



Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 7, 31–72

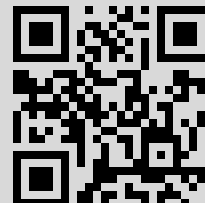
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 106.51.226.7

21 августа 2022 г., 07:44:51



УДК 517.9

В. В. Жиков

## Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости

Вводится понятие двухмасштабной сходимости, связанной с данной периодической борелевской мерой  $\mu$ . В том случае, когда  $d\mu = dx$  – мера Лебега на торе, получаем сходимость в смысле Nguetseng–Allaire. Главные свойства двухмасштабной сходимости обнаруживаются при совместном рассмотрении последовательности функций и последовательности их градиентов. Дается приложение двухмасштабной сходимости к усреднению некоторых задач из теории пористых сред (модели double-porosity). Формулируется математическое представление о “параллельных потоках, мягко или слабо связанных между собой”. Строится усредненный оператор, а сам результат о сходимости интерпретируется как “сильная двухмасштабная резольвентная сходимость”. В связи с этим затрагиваются вопросы поведения спектра при усреднении.

Библиография: 25 названий.

### § 1. Введение

**1.1.** Моделью усреднения служит задача Дирихле для дивергентного эллиптического уравнения с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A(\varepsilon^{-1}x)\nabla u_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon &= f \quad \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon &\in H_0^1(\Omega), \quad \lambda > 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^N$ ,  $A(y)$  – периодическая измеримая матрица, удовлетворяющая условию эллиптичности и ограниченности:

$$\alpha I \leq A \leq \alpha^{-1}I, \quad \alpha > 0. \tag{1.2}$$

Впервые теорема об усреднении была доказана в 1973 г. Де Джорджи и Спаньоло [1]. Доказательство было непрямым и довольно сложным. Вскоре Н. С. Бахвалов, а также Ж. Лионс и другие получили прямые доказательства, основанные на применении мощных средств асимптотического анализа, когда решение ищется в виде

$$u(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \dots, \quad y = \varepsilon^{-1}x, \tag{1.3}$$

где  $u, u_1$  периодичны по  $y$ , см. [2], [3]. Асимптотический анализ позволил не только найти усредненное уравнение и доказать собственно усреднение, т.е. сходимость

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00072).

решения  $u_\varepsilon$  к решению усредненного уравнения, но и оценить разность между точным решением и эффективно строящимся первым приближением. Метод асимптотических разложений остается главным орудием теории усреднения и в настоящее время. Часто его применяют только для формального нахождения усредненного уравнения и первого приближения, а для строгого доказательства сходимости используют метод компенсированной компактности Тартара–Мюра.

В 1989 г. G. Nguetseng [4] высказал интересную идею двухмасштабной сходимости, что фактически дало новый способ обоснования свойств усреднения. Метод двухмасштабной сходимости был далее развит в работах G. Allaire [5]. Этот метод оказался полезным в задачах, имеющих более сложную структуру, чем стандартная модель усреднения. В стандартной модели мы имеем дело с ограниченной в  $H_0^1(\Omega)$  последовательностью решений  $u_\varepsilon$ . Поэтому естественно, что нулевое приближение  $u(x, y)$  в (1.3) не зависит от  $y$ ,  $u(x)$  – это сильный  $L^2$ -предел последовательности  $u_\varepsilon$ . Между тем имеются многочисленные модели, в которых последовательность  $u_\varepsilon$  ограничена, но не компактна в  $L^2(\Omega)$ . В этой ситуации слабый  $L^2$ -предел последовательности  $u_\varepsilon$  нельзя считать удовлетворительным приближением к  $u_\varepsilon$  при малых  $\varepsilon$  и предпочтительней иметь дело с *двухмасштабным пределом* – функцией  $u(x, y)$  двух переменных  $x, y$ , периодичной по  $y$ .

Поясним сказанное на простом примере. Рассмотрим задачу Дирихле

$$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad -\varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f(x)a(\varepsilon^{-1}x), \quad (1.4)$$

где  $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $a(y)$  – ограниченная периодическая функция,  $a \not\equiv \text{const}$ . Из интегрального тождества

$$\varepsilon^2 \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx + \int_\Omega u_\varepsilon \psi \, dx = \int_\Omega f(x)a(\varepsilon^{-1}x)\psi(x) \, dx, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.5)$$

видно, что  $u_\varepsilon, \varepsilon \nabla u_\varepsilon$  ограничены в  $L^2(\Omega)$ . Поэтому первое слагаемое в левой части сходится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Предельный переход в тождестве дает уравнение

$$\bar{u}(x) = \langle a \rangle f(x),$$

в котором  $\bar{u}(x)$  – слабый предел  $u_\varepsilon(x)$ ,  $\langle a \rangle$  – среднее значение функции  $a(y)$ .

Можно ли считать, что получено “настоящее” предельное уравнение? Критерием служит свойство сходимости энергий. Энергия, отвечающая допредельному уравнению (1.4), равна

$$E_\varepsilon = \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + \int_\Omega u_\varepsilon^2 \, dx = \int_\Omega f(x)a(\varepsilon^{-1}x)u_\varepsilon(x) \, dx.$$

Ниже будет показано, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon > \int_\Omega f(x)\bar{u}(x)\langle a \rangle \, dx = \langle a \rangle^2 \int_\Omega f^2(x) \, dx, \quad (1.6)$$

т. е. сходимости энергий не наблюдается и слабый предел  $\bar{u}(x)$  действительно не является удовлетворительным приближением к  $u_\varepsilon$  при малых  $\varepsilon$ .

Попробуем найти приближение к  $u_\varepsilon$  в форме  $u_\varepsilon^0(x) = u(x, y)$ ,  $y = \varepsilon^{-1}x$ . Имеем:

$$-\varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon^0 + u_\varepsilon^0 = -\Delta_y u - \varepsilon \operatorname{div}_y \nabla_x u - \varepsilon \operatorname{div}_x \nabla_y u - \varepsilon^2 \Delta_x u + u.$$

Члены порядка  $\varepsilon^0$  приравняем к  $f(x)a(x)$ :

$$-\Delta_y u(x, y) + u(x, y) = f(x)a(y). \quad (1.7)$$

Это – периодическая задача относительно  $y$ , в которой  $x$  играет роль параметра. Видим, что  $u(x, y) = f(x)b(y)$ , где  $b$  – решение периодической задачи  $-\Delta b + b = a$ . Для разности  $z_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)$  имеем

$$z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + z_\varepsilon = 2\varepsilon \nabla f \cdot \nabla b + \varepsilon^2 b \Delta f = g_\varepsilon.$$

Так как  $|z_\varepsilon| \leq c$ , то

$$\varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla z_\varepsilon|^2 dx + \int_\Omega z_\varepsilon^2 dx = \int_\Omega g_\varepsilon z_\varepsilon dx \leq c_1 \varepsilon,$$

в частности,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |u_\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 dx = 0. \quad (1.8)$$

Не будем давать сейчас точного определения двухмасштабного предела, а только заметим, что соотношение (1.8) является достаточным (и весьма близким к необходимому) условием двухмасштабной сходимости  $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x, y)$ . Предельным уравнением следует считать уравнение (1.7) для  $u$  как функции  $2N$  переменных. Сходимость энергий теперь следует из (1.8), так как

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega f(x)a(\varepsilon^{-1}x)u(x, \varepsilon^{-1}x) dx \\ &= \int_\Omega \int_\square f(x)a(y)u(x, y) dx dy = \langle ab \rangle \int_\Omega f^2 dx \end{aligned}$$

по свойству среднего значения. Из уравнения  $-\Delta b + b = a$  имеем  $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ ,  $\langle ab \rangle > \langle b^2 \rangle > \langle b \rangle^2 = \langle a \rangle^2$ , и неравенство (1.6) доказано.

Соотношение (1.8) соответствует “сильной” двухмасштабной сходимости. Слабая двухмасштабная сходимость  $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$  означает по определению

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)b(\varepsilon^{-1}x)\varphi(x) dx &= \int_\Omega \int_\square u(x, y)b(y)\varphi(x) dy dx, \\ \varphi &\in C_0^\infty(\Omega), \quad b \in C_{\text{per}}^\infty, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $C_{\text{per}}^\infty = C_{\text{per}}^\infty(\square)$  – пространство бесконечно дифференцируемых периодических функций,  $\square = [0, 1)^N$  – ячейка периодичности.

Относительно слабой двухмасштабной сходимости доказан целый ряд свойств, позволяющих переходить к пределу в интегральных тождествах. Одно из них состоит в следующем: если  $u_\varepsilon, \varepsilon \nabla u_\varepsilon$  ограничены в  $L^2(\Omega)$ , то (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\rightharpoonup u(x, y) \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1), \\ \varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) &\rightharpoonup \nabla_y u(x, y), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $H_{\text{per}}^1 = H_{\text{per}}^1(\square)$  – соболевское пространство периодических функций. Посмотрим, как с помощью этого свойства вывести предельное уравнение (1.7).

