А. Д. Бендиков, А. А. Григорьян, С. А. Молчанов, Г. П. Самородницкий, Об одном классе случайных возмущений иерархического лапласиана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 5, 3–38

DOI: https://doi.org/10.4213/im8294

УДК 517.983+517.1+519.2

**А. Д. Бендиков, А. А. Григорьян,
С. А. Молчанов, Г. П. Самородницкий**

Об одном классе случайных возмущений иерархического лапласиана

Пусть (X,d) – локально компактное сепарабельное ультраметрическое пространство. Каждой мере m на X и каждой функции $C(B)$, определенной на множестве всех неодноточечных шаров B пространства X, соответствует иерархический лапласиан $L=L_C$. Оператор L действует на $L^2(X,m)$, существенно самосопряжен и имеет чисто точечный спектр. Выбор семейства $\{\varepsilon(B)\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин определяет возмущенную функцию $C(B,\omega)$ и возмущенный иерархический лапласиан $L^\omega=L_{C(\omega)}$. Изучаются арифметические средние $\bar\lambda(\omega)$ собственных значений оператора L^ω. При некоторых слабых предположениях показано, что нормированные арифметические средние $(\bar\lambda-\mathbb{E}\bar\lambda)/\sigma[\bar\lambda]$ сходятся к $N(0,1)$ по распределению. Приведены также примеры, когда сходимости к нормальному распределению нет. Доказано существование интегральной плотности состояний. Вводится эмпирический точечный процесс N^ω для собственных значений оператора L^ω, и в предположении, что плотность состояний существует и непрерывна, доказывается, что конечномерные распределения процесса N^ω сходятся к конечномерным распределениям пуассоновского точечного процесса. В качестве примера рассмотрены случайные возмущения оператора Владимирова, действующего на $L^2(X,m)$, где $X=\mathbb{Q}_p$ – кольцо p-адических чисел, а m – мера Хаара.

Библиография: 34 наименования.

Ключевые слова: ультраметрическое пространство с мерой, поле p-адических чисел, иерархический лапласиан, дробное дифференцирование, лапласиан Владимирова, точечный спектр, интегральная плотность состояний, свертки Бернулли, задача Эрдёша, точечный процесс, сходимость к пуассоновскому распределению.

DOI: 10.4213/im8294

Посвящается памяти Н. С. Ландкофа (1915–2004)

§ 1. Введение

Понятия иерархической решетки и иерархического расстояния были введены Ф. Дайсоном в его знаменитых работах о фазовых переходах в одномерной модели ферромагнетика с дальнодействием [1], [2]. Понятие иерархического лапласиана L, тесно связанное с моделью Дайсона, изучалось в математических работах [3]–[9]. Эти работы содержат основную информацию

Первый автор поддержан Национальным научным центром Польши (грант DEC-2012/05/B/ST 1/00613). Второй автор поддержан Немецким исследовательским советом (грант SFB 701). Третий и четвертый авторы поддержаны NSF (США).

об операторе L (спектр, марковская полугруппа, резольвента и т. д.) в случае, когда пространство состояний X дискретно, а иерархическая решетка удовлетворяет тем или иным условиям симметрии (однородность, самоподобие и т. д.). Эти условия симметрии позволяют отождествить пространство состояний (X, m) с дискретной бесконечно порожденной абелевой группой G, снабженной трансляционно-инвариантной ультраметрикой, причем марковская полугруппа $P^t = \exp\{-tL\}$, действующая на $L^2(G, m)$, симметрична, трансляционно-инвариантна и изотропна. В частности, спектр $\mathsf{Spec}(L)$ чисто точечный и все собственные значения имеют бесконечную кратность.

Основная цель упомянутых выше работ состояла в изучении гамильтониана Андерсона $H = L + V$ (суммы иерархического лапласиана L и случайного потенциала V) в надежде обнаружить для таких операторов спектральную бифуркацию от чисто точечного спектра к непрерывному, т. е. доказать знаменитую гипотезу Андерсона. Однако верным оказалось обратное: при слабых технических предположениях спектр иерархического гамильтониана Андерсона чисто точечный (явление локализации, см. [9] и [5]). При этом локальная статистика спектра H пуассоновская (см. [6]), что принято рассматривать как проявление спектральной локализации (см. [10] и [11]).

Мы введем новый класс операторов: случайные иерархические лапласианы L^ω, для которых возникают новые спектральные эффекты. Спектр таких операторов все еще чисто точечный (а собственные функции имеют компактный носитель), но, в отличие от детерминированного случая, существует непрерывная плотность состояний. Эта плотность демонстрирует спектральную бифуркацию от чисто точечного спектра к непрерывному. Собственные значения локально образуют пуассоновский точечный процесс, интенсивность которого задается плотностью состояний. Мы увидим, что сделанные предположения о случайных величинах, входящих в определение L^ω, почти окончательны: контрпримеры показывают, что без этих предположений все основные результаты неверны.

Систематическое изучение класса изотропных марковских полугрупп, определенных на ультраметрическом пространстве с мерой (X, d, m), было проведено в [12] (для дискретного X) и в недавней работе [13] (где X могло содержать как изолированные, так и неизолированные точки), см. также [8] и [14]. Оно мотивировалось теорией *случайных блужданий на бесконечно порожденных группах* (классическая тематика, восходящая к первопроходческим работам П. Эрдёша, Ф. Спицера, Х. Кестена, С. А. Молчанова, Дж. Лаулера и других). Оказалось, что эти вопросы тесно связаны друг с другом. А именно, для любой изотропной марковской полугруппы (P^t) на ультраметрическом измеримом пространстве (X, d, m) с минус марковским генератором L можно показать, что оператор L совпадает с иерархическим лапласианом L_C на (X, d, m) для надлежащей функции выбора $C(B)$ (определение см. ниже), и наоборот. Здесь применима общая теория, развитая в [12] и [13]. В частности, обозначая каноническую модификацию исходной ультраметрики d через d_*, мы можем описать множество $\mathsf{Spec}(L)$ следующим образом:

$$\mathsf{Spec}(L) = \mathsf{closure}\left\{\frac{1}{d_*(x, y)} : x \neq y\right\} \cup \{0\}. \tag{1.1}$$

Так как семейства d-шаров и d_*-шаров совпадают, то эти две ультраметрики задают одну и ту же топологию и одинаковые иерархические структуры, в частности один и тот же класс иерархических лапласианов. Из уравнения (1.1) в свою очередь вытекают следующие ключевые для нашего анализа факты (см. [15]). Пусть задано произвольное замкнутое множество $S \subseteq [0, \infty)$, содержащее 0 как предельную точку. Допустим, что пространство X некомпактно, а если в X есть неизолированная точка, то множество S неограничено. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Найдутся такие собственная ультраметрика d' на X и функция выбора $C(B)$, определенная на множестве шаров в (X, d'), что $\mathsf{Spec}(L_C) = S$; при этом ультраметрика d' задает ту же топологию, что и d.

2) Если ультраметрика d собственная и существует разбиение пространства X на d-шары, среди которых бесконечно много неодноточечных, то найдется такая функция выбора $C(B)$ на множестве шаров в (X, d), что $\mathsf{Spec}(L_C) = S$.

Следующий очень простой пример показывает, что в утверждении 2) нельзя опустить условие "существует разбиение пространства X на d-шары, среди которых бесконечно много неодноточечных": $X = \mathbb{N}$, а $d(m, n) = \max\{m, n\}$ при $m \neq n$ и $d(m, n) = 0$ в противном случае.

По ходу изложения мы предполагаем, что (X, d) – локально компактное сепарабельное ультраметрическое пространство. Напомним, что метрика d называется *ультраметрикой*, если она удовлетворяет ультраметрическому неравенству

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\}, \tag{1.2}$$

которое, очевидно, сильнее обычного неравенства треугольника. Как правило, мы также считаем, что ультраметрика d *собственная*, т. е. все замкнутые d-шары компактны.

Пусть m – радоновская мера на (X, d) такая, что

(a) $m(B) > 0$ для каждого шара B положительного диаметра;

(b) $m(\{x\}) = 0$ тогда и только тогда, когда x – неизолированная точка;

(c) $m(X) = \infty$, если X не компактно.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех шаров положительной меры. Из наших предположений вытекает, что $\mathcal{B}$ не более чем счетно. Пусть $C\colon \mathcal{B} \to (0, \infty)$ – любая функция, удовлетворяющая следующим условиям (и для краткости называемая функцией выбора):

– для каждого шара $B \in \mathcal{B}$

$$\lambda(B) := \sum_{T \in \mathcal{B}\colon\, B \subseteq T} C(T) < \infty;$$

– для каждой неизолированной точки $x \in X$

$$\sup\{\lambda(B)\colon B \in \mathcal{B} \text{ и } x \in B\} = \infty.$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество всех локально постоянных функций с компактным носителем. По данным (X, d, m, C) мы поточечно определяем иерархический лапласиан

$$L_C f(x) := -\sum_{B \in \mathcal{B}\colon\, x \in B} C(B)(P_B f - f(x)), \qquad f \in \mathcal{D}, \tag{1.3}$$

где
$$P_B f := \frac{1}{m(B)} \int_B f\, dm.$$
Оператор $(L_C, \mathcal{D})$ действует на $L^2 = L^2(X, m)$. Он симметричен и обладает полной системой собственных функций $\{f_{B,B'}\}_{B \in \mathcal{B}}$, а именно,
$$f_{B,B'} = \frac{1}{m(B)} 1_B - \frac{1}{m(B')} 1_{B'}, \tag{1.4}$$
где $B \subset B'$ – ближайшие соседние шары (в случае, когда $m(X) < \infty$, мы также полагаем $f_{X,X'} = 1/m(X)$). Собственное значение $\lambda(B')$, отвечающее собственной функции $f_{B,B'}$, имеет вид
$$\lambda(B') = \sum_{T \in \mathcal{B}:\ B' \subseteq T} C(T); \tag{1.5}$$
при этом в случае, когда $m(X) < \infty$, мы также полагаем $X' = X \cup \{\varpi\}$ и $\lambda(X') = 0$. В частности, мы заключаем, что $(L_C, \mathcal{D})$ – существенно самосопряженный оператор на L^2. Его единственное самосопряженное расширение обозначим опять через $(L_C, \mathsf{Dom}_{L_C})$. Обо всем этом см. работу [15].

Заметим, что в определении функций $C(B)$, $\lambda(B)$ и, следовательно, оператора $(L_C,\ \mathsf{Dom}_{L_C})$ ультраметрика d не используется . Фактически нужно только семейство шаров $\mathcal{B}$, которое может быть одним и тем же для двух разных ультраметрик: d и d'.

С другой стороны, зафиксировав данные (X, d, m) и выбрав функцию
$$C(B) = \frac{1}{\mathsf{diam}(B)} - \frac{1}{\mathsf{diam}(B')},$$
где $B \subset B'$ – любые два ближайших соседних шара, мы получаем иерархический лапласиан $(L_C, \mathsf{Dom}_{L_C})$ такой, что
$$\lambda(B) = \frac{1}{\mathsf{diam}(B)}.$$
В дальнейшем этот оператор $(L_C, \mathsf{Dom}_{L_C})$ называется стандартным иерархическим лапласианом, ассоциированным с данными (X, d, m).

Опишем содержание основной части статьи. В § 2 устанавливаются некоторые спектральные свойства иерархического лапласиана L_C в предположении, что как ультраметрическое измеримое пространство (X, d, m), на котором он действует, так и сам лапласиан удовлетворяют некоторым условиям симметрии (однородность, самоподобие). В качестве примера рассмотрен оператор $\mathfrak{D}^\alpha$ дробного p-адического дифференцирования порядка $\alpha > 0$. Этот оператор, связанный с p-адической квантовой механикой, был введен В. С. Владимировым (см. [16]–[18]). Оператор $\mathfrak{D}^\alpha$ есть иерархический лапласиан, действующий на $L^2(\mathbb{Q}_p, m)$, где $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адических чисел, а m – мера Хаара. Множество $\mathsf{Spec}(\mathfrak{D}^\alpha)$ состоит из собственных значений $p^{k\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}$ (кратность каждого из них бесконечна) и содержит 0 как предельную точку.

В § 3 по однородному лапласиану L_C и семейству $\{\varepsilon(B)\}_{B \in \mathcal{B}}$ симметричных независимых одинаково распределенных случайных величин определяются возмущенная функция выбора $C(B, \omega)$ и возмущенный лапласиан $L^\omega = L_{C(\omega)}$. Этот новый оператор L^ω играет основную роль при изучении спектральной статистики.

Для каждого $\omega \in \Omega$ оператор L^ω является иерархическим лапласианом и, тем самым, имеет чисто точечный спектр. С другой стороны, при некоторых ω он может не быть однородным. В частности, его собственные значения могут быть всюду плотны на некоторых интервалах. Мы изучаем средние арифметические $\bar{\lambda}_O(\omega)$, $O \in \mathcal{B}$, собственных значений оператора L^ω. При некоторых слабых предположениях нормированные арифметические средние $(\bar{\lambda}_O - \mathbb{E}\bar{\lambda}_O)/\sigma[\bar{\lambda}_O]$ сходятся по распределению к $N(0,1)$ при $O \to \varpi$. Мы приводим также примеры, в которых сходимости к нормальному распределению нет.

В § 4 изучается вопрос о существовании интегральной плотности состояний. Оказывается, что интегральная плотность состояний, если она существует, имеет замечательную структуру: представляется бесконечной сверткой вероятностных мер. Точнее, она совпадает с распределением случайной величины $X = \sum A_k X_k$, где X_k независимы и одинаково распределены, а коэффициенты $A_k > 0$ таковы, что $\sum A_k = 1$. Различные свойства вероятностных мер вида $\mu = \mathbb{P}_X$ (т. е. бесконечных сверток) изучались многими авторами начиная с 1930-х годов (см., например, [19]–[23] и указанную там литературу). Эта классическая область восходит к первопроходческим работам П. Эрдёша, Р. Кершнера, П. Леви, Б. Йессена и А. Уинтнера. Мы применяем известные результаты о бесконечных свертках к изучению случайных возмущений оператора Владимирова $\mathfrak{D}^\alpha$ посредством бернуллиевских случайных величин. Оказывается, что интегральная плотность состояний имеет L^2-плотность для почти всех $0 < \alpha \leqslant (\log 2)/(\log p)$ и вполне сингулярна при $\alpha > (\log 2)/(\log p)$.

В заключительном § 5 с помощью полученных результатов изучается эмпирический процесс

$$N_O^\omega = \sum_{B \subseteq O} \delta_{\lambda(B,\omega)},$$

ассоциированный с собственными значениями $\lambda(B,\omega)$ возмущенного оператора L^ω, где δ_a есть вероятностная мера, принимающая значение 1 на $\{a\}$. Для каждого конечного интервала I определим $N_O(I)\colon \omega \mapsto N_O^\omega(I)$. Мы показываем, что если $\mathbb{E}N_O(I)$ сходится при $O \to \varpi$ к некоторому значению $\lambda = \lambda(I) > 0$, то случайная величина $N_O(I)$ при $O \to \varpi$ сходится по распределению к пуассоновской случайной величине $\mathcal{P}_\lambda$. Мы иллюстрируем этот результат несколькими примерами.

