет ранг 1 и является идеалом в любом кольце над A, то она представляет собой сильную ниль-подгруппу и является подгруппой в $V_0 y$.

Доказательство. Пусть C – подгруппа группы A. По теореме 2.3 для любых $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathrm{End}(A))$, $a = ux + vy \in A$ и $c = \alpha x + \beta y \in C$ имеем $(\varphi a)(c) = \alpha uby$ для некоторого $b \in W$. Это означает, что $\mathrm{I}(A).C = WUU^C y$; таким образом, первое утверждение вытекает из предложения 3.3.

Предположим, что C – подгруппа группы A и C является идеалом в любом кольце над A. Рассуждая от противного, предположим, что C является сильной ненильподгруппой. Если R – ненулевое кольцо над A, то найдется элемент $b \in W$, для которого $x^2 = by$ и $xy = yx = y^2 = 0$. Те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 4.2, доказывают, что C содержит ненулевой элемент $c = \alpha x + \beta y$, для которого $c^2 = mc$ при некотором ненулевом целом m. По предположению имеем $0 = c^2 = m\alpha x + m\beta y$, откуда $\alpha = \beta = 0$. Следовательно, $C = 0$. Мы получили противоречие. Отсюда уже легко вывести требуемое утверждение.

Авторы искренне признательны рецензенту за внимательное чтение статьи и ряд полезных замечаний, которые значительно улучшили первоначальную версию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] E. Fried, “On the subgroups of an abelian group that are ideals in every ring”, *Proc. Colloq. Abelian Groups*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964, 51–55.
[2] A. E. Stratton, “The type set of torsion-free rings of finite rank”, *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, **27** (1979), 199–211.

[3] A. M. Aghdam, "On the strong nilstufe of rank two torsion free groups", *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **49**:1-4 (1985), 53–61.

[4] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Vol. II, Pure Appl. Math., **36-II**, Academic Press, New York, 1973.

[5] R. A. Beaumont, R. J. Wisner, "Rings with additive group which is a torsion-free group of rank two", *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **20** (1959), 105–116.

[6] A. M. Aghdam, A. Najafizadeh, "Square subgroups of rank two abelian groups", *Colloq. Math.*, **117**:1 (2009), 19–28.

А. Наджафизаде
University of Tabriz, Иран
E-mail: ar_najafizadeh@yahoo.com

А. М. Агдам
University of Tabriz, Иран
E-mail: mehdizadeh@tabrizu.ac.ir

Ф. Карими
University of Tabriz, Иран
E-mail: karimi@tabrizu.ac.ir

Поступило
15.03.2011
Исправленный вариант
01.05.2011