Возьмем в тождестве (1.5) пробную функцию

$$\psi(x) = \psi_\varepsilon(x) = \varphi(x)w(y), \quad \text{где } y = \varepsilon^{-1}x, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad w \in C_{\text{per}}^\infty(\square).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla_y w(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) w(\varepsilon^{-1}x) dx \\ + \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi(x) w(\varepsilon^{-1}x) dx = \int_{\Omega} f(x) a(\varepsilon^{-1}x) w(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Второе слагаемое слева сходится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а пределы остальных вычислим согласно (1.9), (1.10). В результате

$$\int_{\Omega} \int_{\square} \nabla_y u \cdot \nabla_y w \varphi dy dx + \int_{\Omega} \int_{\square} u w \varphi dy dx = \int_{\Omega} \int_{\square} f a w \varphi dy dx.$$

Поскольку  $\varphi, w$  произвольны, отсюда получаем предельное уравнение (1.7).

**1.2.** За последние годы наряду с активностью в области двухмасштабной сходимости наблюдалось развитие техники усреднения и в другом направлении – геометрическом. Чтобы описать геометрическую сторону дела, удобно дать общую постановку задачи усреднения в терминах периодической меры.

Пусть  $\mu$  – периодическая борелевская мера на  $\mathbb{R}^N$ ,  $\square = [0, 1)^N$  – ячейка или тор периодичности,  $\int_{\square} d\mu = 1$ . Введем меру  $\mu_\varepsilon$  равенством

$$\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^N \mu(\varepsilon^{-1}B) \quad \text{для любого борелевского } B \subset \mathbb{R}^N. \quad (1.11)$$

Мера  $\mu_\varepsilon$  имеет период  $\varepsilon$  и

$$\int_{\varepsilon \square} d\mu_\varepsilon = \varepsilon^N \int_{\square} d\mu = \varepsilon^N.$$

Отсюда следует, что  $\mu_\varepsilon$  слабо сходится к мере Лебега:  $d\mu_\varepsilon \rightharpoonup dx$ , т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

С мерой  $\mu_\varepsilon$  свяжем соболевское пространство  $H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ , которое определим следующим образом. Пусть  $W = W_\varepsilon$  – замыкание множества всех пар  $\{u, \nabla u : u \in C_0^\infty(\Omega)\}$  в произведении  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon) \times L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)^N$ . Элементами  $W$  служат пары  $u, z$ . Условимся вектор  $z$  обозначать через  $\nabla u$  и называть градиентом  $u$ :  $z = \nabla u$ . Совокупность первых компонент образует соболевское пространство  $H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ . При таком определении градиент функции определен неоднозначно, но это особых проблем не вызывает.

Теперь можно ввести модель усреднения в классической форме:

$$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon), \quad -\operatorname{div}(A_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad (1.12)$$

где  $A_\varepsilon(x) = A(\varepsilon^{-1}x)$ ,  $A(y)$  – периодическая  $\mu$ -измеримая матрица, удовлетворяющая условию (1.2). По определению  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  есть решение этого уравнения, если выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega [A(\varepsilon^{-1}x)\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi + \lambda u_\varepsilon \psi] d\mu_\varepsilon = \int_\Omega f_\varepsilon \psi d\mu_\varepsilon, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.13)$$

в котором  $\nabla u_\varepsilon$  – *некоторый* градиент  $u_\varepsilon$ . Существование и единственность решения как пары  $u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon$  следует из теоремы Рисса о представлении (подробнее см. §3).

Очевидно, что модель (1.12) переходит в классическую модель (1.1), если в качестве меры  $\mu$  взять меру Лебега на торе. Подходящим выбором меры  $\mu$  получаются и другие известные из физической и математической литературы модели: усреднения в перфорированных областях, диффузии на периодических решетках и поверхностях, эффективной проводимости электрических цепей, усреднения на фракталах и др. Смысл усреднения в том, что решение  $u_\varepsilon$  задачи (1.12) в *определенном смысле* сходится к решению усредненной задачи, связанной уже с мерой Лебега, поскольку  $d\mu_\varepsilon \rightarrow dx$ . Здесь требуется пояснить, что означает сама сходимость последовательности  $u_\varepsilon \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  к функции  $u \in L^2(\Omega, dx) = L^2(\Omega)$ .

Будем считать, что последовательность  $u_\varepsilon$  ограничена:

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon < \infty. \quad (1.14)$$

Тогда *слабая сходимость*  $u_\varepsilon \rightarrow u \in L^2(\Omega)$  означает по определению, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \varphi u_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_\Omega \varphi u dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

*Сильная сходимость*  $u_\varepsilon \rightarrow u$  означает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon v_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_\Omega uv dx, \quad \text{как только } v_\varepsilon \rightarrow v.$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.** *Всякая ограниченная последовательность компактна относительно слабой сходимости. Кроме того, сильная сходимост  $u_\varepsilon \rightarrow u$  складывается из слабой сходимости  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  и соотношения*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Эти свойства, доказанные в [6], легко следуют из аналогичных свойств двух-масштабной сходимости, которые будут установлены в §2.

В работах [7], [8] показано, что для обоснования усреднения требуется лишь одно свойство меры  $\mu$  – *связность* или *эргодичность*. По определению мера  $\mu$  связна (на торе периодичности) или эргодична, если  $u \equiv \text{const}$   $\mu$ -п.в., как только найдутся  $u_n \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\square} |u_n - u|^2 d\mu = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\square} |\nabla u_n|^2 d\mu = 0. \quad (1.15)$$

Мера Лебега  $dx$ , очевидно, эргодична: функция  $u$  из (1.15) принадлежит соболевскому пространству  $H_{\text{per}}^1(\square)$  на торе, имеет нулевой градиент и поэтому является константой п.в. В общем случае эргодичность меры  $\mu$  означает, что функция  $u$  есть константа, если она принадлежит соболевскому пространству  $H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$  и обладает нулевым “градиентом”, см. §3. Во многих случаях эргодичность меры легко устанавливается. Достаточным признаком эргодичности служит выполнение неравенства Пуанкаре

$$\int_{\square} \varphi^2 d\mu \leq C \left\{ \left( \int_{\square} \varphi d\mu \right)^2 + \int_{\square} |\nabla \varphi|^2 d\mu \right\}, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square). \quad (1.16)$$

Свойство эргодичности всегда обеспечивает усреднение, но при этом усредненная матрица не обязательно положительно определена.

Рассмотрим некоторые примеры эргодических мер.

1°. *Вырождающиеся эллиптические операторы.* Пусть  $\mu$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на торе,  $d\mu = \rho dx$ . Мера  $\mu$  будет эргодичной, а усредненная матрица – невырожденной, если  $\int_{\square} \rho^{-1} dx < \infty$ , см. [7], [8].

2°. *Перфорированные области.* Пусть  $F$  – открытое периодическое множество в  $\mathbb{R}^N$  и

$$d\mu = \rho dx, \quad \rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\square \cap F|} & \text{в } F, \\ 0 & \text{вне } F. \end{cases}$$

В данном случае  $d\mu_\varepsilon = \rho(\varepsilon^{-1}x) dx$  и интегрирование в (1.13) ведется только по  $\Omega_\varepsilon = \varepsilon F \cap \Omega$  – “перфорированной области”. Само решение  $u_\varepsilon$  задачи (1.12) определено, очевидно, только в перфорированной области. Усреднению в перфорированных областях посвящена обширная литература, см. [9]–[11]. Классический подход основан на идее продолжения решения с перфорированной области  $\Omega_\varepsilon$  на исходную область  $\Omega$  с сохранением энергетических оценок, что требовало существенных ограничений на структуру периодического множества  $F$  (условие “сильной связности” по Хруслову). Так, давний вопрос об обосновании усреднения в

случае, когда  $F$  просто *связно* в  $\mathbb{R}^N$ , не поддавался решению классическими методами.

Между тем обычная связность  $F$  в  $\mathbb{R}^N$  (или даже только на торе) влечет эргодичность меры  $\mu$ , как это непосредственно ясно из (1.15). Построены также примеры открытых, но не связных множеств  $F$ , для которых соответствующая мера эргодична и усредненная матрица положительно определена [7].

3°. *Фрактальные меры*. Пусть  $N = 2$  и периодическая мера  $\mu$  имеет структуру

$$d\mu = \frac{d\mu_0(x_1) \times dx_2 + dx_1 \times d\mu_0(x_2)}{2},$$

где  $\mu_0$  – некоторая нормированная мера на отрезке  $[0, 1]$ . В частности, в качестве  $\mu_0$  можно взять естественную меру, сосредоточенную на канторовом множестве  $C \subset [0, 1]$ . Мера  $\mu$  будет сосредоточена на множестве

$$C \times [0, 1] \cup [0, 1] \times C - \text{“странной канторовой сетке”}.$$

Для этих мер доказано неравенство Пуанкаре (1.16), и поэтому они эргодичны.

4°. *Периодические графы*. Рассмотрим на плоскости периодический связный граф, например обычную квадратную сетку. Мера  $\mu$  определим как сумму линейных мер звеньев, взятых с некоторыми положительными весами. Тогда мера  $\mu$  будет эргодической и невырожденной.

**1.3.** В рассмотренной выше модели (1.12) матрица проводимости имеет специальную структуру  $A_\varepsilon(x) = A(\varepsilon^{-1}x)$ . В приложениях существуют многочисленные задачи с более сложным вхождением малого параметра. Сейчас мы рассмотрим некоторые модели усреднения, встречающиеся в теории пористых сред.