Работа над статьей была начата в Билефельдском университете (SFB-701), а закончена в Корнелльском университете. Авторы благодарны Л. Гроссу, М. Нуссбауму, Л. Салофф-Косте и Р. Стрихарцу за плодотворные обсуждения и полезные комментарии. Благодарим также рецензента за ряд ценных предложений.

§ 2. Однородный лапласиан

В этом параграфе мы установим некоторые спектральные свойства иерархического лапласиана L_C, считая, что этот лапласиан и ультраметрическое измеримое пространство (X, d, m), на котором он действует, удовлетворяют следующим условиям симметрии:

(i) группа изометрий пространства (X, d) действует транзитивно на X;

(ii) эталонная мера m и функция выбора $C(B)$ инвариантны относительно изометрий.

Ультраметрическое измеримое пространство (X, d, m) и иерархический лапласиан L_C на нем, удовлетворяющие этим двум условиям, будем называть *однородными.*

Из условия (i) вытекает, что пространство (X, d) либо дискретно, либо совершенно. Основные используемые в дальнейшем примеры таковы:

1) $X = \mathbb{Z}_p$ (кольцо целых p-адических чисел);

2) $X = \mathbb{Q}_p$ (кольцо p-адических чисел);

3) $X = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ (снабженная дискретной топологией мультипликативная группа корней p^n-й степени из единицы, где n пробегает множество всех неотрицательных целых чисел).

Как отмечено в [24], [25], из наших предположений вытекает, что измеримое пространство (X, m) можно отождествить с локально компактной вполне несвязной абелевой группой G, снабженной мерой Хаара. Заметим, что группа G не единственна. Если пространство X *совершенно и не компактно*, то в качестве G можно взять следующую абелеву группу:

$$G = \liminf_{l \to -\infty} \biggl(\prod_{k \geqslant l} \mathbb{Z}(n_k) \biggr), \tag{2.1}$$

где $\mathbb{Z}(n_k)$ – циклические группы, а $\{n_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – выбранная надлежащим образом двусторонняя последовательность целых чисел. Каноническая ультраметрическая структура на G определяется убывающей последовательностью компактных подгрупп

$$G_l = \prod_{k \geqslant l} \mathbb{Z}(n_k).$$

А именно, группы G_l, $l \in \mathbb{Z}$, и их смежные классы $\{a + G_l\}$ образуют семейство $\mathcal{B}$ всех открыто-замкнутых шаров.

С двусторонней цепочкой подгрупп G_l группы G ассоциирована естественная ультраметрическая структура. Определим *абсолютное значение* $|a|$ элемента a из G формулой

$$|a| = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a = 0, \\ m(G_l), & \text{если} \quad a \in G_l \setminus G_{l+1}. \end{cases}$$

Тогда для $|a|$ выполнено ультраметрическое неравенство

$$|a + b| \leqslant \max\{|a|, |b|\}.$$

Ясно также, что $|a| = |-a|$ и что ультраметрика $d(a, b) := |a - b|$ превращает (G, m) в однородное ультраметрическое измеримое пространство в смысле, определенном выше. В частности, для каждого шара B имеем

$$m(B) = \mathsf{diam}(B).$$

Выбрав меру Хаара m так, что $m(G_0) = 1$, мы можем вычислить $m(G_l)$ для всех $l \neq 0$ по формуле

$$m(G_l) = \begin{cases} n_l \cdots n_{-1} & \text{при} \quad l < 0, \\ (n_{l-1} \cdots n_0)^{-1} & \text{при} \quad l > 0. \end{cases}$$

Напомним, что в классическом случае $X = \mathbb{Q}_p$ мы имеем $G_0 = \mathbb{Z}_p$, $G_l = p^l\mathbb{Z}_p$ и

$$|a| = p^{-n(a)}, \quad \text{где} \;\; n(a) = \max\{l\colon a \in G_l\}.$$

Величина $|a|$ становится псевдонормой, т. е.

$$|ab| \leqslant |a|\,|b|.$$

Она является нормой, т. е. $|ab| = |a|\,|b|$, если p – простое число. Это свойство играет важную роль в p-адическом анализе и его приложениях.

Напомним, что каждому ультраметрическому пространству (X, d) стандартным образом ставится в соответствие дерево $\mathcal{T}(X)$ (см. рис. 1). Вершинами этого дерева являются метрические шары, т. е. в нашем случае смежные классы $\{a + G_l\colon a \in G,\ l \in \mathbb{Z}\}$. Убывающая последовательность подгрупп $\{G_l\colon l = 0, -1, -2, \dots\}$ определяет специальную граничную точку, которую мы обозначим через ϖ. Рассмотрим орициклы дерева относительно этой точки. В нашем случае *орицикл* – это множество вершин, отвечающих всем шарам заданного диаметра или, иными словами, всем смежным классам по некоторой подгруппе G_l. Таким образом, для каждого l имеем орицикл $H_l = \{a + G_l\colon a \in G\}$. Границу $\partial\mathcal{T}(G)$ можно отождествить с одноточечной компактификацией $G \cup \{\varpi\}$ группы G. Подробное изложение связи между ультраметрическим пространством и деревом его метрических шаров см. в [24], [25] и [15]. Самый полный источник основных определений, касающихся геометрии деревьев, – это [26], см. также [27].

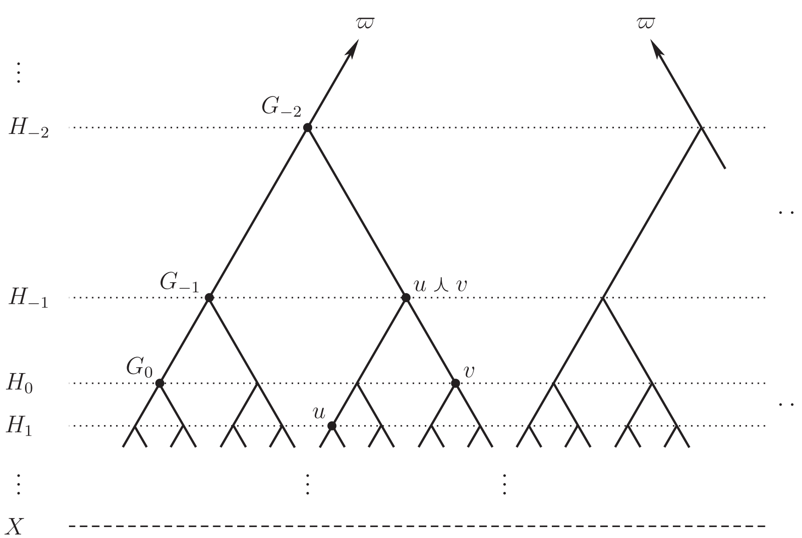

Рис. 1. Дерево шаров $\mathcal{T}(X)$ прямой степени $n_l = 2$

Обозначим через L_C однородный иерархический лапласиан на ультраметрическом измеримом пространстве (G, d, m), заданный функцией выбора $C(B)$, т. е.

$$L_C f(x) = -\sum_{B \in \mathcal{B}\colon\, x \in B} C(B)(P_B f - f(x)).$$

Благодаря свойству однородности имеем $C(A) = C(B)$ для любых двух шаров, лежащих в одном орицикле H. Конечно, это верно и для собственных значений $\lambda(A)$ и $\lambda(B)$. Положим $c_H = C(B)$ и $\lambda_H = \lambda(B)$ для любого шара $B \in H$. При $H = H_k$ мы также пишем $c_k = c_{H_k}$ и $\lambda_k = \lambda_{H_k}$. В этих обозначениях имеем

$$\lambda_k = \sum_{l \leqslant k} c_l.$$

У каждого шара $B \in H_k$ есть n_k ближайших соседей $B_i \subset B$. Собственные функции $f_{B_i,B}$, отвечающие $\lambda(B)$, имеют вид

$$f_{B_i,B} = \frac{1_{B_i}}{m(B_i)} - \frac{1_B}{m(B)}.$$

Система функций $\{f_{B_i,B} \colon i = 1, \dots, n_k\}$ не ортогональна, а ее линейная оболочка $\mathcal{H}(B) \subset L^2$ имеет размерность $n_k - 1$. Полагая

$$f_i := f_{B_i,B}, \quad m := m(B_i), \qquad i = 1, \dots, n_k - 1,$$

с помощью процесса Грама–Шмидта получаем ортогональный базис $\{u_i \colon i = 1, \dots, n_k - 1\} \subset \mathcal{H}(B)$, в котором $u_1 = f_1$, а для $i \geqslant 2$

$$u_i = f_1 + \dots + f_{i-1} + (n_k - i + 1) f_i, \qquad \|u_i\|^2 = \frac{(n_k - i)(n_k - i + 1)}{m}.$$

Собственные подпространства $\mathcal{H}(S)$ и $\mathcal{H}(T)$, отвечающие двум различным шарам S и T, ортогональны. Отсюда вытекает, что собственное подпространство $\mathcal{H}_k$, соответствующее орициклу H_k (или, эквивалентно, собственному значению λ_k), имеет вид

$$\mathcal{H}_k = \bigoplus_{B \in H_k} \mathcal{H}(B).$$

Поскольку система собственных функций $\{f_{B_i,B}\}_{B \in \mathcal{B}}$ полна, имеем

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_k = L^2(G, m).$$

Среди большого многообразия однородных иерархических лапласианов L_C на (G, d, m) выделим однопараметрическое семейство $\{\mathfrak{B}^\alpha\}_{\alpha > 0}$. Иерархический лапласиан $\mathfrak{B}^\alpha$ задается функцией выбора

$$C_\alpha(B) = (\mathsf{diam}(B))^{-\alpha} - (\mathsf{diam}(B'))^{-\alpha}, \tag{2.2}$$

где $B \subset B'$ – ближайшие соседние шары. Поэтому для любого шара $B \in \mathcal{B}$ собственное значение $\lambda_\alpha(B)$ оператора $\mathfrak{B}^\alpha$, отвечающее B, имеет вид

$$\lambda_\alpha(B) = (\mathsf{diam}(B))^{-\alpha}.$$

Тогда собственное значение $\lambda_\alpha(k)$ оператора $\mathfrak{B}^\alpha$, отвечающее орициклу H_k, вычисляется так:

$$\lambda_\alpha(0) = 1, \qquad \lambda_\alpha(k) = \begin{cases} (n_k \cdots n_{-1})^{-\alpha} & \text{при } \ k < 0, \\ (n_{k-1} \cdots n_0)^{\alpha} & \text{при } \ k > 0. \end{cases}$$

Напомним (см. [13]), что множество $\mathcal{D}$ всех локально постоянных функций с компактным носителем является областью определения оператора $\mathfrak{B}^\alpha$. Замечательны следующие нетрудно доказываемые свойства:

$$\mathfrak{B}^\beta\colon \mathcal{D} \to \mathsf{Dom}(\mathfrak{B}^\alpha)$$

и на $\mathcal{D}$

$$\mathfrak{B}^\alpha \circ \mathfrak{B}^\beta = \mathfrak{B}^{\alpha+\beta}, \qquad (\mathfrak{B}^\alpha)^\beta = \mathfrak{B}^{\alpha\beta}.$$

При этом для $G = \mathbb{Q}_p$ оператор $\mathfrak{D}^\alpha = p^\alpha \mathfrak{B}^\alpha$ совпадает с оператором дробного дифференцирования порядка α, определяемым и изучаемым с помощью преобразования Фурье в работах [28], [16], [18] и [29]. В этом случае для всех $f \in \mathcal{D}$ имеем

$$\mathfrak{D}^\alpha f(x) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_G \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{1+\alpha}}\, dm(y) \tag{2.3}$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{B}^\alpha f(x) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_G \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{1+\alpha}}\, dm(y).$$

Наконец, отметим, что аналогичные отождествления (с использованием циклических групп $\mathbb{Z}(n)$ в качестве строительных блоков) можно провести и в оставшихся двух случаях: когда (X,d) *бесконечно и дискретно*, и когда (X,d) *компактно и совершенно*. Например, бесконечную (неабелеву) симметрическую группу S_∞, каноническая ультраметрическая структура которой задается семейством $\{S_n\}$ всех ее конечных симметрических подгрупп S_n, можно отождествить (как ультраметрическое измеримое пространство) с дискретной абелевой группой $G = \bigoplus_{l>1} \mathbb{Z}(l)$. Каноническая ультраметрическая структура группы G задается семейством $\{G_n\}$ всех ее конечных подгрупп вида $G_n = \prod_{1<l\leqslant n} \mathbb{Z}(l)$. В качестве второго примера рассмотрим компактное совершенное ультраметрическое пространство $X = \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ (кольцо целых p-адических чисел). Его можно отождествить (как ультраметрическое измеримое пространство) с компактной абелевой группой $G = \prod_{k\geqslant 1} \mathbb{Z}(l_k)$, где все l_k равны p. Ультраметрическая структура в этом случае задается убывающим семейством малых подгрупп $G_l = \prod_{k\geqslant l} \mathbb{Z}(l_k) \subset G$.

§ 3. Случайные возмущения

Пусть (X,d,m) – некомпактное однородное ультраметрическое пространство. Обозначим через L_C однородный иерархический лапласиан на X, заданный функцией выбора $C(B)$. Пусть $\{\varepsilon(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$ – семейство симметричных независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathbb{P})$ и принимающих значения в некотором малом интервале $[-\epsilon,\epsilon] \subset (-1,1)$. Определим возмущенную функцию выбора $C(B,\omega)$ и возмущенный иерархический лапласиан следующим образом:

$$C(B,\omega) = C(B)(1+\varepsilon(B,\omega))$$

и

$$L^\omega f(x) := L_{C(\omega)} f(x) = -\sum_{B\in\mathcal{B}\colon x\in B} C(B,\omega)(P_B f - f(x)).$$

Очевидно, что оператор L^ω может быть неоднородным для некоторых $\omega \in \Omega$. Он имеет чисто точечный спектр для всех ω, но структура замкнутого множества $\mathsf{Spec}(L^\omega)$ может быть весьма сложной (см. различные примеры в [15]).

Два стационарных семейства. Зафиксируем орицикл $H = H_l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$ и обозначим через $\lambda_H = \lambda_l$ собственное значение однородного лапласиана L_C, отвечающее орициклу H. Пусть $B \in H$ и $\{B_k\}_{k\leqslant l}$ есть единственный бесконечный геодезический путь в $\mathcal{T}(X)$ из точки ϖ в точку B. Вычислим собственное значение $\lambda(B,\omega)$ оператора $L^\omega = L_{C(\omega)}$:

$$\begin{aligned}\lambda(B,\omega) &= \sum_{k\leqslant l} C(B_k,\omega) = \sum_{k\leqslant l} c_k(1+\varepsilon(B_k,\omega))\\ &= \lambda_l\biggl(1+\sum_{k\leqslant l} a_k\varepsilon(B_k,\omega)\biggr) =: \lambda_l(1+U(B,\omega)),\end{aligned}$$

где $a_k = c_k/\lambda_l$ и

$$U(B,\omega) = \sum_{k\leqslant l} a_k\varepsilon(B_k,\omega). \tag{3.1}$$

Заметим, что $\sum_{k\leqslant l} a_k = 1$ и что $\{U(B)\}_{B\in H}$ – это (зависимые) одинаково распределенные симметричные случайные величины, принимающие значения в некотором симметричном интервале $I \subsetneq (-1,1)$.