Представим себе, что пространство  $\mathbb{R}^N$  разбито на две периодические части  $F^\varepsilon = \varepsilon F$  и  $F_0^\varepsilon = \varepsilon F_0$ , имеющие период  $\varepsilon$ . Каждая из этих частей есть отдельная пористая среда (со своей внутренней структурой, обеспечивающей фильтрацию), но коэффициент проницаемости в  $F^\varepsilon$  имеет порядок 1, а в  $F_0^\varepsilon$  – порядок  $\varepsilon^2$ . Тогда получаем модель *double-porosity*. Закон Дарси, описывающий фильтрацию в такой композитной системе, приводит к дивергентному параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a_\varepsilon(x)\nabla u), \quad a_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{в } F^\varepsilon, \\ \varepsilon^2 & \text{в } F_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (1.17)$$

Вместо него можно изучать соответствующее резольвентное эллиптическое уравнение. Часто “жесткая” фаза  $F^\varepsilon$  является связной в  $\mathbb{R}^N$ . Если же она состоит, скажем, из двух связных компонент, то мы имеем два “параллельных потока” в жестких фазах, связь между которыми осуществляется через “мягкую” фазу  $F_0^\varepsilon$ .

Вот некоторые примеры.

1. *Модель двух параллельных слабо связанных потоков*, см. рис. 1. Здесь  $d\mu = dx$  – мера Лебега,  $F_1, F_2$  – две непересекающиеся периодические решетки в  $\mathbb{R}^3$ ,  $F_0 = \mathbb{R}^2 \setminus F_1 \cup F_2$ . Коэффициент проницаемости равен единице на каждой из жестких фаз  $F_1^\varepsilon = \varepsilon F_1, F_2^\varepsilon = \varepsilon F_2$  и  $\varepsilon^2$  на мягкой фазе  $F_0^\varepsilon$ .

2. *Простейшая модель double-porosity*. Здесь  $d\mu = dx$  – мера Лебега,  $F_0$  – периодическая система шаров. При  $N \geq 3$  шары могут иметь радиус  $\frac{1}{2}$ . Тогда  $F_0$



– это плотная кубическая упаковка шаров. Коэффициент проницаемости равен  $\varepsilon^2$  на  $F_0^\varepsilon$  и единице на дополнении к  $F_0^\varepsilon$ .

3. *Сеточная модель double-porosity*. Здесь  $\mu$  – линейная мера на периодическом графе. Сам граф и его жесткая и мягкая компоненты изображены на рис. 2.

Коэффициент проницаемости, как и в предыдущем примере, равен  $\varepsilon^2$  на  $F_0^\varepsilon$  и единице на  $F_1^\varepsilon$ .

4. *Сеточная модель двух параллельных слабо связанных потоков*. Здесь  $F_1, F_2$  – две “тонкие” непересекающиеся периодические решетки в  $\mathbb{R}^3$ ,  $F_0$  – связывающие их звенья, см. рис. 3.

5. *“Тонкостенная модель”*. Здесь  $\mu$  – это поверхностная мера Лебега на гранях единичного куба  $\square$ ,  $F_0$  – круги на гранях; их центры находятся в центрах граней, а радиусы  $< \frac{1}{2}$ , см. рис. 4.

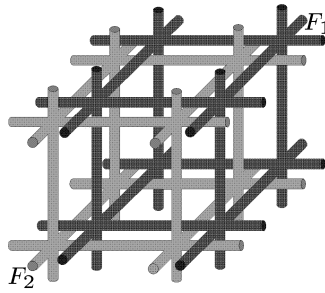


Рис. 1

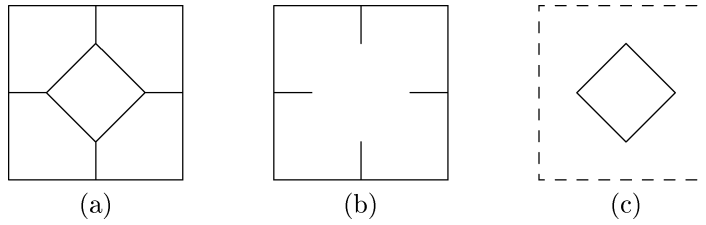


Рис. 2

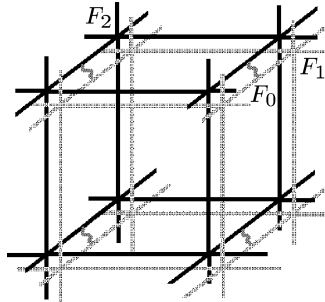


Рис. 3

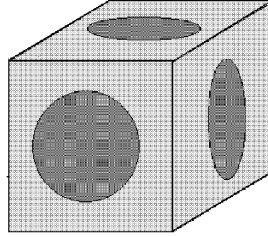


Рис. 4

Усреднению в моделях double-porosity посвящено много работ механиков и математиков [12]–[14]. Рассматривался только случай, когда  $d\mu = dx$  – мера Лебега, жесткая фаза  $F$  связна и представляет собой достаточно гладкую периодическую область. Для нестационарного уравнения (1.17) методом Nguetseng–Allaire было выведено “предельное уравнение”. Много материалов по этим вопросам имеется в книге Hornung [15]. Г. В. Сандраков [16], [17] с помощью классического метода асимптотических разложений не только доказал собственно усреднение, но и получил соответствующие оценки между точным решением и “двухмасштабным” нулевым приближением. Сандракову принадлежат также интересные наблюдения в случае нескольких жестких фаз. Впрочем, применение классических методов связано с довольно сильными ограничениями гладкости на фазы.

Общая версия модели параллельных потоков в терминах меры  $\mu$  дана в § 6. Для исследования свойств усреднения будет применена двухмасштабная сходимость. При этом никаких ограничений гладкости на фазы не потребуется.

## § 2. Определение двухмасштабной сходимости

**2.1.** Пусть  $\mu$  – периодическая борелевская мера,  $\mu_\varepsilon$  – “скейлинг”-мера, определенная равенством (1.11).

Исходным пунктом для двухмасштабной сходимости служит свойство среднего значения периодической функции. В простейшей форме оно выглядит так.

**СВОЙСТВО СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ.** *Рассмотрим заданную на  $\mathbb{R}^N$  периодическую  $\mu$ -измеримую функцию  $b(x)$ ,  $b \in L^1(\square, d\mu)$ . Тогда имеет место слабая сходимость мер:  $b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \rightharpoonup \langle b \rangle dx$ , где  $\langle b \rangle = \int_{\square} b d\mu$  – среднее значение  $b$ . Другими словами,*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\square} b(y) \varphi(x) dx d\mu(y) \\ &= \langle b \rangle \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (2.1)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Разобьем  $\mathbb{R}^N$  на кубы со стороной  $\varepsilon$  и обозначим отдель-

ный такой куб символом  $\varepsilon \square_j$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon &= \sum \int_{\varepsilon \square_j} \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= \sum \varphi(x_j) \int_{\varepsilon \square_j} b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $x_j$  – точка из куба  $\varepsilon \square_j$ . По периодичности

$$\int_{\varepsilon \square_j} b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon = \varepsilon^N \int_{\square} b(y) d\mu = \varepsilon^N \langle b \rangle.$$

Поэтому (2.2) есть риманова сумма для интеграла (2.1), и свойство доказано.

Из (2.1) и общих свойств слабой сходимости мер получаем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} \varphi(x) b(y) dx d\mu(y), \quad (2.3)$$

где  $\Omega$  – ограниченная область, граница которой имеет нулевую лебегову меру,  $\varphi$  – непрерывная функция в  $\bar{\Omega}$ . Ниже всегда предполагается, что  $\Omega$  – липшицева область.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Более общая формулировка свойства среднего значения такова. Скажем, что  $\Phi = \Phi(x, y) \in C(\bar{\Omega}, L^1_{\text{per}}(\square, d\mu))$ , если  $\Phi$  периодична по  $y$  и непрерывна как функция аргумента  $x \in \bar{\Omega}$  со значениями в  $L^1(\square, d\mu)$ . Тогда функция  $\Phi(x, \varepsilon^{-1}x)$  будет  $\mu_\varepsilon$ -измеримой и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} \Phi(x, y) dx d\mu.$$

**2.2.** Будем изучать последовательность функций  $u_\varepsilon(x) \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ , всегда предполагая ее ограниченной (см. (1.14)), и использовать пробные функции

$$\Phi(x, y) = \varphi(x) b(y), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad b \in C^\infty_{\text{per}}(\square). \quad (2.4)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Последовательность  $u_\varepsilon$  слабо двухмасштабно сходится к функции  $u = u(x, y) \in L^2(\Omega \times \square, dx \times d\mu) = L^2(\Omega \times \square)$ :  $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x, \varepsilon^{-1}x) u_\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} \Phi(x, y) u(x, y) dx d\mu(y) \quad (2.5)$$

для любой пробной функции  $\Phi$  из (2.4).