Изучим семейства случайных величин $\{\lambda(B,\omega)\}_{B\in H}$ и $\{U(B)\}_{B\in H}$. Так как орицикл $H = H_l$ фиксирован, удобно отождествлять шары $B \in H$ с элементами $g \in G$ (дискретной!) абелевой группы $G = \bigoplus_{k<l}\mathbb{Z}(n_k)$. С помощью этого отождествления непосредственно проверяется, что семейство $\{U(B)\}_{B\in H} = \{U(g)\}_{g\in G}$ стационарно, т. е. для любых $g, g_1, \dots, g_s$ из G имеем

$$\bigl\{U(g+g_1),\dots,U(g+g_s)\bigr\} \overset{d}{=} \bigl\{U(g_1),\dots,U(g_s)\bigr\}.$$

Общую теорию стационарных процессов см. в [30] и [20].

Легко вычислить корреляционные функции $\mathcal{K}_U(g,g') = \mathbb{E}U(g)U(g')$. А именно, имеем:

$$\mathcal{K}_U(g,g') = \mathcal{K}_U(0,g-g') =: \mathcal{K}_U(g-g')$$

и

$$\mathcal{K}_U(g) = \sum_{k\geqslant|g|} a_{l-k}^2, \tag{3.2}$$

где

$$|g| = \min\biggl\{n\colon g \in \{0\}\times\bigoplus_{-n\leqslant k<l}\mathbb{Z}(n_k) \subset G\biggr\}.$$

Поскольку функция $\mathcal{K}_U(g)$ положительно определена, по теореме Бохнера существует конечная мера $\mathcal{F}_U$ (спектральная мера) на компактной группе $\widehat{G} = \prod_{k<l}\mathbb{Z}(n_k)$ такая, что

$$\mathcal{K}_U(g) = \int_{\widehat{G}} \langle g,\gamma\rangle\, d\mathcal{F}_U(\gamma).$$

Имеем
$$\int_G \mathcal{K}_U(g)\,dg = a_l^2 + n_{l-1}a_{l-1}^2 + n_{l-1}n_{l-2}a_{l-2}^2 + \cdots .$$
В частности, если функция $\mathcal{K}_U$ интегрируема, то спектральная мера $\mathcal{F}_U$ абсолютно непрерывна относительно меры Хаара на $\widehat{G}$ и имеет непрерывную плотность $F_U(\gamma)$, которую можно вычислить как обратное преобразование Фурье от $\mathcal{K}_U(g)$:

$$F_U(\gamma) = a_l^2 + n_{l-1}a_{l-1}^2 1_{A(G_{l-1})}(\gamma) + n_{l-1}n_{l-2}a_{l-2}^2 1_{A(G_{l-2})}(\gamma) + \cdots .$$

Здесь $A(G_{l-i}) \subset \widehat{G}$ есть аннулятор подгруппы G_{l-i}, т. е.

$$A(G_{l-i}) = \{0\} \times \prod_{k<l-i} \mathbb{Z}(n_k).$$

Так как для $B \in H$ имеем $\lambda(B,\omega) = \lambda_H(1 + U(B,\omega))$, то семейство случайных величин
$$\lambda(g,\omega) = \lambda_H(1 + U(g,\omega))$$
также стационарно. В частности, его корреляционная функция $\mathcal{K}_\lambda(g)$ удовлетворяет равенству
$$\mathcal{K}_\lambda(g) = \lambda_H^2 \mathcal{K}_U(g), \qquad g \in G,$$
которое будет использоваться в наших дальнейших вычислениях.

Закон больших чисел. Выберем точку отсчета $o \in X$ (например, нейтральный элемент 0 при отождествлении $X \equiv G$ пространства X с группой G) и рассмотрим семейство $\mathcal{O}$ всех шаров O с центром o. Зафиксируем орицикл H и изучим предельное поведение (при $O \to \varpi$ вдоль $\mathcal{O}$) семейства арифметических средних
$$\bar{\lambda}_H(O,\omega) = \frac{1}{|\mathcal{B}_H(O)|} \sum_{B \in \mathcal{B}_H(O)} \lambda(B,\omega),$$

где $\mathcal{B}_H(O)$ есть множество всех подшаров B шара O, принадлежащих орициклу H, а $|\mathcal{B}_H(O)|$ означает мощность конечного множества $\mathcal{B}_H(O)$.

Напомним, что для любых двух шаров A и B, принадлежащих одному орициклу H, собственные значения $\lambda(A)$ и $\lambda(B)$ однородного лапласиана L_C совпадают и их общее значение обозначается через λ_H.

Теорема 3.1. *Для любого орицикла H при $O \to \varpi$ имеем*

$$\bar{\lambda}_H(O,\omega) \to \lambda_H \quad \text{п. н.}$$

Доказательство. Пусть $B \in H_l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$, и пусть $\{B_k\}_{k \leqslant l}$ – это единственный бесконечный геодезический путь от ϖ до B в $\mathcal{T}(X)$. Мы уже вычислили собственное значение $\lambda(B,\omega)$ оператора $L_{C(\omega)}$, отвечающее шару B:

$$\lambda(B,\omega) = \lambda_l(1 + U(B,\omega)),$$

где $a_k = c_k/\lambda_l$ и
$$U(B,\omega) = \sum_{k \leqslant l} a_k \varepsilon(B_k,\omega). \tag{3.3}$$

Вычислим арифметическое среднее $\bar{\lambda}_{H_l}(O,\omega)$, считая, что $O \in H_L$ и $L \ll l$. Для упрощения обозначений положим $\bar{\lambda}_L(\omega) := \bar{\lambda}_{H_l}(O,\omega)$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_L(\omega) &= \frac{1}{|\mathcal{B}_H(O)|} \sum_{B\in\mathcal{B}_H(O)} \lambda(B,\omega) \\ &= \frac{\lambda_l}{n_{l-1}\cdots n_L} \sum_{B\in\mathcal{B}_{H_l}(O)} (1+U(B,\omega)) = \lambda_l(1+\overline{U}_L(\omega)),\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\overline{U}_L(\omega) = \frac{1}{n_{l-1}\cdots n_L} \sum_{B\in\mathcal{B}_{H_l}(O)} U(B,\omega). \tag{3.5}$$

Тем самым, для доказательства теоремы осталось установить, что $\overline{U}_L(\omega) \to 0$ п. н. при $L \to -\infty$. Пусть $\{O_k\}_{k\leqslant l}$ – бесконечный геодезический путь из ϖ в O. Подставляя (3.3) в (3.5), получаем

$$\begin{aligned}\overline{U}_L &= \frac{1}{n_{l-1}\cdots n_L} \sum_{B\in H_l\colon B\subset O}\ \sum_{k\leqslant l} a_k\varepsilon(B_k) = \frac{1}{n_{l-1}\cdots n_L} \sum_{k\leqslant l} a_k \sum_{B\in H_l\colon B\subset O} \varepsilon(B_k) \\ &= \frac{1}{n_{l-1}\cdots n_L}\biggl(a_l \sum_{B\in H_l\colon B\subseteq O} \varepsilon(B) + a_{l-1}n_{l-1} \sum_{B\in H_{l-1}\colon B\subseteq O} \varepsilon(B) \\ &\qquad + a_{l-2}n_{l-1}n_{l-2} \sum_{B\in H_{l-2}\colon B\subseteq O} \varepsilon(B) + \cdots + a_L n_{l-1}n_{l-2}\cdots n_L\varepsilon(O_L)\biggr) \\ &\qquad + a_{L-1}\varepsilon(O_{L-1}) + a_{L-2}\varepsilon(O_{L-2}) + \cdots\,.\end{aligned}$$

Введем две случайные величины:

$$\mathcal{U}_L = \frac{a_l}{n_{l-1}\cdots n_L} \sum_{B\in H_l\colon B\subseteq O} \varepsilon(B) + \frac{a_{l-1}}{n_{l-2}\cdots n_L} \sum_{B\in H_{l-1}\colon B\subseteq O} \varepsilon(B) + \cdots + a_L\varepsilon(O_L) \tag{3.6}$$

и

$$\mathcal{V}_L = a_{L-1}\varepsilon(O_{L-1}) + a_{L-2}\varepsilon(O_{L-2}) + \cdots\,. \tag{3.7}$$

Тогда $\mathcal{U}_L$ и $\mathcal{V}_L$ независимы, имеют нулевое среднее и

$$\overline{U}_L = \mathcal{U}_L + \mathcal{V}_L. \tag{3.8}$$

Кроме того, $\mathcal{V}_L \to 0$ равномерно при $L \to -\infty$. Тем самым, осталось показать, что при $L \to -\infty$

$$\mathcal{U}_L \to 0 \quad \text{п. н.}$$

Положим $\sigma = \sqrt{\mathsf{Var}[\varepsilon]}$ и $\sigma[\mathcal{U}_L] = \sqrt{\mathsf{Var}[\mathcal{U}_L]}$. Вычислим $\sigma[\mathcal{U}_L]$ с помощью (3.6):

$$(\sigma[\mathcal{U}_L])^2 = \sigma^2\biggl(\frac{a_l^2}{n_{l-1}\cdots n_L} + \frac{a_{l-1}^2}{n_{l-2}\cdots n_L} + \cdots + a_L^2\biggr). \tag{3.9}$$

Поскольку все n_k не меньше 2, отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}\sum_{L\leqslant l}(\sigma[\mathcal{U}_L])^2 &= \sigma^2 a_l^2\left(1+\frac{1}{n_{l-1}}+\frac{1}{n_{l-1}n_{l-2}}+\cdots\right)\\ &\qquad + \sigma^2 a_{l-1}^2\left(1+\frac{1}{n_{l-2}}+\frac{1}{n_{l-2}n_{l-3}}+\cdots\right)+\cdots\\ &\leqslant 2\sigma^2(a_l^2+a_{l-1}^2+\cdots) < 2\sigma^2(a_l+a_{l-1}+\cdots)^2 = 2\sigma^2.\end{aligned}$$

Теперь неравенство Чебышёва и лемма Бореля–Кантелли дают требуемый результат. Теорема доказана.

Центральная предельная теорема. Изучим предельное поведение при $O \to \varpi$ нормированных арифметических средних

$$\Lambda_H(O) = \frac{\bar{\lambda}_H(O) - \lambda_H}{\sigma[\bar{\lambda}_H(O)]}.$$

Напомним, что для любой случайной величины Y мы обозначаем через $\sigma[Y]$ ее среднеквадратичное отклонение $\sqrt{\mathsf{Var}[Y]}$. В ходе наших рассуждений будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$\frac{1}{\kappa} \leqslant C(B)(\mathsf{diam}(B))^{\delta/2} \leqslant \kappa \tag{3.10}$$

для всех шаров $B \in \mathcal{B}$ и некоторых $\delta, \kappa > 0$.

Легко видеть, что (3.10) эквивалентно условию

$$\frac{1}{2\kappa} \leqslant \lambda(B)(\mathsf{diam}(B))^{\delta/2} \leqslant 2\kappa. \tag{3.11}$$

Ясно, что условия (3.10) и (3.11) выполнены с $\delta = 2\alpha$ для оператора $\mathfrak{B}^\alpha$, введенного в формуле (2.2) предыдущего параграфа. Действительно, в этом случае имеем

$$\lambda(B)(\mathsf{diam}(B))^{\delta/2} = 1.$$

Обозначим через $N(0,1)$ стандартную нормальную случайную величину. Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 3.2. *Предположим, что $\delta \geqslant 1$. Тогда при $O \to \varpi$ имеем*

$$\Lambda_H(O) \to N(0,1) \quad \textit{по распределению.}$$

Доказательство. Пусть $H = H_l$ и $O = O_L \in H_L$ для некоторого $L \ll l$. Как и при доказательстве теоремы 3.1, зафиксируем l и устремим L к $-\infty$. Для упрощения обозначений положим $\Lambda_H(O) =: \Lambda_L$. Из (3.4) получаем

$$\Lambda_L = \frac{\overline{U}_L}{\sigma[\overline{U}_L]}.$$

Тем самым, осталось показать, что при $L \to -\infty$

$$\frac{\overline{U}_L}{\sigma[\overline{U}_L]} \to N(0,1) \quad \text{по распределению.} \tag{3.12}$$

Как и в (3.8), запишем $\overline{U}_L = \mathcal{U}_L + \mathcal{V}_L$. Поскольку $\mathcal{U}_L$ и $\mathcal{V}_L$ независимы, то

$$(\sigma[\overline{U}_L])^2 = (\sigma[\mathcal{U}_L])^2 + (\sigma[\mathcal{V}_L])^2.$$

Утверждение 3.3. *При фиксированном l и $L \to -\infty$ имеем*

$$(\sigma[\mathcal{V}_L])^2 \asymp \sigma^2 (n_{L-1} n_L \cdots n_0)^{-\delta} \tag{3.13}$$

и

$$(\sigma[\mathcal{U}_L])^2 \asymp \begin{cases} \sigma^2 (n_L \cdots n_0)^{-1}, & \textit{если} \ \ \delta > 1, \\ -\sigma^2 L (n_L \cdots n_0)^{-1}, & \textit{если} \ \ \delta = 1, \\ \sigma^2 (n_L \cdots n_0)^{-\delta}, & \textit{если} \ \ \delta < 1, \end{cases} \tag{3.14}$$

где запись $x \asymp y$ означает, что отношение x/y равномерно ограничено сверху и снизу.

Для доказательства (3.13) воспользуемся равенством (3.7). Поскольку случайные величины $\{\varepsilon(B)\}_{B \in \mathcal{B}}$ независимы и одинаково распределены, имеем

$$(\sigma[\mathcal{V}_L])^2 = \sigma^2 (a_{L-1}^2 + a_{L-2}^2 + \cdots) = \frac{\sigma^2}{\lambda_l^2} (c_{L-1}^2 + c_{L-2}^2 + \cdots),$$

и из (3.10) вытекает, что

$$\begin{aligned} (\sigma[\mathcal{V}_L])^2 &\asymp \sigma^2 ((n_{L-1} n_L \cdots n_0)^{-\delta} + (n_{L-2} n_{L-1} n_L \cdots n_0)^{-\delta} + \cdots) \\ &= \sigma^2 (n_{L-1} n_L \cdots n_0)^{-\delta} (1 + (n_{L-2})^{-\delta} + (n_{L-2} n_{L-3})^{-\delta} + \cdots) \end{aligned}$$

при каждом фиксированном l. Так как все n_k не меньше 2, то получаем соотношение (3.13).

Для доказательства (3.14) воспользуемся равенством (3.9) и условием (3.10). Поскольку l фиксировано, имеем

$$\begin{aligned} (\sigma[\mathcal{U}_L])^2 &= \sigma^2 \left(\frac{a_l^2}{n_{l-1} \cdots n_L} + \frac{a_{l-1}^2}{n_{l-2} \cdots n_L} + \cdots + a_L^2 \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n_{l-1} \cdots n_L} (a_l^2 + a_{l-1}^2 n_{l-1} + \cdots + a_L^2 n_{l-1} \cdots n_L) \\ &\asymp \frac{\sigma^2}{n_0 \cdots n_L} \left(1 + \left(\frac{a_{l-1}}{a_l} \right)^2 n_{l-1} + \cdots + \left(\frac{a_L}{a_l} \right)^2 n_{l-1} \cdots n_L \right) \\ &\asymp \frac{\sigma^2}{n_0 \cdots n_L} \bigl(1 + (n_{l-1})^{1-\delta} + \cdots + (n_{l-1} \cdots n_L)^{1-\delta} \bigr). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает соотношение (3.14).

Пусть теперь $\delta \geqslant 1$. По утверждению 3.3

$$\sigma[\overline{U}_L] \sim \sigma[\mathcal{U}_L] \quad \text{при} \quad L \to -\infty.$$

Значит, для доказательства (3.12) осталось показать, что

$$\frac{\mathcal{U}_L}{\sigma[\mathcal{U}_L]} \to N(0,1) \quad \text{по распределению.}$$

Утверждение 3.4. *Предположим, что $\delta \geqslant 1$ и что l фиксировано. Тогда*
$$\lim_{L\to-\infty} \max_{L\leqslant k\leqslant l} \frac{\sigma a_k}{\sigma[\mathcal{U}_L] \prod_{L\leqslant i\leqslant k-1} n_i} = 0 \tag{3.15}$$
(с учетом соглашения о том, что $\prod_{i\in\varnothing} b_i := 1$).

Действительно, положим $\epsilon = \min\{1, \delta - 1\}$ и рассмотрим такие k, что $L \leqslant k \leqslant l$. Поскольку l фиксировано, можно считать, что $k \leqslant 0$. Обозначим дробь, стоящую в левой части равенства (3.15), через $A(\delta)$. По утверждению 3.3 при $\delta > 1$ имеем
$$\begin{aligned}(A(\delta))^2 &\asymp \frac{\sigma^2(n_k\cdots n_0)^{-\delta}}{\sigma^2(n_L\cdots n_0)^{-1}(n_L\cdots n_{k-1})^2} \\ &= \frac{1}{(n_k\cdots n_0)^{\delta-1}(n_L\cdots n_{k-1})} \leqslant \frac{1}{(n_L\cdots n_0)^{\epsilon}},\end{aligned}$$
а при $\delta = 1$ имеем
$$(A(\delta))^2 \asymp -\frac{\sigma^2(n_k\cdots n_0)^{-1}}{\sigma^2 L(n_L\cdots n_0)^{-1}(n_L\cdots n_{k-1})^2} = -\frac{1}{L(n_L\cdots n_{k-1})} \leqslant -\frac{1}{L}.$$
Отсюда вытекает требуемый результат.

Заметим, что при $\delta < 1$ мы получаем
$$\max_{L\leqslant k\leqslant l} \frac{\sigma a_k}{\sigma[\mathcal{U}_L] \prod_{L\leqslant i\leqslant k-1} n_i} \geqslant \frac{\sigma a_L}{\sigma[\mathcal{U}_L]} \geqslant \frac{c\sigma(n_L\cdots n_0)^{-\delta/2}}{\sigma(n_L\cdots n_0)^{-\delta/2}} = c$$
для некоторого $c > 0$. В частности, в этом случае (3.15) не выполняется.

Обозначим характеристические функции случайных величин $\varepsilon = \varepsilon(B)$ и $\mathcal{U}_L/\sigma[\mathcal{U}_L]$ через ϕ и Φ соответственно. Ввиду (3.6) получаем
$$\Phi(x) = \prod_{L\leqslant k\leqslant l} \phi\left(\frac{a_k x}{\sigma[\mathcal{U}_L] n_L\cdots n_{k-1}}\right)^{n_L\cdots n_{k-1}}$$
(с учетом соглашения о том, что $n_L\cdots n_{k-1} = 1$ при $k = L$).

Поскольку случайная величина ε имеет два момента, можно записать
$$\phi(z) = 1 - \frac{1}{2}(\sigma z)^2(1 + \beta(\sigma z)), \tag{3.16}$$
где $\beta(z) \to 0$ при $z \to 0$. Положим
$$\Delta_k = \frac{\sigma a_k}{\sigma[\mathcal{U}_L] n_L\cdots n_{k-1}}.$$
Заметим, что $\sum_{L\leqslant k\leqslant l} n_L\cdots n_{k-1}\Delta_k^2 = 1$. Применяя теперь (3.16), получим
$$\begin{aligned}\log\Phi(x) &= \sum_{L\leqslant k\leqslant l} n_L\cdots n_{k-1} \log\left[1 - \frac{x^2}{2}\Delta_k^2(1 + \beta(\Delta_k x))\right] \\ &\sim -\frac{x^2}{2}\left[\sum_{L\leqslant k\leqslant l} n_L\cdots n_{k-1}\Delta_k^2(1 + \beta(\Delta_k x))\right] \\ &= -\frac{x^2}{2}\left[1 + \sum_{L\leqslant k\leqslant l} n_L\cdots n_{k-1}\Delta_k^2\beta(\Delta_k x)\right].\end{aligned}$$

Наконец, требуемый результат вытекает из утверждения 3.4 и неравенства

$$\sum_{L\leqslant k\leqslant l} n_L\cdots n_{k-1}\Delta_k^2\beta(\Delta_k x)\leqslant \max_{L\leqslant k\leqslant l}\beta(\Delta_k x).$$

Теорема 3.2 доказана.

Оператор $\mathfrak{B}^\alpha$. В качестве примера рассмотрим пространство $X=\mathbb{Q}_p$ со стандартной ультраметрической структурой, которая задана убывающей последовательностью компактных подгрупп $G_l=p^l\mathbb{Z}_p$. Пусть $\mathfrak{B}^\alpha$ есть однородный лапласиан, определенный функцией выбора (2.2), а $\mathfrak{B}^\alpha(\omega)$ – его случайное возмущение посредством независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин $\{\varepsilon(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$, определенное и изучавшееся выше. Мы уже отмечали, что для оператора $\mathfrak{B}^\alpha$ выполнено условие (3.11) с $\alpha=\delta/2$. В частности, при любом $\alpha\geqslant 1/2$ нормированные арифметические средние $\Lambda_H^\alpha(O)$ собственных значений оператора $\mathfrak{B}^\alpha(\omega)$ сходятся по распределению при $O\to\varpi$ к стандартной нормальной случайной величине $N(0,1)$. В настоящем пункте изучается вопрос о сходимости нормированных арифметических средних $\Lambda_H^\alpha(O)$ в предположении, что $0<\alpha<1/2$.

Теорема 3.5. *Для каждого α, $0<\alpha<1/2$, существует случайная величина Λ_H^α такая, что при $O\to\varpi$ имеем*

$$\Lambda_H^\alpha(O)\to\Lambda_H^\alpha\quad \text{по распределению.}$$

Случайная величина Λ_H^α не гауссова. Она имеет C^∞-функцию распределения $\mathcal{F}_{\Lambda_H^\alpha}$, принадлежащую $D(2)$ – области притяжения нормального закона. Функция $\mathcal{F}_{\Lambda_H^\alpha}$ унимодальна всякий раз, когда общая функция распределения $\mathcal{F}_\varepsilon$ независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\varepsilon(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$ унимодальна.

Доказательство. Мы буквально следуем доказательству теоремы 3.2. Не теряя общности, можно считать, что изучается орицикл $H=H_0$ и что $O=O_L\in H_L$ для некоторого $L<-1$. Для упрощения обозначений положим $\Lambda_L:=\Lambda_H^\alpha(O)$. Так как $\Lambda_L=\overline{U}_L/\sigma[\overline{U}_L]$, где $\overline{U}_L$ – случайная величина, определенная равенством (3.5), то можно записать $\overline{U}_L=\mathcal{U}_L+\mathcal{V}_L$ и

$$(\sigma[\overline{U}_L])^2=(\sigma[\mathcal{U}_L])^2+(\sigma[\mathcal{V}_L])^2.$$

Поскольку $\lambda_k=p^{\alpha k}$ и $c_k=(p^\alpha-1)p^{\alpha(k-1)}$, получаем

$$a_k=\frac{c_k}{\lambda_0}=(p^\alpha-1)p^{\alpha(k-1)},\qquad k\leqslant 0.$$

Перечисленные данные позволяют нам оценить $\sigma[\mathcal{U}_L]$ и $\sigma[\mathcal{V}_L]$ на $-\infty$. А именно,

$$\begin{aligned}(\sigma[\mathcal{U}_L])^2&=\sigma^2\biggl(\frac{a_0^2}{p^{-L}}+\frac{a_{-1}^2}{p^{-L-1}}+\dots+a_L^2\biggr)=\sigma^2(p^\alpha-1)^2\sum_{0\leqslant l\leqslant -L}p^{L+l-2\alpha(l+1)}\\&\sim\frac{\sigma^2(p^\alpha-1)^2}{1-p^{2\alpha-1}}p^{2\alpha(L-1)}=\frac{\sigma^2}{1-p^{2\alpha-1}}a_L^2\end{aligned}\tag{3.17}$$

и

$$(\sigma[\mathcal{V}_L])^2 = \sigma^2(a_{L-1}^2 + a_{L-2}^2 + \cdots) = \sigma^2(p^\alpha - 1)^2 \sum_{l \geqslant -L+1} p^{-2\alpha(l+1)}$$
$$\sim \frac{\sigma^2(p^\alpha - 1)^2}{1 - p^{-2\alpha}} p^{2\alpha(L-2)} = \frac{\sigma^2}{1 - p^{-2\alpha}} a_{L-1}^2. \tag{3.18}$$

Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i \geqslant 0}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от $\{\varepsilon(B)\}_{B \in \mathcal{B}}$ и имеющие ту же общую функцию распределения, что и $\{\varepsilon(B)\}_{B \in \mathcal{B}}$. Согласно (3.7) и (3.18) случайные величины $\mathcal{V}_L/\sigma[\mathcal{V}_L]$ сходятся по распределению к случайной величине

$$V = \sqrt{1 - p^{-2\alpha}} \left(\frac{\varepsilon_0}{\sigma[\varepsilon_0]} + p^{-\alpha} \frac{\varepsilon_1}{\sigma[\varepsilon_2]} + \cdots + p^{-k\alpha} \frac{\varepsilon_k}{\sigma[\varepsilon_k]} + \cdots \right).$$

По теореме Крамера V не гауссова.

Пусть $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j \geqslant 0}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие ни от $\{\varepsilon_i\}_{i \geqslant 0}$, ни от $\{\varepsilon(B)\}_{B \in \mathcal{B}}$ и имеющие ту же общую функцию распределения, что и $\{\varepsilon(B)\}_{B \in \mathcal{B}}$. Определим случайные величины

$$S_k = \sum_{0 \leqslant j \leqslant p^k - 1} \varepsilon_{kj}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Согласно (3.6) и (3.17) случайные величины $\mathcal{U}_L/\sigma[\mathcal{U}_L]$ сходятся по распределению к случайной величине

$$U = \sqrt{1 - p^{2\alpha - 1}} \sum_{k \geqslant 0} p^{(2\alpha - 1)k/2} \frac{S_k}{\sigma[S_k]}.$$

По теореме Крамера U не гауссова.

Наконец, случайные величины

$$\Lambda_L = \frac{\overline{U}_L}{\sigma[\overline{U}_L]} = \frac{\sigma[\mathcal{U}_L]}{\sigma[\overline{U}_L]} \frac{\mathcal{U}_L}{\sigma[\mathcal{U}_L]} + \frac{\sigma[\mathcal{V}_L]}{\sigma[\overline{U}_L]} \frac{\mathcal{V}_L}{\sigma[\mathcal{V}_L]}$$

сходятся по распределению к

$$\Lambda = \sqrt{\frac{1 - p^{-2\alpha}}{1 - p^{-1}}}\, U + \sqrt{\frac{p^{-2\alpha} - p^{-1}}{1 - p^{-1}}}\, V.$$

Поскольку U и V независимы и не гауссовы, случайная величина Λ также не гауссова.

Для произвольной случайной величины X через $\Phi_X(\xi) = \mathbb{E} \exp\{i\xi X\}$ обозначим ее характеристическую функцию. Поскольку случайные величины $\{\varepsilon_{kj}\}$ независимы и одинаково распределены, функция $\Phi_{\varepsilon_{kj}}$ не зависит от i, j. Положим $\Phi = \Phi_{\varepsilon_{kj}}$. Согласно (3.16) для каждого ϵ, $0 < \epsilon < 1$, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$
\begin{aligned}
|\Phi_U(\xi)| &= \prod_{k\geqslant 0}\left|\Phi_{S_k}\left(\frac{p^{(2\alpha-1)k/2}}{\sigma[S_k]}\xi\right)\right| = \prod_{k\geqslant 0}\left|\Phi\left(\frac{p^{(2\alpha-1)k/2}}{\sigma[S_k]}\xi\right)\right|^{p^k}\\
&\leqslant \prod_{k\colon p^{(2\alpha-1)k/2}\xi/\sigma[S_k]<\delta}\left|\Phi\left(\frac{p^{(2\alpha-1)k/2}}{\sigma[S_k]}\xi\right)\right|^{p^k}\\
&\leqslant \prod_{k\colon p^{(2\alpha-1)k/2}\xi/\sigma[S_k]<\delta}\left(1-\frac{\xi^2}{2}\,\frac{\sigma^2p^{(2\alpha-1)k}(1-\epsilon)}{(\sigma[S_k])^2}\right)^{p^k}.
\end{aligned}
$$

Так как $(\sigma[S_k])^2=\sigma^2p^k$, то мы получаем

$$
|\Phi_U(\xi)|\leqslant \exp\biggl\{-\frac{\xi^2}{2}(1-\epsilon)\sum_{k\colon p^{(\alpha-1)k}\xi/\sigma<\delta}p^{(2\alpha-1)k}\biggr\}\leqslant \exp\{-A\xi^{\beta}\}
$$

для некоторых $A>0$, $\beta=(1-\alpha)^{-1}\in(1,2)$ и для всех $\xi>\delta\sigma$. При $\xi\leqslant\delta\sigma$ получим

$$
|\Phi_U(\xi)|\leqslant\exp\{-B\xi^2\}
$$

для некоторого $B>0$. Таким образом, при любом ξ имеем

$$
|\Phi_U(\xi)|\leqslant\exp\bigl\{-C\min\{\xi^2,\xi^{\beta}\}\bigr\}
$$

для некоторого $C>0$.