Простейший пример: если  $u_\varepsilon(x) = \Phi(x, \varepsilon^{-1}x)$ , то двухмасштабный предел равен  $\Phi(x, y)$ . Это следует из свойства среднего значения.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.** Если последовательность  $u_\varepsilon$  ограничена в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ , то она компактна в смысле слабой двухмасштабной сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество (2.4) пробных функций сепарабельно относительно нормы  $\sup_{\Omega \times \square} |\Phi|$ . Выбирая счетное всюду плотное множество  $\Gamma$  пробных функций, диагональным методом выделим подпоследовательность  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  такую, что предел

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x, \varepsilon^{-1}x) u_{\varepsilon}(x) d\mu_{\varepsilon} = l(\Phi) \quad (2.6)$$

существует для любой  $\Phi \in \Gamma$ . Но тогда этот предел, очевидно, существует и для любой пробной функций из (2.4). Далее, по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} \Phi(x, \varepsilon^{-1}x) u_{\varepsilon}(x) d\mu_{\varepsilon} \right)^2 &\leq \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2(x) d\mu_{\varepsilon} \int_{\Omega} \Phi^2(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_{\varepsilon} \\ &\leq C \int_{\Omega} \Phi^2(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда по свойству среднего значения

$$|l(\Phi)|^2 \leq C \int_{\Omega} \int_{\square} \Phi^2(x, y) dx d\mu(y).$$

Тогда по теореме Рисса линейный функционал  $l(\Phi)$  допускает представление

$$l(\Phi) = \int_{\Omega} \int_{\square} \Phi(x, y) u(x, y) dx d\mu(y), \quad u \in L^2(\Omega \times \square).$$

Так как линейная оболочка пробных функций плотна в  $L^2(\Omega \times \square)$ , то функция  $u$  определена единственным образом. Отсюда, между прочим, ясно, что предельное соотношение (2.5) автоматически выполнено для более широкого класса пробных функций – когда  $\varphi$  берется из  $C(\overline{\Omega})$ , а  $b$  – по-прежнему из  $C_{\text{per}}^{\infty}$ .

Действительно, мы могли бы повторить предыдущие рассуждения для этого более широкого класса пробных функций, перейдя, быть может, в (2.6) к подпоследовательности  $\varepsilon'_k$ . Но функция  $u(x, y)$  уже определена, и поэтому в действительности переходить к подпоследовательности не нужно. Предложение доказано.

В определении 2.1 задействован минимально узкий класс пробных функций. Его можно по-разному расширять с сохранением сходимости (2.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Сходимость (2.5) сохраняется для пробных функций  $\Phi(x, y) = \varphi(x)b(y)$ , где  $\varphi(x)$  берется теперь из  $C(\overline{\Omega})$ , а функция  $b$  – из  $L^2(\square, d\mu)$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. О функциях  $\varphi$  уже сказано выше. Рассмотрим вопрос о расширении класса функций  $b(y)$ . Для  $b \in L^2(\square, d\mu)$  возьмем

$$\tilde{b} \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square), \quad \int_{\square} |b - \tilde{b}|^2 d\mu \leq \delta,$$

и воспользуемся тем, что по свойству среднего значения (2.3)

$$\int_{\Omega} |b(\varepsilon^{-1}x) - \tilde{b}(\varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu_{\varepsilon} \leq 2|\Omega|\delta$$

при достаточно малом  $\varepsilon$ . Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \varphi(x) [b(\varepsilon^{-1}x) - \tilde{b}(\varepsilon^{-1}x)] u_{\varepsilon}(x) d\mu_{\varepsilon} \right| &\leq C\delta, \\ \left| \int_{\Omega} \int_{\square} \varphi(x) [b(y) - \tilde{b}(y)] u(x, y) dx d\mu \right| &\leq C\delta, \end{aligned}$$

где  $C$  не зависит от  $\varepsilon$ . Отсюда следует наше утверждение.

Нетрудно показать, что сходимость (2.5) сохраняется для более широкого класса “допустимых” пробных функций, например для  $\Phi \in C(\overline{\Omega}, L^2_{\text{per}}(\square, d\mu))$ .

**2.3.** Перечислим некоторые свойства двухмасштабной сходимости.

i) Если  $u_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ ,  $a \in L^{\infty}_{\text{per}}(\square, d\mu)$ , то

$$a(\varepsilon^{-1}x)u_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} a(y)u(x, y). \quad (2.7)$$

Действительно, согласно предложению 2.3 множитель  $a(\varepsilon^{-1}x)$  может быть отнесен к пробной функции.

Сравним обычный слабый предел с двухмасштабным.

ii) Если  $u_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ , то

$$u_{\varepsilon}(x) \rightharpoonup \int_{\square} u(x, y) d\mu. \quad (2.8)$$

В самом деле, если в (2.5) взять пробную функцию  $\Phi(x, y) = \varphi(x)$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) u_{\varepsilon}(x) d\mu_{\varepsilon} = \int_{\Omega} \int_{\square} u(x, y) d\mu(y) \varphi(x) dx.$$

Видим, что обычный слабый предел получается из двухмасштабного усреднением по периоду.

iii) Если  $u_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ , то

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2(x) d\mu_{\varepsilon} \geq \int_{\Omega} \int_{\square} u^2(x, y) dx d\mu. \quad (2.9)$$

Докажем iii). Имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [u_{\varepsilon}(x) - \Phi(x, \varepsilon^{-1}x)]^2 d\mu_{\varepsilon} \\ &= \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2(x) d\mu_{\varepsilon} - 2 \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \Phi(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_{\varepsilon} + \int_{\Omega} \Phi^2(x, \varepsilon^{-1}x) d\mu_{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

По свойству (2.5) и свойству среднего значения

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2 d\mu_{\varepsilon} \geq 2 \int_{\Omega} \int_{\square} u(x, y) \Phi(x, y) dx d\mu - \int_{\Omega} \int_{\square} \Phi^2(x, y) dx d\mu.$$

Здесь  $\Phi(x, y)$  – линейная комбинация пробных функций (2.4),  $\Phi(x, y) = \varphi_i(x)b_i(y)$ . Выбрав последовательность  $\Phi_k \rightarrow u$  в  $L^2(\Omega \times \square)$ , получим искомое неравенство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Последовательность  $u_\varepsilon$  *сильно двухмасштабно* сходится к функции  $u = u(x, y) \in L^2(\Omega \times \square)$ , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} u(x, y) v(x, y) dx d\mu(y), \text{ как только } v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, y). \quad (2.11)$$

Очевидно, что сильная сходимость влечет слабую (достаточно взять  $v_\varepsilon(x) = \Phi(x, \varepsilon^{-1}x)$ ). Кроме того, взяв  $v_\varepsilon = u_\varepsilon$ , получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2(x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} u^2(x, y) dx d\mu. \quad (2.12)$$

Верно и обратное:

iv) слабая сходимость и соотношение (2.12) влекут сильную.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольную последовательность  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  такую, что существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon_k}(x) v_\varepsilon(x) d\mu_{\varepsilon_k} = \alpha, \quad \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon_k}^2(x) d\mu_{\varepsilon_k} = \beta,$$

где  $v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$ . Тогда из (2.9), (2.12) получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_\varepsilon + t u_{\varepsilon_k})^2 d\mu_{\varepsilon_k} &\geq \int_{\Omega} \int_{\square} (v + t u)^2 dx d\mu, \\ 2t\alpha + t^2\beta &\geq 2t \int_{\Omega} \int_{\square} uv dx d\mu + t^2 \int_{\Omega} \int_{\square} u^2 dx d\mu. \end{aligned}$$

Сокращая здесь на  $t$  (сначала при  $t > 0$ , а затем при  $t < 0$ ), будем иметь

$$\alpha = \int_{\Omega} \int_{\square} uv dx d\mu,$$

что и дает (2.11).

v) Пусть  $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$  и предельная функция  $u(x, y)$  является достаточно гладкой, например  $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}, L^2_{\text{per}}(\square, d\mu))$ . Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu_\varepsilon = 0. \quad (2.13)$$

Действительно, возьмем в (2.10) пробную функцию  $\Phi(x, y) = u(x, y)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu_\varepsilon \\ = \int_{\Omega} \int_{\square} u^2 dx d\mu - 2 \int_{\Omega} \int_{\square} uu dx d\mu + \int_{\Omega} \int_{\square} u^2 dx d\mu = 0 \end{aligned}$$

согласно (2.12), (2.5) и свойству среднего значения.

Сравним обычную сильную сходимость и двухмасштабную.

vi) Если  $u_\varepsilon(x) \rightarrow \bar{u}(x)$ , то  $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \bar{u}(x)$ , т.е. двухмасштабный предел не зависит от  $y$ .

Докажем vi). Пусть  $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ . Тогда по предыдущему (см. также предложение 1.1)

$$\bar{u}(x) = \int_{\square} u(x, y) d\mu,$$

$$\int_{\Omega} \bar{u}^2(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon \geq \int_{\Omega} \int_{\square} u^2(x, y) dx d\mu \geq \int_{\Omega} \bar{u}^2 dx.$$

Ясно, что здесь наблюдаются строгие равенства и поэтому  $\bar{u} \equiv u$  и  $u_\varepsilon \xrightarrow{2} \bar{u}$ .

Главные свойства двухмасштабной сходимости обнаруживаются при совместном рассмотрении последовательности функций  $u_\varepsilon$  и последовательности их градиентов  $\nabla u_\varepsilon$ . Прежде чем говорить об этом, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с гармоническим анализом на торе, наделенном мерой  $\mu$ .