Так как случайные величины U и V независимы и $\Lambda=\lambda_1U+\lambda_2V$, то

$$
\Phi_\Lambda(\xi)=\Phi_U(\lambda_1\xi)\Phi_V(\lambda_2\xi).
$$

В частности, Φ_Λ удовлетворяет такому же неравенству, как и Φ_U. Этим доказано, что функция распределения $\mathcal{F}_\Lambda$ случайной величины Λ принадлежит классу C^∞. Поскольку Λ имеет второй момент, то $\mathcal{F}_\Lambda$ принадлежит $D(2)$, т. е. лежит в области притяжения нормального закона.

Наконец, предположим, что общая функция распределения $\mathcal{F}_\varepsilon$ случайных величин $\{\varepsilon_{ij}\}$ унимодальна. Так как свертка симметричных унимодальных функций распределения $\mathcal{F}_U$ и $\mathcal{F}_V$ симметрична и унимодальна, то и функция $\mathcal{F}_\Lambda$ такова. Теорема доказана.

§ 4. Интегральная плотность состояний

Пусть L_C – однородный иерархический лапласиан, а $L_{C(\omega)}$ – его случайное возмущение, определенное и изученное в предыдущем параграфе. Для ультраметрического шара $O\in\mathcal{B}$ и орицикла $H\in\mathcal{T}$ обозначим через $\mathcal{B}_H(O)$ множество всех шаров $B\subseteq O$, принадлежащих орициклу H.

Обозначим через δ_a вероятностное распределение, сосредоточенное в точке $a\in\mathbb{R}$. Зафиксируем орицикл H и изучим предельное поведение нормированного эмпирического процесса

$$
\mathcal{M}_O^\omega=\frac{1}{|\mathcal{B}_H(O)|}\sum_{B\in\mathcal{B}_H(O)}\delta_{\lambda(B,\omega)} \tag{4.1}
$$

при стремлении O к ϖ.

Теорема 4.1. *Существует вероятностная мера $\mathcal{M}$ такая, что при стремлении O к ϖ мы для почти всех $\omega \in \Omega$ имеем*

$$\mathcal{M}_O^\omega \to \mathcal{M} \quad \textit{в топологии Бернулли.} \tag{4.2}$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.1, для любого $B \in H$ запишем

$$\lambda(B,\omega) = \lambda_H(1 + U(B,\omega)),$$

где $U(B,\omega)$ определена в (3.3). Случайные величины $\{U(B)\}_{B\in H}$ одинаково распределены (но зависимы); обозначим их общее распределение через $\mathcal{N}$. Так как орицикл H фиксирован, нам остается изучить нормированный эмпирический процесс

$$\mathcal{N}_O^\omega = \frac{1}{|\mathcal{B}_H(O)|} \sum_{B\in\mathcal{B}_H(O)} \delta_{U(B,\omega)}.$$

Докажем, что при стремлении O к ϖ мы для почти всех $\omega \in \Omega$ имеем

$$\mathcal{N}_O^\omega \to \mathcal{N} \quad \text{в топологии Бернулли.} \tag{4.3}$$

Не теряя общности, можно считать, что $H = H_0$ и $O \in H_L$. В этом случае мы пишем $\mathcal{N}_O = \mathcal{N}_L^\omega$. Пусть Φ_L^ω – характеристическая функция вероятностной меры $\mathcal{N}_L^\omega$:

$$\Phi_L^\omega(\theta) = \frac{1}{n_L n_{L+1} \cdots n_{-1}} \sum_{B\in\mathcal{B}_H(O)} \exp\{i\theta U(B,\omega)\}; \tag{4.4}$$

характеристическую функцию меры $\mathcal{N}$ обозначим через Φ. Тогда

$$\mathbb{E}\Phi_L^\omega(\theta) = \Phi(\theta).$$

Покажем, что для всех θ имеет место сходимость

$$\Phi_L^\omega(\theta) \to \Phi(\theta) \quad \text{п. н.} \tag{4.5}$$

Так как носители всех вероятностных мер $\mathcal{N}_L^\omega$, $\omega \in \Omega$, лежат в некотором конечном интервале $[-a, a]$, то семейство функций $\{\Phi_L^\omega\}$ равностепенно непрерывно. Поэтому исключительное множество нулевой меры в (4.5) можно выбрать одним и тем же для всех θ. Тем самым, если мы докажем (4.5), то утверждение (4.3) будет вытекать из теоремы Леви о непрерывности.

Для каждого $B \in \mathcal{B}_H(O)$ обозначим через $\{B_k\}_{k\leqslant 0}$ единственный бесконечный геодезический путь от ϖ до B в дереве шаров $\mathcal{T}$. Запишем

$$U(B,\omega) = \Biggl(\sum_{L\leqslant k\leqslant 0} + \sum_{k<L}\Biggr) a_k \varepsilon(B_k,\omega) =: U_L(B,\omega) + V_L(B,\omega).$$

Так как для любых двух шаров B и B' из $\mathcal{B}_H(O)$ выполнено равенство

$$V_L(B,\omega) = V_L(B',\omega) =: V_L(\omega),$$

то

$$\Phi_L^\omega(\theta) = \frac{\exp\{i\theta V_L(\omega)\}}{n_L n_{L+1} \cdots n_{-1}} \sum_{B\in\mathcal{B}_H(O)} \exp\{i\theta U_L(B,\omega)\}.$$

При $L \to -\infty$ мы имеем, равномерно по $\omega \in \Omega$,

$$\exp\{i\theta V_L(\omega)\} \to 1 \quad \text{для всех} \ \ \theta.$$

Поэтому остается изучить предельное поведение случайных величин

$$\omega \mapsto \Psi_L^\omega(\theta) = \frac{1}{n_L n_{L+1} \cdots n_{-1}} \sum_{B \in \mathcal{B}_H(O)} \exp\{i\theta U_L(B,\omega)\}.$$

Заметим, что случайные величины $\{U_L(B,\omega)\}_{B\in\mathcal{B}_H(O)}$ зависимы и одинаково распределены. Обозначим их общую характеристическую функцию через $\Psi_L(\theta)$. Имеем

$$\mathbb{E}\Psi_L^\omega(\theta) = \Psi_L(\theta).$$

Мы покажем, что при любом фиксированном θ

$$\sum_{L<0} (\sigma[\Psi_L^\omega(\theta)])^2 < \infty. \tag{4.6}$$

Как только (4.6) будет установлено, из неравенства Чебышёва и леммы Бореля–Кантелли будет вытекать, что

$$\Psi_L^\omega(\theta) - \Psi_L(\theta) \to 0 \quad \text{п. н.}$$

А так как при $L \to -\infty$ случайные величины $\Phi_L^\omega(\theta) - \Psi_L^\omega(\theta)$ и функции $\Phi(\theta) - \Psi_L(\theta)$ поточечно сходятся к нулю, то мы наконец получим (4.5).

Итак, докажем (4.6). Если X, Y – независимые случайные величины такие, что $|X| = 1$ и $|Y| \leqslant 1$, то

$$(\sigma[XY])^2 \leqslant (\sigma[Y])^2 + 2(1 - |\mathbb{E}X|). \tag{4.7}$$

Пусть ϕ – общая характеристическая функция независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\varepsilon(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$. Подставляя в (4.7) величины

$$X = \exp\{i\theta a_L \varepsilon(B_L)\}, \qquad Y = \frac{1}{n_L n_{L+1} \cdots n_{-1}} \sum_{B \in \mathcal{B}_H(O)} \exp\{i\theta U_{L+1}(B)\},$$

получаем, что

$$(\sigma[\Psi_L(\theta)])^2 \leqslant (\sigma[Y])^2 + 2\bigl(1 - |\phi(a_L\theta)|\bigr) \leqslant (\sigma[Y])^2 + a_L^2\theta^2.$$

Пусть $\{O_l\colon 0 \geqslant l \geqslant -\infty\}$ есть бесконечный геодезический путь в $\mathcal{T}$ с $O_0 \in H$, $O_L = O$ и $O_{-\infty} = \varpi$. Обозначим через $\{O_{L+1}^i\colon 1 \leqslant i \leqslant n_L,\}$, где $O_{L+1}^1 = O_{L+1}$, те n_L ультраметрических шаров, которые принадлежат орициклу H_{L+1} и являются подшарами шара $O = O_L$. Запишем

$$Y = \frac{1}{n_L} \sum_{i=1}^{n_L} Y_i,$$

где

$$Y_i = \frac{1}{n_{L+1} \cdots n_{-1}} \sum_{B \in \mathcal{B}_H(O_{L+1}^i)} \exp\{i\theta U_{L+1}(B)\}.$$

Случайные величины $\{Y_i\colon 1 \leqslant i \leqslant n_L\}$ независимы и одинаково распределены, причем $Y_1 = \Psi_{L+1}(\theta)$. В результате получаем неравенство

$$(\sigma[\Psi_L(\theta)])^2 \leqslant \frac{1}{n_L}(\sigma[\Psi_{L+1}(\theta)])^2 + a_L^2\theta^2,$$

из которого очевидным образом вытекает (4.6). Теорема доказана.

Определение 4.2. Мера $\mathcal{M}$, определенная в (4.2), называется *интегральной плотностью состояний*, отвечающей орициклу H. Если мера $\mathcal{M}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т. е.

$$\mathcal{M}(I) = \int_I \mathfrak{m}(\tau)\,d\tau,$$

то функцию $\mathfrak{m}(\tau)$ называют *плотностью состояний*, отвечающей орициклу H.

Вопросы существования, непрерывности, принадлежности классу C^∞ для плотности состояний $\mathfrak{m}(\tau)$, связанной с данными (C, ϵ), являются основными во многих приложениях (см. теорему 5.1 в § 5).

Замечание 4.3. Напомним, что меры $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, определенные в (4.2) и (4.3) соответственно, связаны между собой равенством

$$\mathcal{M} = \mathcal{N} \circ \vartheta^{-1},$$

где $\vartheta\colon x \mapsto ax + b$ при $a = b = \lambda_H$. В частности, мера $\mathcal{M}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда таковой является $\mathcal{N}$.

Мера $\mathcal{N}$ обладает замечательным свойством: она принадлежит классу $\mathfrak{J}$ вероятностных мер, представимых как распределение некоторой случайной величины U вида

$$U = \sum_{k \geqslant 0} b_k \varepsilon_k, \tag{4.8}$$

где $\{\varepsilon_k\}_{k\geqslant 0}$ – симметричные независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в некотором конечном интервале $I \subset \mathbb{R}^1$, а числа $b_k > 0$ таковы, что $\sum b_k = 1$.

Различные свойства $\mathfrak{J}$-распределений (бесконечных сверток) изучались многими авторами начиная с 1930-х годов (см., например, [19]–[23], [31] и указанную там литературу). Отметим два замечательных свойства $\mathfrak{J}$-распределений. Первое из них обнаружил П. Леви (1937), а второе – Б. Йессен и А. Уинтнер (1935) (см., например, [19], теоремы 3.7.6 и 3.7.7 соответственно).

(a) Разложение Лебега любого $\mathfrak{J}$-распределения $\mathcal{N}$ не содержит дискретной компоненты.

(b) Если $\{\varepsilon_k\}$ в (4.8) дискретны, то мера $\mathcal{N}$ либо сингулярна, либо абсолютно непрерывна (относительно меры Лебега).

Примеры сингулярных $\mathfrak{J}$-распределений будут даны ниже (бесконечные свертки Бернулли). Рассмотрим сначала простой класс абсолютно непрерывных $\mathfrak{J}$-распределений. Пусть $\mathcal{N}$ – $\mathfrak{J}$-распределение вида (4.8), и пусть общая характеристическая функция ϕ независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\varepsilon_k\}$ допускает оценку

$$|\phi(x)| \leqslant x^{-D} \quad \text{на} \ \ \infty$$

для некоторого $D > 0$. Тогда ясно, что характеристическая функция $\Phi(x)$ меры $\mathcal{N}$, будучи бесконечным произведением характеристических функций, допускает оценку

$$|\Phi(x)| \leqslant x^{-B} \quad \text{на} \;\; \infty$$

для всех $B > 0$ и, следовательно, $\mathcal{N}$ обладает C^∞-плотностью относительно меры Лебега. Это наблюдение допускает следующее обобщение.

Предложение 4.4. *Пусть $\mathcal{N}$ – $\mathfrak{I}$-распределение. Предположим, что общая характеристическая функция ϕ независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\varepsilon_k\}$ стремится к нулю на бесконечности и*

$$b_k \geqslant C\exp\{-Dk\}$$

для некоторых $C, D > 0$. Тогда $\mathcal{N}$ обладает C^∞-плотностью относительно меры Лебега.

Доказательство. Обозначим характеристическую функцию меры $\mathcal{N}$ через Φ. Для данного $\epsilon > 0$ выберем $N = N(\epsilon) > 1$ так, чтобы при всех $z \geqslant N$ выполнялось неравенство $|\phi(z)| \leqslant \epsilon$, и запишем

$$|\Phi(x)| \leqslant \prod_{k\colon b_k x \geqslant N} \phi(b_k x) \leqslant \exp\biggl\{-\#\{k\colon b_k x \geqslant N\}\log\frac{1}{\epsilon}\biggr\}.$$

По условию,

$$\#\{k\colon b_k x \geqslant N\} \geqslant \log\biggl(\frac{Cx}{N}\biggr)^{\frac{1}{D}},$$

откуда следует, что

$$|\Phi(x)| \leqslant Ax^{-B} \quad \text{на} \;\; \infty,$$

где

$$A = \biggl(\frac{N}{C}\biggr)^{\frac{1}{D}\log\frac{1}{\epsilon}}, \qquad B = \frac{1}{D}\log\frac{1}{\epsilon}.$$

Поскольку $\epsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, получаем требуемый результат. Предложение доказано.

Различные примеры характеристических функций ϕ сингулярных распределений $\{\varepsilon_k\}$, удовлетворяющих условиям предложения 4.4, даны в [19, гл. 3], а также в [20, гл. 6 и 7]. Приведем пример Р. Кершнера (1936): если a – рациональное число, причем $0 < a < 1/2$ и a не равно $1/n$ ни для какого целого $n \geqslant 3$, то функция

$$\phi(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\cos(xa^k)$$

является характеристической функцией сингулярного симметричного $\mathfrak{I}$-распределения и для нее имеет место оценка

$$|\phi(x)| \leqslant \frac{1}{(\log x)^\gamma} \quad \text{на} \;\; +\infty \tag{4.9}$$

с некоторым $\gamma > 0$.

Мы будем применять предложение 4.4 к однородным ультраметрическим пространствам X таким, что последовательность $\{n_H\}$ прямых степеней (определенная деревом шаров $\mathcal{T}(X)$) ограничена, а однородный иерархический лапласиан L_C на X удовлетворяет условию (3.11). Например, в качестве X можно взять $\mathbb{Q}_p$, а в качестве L_C – оператор дробного дифференцирования, введенный в (2.2).

Модифицируя доказательство предложения 4.4, можно получить результаты, применимые и для неограниченных последовательностей $\{n_H\}$, например когда X – бесконечная симметрическая группа $S_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. В этом случае n_H равняется l для орицикла H, состоящего из симметрической группы S_l и ее смежных классов aS_l.

Предложение 4.5. *Предположим, что общая характеристическая функция ϕ независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\varepsilon_k\}$ удовлетворяет (4.9) и что $b_k \geqslant C/k!$ для некоторого $C > 0$. Тогда для характеристической функции $\Phi(x)$ соответствующего $\mathfrak{I}$-распределения $\mathcal{N}$ имеет место оценка*

$$|\Phi(x)| \leqslant x^{-(\gamma-\epsilon)} \quad \text{на} \quad +\infty$$

при любом $0 < \epsilon < \gamma$. В частности, если $\gamma > 1$, то распределение $\mathcal{N}$ обладает C^k-плотностью с $k \leqslant \gamma - 1$.

Доказательство. По условию,

$$n(t) := \#\{k\colon b_k \geqslant t\} \geqslant \#\left\{k\colon \frac{C}{k!} \geqslant t\right\} \sim \frac{\log(1/t)}{\log\log(1/t)} \quad \text{в точке} \quad 0.$$

Для $x > 1$ положим $\overline{\Phi}(x) = (\log x)^\gamma$ и выберем $r(x)$ так, что

$$\log r(x) \sim \frac{\log x}{\log\log x} \quad \text{на} \quad +\infty.$$

Для достаточно больших x определим

$$A(x) := n\left(\frac{r(x)}{x}\right) \log \overline{\Phi}(r(x)).$$

Согласно условию,

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{A(x)}{\gamma \log x} \geqslant 1. \tag{4.10}$$

Наконец, оценим характеристическую функцию $\Phi(x)$ изучаемого $\mathfrak{I}$-распределения $\mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} |\Phi(x)| &= \prod_k |\phi(b_k x)| \leqslant \prod_{k\colon b_k x \geqslant r(x)} |\phi(b_k x)| \leqslant \prod_{k\colon b_k x \geqslant r(x)} (\overline{\Phi}(b_k x))^{-1} \\ &\leqslant (\overline{\Phi}(r(x)))^{-n(\frac{r(x)}{x})} = \exp\{-A(x)\}. \end{aligned}$$

Применение соотношения (4.10) дает требуемый результат. Предложение доказано.

Бесконечные свертки Бернулли. Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k\geqslant 0}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью $1/2$. Определим однопараметрическое семейство случайных величин

$$U_\lambda = \sum_{k\geqslant 0} \lambda^k \varepsilon_k, \qquad 0 < \lambda < 1. \tag{4.11}$$

Обозначим через $\mathcal{N}_\lambda$ распределение случайной величины U_λ. Мера $\mathcal{N}_\lambda$ представляет собой бесконечное сверточное произведение дискретных мер $(\delta_{-\lambda^k} + \delta_{\lambda^k})/2$. Она называется *бесконечной сверткой Бернулли*. Характеристическую функцию Φ_λ меры $\mathcal{N}_\lambda$ можно представить в виде сходящегося бесконечного произведения:

$$\Phi_\lambda(\theta) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(\lambda^k \theta).$$

Опишем результаты некоторых работ по бесконечным сверткам Бернулли (полную библиографию см. в обзоре Б. Соломяка [21]).

Б. Йессен и А. Уинтнер (1935) показали, что мера $\mathcal{N}_\lambda$ либо абсолютно непрерывна, либо вполне сингулярна – в зависимости от λ.

Р. Кершнер и А. Уинтнер (1935) заметили, что $\mathcal{N}_\lambda$ является сингулярной для $\lambda \in (0, 2^{-1})$, так как она сосредоточена на канторовом множестве нулевой меры Лебега.

А. Уинтнер (1935) отметил, что мера $\mathcal{N}_\lambda$ равномерна на отрезке $[-2, 2]$ при $\lambda = 2^{-1}$, а при $\lambda = 2^{-1/k}$ с целым $k \geqslant 1$ она абсолютно непрерывна и имеет C^{k-1}-плотность.

П. Эрдёш (1939) показал, что мера $\mathcal{N}_\lambda$, где $\lambda \in (2^{-1}, 1)$, сингулярна, если $1/\lambda$ является PV-числом (целым алгебраическим числом, чьи сопряженные по Галуа строго меньше единицы по модулю; примером является золотое сечение $(1+\sqrt{5})/2)$. Ни для каких других конкретных значений $\lambda \in (2^{-1}, 1)$ сингулярность меры $\mathcal{N}_\lambda$ не установлена.

Б. Соломяк (1995) доказал гипотезу Гарсиа (1962) о том, что мера $\mathcal{N}_\lambda$ абсолютно непрерывна для почти всех $\lambda \in (2^{-1}, 1)$. Более сильная гипотеза, гласящая, что это верно для всех $\lambda \in (2^{-1}, 1)$, кроме некоторого счетного множества, остается во многом открытым вопросом.

Бернуллиевские возмущения оператора $\mathfrak{B}^\alpha$. В качестве примера рассмотрим однородный лапласиан $\mathfrak{B}^\alpha$, введенный в (2.2). Оператор $\mathfrak{B}^\alpha$ действует на пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p, m)$, где $\mathbb{Q}_p$ – кольцо p-адических чисел (p не обязательно простое), а m – мера Хаара, по следующей формуле:

$$\mathfrak{B}^\alpha f(x) = \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{1+\alpha}}\, dm(y).$$

Обозначим через $\mathfrak{B}^\alpha(\omega)$ возмущение оператора $\mathfrak{B}^\alpha$, заданное семейством независимых одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $\{\theta\varepsilon(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$, $0 < \theta < 1$. Пусть $\mathcal{N}_\lambda$ – бесконечная свертка Бернулли с $\lambda = p^{-\alpha}$. Положим

$$a = \theta(1-p^{-\alpha})\lambda_H, \qquad b = \lambda_H, \quad \vartheta(x) = ax + b.$$

Пользуясь теоремой 4.1, приведенными выше свойствами бесконечных сверток Бернулли и тем, что отвечающее орициклу $H = H_l$ собственное значение λ_H оператора $\mathfrak{B}^\alpha$ равно $p^{\alpha l}$, получаем следующий результат.

Теорема 4.6. *Обозначим через $\mathcal{M}_\alpha$ интегральную плотность состояний, ассоциированную с оператором $\mathfrak{B}^\alpha(\omega)$ по теореме 4.1 и определению 4.2, а через $\mathcal{N}_\lambda$ – бесконечную свертку Бернулли с $\lambda = p^{-\alpha}$. Тогда*

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{N}_\lambda \circ \vartheta^{-1}.$$

В частности, по отношению к мере Лебега мера $\mathcal{M}_\alpha$ является:

– сингулярной для всех $\alpha > (\log 2)/(\log p)$;

– равномерной при $\alpha = (\log 2)/(\log p)$;

– абсолютно непрерывной с L^2-плотностью для почти всех α из интервала $0 < \alpha \leqslant (\log 2)/(\log p)$.

Кроме того, при $\alpha = (\log 2)/(k \log p)$, $k \in \mathbb{N}$, она обладает C^{k-1}-плотностью.

§ 5. Сходимость к пуассоновскому распределению

Зафиксируем орицикл H. Собственные значения $\lambda(B,\omega)$, $B \in \mathcal{B}_H(O)$, могут сами быть представлены посредством следующего *эмпирического процесса*:

$$N^\omega_O(I) = \sum_{B\in\mathcal{B}_H(O)} \delta_{\lambda(B,\omega)}(I), \qquad I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Здесь *мера интенсивности* $\mu_O(I)$ (ожидаемое число точек $\lambda(B,\omega)$, $B \in \mathcal{B}_H(O)$, попадающих в множество I) вычисляется по формуле

$$\mu_O(I) = \mathbb{E}N_O(I) = |\mathcal{B}_H(O)|\mathbb{P}\bigl(\omega \in \Omega\colon \lambda(B,\omega) \in I\bigr).$$

Напомним, что правая часть этого равенства не зависит от $B \in \mathcal{B}_H(O)$. Зафиксируем числа $c, \tau_0 > 0$ и рассмотрим короткий интервал

$$I = \biggl\{\tau\colon |\tau - \tau_0| \leqslant \frac{c}{2|\mathcal{B}_H(O)|}\biggr\}. \tag{5.1}$$

Предположим, что плотность состояний $\mathfrak{m}(\tau)$ (см. определение 4.2) существует, непрерывна в точке $\tau = \tau_0$ и удовлетворяет неравенству $\mathfrak{m}(\tau_0) > 0$. Тогда

$$\lim_{O\to\varpi} \mu_O(I) = c\mathfrak{m}(\tau_0) =: \lambda_c > 0. \tag{5.2}$$

В частности, если бы $\lambda(B,\omega)$, $B \in \mathcal{B}_H(O)$, были независимы и одинаково распределены, то соотношение (5.2) дало бы классическую сходимость величины $N_O = N^\omega_O(I)$ к пуассоновской случайной величине $\mathcal{P}_\lambda$ с интенсивностью $\lambda = \lambda_c$. Точнее, в случае независимых одинаково распределенных случайных величин мы имели бы (см. [32]–[34]), что

$$\|\mathcal{L}(N_O) - \mathcal{L}(\mathcal{P}_\lambda)\|_{\mathrm{TV}} \leqslant \frac{\min\{\lambda, \lambda^2\}}{2|\mathcal{B}_H(O)|}.$$

Напомним, что здесь $\mathcal{L}(X)$ обозначает распределение случайной величины X, а $\|\mu-\nu\|_{\mathrm{TV}}$ – это расстояние между μ и ν в смысле полной вариации.

Однако в нашей ситуации случайные величины $\lambda(B,\omega)$, $B\in\mathcal{B}_H(O)$, являются *зависимыми*, так что классическая теория напрямую не применима и требует обоснований и дополнений. Наш подход основан на свойстве стационарности семейства $\{\lambda(B,\omega)\}_{B\in H}$ и некоторых оценках его корреляционных функций (см. § 3). Мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что условие* (3.11) *выполнено с* $\delta>2$ *и что общее распределение независимых одинаково распределенных случайных величин* $\{\varepsilon(B)\}$ *имеет ограниченную плотность. Тогда, во введенных выше обозначениях, при* $O\to\varpi$ *имеем*

$$\mathcal{L}(N_O)\to\mathcal{L}(\mathcal{P}_\lambda) \quad \textit{в топологии Бернулли.}$$

Прежде чем перейти к доказательству, отметим, что в этих предположениях плотность состояний $\mathfrak{m}(\tau)$ существует и принадлежит C^∞ (см. предложение 4.4). В частности, величина $\lambda=\lambda_c$ корректно определена равенством (5.2) для любого $c>0$. Далее, при каждом $B\in H$ можно записать собственное значение $\lambda(B,\omega)$ в виде

$$\lambda(B,\omega)=\lambda_H(1+U(B,\omega)), \tag{5.3}$$

где

$$U(B,\omega)=\sum_{B\subseteq B_k}a_k\varepsilon(B_k,\omega), \qquad a_k=\frac{C(B_k)}{\lambda_H}. \tag{5.4}$$

Так как $\sum a_k=1$ и $|\varepsilon(B,\omega)|\leqslant\epsilon$ для всех B, ω и для некоторого ϵ, $0<\epsilon<1$, то

$$|U(B,\omega)|\leqslant\sup_{k,\omega}|\varepsilon(B_k,\omega)|=\epsilon.$$

Общая функция распределения $\mathcal{N}(t)$ семейства $\{U(B,\omega)\}_{B\in H}$ абсолютно непрерывна, и ее плотность $\mathfrak{n}(t)$ связана с интегральной плотностью состояний $\mathfrak{m}(\tau)$ формулой

$$\mathfrak{n}(t)=\lambda_H\mathfrak{m}(\lambda_H t+\lambda_H).$$

В частности, функция $\mathfrak{n}(t)$ сосредоточена на отрезке $[-\epsilon,\epsilon]$, непрерывна и строго положительна при $t_0=\tau_0/\lambda_H-1$.

Эмпирический процесс, заданный семейством $\{U(B,\omega)\}_{B\in\mathcal{B}_H(O)}$, обозначим через $\widetilde{N}^\omega_O$. Определим интервал $\widetilde{I}$ формулой

$$\widetilde{I}=\biggl\{t\colon |t-t_0|\leqslant\frac{\widetilde{c}}{2|\mathcal{B}_H(O)|}\biggr\}, \qquad \widetilde{c}=\frac{c}{\lambda_H},$$

и положим $\widetilde{N}_O:=\widetilde{N}^\omega_O(\widetilde{I})$. Из (5.3) следует, что

$$\mathbb{P}\{N_O=k\}=\mathbb{P}\{\widetilde{N}_O=k\},$$

и, значит,

$$\lim_{O\to\varpi}\mathbb{P}\{N_O=k\}=\lim_{O\to\varpi}\mathbb{P}\{\widetilde{N}_O=k\}.$$

С учетом всех этих наблюдений докажем U-версию теоремы 5.1.

Зафиксируем орицикл H, и пусть O стремится к ϖ. Ясно, что при изучении семейства $U(B,\omega)_{B\in H}$ можно заменить исходное ультраметрическое пространство X на некоторое дискретное ультраметрическое пространство. Например, X можно заменить на дискретную абелеву группу

$$G = \bigoplus_{k\geqslant 1} \mathbb{Z}(n_k)$$

с канонической ультраметрической структурой, которая определяется семейством $\{G_l\}_{l\geqslant 0}$ конечных подгрупп

$$G_0 = \{0\}, \qquad G_l = \prod_{1\leqslant k\leqslant l} \mathbb{Z}(n_k).$$

С учетом этого соглашения имеем, что $H = H_0$ – это множество всех одноточечных шаров, H_1 – множество всех ультраметрических шаров вида $g + G_1$ и т. д. Если $B = \{g\}$, то вместо $U(B,\omega)$ будем писать $U_g(\omega)$. Для любого $B_i \supseteq B$ положим $\varepsilon(B_i,\omega) =: \varepsilon_{ig}(\omega)$. Таким образом мы определяем стационарное семейство $\{U_g\}_{g\in G}$:

$$U_g(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{ig}(\omega).$$

Обозначим через $Z_l^c(\omega)$ количество элементов $U_g(\omega)$, $g\in G_l$, лежащих на отрезке

$$I_l^c = \left\{t\colon |t-t_0| \leqslant \frac{c}{2\pi_l}\right\}, \qquad \pi_l = n_1\cdots n_l.$$

Положим $\lambda_c = c\mathfrak{n}(t_0)$ и докажем, что

$$\lim_{l\to\infty} \mathbb{P}\{Z_l^c = k\} = \frac{(\lambda_c)^k}{k!} \exp\{-\lambda_c\}. \tag{5.5}$$

Записывая Z_l^c в виде

$$Z_l^c(\omega) = \sum_{g\in G_l} \delta_{U_g(\omega)}(I_l^c),$$

имеем

$$\lim_{l\to\infty} \mathbb{E}Z_l^c = \lim_{l\to\infty} \pi_l \mathbb{P}(U_g \in I_l^c) = \lambda_c.$$