### § 3. Соболевские пространства

**3.1.** Пусть  $\mu$  – периодическая нормированная мера. Мы хотим определить соболевское пространство периодических функций  $H_{\text{per}}^1 = H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$ .

Сначала определим пространство  $W = W(\square, d\mu)$  как замыкание множества пар  $\{u, \nabla u : u \in C_{\text{per}}^\infty\}$  в  $L^2(\square, d\mu) \times L^2(\square, d\mu)^N$ .

Элементами  $W$  служат пары  $u, z$ . Условимся вектор  $z$  обозначать через  $\nabla u$  и называть градиентом функции  $u$ :  $z = \nabla u$ . Совокупность первых компонент  $u$  назовем *соболевским пространством*  $H_{\text{per}}^1$ . Норму на этом пространстве не вводим.

Функция из соболевского пространства может иметь много градиентов.

Очевидно, что множество  $\Gamma(u)$  градиентов данной функции  $u \in H_{\text{per}}^1$  имеет структуру  $\Gamma(u) = \nabla u + \Gamma(0)$ , где  $\nabla u$  – некоторый градиент, а  $\Gamma(0)$  – множество градиентов нуля. По определению  $g \in \Gamma(0)$ , если

$$\exists \varphi_n \in C_{\text{per}}^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_n^2 \rangle = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle |g - \nabla \varphi_n|^2 \rangle = 0. \quad (3.1)$$

Ясно, что  $\Gamma(0)$  есть подпространство векторного пространства  $(L^2)^N$ .

Для иллюстрации неединственности градиента рассмотрим простейший пример.

**ПРИМЕР.** Пусть  $N = 2$ ,  $\square = [0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  – ячейка периодичности,  $\mu$  – линейная мера на отрезке  $I = [0, 1] \times \{0\}$ . По определению для  $u \in H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$

$$\exists u_n \in C_{\text{per}}^\infty(\square) : \int_I |u - u_n|^2 dx_1 \rightarrow 0,$$

$$\int_I \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} - z_1 \right|^2 dx_1 \rightarrow 0, \quad \int_I \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} - z_2 \right|^2 dx_1 \rightarrow 0.$$

Тогда  $u$  принадлежит одномерному соболевскому пространству  $H_{\text{per}}^1(I)$ , причем

$z_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ , т.е.  $\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, z_2 \right\}$ . Убедимся, что компонента  $z_2$  может быть произвольным элементом из  $L^2(I)$ , другими словами,

$$\Gamma(0) = \{(0, \alpha)\}, \quad \alpha \in L^2(I) = L^2(\square, d\mu).$$

Поскольку  $\Gamma(0)$  замкнуто в  $L^2(\square, d\mu)$ , то достаточно проверить, что  $(0, \alpha) \in \Gamma(0)$  для  $\alpha \in C_{\text{per}}^\infty(I)$ . В этом случае в качестве  $\varphi_n$  из (3.1) можно взять  $\varphi_n(x) = \chi(x_2)\alpha(x_1)$ , где  $\chi(x_2)$  – гладкая периодическая функция,  $\chi(0) = 0$ ,  $\chi'(0) = 1$ .

Дальнейшие свойства градиента имеет смысл обсудить в связи с эллиптическими уравнениями. Пусть  $A(x)$  – периодическая  $\mu$ -измеримая симметрическая матрица, подчиненная условию эллиптичности и ограниченности (1.2).

Скажем, что  $u \in H_{\text{per}}^1$  есть решение периодической задачи

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \lambda u = f, \quad f \in L^2(\square, d\mu), \quad \lambda > 0, \quad (3.2)$$

если выполнено интегральное тождество

$$\langle A\nabla u \cdot \nabla \varphi \rangle + \lambda \langle u \varphi \rangle = \langle f \varphi \rangle, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty, \quad (3.3)$$

в котором  $\nabla u$  – *некоторый* градиент  $u$ . Существование и единственность решения как пары  $u, \nabla u$  из  $W$  получить совсем просто. Действительно, с помощью левой части (3.3) на пространстве  $W$  задается новое скалярное произведение, причем соответствующая норма эквивалентна исходной. Поэтому достаточно сослаться на теорему Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве. Таким образом, единственность здесь двоякая: одна функция из  $H_{\text{per}}^1$  и лишь один ее градиент удовлетворяют тождеству (3.3).

Интересно, что градиент, участвующий в этом тождестве, с самим уравнением не связан, а определяется только матрицей  $A(x)$ . Действительно, в тождестве (3.3) возьмем  $\varphi = \varphi_n$  – последовательность из (3.1). Тогда получим

$$A\nabla u \perp \Gamma(0) \quad (3.4)$$

и воспользуемся следующим утверждением.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.** *Всякая функция из соболевского пространства имеет единственный градиент, удовлетворяющий условию (3.4).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\nabla u$  – какой-то градиент  $u$ . В силу эллиптичности  $A$  задача

$$c \in \Gamma(0), \quad \langle A(c + \nabla u) \cdot g \rangle = 0 \quad \forall g \in \Gamma(0)$$

имеет единственное решение. Тогда  $c + \nabla u$  будет искомым градиентом.

В частности, взяв в качестве  $A$  единичную матрицу, найдем, что всякая функция из соболевского пространства имеет единственный градиент, удовлетворяющий условию  $\nabla u \perp \Gamma(0)$ . Такой градиент называется *тангенциальным*. Более подробно об этом см. § 9.

Уравнение (3.2) легко интерпретируется с операторной точки зрения. Покажем, что оно имеет вид

$$\mathcal{A}u + \lambda u = f, \quad (3.5)$$

где  $\mathcal{A}$  – самосопряженный неотрицательный оператор в  $L^2 = L^2(\square, d\mu)$ . С этой целью обозначим через  $D(\mathcal{A})$  множество всех решений уравнения (3.2), в котором правая часть  $f$  пробегает  $L^2$ . Очевидное замечание:  $D(\mathcal{A})$  не зависит от выбора



$\lambda > 0$ . Далее, рассмотрим второй экземпляр уравнения (3.2), в котором  $f$  заменено на  $g$ , а  $u$  заменено на  $v$ . Поскольку в соответствующих тождествах можно брать пробные функции  $\varphi \in H_{\text{per}}^1$ , то, выбрав в (3.3)  $\varphi = v$ , а в тождестве для  $v$  – пробную функцию  $\varphi = u$ , получим

$$\langle fv \rangle = \langle gu \rangle. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что  $D(\mathcal{A})$  плотно в  $L^2$ . Действительно, взяв  $g \perp D(\mathcal{A})$ , найдем, что  $v = 0$ . Интегральное тождество для  $v$  принимает вид  $\langle A\nabla v \cdot \nabla \varphi \rangle = \langle g\varphi \rangle \forall \varphi \in H_{\text{per}}^1$ . Полагая в нем  $\varphi = v$ , получаем  $\nabla v = 0$  и поэтому  $g = 0$ . Плотность множества  $D(\mathcal{A})$  доказана. На множестве  $D(\mathcal{A})$  зададим оператор  $\mathcal{A}$  равенством  $\mathcal{A}u = f - \lambda u$ . Тогда  $\mathcal{A} + \lambda I$  обратим, обратный – ограничен (его норма  $\leq \lambda^{-1}$ ) и симметричен, как это следует из (3.6). Следовательно,  $\mathcal{A}$  самосопряжен.

Из самого построения ясно, что разрешимость эллиптической задачи (3.2) эквивалентна разрешимости операторного уравнения (3.5).

Мы видим, что неединственность градиента не является препятствием к рассмотрению эллиптических уравнений и привносит сюда лишь небольшие нюансы. Положение упрощается еще и тем, что само условие (3.4) оказывается *поточечным*. Этот результат доказан в приложении к настоящей работе, см. § 9.

Все сказанное выше о пространстве  $H_{\text{per}}^1$  и периодической задаче (3.2) справедливо для пространства  $H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  и задачи Дирихле (1.12).

**3.2.** Определим потенциальные и соленоидальные векторы на торе периодичности. Введем пространство  $V_{\text{pot}}$  *потенциальных* векторов как

$$\text{замыкание множества } \{\nabla\varphi : \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square)\} \text{ в } L_{\text{per}}^2(\square, d\mu)^N. \quad (3.7)$$

Потенциальный вектор не обязан иметь нулевое среднее,  $\langle v \rangle \neq 0$ . Более того, нетрудно показать, что если каждый потенциальный вектор имеет нулевое среднее, то  $\mu$  – это мера Лебега на торе. Вектор  $b \in L^2(\square, d\mu)^N$  называется *соленоидальным*, если он ортогонален всем потенциальным, т.е.

$$\langle b \cdot \nabla\varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty. \quad (3.8)$$

Таким образом, имеем ортогональное разложение

$$L^2(\square, d\mu)^N = V_{\text{pot}} \oplus V_{\text{sol}}. \quad (3.9)$$

Отметим, что в пространстве  $V_{\text{pot}}$  гладкие векторы плотны по определению, но этого нельзя утверждать относительно  $V_{\text{sol}}$ .