Отсюда вытекает, что семейство мер $\{\mathcal{L}(Z_l^c)\}_{l\in\mathbb{N}}$ является *плотным* (tight) и, тем самым, относительно компактным в слабой топологии. Пусть $\mathcal{L}(Z)$ – предельная точка семейства $\{\mathcal{L}(Z_l^c)\}_{l\in\mathbb{N}}$. Покажем, что *случайная величина Z безгранично делима.* Действительно, с учетом ультраметрической структуры группы G можно записать

$$Z_l^c = \sum_{g\in\mathbb{Z}(n_l)} \tau_g(Z_{l-1}^{c/n_l}),$$

где

$$\tau_g(Z_{l-1}^{c/n_l}) := \sum_{a\in G_{l-1}} \delta_{U_{g+a}}(I_{l-1}^{c/n_l}).$$

Случайные величины $\tau_g(Z_{l-1}^{c/n_l})$, $g\in\mathbb{Z}(n_l)$, одинаково распределены и зависимы, однако зависимость между ними ослабевает при стремлении l к бесконечности. А именно, при любом $g\in G_l$ можно записать

$$U_g=\sum_{i=0}^{l-1}a_i\varepsilon_{ig}+\sum_{i=l}^{\infty}a_i\varepsilon_{ig}=:\widetilde{U}_g+K_l. \tag{5.6}$$

Общая часть K_l случайных величин U_g независима от семейства $\{\widetilde{U}_g\}$ и допускает оценку

$$|K_l(\omega)|\leqslant\epsilon\sum_{i=l}^{\infty}a_i=O(a_l)=O(\pi_l^{-\delta/2}).$$

В частности, предполагая, что $\delta>2$, мы получаем

$$k_l:=\sup_{\omega}|K_l(\omega)|=o(\pi_l^{-1}). \tag{5.7}$$

Вычислим характеристическую функцию

$$\Phi_Z(\gamma)=\mathbb{E}\exp\{-\gamma Z\},\qquad \gamma\geqslant 0,$$

случайной величины $Z=Z_l^c$. Имеем

$$Z_l^c=\sum_{a\in\mathbb{Z}(n_l)}\sum_{g\in G_{l-1}}\delta_{U_{a+g}}(I_l^c)=\sum_{a\in\mathbb{Z}(n_l)}\tau_a(Z_{l-1}^{c/n_l}),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}\Phi_{Z_l^c}(\gamma)&=\mathbb{E}\big[\mathbb{E}(\exp\{-\gamma Z_l^c\}\mid K_l)\big]=\mathbb{E}\big[(\mathbb{E}(\exp\{-\gamma Z_{l-1}^{c/n_l}\}\mid K_l))^{n_l}\big]\\&=\int d\mu_l(k)\big(\mathbb{E}(\exp\{-\gamma Z_{l-1}^{c/n_l}\}\mid K_l=k)\big)^{n_l},\end{aligned}$$

где μ_l – распределение случайной величины K_l. Используя равенство (5.6), получаем

$$\mathbb{E}\big(\exp\{-\gamma Z_{l-1}^{c/n_l}\}\mid K_l=k\big)=\mathbb{E}\exp\bigg\{-\gamma\sum_{g\in G_{l-1}}\delta_{\widetilde{U}_g}(I_{l-1}^{c/n_l}-k)\bigg\}.$$

Из (5.7) следует, что $\epsilon_l:=\pi_l k_l=o(1)$. Поэтому для любых $g\in G_{l-1}$ и $k\in[-k_l,k_l]$ имеют место соотношения

$$\{U_g\in I_{l-1}^{(c-2\epsilon_l)/n_l}\}\subseteq\{\widetilde{U}_g\in I_{l-1}^{c/n_l}-k\}\subseteq\{U_g\in I_{l-1}^{(c+2\epsilon_l)/n_l}\}$$

и

$$(\Phi_{Z_{l-1}^{(c+2\epsilon_l)/n_l}}(\gamma))^{n_l}\leqslant\Phi_{Z_l^c}(\gamma)\leqslant(\Phi_{Z_{l-1}^{(c-2\epsilon_l)/n_l}}(\gamma))^{n_l}. \tag{5.8}$$

Случай 1: $n_l=n$ для некоторой бесконечной последовательности $\{l_k\}$. Тогда на этой последовательности имеем

$$\mathbb{E}Z_{l-1}^{(c\pm 2\epsilon_l)/n}=\pi_{l-1}\mathbb{P}(U_g(\omega)\in I_{l-1}^{(c\pm 2\epsilon_l)/n})\to\frac{\lambda_c}{n},$$

так что семейство $\{\mathcal{L}(Z_{l-1}^{(c\pm 2\epsilon_l)/n})\}$ плотное (tight). Напомним, что семейство $\{\mathcal{L}(Z_l^c)\}$ тоже плотное (tight). Выберем последовательность $\{l'_k\}\subset\{l_k\}$, вдоль которой

$$Z_l^c\to Z,\quad Z_{l-1}^{(c\pm 2\epsilon_l)/n}\to Z^{\pm}\quad\text{по распределению.}$$

Так как для всех $\omega\in\Omega$ выполнено неравенство

$$Z_{l-1}^{(c-2\epsilon_l)/n}(\omega)\leqslant Z_{l-1}^{(c+2\epsilon_l)/n}(\omega),$$

являющееся строгим тогда и только тогда, когда ω принадлежит событию

$$\Omega_l=\bigl\{U_g(\omega)\in I_{l-1}^{(c+2\epsilon_l)/n}\setminus I_{l-1}^{(c-2\epsilon_l)/n}\ \text{для некоторого } g\in G_{l-1}\bigr\},$$

вероятность которого удовлетворяет оценке

$$\mathbb{P}(\Omega_l)\leqslant 2|G_{l-1}|\frac{4\epsilon_l}{\pi_l}(\mathfrak{n}(t_0)+o(1))=O(\epsilon_l)\to 0\quad\text{при}\ \ l\to\infty,$$

то должно быть выполнено равенство $Z^+=Z^-$ п. н. Положим $Z'=Z^{\pm}$. Переходя к пределу в неравенствах (5.8), получаем, что

$$\Phi_Z(\gamma)=(\Phi_{Z'}(\gamma))^n. \tag{5.9}$$

Применяя ту же процедуру, что и выше, имеем

$$\Phi_{Z'}(\gamma)=(\Phi_{Z''}(\gamma))^n,$$

и т. д., откуда вытекает требуемая безграничная делимость случайной величины Z.

Случай 2: $n_l\to\infty$. Разобьем G_l на непересекающиеся подмножества A_i, $i=1,2,3$, состоящие из смежных классов группы G_{l-1} и такие, что $|A_1|=|A_2|=[\pi_l/2]$. Положим

$$Z_{l,i}^c=\sum_{g\in A_i}\delta_{U_g(\omega)}(I_l^c),\qquad i=1,2,3,$$

так что

$$Z_l^c=Z_{l,1}^c+Z_{l,2}^c+Z_{l,3}^c.$$

Заметим, что при $l\to\infty$

$$\mathbb{E}Z_{l,3}^c\leqslant\frac{1}{n_l}\mathbb{E}Z_l^c\to 0,\qquad \mathbb{E}Z_{l,i}^c\to\frac{\lambda_c}{2},\quad i=1,2.$$

В частности, $Z_{l,3}^c\to 0$ по вероятности. Ясно, что $Z_{l,1}^c$ и $Z_{l,2}^c$ имеют одинаковое распределение. Семейства мер $\{\mathcal{L}(Z_{l,i}^c)\}$ являются плотными (tight). Рассуждая, как в случае 1, найдем подпоследовательность, вдоль которой $Z_l^c\to Z$, $Z_{l,1}^c\to Z'$ и $Z_{l,2}^c\to Z''$ по распределению, причем $\mathcal{L}(Z')=\mathcal{L}(Z'')$. Равенство (5.9) выполнено при $n=2$, откуда вытекает, что Z безгранично делима.

Поскольку случайная величина Z неотрицательна и целозначна, ее характеристическая функция имеет вид

$$\Phi_Z(\gamma)=\exp\biggl\{-a\gamma-\int(1-e^{-\gamma x})\,m(dx)\biggr\},\qquad \gamma\geqslant 0, \tag{5.10}$$

где m – некоторая конечная мера на $\mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как образ Z совпадает со всем $\mathbb{N} \cup \{0\}$, то должно быть выполнено равенство $a = 0$. Заметим, что

$$\mathbb{E}Z = \int x\, m(dx), \tag{5.11}$$

$$\mathbb{E}Z^2 = \int x^2\, m(dx) + \left(\int x\, m(dx)\right)^2. \tag{5.12}$$

Покажем, что мера m сосредоточена в точке $x = 1$. Допустим, что выполнено неравенство

$$\limsup_{l\to\infty} \mathbb{E}(Z_l^c)^2 \leqslant \lambda_c + (\lambda_c)^2. \tag{5.13}$$

Тогда семейство $\{Z_l^c\}$ равномерно интегрируемо, так что вдоль некоторой подпоследовательности (l_k) имеем

$$\mathbb{E}Z = \lim \mathbb{E}Z_l^c = \lambda_c. \tag{5.14}$$

Далее, по лемме Фату и в силу (5.13)

$$\mathbb{E}Z^2 \leqslant \limsup_{l\to\infty} \mathbb{E}(Z_l^c)^2 \leqslant \lambda_c + (\lambda_c)^2,$$

откуда с помощью (5.12) и (5.14) получаем, что

$$\int x^2\, m(dx) \leqslant \lambda_c = \int x\, m(dx).$$

Поскольку мера m сосредоточена на $\mathbb{N}$, отсюда вытекает, что $m = \lambda_c \delta_{\{1\}}$. Тогда случайная величина Z – пуассоновская с параметром λ_c, чем и доказано утверждение (5.5). Остается доказать неравенство (5.13).

Не теряя общности, можно считать, что $n_l \equiv n$. Обозначим через $g \wedge g'$ конфлюэнту g и g', т.е. наименьший шар в G, содержащий как g, так и g'. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_l^c)^2 &= \sum_{g,g' \in G_l} \mathbb{P}(U_g \in I_l^c, U_{g'} \in I_l^c) = \sum_{0\leqslant j\leqslant l} \sum_{g\wedge g' \in \mathcal{B}_{H_j}(G_l)} \mathbb{P}(U_g \in I_l^c, U_{g'} \in I_l^c) \\ &= \sum_{1\leqslant j\leqslant l} n^{l-j} \sum_{g\wedge g' = G_j} \mathbb{P}(U_g \in I_l^c, U_{g'} \in I_l^c) + n^l \mathbb{P}(U_0 \in I_l^c).\end{aligned}$$

Поскольку для любых двух пар (g, g') и (f, f') таких, что $g \wedge g' = f \wedge f'$, выполнено равенство

$$\mathbb{P}(U_g \in I_l^c, U_{g'} \in I_l^c) = \mathbb{P}(U_f \in I_l^c, U_{f'} \in I_l^c),$$

мы получаем, что

$$\sum_{g\wedge g' = G_j} \mathbb{P}(U_g \in I_l^c, U_{g'} \in I_l^c) = n^j (n^j - n^{j-1}) \mathbb{P}(U_{g_j} \in I_l^c, U_{g_j'} \in I_l^c),$$

где g_j, g_j' выбраны так, что $g_j \wedge g_j' = G_j$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}(Z_l^c)^2 = J + J',$$

где
$$J=(n-1)\sum_{1\leqslant j\leqslant l} n^{l+j-1}\mathbb{P}(U_{g_j}\in I_l^c, U_{g'_j}\in I_l^c), \qquad J'=n^l\mathbb{P}(U_0\in I_l^c).$$

Выбрав в качестве $\{\varepsilon_i\}$ и $\{\varepsilon'_i\}$ два независимых семейства независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих то же распределение, что и $\{\varepsilon(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$, запишем
$$U_{g_j}=\sum_{i=0}^{j-1}a_i\varepsilon_i+\sum_{i=j}^{\infty}a_i\varepsilon_i=:\widetilde{U}_j+K_j$$
и, аналогично,
$$U_{g'_j}=\sum_{i=0}^{j-1}a_i\varepsilon'_i+\sum_{i=j}^{\infty}a_i\varepsilon_i=:\widetilde{U}'_j+K_j.$$
Мы уже знаем, что
$$\lim_{l\to\infty} n^l\mathbb{P}(U_0\in I_l^c)=\lambda_c, \tag{5.15}$$
так что остается лишь установить неравенство
$$\limsup_{l\to\infty} J\leqslant(\lambda_c)^2. \tag{5.16}$$

Для упрощения обозначений положим
$$\mathcal{P}_{l-i}=\mathbb{P}(U_{g_{l-i}}\in I_l^c, U_{g'_{l-i}}\in I_l^c).$$
Выберем m, $0<m<l$, и разложим сумму в J на две:
$$\begin{aligned}J&=(n-1)\sum_{0\leqslant i<l} n^{2l-i-1}\mathcal{P}_{l-i}\\ &=(n-1)n^{2l}\biggl(\sum_{0\leqslant i\leqslant m}+\sum_{m<i<l}\biggr)n^{-(i+1)}\mathcal{P}_{l-i}=:J_m+J^m.\end{aligned}$$

Запишем
$$U_{g_{l-i}}=a_0\varepsilon_0+A_{l-i}+K_{l-i}$$
и, аналогично,
$$U_{g'_{l-i}}=a_0\varepsilon'_0+A'_{l-i}+K_{l-i}.$$
Поскольку случайные величины ε_0, ε'_0, A_{l-i}, A'_{l-i}, K_{l-i} независимы, можно представить $\mathcal{P}_{l-i}$ в виде
$$\int\mathbb{P}(a_0\varepsilon_0\in I_l^c-a-k)\mathbb{P}(a_0\varepsilon'_0\in I_l^c-a'-k)\,d\mu(a)\,d\mu(a')\,d\nu(k), \tag{5.17}$$
где μ – общее распределение независимых одинаково распределенных случайных величин A_{l-1}, A'_{l-1}, а ν – распределение случайной величины K_{l-i}.