Имеется естественная связь между функциями из соболевского пространства  $H_{\text{per}}^1$  и потенциальными векторами. Например, градиент любой функции из  $H_{\text{per}}^1$  есть потенциальный вектор. В общем случае потенциальный вектор может не быть градиентом функции из  $H_{\text{per}}^1$ . Однако если справедливо неравенство Пуанкаре (1.16), то для каждого вектора  $v \in V_{\text{pot}}$  найдется единственная функция  $\hat{u} \in H_{\text{per}}^1$  такая, что  $v = \nabla\hat{u}$ ,  $\langle \hat{u} \rangle = 0$ . В этом случае  $H_{\text{per}}^1$  есть в точности совокупность потенциалов, отвечающих векторам из  $V_{\text{pot}}$ .

Из ортогонального разложения (3.9) получим

$$L^2(\Omega \times \square)^N = L^2(\Omega, L^2(\square)^N) = L^2(\Omega, V_{\text{pot}}) \oplus L^2(\Omega, V_{\text{sol}}). \quad (3.10)$$

Формально  $L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$  – это совокупность квадратично интегрируемых (по Бохнеру) функций аргумента  $x \in \Omega$  со значениями в  $V_{\text{pot}}$ . Однако проще  $L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$  определить как замыкание в  $L^2(\Omega \times \square)$  линейной оболочки векторов  $f(x)\nabla_y\varphi(y)$ , где  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\varphi \in C_{\text{per}}^\infty$ . Аналогично,  $L^2(\Omega, V_{\text{sol}})$  – это замыкание в  $L^2(\Omega \times \square)$  линейной оболочки векторов  $f(x)b(y)$ , где  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $b \in V_{\text{sol}}$ .

**3.3.** Может случиться, что ненулевой постоянный вектор является потенциальным. Обозначим через  $L$  подпространство в  $\mathbb{R}^N$ , состоящее из потенциальных векторов. Мера  $\mu$  называется *невырожденной*, если  $L = \{0\}$ . Невырожденность меры тесно связана с невырожденностью усредненной матрицы, которая определяется следующим образом:

$$A^{\text{hom}}\xi \cdot \xi = \min_{v \in V_{\text{pot}}} \langle A(\xi + v) \cdot (\xi + v) \rangle, \quad (3.11)$$

где, как всегда,  $A = A(x)$  – периодическая  $\mu$ -измеримая матрица, удовлетворяющая условию (1.2). Отсюда ясно, что  $A^{\text{hom}}$  (как неотрицательный самосопряженный оператор в  $\mathbb{R}^N$ ) имеет своим ядром подпространство  $L$ , а областью значений – ортогональное дополнение  $\tilde{L} = L^\perp$ . Уравнение Эйлера для (3.11) имеет вид

$$v \in V_{\text{pot}}, \quad \langle A(\xi + v) \cdot h \rangle = 0 \quad \forall h \in V. \quad (3.12)$$

Из него

$$\begin{aligned} A^{\text{hom}}\xi \cdot \xi &= \langle A(\xi + v) \cdot (\xi + v) \rangle = \langle A(\xi + v) \rangle \cdot \xi, \\ A^{\text{hom}}\xi &= \langle A(\xi + v) \rangle, \quad A(\xi + v) \in V_{\text{sol}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Каждый вектор из  $\tilde{L}$  является средним значением некоторого соленоидального вектора – это ясно из (3.13). Верно и обратное: среднее значение любого соленоидального вектора принадлежит  $\tilde{L}$ . Действительно, если  $b \in V_{\text{sol}}$ , то  $0 = \langle b \cdot \xi \rangle = \langle b \rangle \cdot \xi$  для  $\xi \in L$ . Итак, справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.** Пусть  $L$  – подпространство в  $\mathbb{R}^N$ , состоящее из потенциальных векторов,  $\tilde{L}$  – его ортогональное дополнение. Тогда усредненная матрица является нулевой на  $L$  и положительно определенной на  $\tilde{L}$ . Пространство  $\tilde{L}$  – это в точности совокупность средних значений соленоидальных векторов.

Сама по себе невырожденность меры  $\mu$  не означает ничего глубокого с точки зрения усреднения. Для усреднения требуется другое свойство – эргодичность.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.** Мера  $\mu$  эргодична, если любая функция  $u \in H_{\text{per}}^1$ , обладающая нулевым градиентом, есть константа  $\mu$ -почти всюду.

Сейчас мы приведем одно важное следствие эргодичности.

Для  $a \in L^2(\square, d\mu)$ ,  $b \in L^2(\square, d\mu)^N$  мы пишем  $a = \text{div } b$ , если

$$\langle b \cdot \nabla\varphi \rangle = -\langle a\varphi \rangle, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty. \quad (3.14)$$

Очевидно, что функция  $a$  обязана иметь нулевое среднее:  $\langle a \rangle = 0$ .

ЛЕММА ОБ АППРОКСИМАЦИИ [7], [8]. Если мера  $\mu$  эргодична, то множество функций  $a \in L^2(\square, d\mu)$ , допускающих представление  $a = \operatorname{div} b$ ,  $b \in L^2(\square, d\mu)^N$ , плотно в подпространстве всех функций из  $L^2(\square, d\mu)$ , имеющих нулевое среднее.

В случае выполнения неравенства Пуанкаре (1.16) всякий вектор  $a \in L^2$  с нулевым средним допускает указанное представление  $a = \operatorname{div} b$ .

#### § 4. Эргодичность и двухмасштабная сходимость

4.1. Изучим последовательность  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ , считая, что она ограничена в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  и  $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ . Первый вопрос: когда двухмасштабный предел не зависит от  $y$ ? Ответ существенно использует эргодичность меры  $\mu$ .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть мера  $\mu$  эргодична и выполнены условия

- i)  $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ ;
- ii)  $\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)} \rightarrow 0$ .

Тогда двухмасштабный предел  $u(x, y)$  не зависит от  $y$ :  $u(x, y) = u(x)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем  $a = \operatorname{div} b$ ,  $a \in L^2(\square, d\mu)$ ,  $b \in L^2(\square, d\mu)^N$ .

Сначала заметим, что тождество (3.14) на периодических функциях влечет за собой аналогичное тождество на финитных функциях:

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} b(\varepsilon^{-1}x) \cdot \nabla \psi(x) d\mu_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}^N} a(\varepsilon^{-1}x) \psi(x) d\mu_\varepsilon, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Поэтому для  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\varphi u_\varepsilon) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon - \varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= - \int_{\Omega} \varphi(x) a(\varepsilon^{-1}x) u_\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon - \varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon. \end{aligned}$$

Левая часть стремится к нулю в силу условия ii). Второе слагаемое справа также имеет нулевой предел. Поэтому

$$0 = \int_{\Omega} \int_{\square} \varphi(x) a(y) u(x, y) dx d\mu(y).$$

Теперь из леммы об аппроксимации следует, что  $u(x, y) = u(x)$ . Теорема доказана.

Пусть теперь мера  $\mu$  эргодична,  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon$  ограничены в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ ,

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x), \quad \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} p(x, y).$$

Возникают вопросы: принадлежит ли  $u(x)$  соболевскому пространству  $H^1(\Omega)$ ? Как связаны  $\nabla u$  и  $p(x, y)$ ?

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть мера  $\mu$  эргодична и невырождена. Тогда

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\stackrel{2}{\rightharpoonup} u(x) \in H_0^1(\Omega), \\ \nabla u_\varepsilon(x) &\stackrel{2}{\rightharpoonup} \nabla u(x) + v(x, y), \quad \text{где } v \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для  $b \in V_{\text{sol}}$ ,  $\langle b \rangle = \eta$ ,  $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \varphi(x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= \int_{\Omega} \nabla(\varphi u_\varepsilon) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon - \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= - \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \end{aligned}$$

и по определению двухмасштабной сходимости

$$\int_{\Omega} \int_{\square} p(x, y) \varphi(x) \cdot b(y) dx d\mu(y) = - \int_{\Omega} \int_{\square} u(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(y) dx d\mu(y). \quad (4.2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x) \eta \cdot \nabla \varphi(x) dx &= - \int_{\Omega} z(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \\ z(x) &= \int_{\square} p(x, y) b(y) d\mu, \quad z \in L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Получили, что  $\eta \cdot \nabla u \in L^2(\Omega)$  в смысле распределений,  $\eta \cdot \nabla u = z(x)$ .

Теперь используем невырожденность меры  $\mu$ . В этом случае для любого  $\eta \in \mathbb{R}^N$  найдется  $b \in V_{\text{pot}}$ ,  $\langle b \rangle = \eta$ . Тогда  $\nabla u \in L^2$  в смысле распределений, т.е.  $u \in H^1(\Omega)$ , и равенство (4.2) переписывается так:

$$\begin{aligned} \int_{\square} \int_{\Omega} p(x, y) \cdot \varphi(x) b(y) dx d\mu &= \int_{\square} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot b(y) \varphi(x) dx d\mu, \\ \int_{\square} \int_{\Omega} [p(x, y) - \nabla u(x)] \cdot \varphi(x) b(y) dx d\mu &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку линейная оболочка вектор-функций  $\varphi(x)b(y)$  плотна в  $L^2(\Omega, V_{\text{sol}})$ , то в силу ортогонального разложения (3.10)  $p - \nabla u \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$ .