Допустим теперь, что общая функция распределения случайных величин $\{\varepsilon(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$ имеет ограниченную плотность $\varepsilon(x)$. Тогда из представления (5.17) для $\mathcal{P}_{l-i}$ получаем, что
$$\mathcal{P}_{l-i}\leqslant n^{-2l}\|\varepsilon\|_\infty^2\frac{c^2}{a_0^2}$$

и, следовательно,

$$J^m \leqslant (n-1)n^{2l} \sum_{m<i<l} n^{-(i+1)} n^{-2l} \|\varepsilon\|_\infty^2 \frac{c^2}{a_0^2}$$
$$< \|\varepsilon\|_\infty^2 \frac{c^2}{a_0^2}(n-1) \sum_{i>m} n^{-(i+1)} = n^{-(m+1)} \|\varepsilon\|_\infty^2 \frac{c^2}{a_0^2} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Чтобы оценить J_m, выберем θ, $0<\theta<1$, и применим ту же процедуру разложения на две суммы, что и выше:

$$\mathcal{P}_{l-i} = \int (\mathbb{P}(\widetilde{U}_{l-i} \in I_l^c - k))^2 \, d\nu(k) \leqslant \sup_{|k|\leqslant \theta/n^l} (\mathbb{P}(\widetilde{U}_{l-i} \in I_l^c - k))^2 + \mathbb{P}\biggl(|K_{l-i}| > \frac{\theta}{n^l}\biggr)$$
$$\leqslant (\mathbb{P}(U_g \in I_l^{c+4\theta}))^2 + \mathbb{P}\biggl(|K_{l-i}| > \frac{\theta}{n^l}\biggr).$$

Тогда

$$J_m \leqslant (\mathbb{P}(U_g \in I_l^{c+4\theta}))^2 (n-1) n^{2l} \sum_{0\leqslant i\leqslant m} n^{-(i+1)}$$
$$+ (n-1) n^{2l} \sum_{0\leqslant i\leqslant m} n^{-(i+1)} \mathbb{P}\biggl(|K_{l-i}| > \frac{\theta}{n^l}\biggr).$$

Далее, при $l\to\infty$ и фиксированных m, θ имеем

$$(\mathbb{P}(U_g \in I_l^{c+4\theta}))^2 (n-1) n^{2l} \sum_{0\leqslant i\leqslant m} n^{-(i+1)} \to (\lambda_{c+4\theta})^2 (1-n^{-m}).$$

Зафиксируем $p>1$, $m<l$ и применим неравенство Чебышёва при $i\leqslant m$:

$$\mathbb{P}\biggl(|K_{l-i}| > \frac{\theta}{n^l}\biggr) \leqslant \theta^{-p} n^{pl} \|\varepsilon\|_\infty^p \biggl(\sum_{k\geqslant l-m} a_k\biggr)^p.$$

Предположим, что условие (3.11) выполнено при $\delta/2 = 1+\gamma$, $\gamma>0$. В силу (3.11) при $l\to\infty$ и фиксированном m имеем

$$\frac{1}{a_{l-m}} \sum_{k\geqslant l-m} a_k = O(1).$$

Выбрав p достаточно большим (так что $p\gamma>2$), получаем

$$(n-1) n^{2l} \sum_{0\leqslant i\leqslant m} n^{-(i+1)} \mathbb{P}\biggl(|K_{l-i}| > \frac{\theta}{n^l}\biggr) \leqslant n^{2l} \max_{0\leqslant i\leqslant m} \mathbb{P}\biggl(|K_{l-i}| > \frac{\theta}{n^l}\biggr)$$
$$\leqslant C n^{2l+pl} a_{l-m}^p \leqslant C' n^{-l\beta},$$

где $C, C', \beta > 0$ не зависят от l. Наконец, из всего сказанного выше следует, что

$$\limsup_{l\to\infty} J \leqslant (\lambda_{c+4\theta})^2 (1-n^{-m}).$$

Устремляя θ к нулю, а m к бесконечности, получаем требуемый результат: неравенство (5.16). Теорема 5.1 доказана.

Биномиальные возмущения оператора $\mathfrak{B}^\alpha$. Обозначим через ε общее распределение независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\varepsilon(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$. В теореме 5.1 нельзя опустить условие существования у ε ограниченной плотности. Точнее, мы покажем, что *если ε содержит дискретную компоненту, то при выполнении всех остальных условий теоремы 5.1 может не быть сходимости к пуассоновскому распределению.*

В качестве примера возьмем оператор дробного дифференцирования $\mathfrak{B}^\alpha$ и рассмотрим его возмущение $\mathfrak{B}^\alpha(\omega)$ посредством независимых одинаково распределенных симметризованных биномиальных случайных величин, т. е. положим $\varepsilon = B_1 + \dots + B_n$, где $\{B_i\}$ – независимые одинаково распределенные симметричные бернуллиевские случайные величины (это означает, что B_i принимает каждое из значений ±1 с вероятностью $1/2$).

Условие (3.11) выполнено при $\delta > 2$, если $\alpha = \delta/2 > 1$. По нашему выбору, общая функция распределения $\mathcal{N}(t)$ случайных величин $U_g(\omega)$, $g \in G$, равна n-кратной свертке функции распределения $\mathcal{N}_\lambda(t)$, $\lambda = p^{-\alpha}$, бесконечной свертки Бернулли, определенной в (4.11). Так как $\alpha > 1$, то $0 < \lambda < 1/2$. Поэтому $\mathcal{N}_\lambda(t)$ вполне сингулярна. С другой стороны, согласно предложению 6.1 из [23], преобразование Фурье $\Phi_\lambda(x)$ функции $\mathcal{N}_\lambda(t)$ допускает оценку

$$|\Phi_\lambda(x)| \leqslant \frac{C}{1+|x|^\gamma}$$

при некоторых $C = C(\lambda) > 0$ и $\gamma = \gamma(\lambda) > 0$ и для почти всех $0 < \lambda < 1$. Выбрав $\alpha > 1$ так, что число $\lambda = p^{-\alpha}$ не принадлежит исключительному множеству, и взяв затем достаточно большое $n = n(\alpha)$, получаем для преобразования Фурье $\Phi(x)$ функции $\mathcal{N}(t)$ оценку

$$|\Phi(x)| = |\Phi_\lambda(x)|^n \leqslant \frac{C'}{1+|x|^2}$$

при некотором $C' > 0$. В частности, по нашему выбору, $\mathcal{N}(t)$ абсолютно непрерывна и имеет непрерывную плотность. Этим показано, что плотность состояний *существует* и является *непрерывной* функцией, в то время как распределение ε *дискретно*. Тем самым, $\mathfrak{B}^\alpha(\omega)$ при надлежащем выборе $\alpha > 1$ и $\varepsilon(\omega)$ является искомым примером.

Вернемся теперь к общей постановке задачи и докажем отсутствие сходимости к пуассоновскому распределению. Не теряя общности, можно считать, что $\varepsilon(\{0\}) =: p_0 > 0$. Допустим также, что все прямые степени n_j совпадают и равны n. Пользуясь обозначениями из доказательства теоремы 5.1, запишем

$$U_g = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\varepsilon_{ig} = a_0\varepsilon_{0g} + \widetilde{U}_g$$

и

$$Z_l^c = \sum_{g\in G_l} 1_{\{U_g\in I_l^c\}} \geqslant \sum_{g\in G_l} 1_{\{\widetilde{U}_g\in I_l^c\}} 1_{\{\varepsilon_{0g}=0\}} = \sum_{g\in G_l/G_1} 1_{\{U_g\in I_{l-1}^{c/n}\}} \sum_{a\in g} 1_{\{\varepsilon_{0a}=0\}}. \tag{5.18}$$

Для каждого $g \in G_l/G_1$ определим случайную величину

$$\mathcal{B}_g = \sum_{a\in g} 1_{\{\varepsilon_{0a}=0\}}.$$

Тогда $\{\mathcal{B}_g\}_{g\in G_l/G_1}$ – независимые одинаково распределенные биномиальные случайные величины с параметрами (p_0,n). Далее, полагая

$$\widetilde{Z}_{l-1}^{c/n}=\sum_{g\in G_l/G_1}1_{\{U_g\in I_{l-1}^{c/n}\}},\qquad \mathcal{Z}_l^c=\sum_{g\in G_l/G_1}1_{\{U_g\in I_{l-1}^{c/n}\}}\sum_{a\in g}1_{\{\varepsilon_{0a}=0\}},$$

получаем, что

$$\mathcal{Z}_l^c\overset{d}{=}\sum_{j\geqslant 0}^{\tau}\mathcal{B}_j,$$

где $\{\mathcal{B}_i\}_{i=0}^{\infty}$ – независимые одинаково распределенные биномиальные случайные величины с параметрами (p_0,n), не зависящие от $\tau=\widetilde{Z}_{l-1}^{c/n}$.

Допустим, что имеет место сходимость к пуассоновскому распределению. Тогда, как в доказательстве теоремы 5.1, можно выбрать подпоследовательность $\{l_k\}$, вдоль которой $Z_l^c\to Z^c$ и $\widetilde{Z}_{l-1}^{c/n}\to\widetilde{Z}^{c/n}$, причем Z^c и $\widetilde{Z}^{c/n}$ – пуассоновские случайные величины с интенсивностями λ_c и $\lambda_{c/n}$ соответственно. В частности, из (5.18) имеем

$$\mathbb{P}(Z^c\geqslant 2)\geqslant\mathbb{P}(\widetilde{Z}^{c/n}\geqslant 1)\mathbb{P}(\mathcal{B}_0\geqslant 2).$$

Получили противоречие, так как при $c\to 0$ левая часть этого неравенства имеет порядок c^2, а правая – порядок c.

Список литературы

1. F. J. Dyson, “The dynamics of a disordered linear chain”, *Phys. Rev.* (2), **92**:6 (1953), 1331–1338.
2. F. J. Dyson, “Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet”, *Comm. Math. Phys.*, **12**:2 (1969), 91–107.
3. A. Bovier, “The density of states in the Anderson model at weak disorder: a renormalization group analysis of the hierarchical model”, *J. Statist. Phys.*, **59**:3-4 (1990), 745–779.
4. E. Kritchevski, “Hierarchical Anderson model”, *Probability and mathematical physics*, CRM Proc. Lecture Notes, **42**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 309–322.
5. E. Kritchevski, “Spectral localization in the hierarchical Anderson model”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:5 (2007), 1431–1440.
6. E. Kritchevski, “Poisson statistics of eigenvalues in the hierarchical Anderson model”, *Ann. Henri Poincaré*, **9**:4 (2008), 685–709.
7. S. Molchanov, “Hierarchical random matrices and operators. Application to Anderson model”, *Multidimensional statistical analysis and theory of random matrices* (Bowling Green, OH, 1996), VSP, Utrecht, 1996, 179–194.
8. S. Albeverio, W. Karwowski, “A random walk on p-adics – the generator and its spectrum”, *Stochastic Process. Appl.*, **53**:1 (1994), 1–22.
9. J. Pearson, J. Bellissard, “Noncommutative Riemannian geometry and diffusion on ultrametric Cantor sets”, *J. Noncommut. Geom.*, **3**:3 (2009), 447–480.
10. M. Aizenman, S. A. Molchanov, “Localization at large disorder and at extreme energies: an elementary derivation”, *Comm. Math. Phys.*, **157**:2 (1993), 245–278.
11. N. Minami, “Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model”, *Comm. Math. Phys.*, **177**:3 (1996), 709–725.

12. A. Bendikov, A. Grigor'yan, C. Pittet, "On a class of Markov semigroups on discrete ultra-metric spaces", *Potential Anal.*, **37**:2 (2012), 125–169.
13. А. Д. Бендиков, А. А. Григорьян, К. Питтэ, В. Вёсс, "Изотропные марковские полугруппы на ультраметрических пространствах", *УМН*, **69**:4(418) (2014), 3–102; англ. пер.: A. Bendikov, A. Grigoryan, C. Pittet, W. Woess, "Isotropic Markov semigroups on ultra-metric spaces", *Russian Math. Surveys*, **69**:4 (2014), 589–680.
14. J. Kigami, "Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees", *Adv. Math.*, **225**:5 (2010), 2674–2730.
15. A. Bendikov, P. Krupski, "On the spectrum of the hierarchical Laplacian", *Potential Anal.*, **41**:4 (2014), 1247–1266.
16. В. С. Владимиров, "Обобщенные функции над полем p-адических чисел", *УМН*, **43**:5(263) (1988), 17–53; англ. пер.: V. S. Vladimirov, "Generalized functions over the field of p-adic numbers", *Russian Math. Surveys*, **43**:5 (1988), 19–64.
17. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, "p-adic Schrödinger-type equation", *Lett. Math. Phys.*, **18**:1 (1989), 43–53.
18. В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-адический анализ и математическая физика*, Физматлит, М., 1994, 352 с.; англ. пер.: V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-adic analysis and mathematical physics*, Ser. Soviet East European Math., **1**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994, xx+319 pp.
19. Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979, 424 с.; пер. с англ.: E. Lukacs, *Characteristic functions*, 2nd ed., Hafner Publishing Co., New York, 1970, x+350 pp.
20. C. C. Graham, O. C. McGehee, *Essays in commutative harmonic analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **238**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1979, xxi+464 pp.
21. B. Solomyak, "Notes on Bernoulli convolutions", *Fractal geometry and applications: a jubilee of B. Mandelbrot*, Proc. Sympos. Pure Math., **72**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 207–230.
22. Y. Peres, B. Solomyak, "Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof", *Math. Res. Lett.*, **3**:2 (1996), 231–239.
23. Y. Peres, W. Schlag, B. Solomyak, "Sixty years of Bernoulli convolutions", *Fractal geometry and stochastics*, v. II (Greifswald/Koserow, 1998), Progr. Probab., **46**, Birkhäuser, Basel, 2000, 39–65.
24. M. Del Muto, A. Figà-Talamanca, "Diffusion on locally compact ultrametric spaces", *Expo. Math.*, **22**:3 (2004), 197–211.
25. M. Del Muto, A. Figà-Talamanca, "Anisotropic diffusion on totally disconnected abelian groups", *Pacific J. Math.*, **225**:2 (2006), 221–229.
26. P. Cartier, "Fonctions harmoniques sur un arbre", Convegno di Calcolo delle Probabilità, INDAM (Rome, 1971), Sympos. Math., **IX**, Academic Press, London, 1972, 203–270.
27. W. Woess, *Denumerable Markov chains. Generating functions, boundary theory, random walks on trees*, EMS Textbk. Math., Eur. Math. Soc., Zürich, 2009, xviii+351 pp.
28. M. H. Taibleson, *Fourier analysis on local fields*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1975, xii+294 pp.
29. A. N. Kochubei, *Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedian fields*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **244**, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001, xii+316 pp.
30. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965, 524 с.; англ. пер.: I. A. Ibragimov, Yu. V. Linnik, *Independent and stationary sequences of random variables*, Wolters–Noordhoff Publishing Co., Groningen, 1971, 443 pp.
31. B. Solomyak, "On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem)", *Ann. of Math.* (2), **142**:3 (1995), 611–625.

32. M. R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzén, *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer Ser. Statist., Springer-Verlag, New York–Berlin, 1983, xii+336 pp.
33. S. Chatterjee, P. Diaconis, E. Meckes, "Exchangeable pairs and Poisson approximation", *Probab. Surv.*, **2** (2005), 64–106.
34. R. Arratia, L. Goldstein, L. Gordon, "Two moments suffice for Poisson approximations: the Chen–Stein method", *Ann. Probab.*, **17**:1 (1989), 9–25.

Александр Давидович Бендиков
(Alexander D. Bendikov)
Institute of Mathematics,
Wroclaw University, Poland
E-mail: bendikov@math.uni.wroc.pl

Поступило в редакцию
21.08.2014
01.12.2014

Александр Асатурович Григорьян
(Alexander A. Grigor'yan)
Department of Mathematics,
Bielefeld University, Germany
E-mail: grigor@math.uni-bielefeld.de

Станислав Алексеевич Молчанов
(Stanislav A. Molchanov)
Department of Mathematics,
University of North Carolina Charlotte, USA
E-mail: smolchan@uncc.edu

Геннадий Пенхосович Самородницкий
(Gennady P. Samorodnitsky)
School of Operations Research
and Information Engineering, Cornell University, USA
E-mail: gs18@cornell.edu

Перевод с английского А. В. Домрина