Остается проверить, что  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Из (4.3) следует, что

$$\int_{\Omega} u \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} \nabla u \varphi dx \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}). \quad (4.4)$$

Это означает, что функция  $u$ , продолженная нулем на  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ , принадлежит пространству  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Но тогда благодаря липшицевости  $\Omega$   $u \in H_0^1(\Omega)$  – замыканию  $C_0^\infty(\Omega)$  по соболевской норме. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай вырожденной меры (см. предложение 3.2).

По предыдущему  $\eta \cdot \nabla u \in L^2(\Omega)$  для  $\eta \in \tilde{L}$ , в частности  $A^{\text{hom}} \nabla u \in L^2(\Omega)$  и  $\tilde{\nabla} u \in L^2(\Omega)$ , где через  $\tilde{\nabla} u$  обозначена ортогональная проекция  $\nabla u$  на  $\tilde{L}$ .

Невырожденной мере соответствуют соболевские пространства  $H^1(\Omega)$  и  $H_0^1(\Omega)$ , а вырожденной – пространство

$$\tilde{H}^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \tilde{\nabla} u \in L^2(\Omega)^N\}$$

с нормой  $\|u\|_{L^2} + \|\tilde{\nabla} u\|_{(L^2)^N}$  и его подпространство  $\tilde{H}_0^1(\Omega) = \{u \in \tilde{H}^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$ . При этом  $u|_{\partial\Omega} = 0$  означает по определению тождество (4.4), в котором  $\nabla u, \nabla \varphi$  заменены на  $\tilde{\nabla} u, \tilde{\nabla} \varphi$ . Важно, что множество  $C_0^\infty(\Omega)$  плотно в  $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ . Для звездной  $\Omega$  этот факт доказывается обычным сглаживанием, а для липшицевой – требуются более сложные рассуждения, см. [18; с. 311].

Теперь, если действовать как при доказательстве теоремы 4.2, получим:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} u(x) \in \tilde{H}_0^1(\Omega), \\ \nabla u_\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} \tilde{\nabla} u(x) + v(x, y), \quad \text{где } v \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

До сих пор мы для простоты рассматривали последовательность  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ . Все результаты сохраняются, если брать  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ . Единственный пункт, требующий внимания, это условие ограниченности градиентов  $\nabla u_\varepsilon$ . В случае  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  надо говорить “найдутся такие  $\nabla u_\varepsilon \in \Gamma(u_\varepsilon)$ , что последовательность  $\nabla u_\varepsilon$  ограничена в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ ”.

**4.2.** Выведем из полученных результатов одно следствие, которое будет рабочим инструментом в вопросах усреднения. Будем считать, что имеют место соотношения (4.1) или более общие соотношения (4.5).

**ЛЕММА 4.3.** Пусть дополнительно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla_y w(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) d\mu_\varepsilon = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad w \in C_{\text{per}}^\infty. \quad (4.6)$$

Тогда имеет место слабая сходимость “потоков”:

$$A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \rightharpoonup A^{\text{hom}} \nabla u(x). \quad (4.7)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из свойств (2.7), (2.8) двухмасштабной сходимости имеем

$$\begin{aligned} A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} A(y) [\tilde{\nabla} u(x) + v(x, y)], \\ A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) &\rightharpoonup \int_{\square} A(y) [\tilde{\nabla} u(x) + v(x, y)] d\mu(y). \end{aligned} \quad (4.8)$$

В частности, предел (4.6) равен

$$\int_{\Omega} \int_{\square} A(y) [\tilde{\nabla} u(x) + v(x, y)] \varphi(x) \cdot \nabla_y w(y) dx d\mu = 0.$$

Поскольку  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  произвольно, то

$$\int_{\square} A(y) [\tilde{\nabla} u(x) + v(x, y)] \cdot \nabla_y w(y) d\mu = 0 \quad \forall w \in C_{\text{per}}^\infty.$$

Видим, что  $v(x, y)$  есть решение периодической задачи (3.12) для  $\xi = \tilde{\nabla} u(x)$ , и тогда формула (3.13) дает

$$\int_{\square} A(y) [\tilde{\nabla} u(x) + v(x, y)] d\mu = A^{\text{hom}} \tilde{\nabla} u(x) = A^{\text{hom}} \nabla u(x).$$

Теперь (4.8) означает искомую сходимость потоков.

**4.3.** Установленных выше свойств двухмасштабной сходимости достаточно, чтобы легко вывести теорему усреднения в классической постановке. Покажем, что в тождестве (1.13) можно перейти к пределу и получить усредненную задачу, связанную уже с мерой Лебега. Усредненное уравнение имеет обычный вид

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad -\operatorname{div}(A^{\text{hom}}\nabla u) + \lambda u = f$$

в случае невырожденной  $A^{\text{hom}}$ . В случае вырождения берем  $\tilde{H}_0^1(\Omega)$  вместо  $H_0^1(\Omega)$ .

**ТЕОРЕМА 4.4.** Пусть мера  $\mu$  эргодична и правые части  $f_\varepsilon$  в (1.12) слабо (сильно) сходятся к  $f \in L^2(\Omega)$ . Тогда последовательность решений слабо (сильно) сходится к решению усредненного уравнения.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из тождества (1.13) и ограниченности  $f_\varepsilon$  следует, что  $u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon$  ограничены в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ . Без потери общности считаем, что имеют место соотношения (4.1) или (4.5).

Взяв в интегральном тождестве (1.13) пробную функцию

$$\psi(x) = \varepsilon\varphi(x)w(y), \quad \text{где } y = \varepsilon^{-1}x, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad w \in C_{\text{per}}^\infty,$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(\varepsilon^{-1}x)\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla_y w \varphi d\mu_\varepsilon + \varepsilon \int_{\Omega} A(\varepsilon^{-1}x)\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi w d\mu_\varepsilon \\ + \varepsilon\lambda \int_{\Omega} u_\varepsilon \varphi w d\mu_\varepsilon = \varepsilon \int_{\Omega} f \varphi w d\mu_\varepsilon. \end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме первого, сходятся к нулю. Тогда сходится к нулю и первое, т.е. выполнено условие (4.6). Лемма 4.3 дает слабую сходимости (4.7). Кроме того, имеем  $u_\varepsilon \rightharpoonup u, f_\varepsilon \rightharpoonup f$ . Поэтому в тождестве (1.13) можно перейти к пределу и получить

$$\int_{\Omega} A^{\text{hom}}\nabla u \cdot \nabla \psi dx + \lambda \int_{\Omega} u \psi dx = \int_{\Omega} f \psi dx.$$

Тем самым доказана первая часть теоремы о слабой сходимости решений.

Остается получить сильную сходимости  $u_\varepsilon \rightarrow u$  при условии, что правые части сходятся сильно. Это достигается следующим простым рассуждением. Рассмотрим задачу:

$$z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon), \quad -\operatorname{div}(A(\varepsilon^{-1}x)\nabla z_\varepsilon) + \lambda z_\varepsilon = u_\varepsilon. \quad (4.9)$$

Так как  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ , то по доказанному выше  $z_\varepsilon \rightharpoonup z$ ,

$$z \in H_0^1(\Omega), \quad -\operatorname{div}(A^{\text{hom}}\nabla z) + \lambda z = u.$$

Умножая уравнение (4.9) скалярно на  $u_\varepsilon$ , а исходное уравнение (1.12) на  $z_\varepsilon$ , получаем

$$\int_{\Omega} u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} z_\varepsilon f_\varepsilon d\mu_\varepsilon.$$

Отсюда по определению сильной сходимости  $f_\varepsilon \rightarrow f$  (см. предложение 1.1)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} z_\varepsilon f_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} z f dx = \int_{\Omega} u^2 dx$$

и сильная сходимости  $u_\varepsilon \rightarrow u$  установлена. Теорема доказана.

**4.4.** Нам понадобится еще одно свойство двухмасштабной сходимости, но сначала введем класс  $L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1)$ . Скажем, что функция  $u = u(x, y) \in L^2(\Omega \times \square)$  принадлежит  $L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(\square, d\mu))$  и  $\nabla_y u \in L^2(\Omega \times \square)^N$  – ее градиент, если

$$\begin{aligned} \exists u_n \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \square): \quad & u_n \text{ – периодичны по } y, \\ & u_n \rightarrow u, \quad \nabla_y u_n \rightarrow \nabla_y u \text{ в } L^2(\Omega \times \square). \end{aligned}$$

Из определения видно, что  $\nabla_y u \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$ . Если выполнено неравенство Пуанкаре (1.16), то верно и обратное: каждому вектору  $v = v(x, y) \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$  соответствует единственная функция  $\hat{u} = \hat{u}(x, y)$  такая, что

$$\hat{u}(x, \cdot) \in H_{\text{per}}^1, \quad v = \nabla_y u, \quad \langle \hat{u} \rangle = 0, \quad (4.10)$$

и ясно, что  $\hat{u} \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1)$ .

Изучим ситуацию, когда  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$  и  $u_\varepsilon(x), \varepsilon \nabla u_\varepsilon(x)$  ограничены в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ .

**ТЕОРЕМА 4.5.** *Предположим, что выполнено неравенство Пуанкаре (1.16). Тогда (с точностью до выделения подпоследовательности) имеет место (1.10).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем  $a \in L^2(\square, d\mu)$ ,  $b \in L^2(\square, d\mu)^N$ , связанные равенством  $\text{div } b = a$ . Пусть  $\varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$ . Тогда для  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\varphi u_\varepsilon) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon - \varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon \\ &= - \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi(x) a(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon - \varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\square} \varphi(x) v(x, y) \cdot b(y) dx d\mu &= - \int_{\Omega} \int_{\square} \varphi(x) u(x, y) \text{div } b dx d\mu, \\ \int_{\square} v(x, y) \cdot b(y) d\mu &= - \int_{\square} u(x, y) a(y) d\mu. \end{aligned}$$

В частности, полагая  $a = 0$ , видим, что  $v \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}})$ . Для вектора  $v$  рассмотрим потенциал  $\hat{u}$  из (4.10). Тогда из условия  $\text{div } b = a$  имеем

$$\int_{\square} v(x, y) \cdot b(y) d\mu = \int_{\square} \nabla_y \hat{u}(x, y) \cdot b(y) d\mu = - \int_{\square} \hat{u}(x, y) a(y) d\mu.$$

Мы получили равенство

$$\int_{\square} u(x, y) a(y) d\mu = \int_{\square} \hat{u}(x, y) a(y) d\mu.$$

Из него по лемме об аппроксимации

$$\hat{u}(x, y) = u(x, y) - \int_{\square} u(x, y) d\mu$$

и поэтому  $v = \nabla_y \hat{u} = \nabla_y u$ . Теорема доказана.

Отметим, что теорема 4.5 была ранее доказана в [19], [20] для случая, когда  $\mu$  есть поверхностная мера на гладкой периодической поверхности.

### § 5. Усреднение в некоторых моделях пористых сред

**5.1.** Сформулируем математическое представление о параллельных потоках, “мягко” или слабо связанных между собой.

Пусть  $\mu$  – периодическая борелевская мера в  $\mathbb{R}^N$ ,  $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$  – объединение периодических  $\mu$ -измеримых множеств, непересекающихся в том смысле, что

$$i) \exists E_i \in H_{\text{рег}}^1(\square, d\mu): \nabla E_i|_F = 0, E_i|_{F_j} = \delta_{ij} \text{ – символ Кронекера.} \quad (5.1)$$

Это условие, очевидно, выполнено, если, например,  $\overline{F_i} \cap \overline{F_j} = 0$  ( $i \neq j$ ).

Мягкую фазу определим как дополнение  $F_0 = \mathbb{R}^N \setminus F$ .

Зададим проницаемость такой среды матрицей

$$A_\varepsilon(x) = \begin{cases} A_i(\varepsilon^{-1}x), & \text{если } x \in F_i^\varepsilon, i = 1, \dots, k, \\ \delta(\varepsilon)A_0(\varepsilon^{-1}x), & \text{если } x \in F_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (5.2)$$

Здесь  $F_i^\varepsilon = \varepsilon F_i$  – гомотетические сжатия множеств  $F_i$ ,  $A_i(y)$  –  $\mu$ -измеримые симметрические матрицы, подчиненные условию ограниченности и эллиптичности (1.2),  $0 < \delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В физической литературе принято брать  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$ . Такая “автомодельная” проницаемость на мягкой фазе действительно приводит к наиболее интересным математическим проблемам. Случаи иного поведения (а их всего два:  $\varepsilon^{-2}\delta(\varepsilon) \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon^{-2}\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ ) исследуются проще. Мы сделаем это в §6.

Кроме условия i) мы будем предполагать, что

- ii) для меры  $\mu$  выполнено неравенство Пуанкаре (1.16);
- iii) меры  $\mu|_{F_i}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) эргодичны и невырождены.

Отметим, что мы требуем невырожденности мер  $\mu|_{F_i}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) только ради упрощения формулировки; требование эргодичности этих мер – существенно.

На мягкую фазу  $F_0$  не накладываются никаких условий, кроме  $\mu(F_0) > 0$ .

Рассмотрим задачу Дирихле (1.12), в которой матрица  $A_\varepsilon(x)$  имеет вид (5.2), а правые части  $f_\varepsilon$  ограничены в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ . Область  $\Omega$  распадается на части:

$$\begin{aligned} \Omega_i^\varepsilon &= \Omega \cap F_i^\varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, k) \text{ – жесткие фазы,} \\ \Omega_0^\varepsilon &= \Omega \cap F_0^\varepsilon \text{ – мягкая фаза.} \end{aligned}$$

Из интегрального тождества

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i^\varepsilon} A_i(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, d\mu_\varepsilon + \delta(\varepsilon) \int_{\Omega_0^\varepsilon} A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, d\mu_\varepsilon \\ + \lambda \int_{\Omega} u_\varepsilon \psi \, d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} f_\varepsilon \psi \, d\mu_\varepsilon, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega), \end{aligned} \quad (5.3)$$

непосредственно следует оценка

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0^\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, d\mu_\varepsilon + \delta(\varepsilon) \int_{\Omega_0^\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, d\mu_\varepsilon + \lambda \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 \, d\mu_\varepsilon \leq C < \infty. \quad (5.4)$$



Наша цель – перейти к пределу в интегральном тождестве и получить предельное уравнение. В первую очередь стоит описать само предельное уравнение.

Пределом решений  $u_\varepsilon(x)$  будет функция  $u(x, y)$  двух переменных  $x \in \Omega$  и  $y \in \square$ , принадлежащая классу  $V$ , который коротко описывается так:

$$\begin{aligned} u &\in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1), \\ \nabla_y u|_F &= 0, \quad u|_{F_j} = u_j(x) \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Иначе говоря, берутся такие функции  $u \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1)$ , для которых (хотя бы один) градиент  $\nabla_y u$  подчинен условию  $\nabla_y u = 0$  в  $L^2(\Omega \times F)$ . Из эргодичности мер  $\mu|_{F_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) следует, что  $u|_{F_i}$  зависит только от  $x \in \Omega$ ; дополнительно требуется  $u|_{F_i} = u_i(x) \in H_0^1(\Omega)$ . Рисунок 5 соответствует случаю двух жестких фаз. Здесь функция  $u$  определяется двумя жесткими компонентами  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  и мягкой компонентой  $u|_{F_0}$ , которая зависит от  $x \in \Omega$  и  $y \in F_0$ .

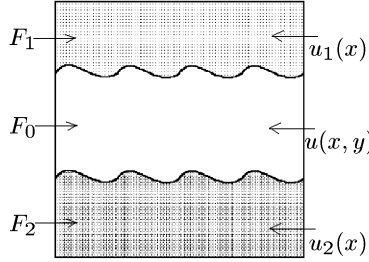


Рис. 5

Полезно записать функцию  $u \in V$  в виде

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^k u_i(x) E_i(y) + v(x, y),$$

где  $E_i$  – разделяющие функции. Из (3.1), (5.5) видим, что  $v|_F = \nabla_y v|_F = 0$ . Другими словами,  $v \in L^2(\Omega, X)$ , где мы положили

$$X = \{h \in H_{\text{per}}^1(\square, d\mu) : h|_F = \nabla h|_F = 0\}. \quad (5.6)$$

Пусть  $A_i^{\text{hom}}$  – усредненные матрицы, соответствующие матрицам  $A_i$  и мерам  $\mu|_{F_i}$ :

$$\xi A_i^{\text{hom}} \xi = \inf_{\psi \in C_{\text{per}}^\infty(\square)} \int_{\square \cap F_i} A_i(\xi + \nabla \psi) \cdot (\xi + \nabla \psi) d\mu, \quad A_i^{\text{hom}} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Тогда предельная задача формулируется так: для данного  $f \in L^2(\Omega \times \square)$  найти  $u \in V$  такую, что выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} A_i^{\text{hom}} \nabla u_i \cdot \nabla \varphi_i dx + \int_{\Omega} \int_{\square} A_0(y) \nabla_y u \cdot \nabla_y \varphi dx d\mu \\ + \lambda \int_{\Omega} \int_{\square} u \varphi dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \varphi dx d\mu, \quad \varphi \in V, \end{aligned} \quad (5.7)$$

в котором  $\nabla_y u$  – некоторый градиент  $u$ .

Существование и единственность решения как пары  $u, \nabla_y u$  получается совсем просто. Действительно, левая часть (5.6) задает скалярное произведение на множестве пар  $\tilde{V} = \{u, \nabla u : u \in V\}$  и  $\tilde{V}$  полно относительно соответствующей нормы. Поэтому достаточно сослаться на теорему Рисса.

В дальнейшем используются пробные функции  $\varphi \in V$  частного вида

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) E_i(y) + \alpha(x) h(y), \quad \alpha, \varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_0^\infty(\Omega), \quad h \in X. \quad (5.8)$$

Легко видеть, что линейная оболочка таких пробных функций (точнее, пар  $\varphi, \nabla_y \varphi$ ) плотна в  $\tilde{V}$  относительно упомянутой выше нормы. Поэтому само интегральное тождество (5.7) достаточно проверить только для этих пробных функций.

Сформулируем один из результатов работы.

**ТЕОРЕМА 5.1.** Пусть  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$  и правые части  $f_\varepsilon$  в (1.12) слабо (сильно) двухмасштабно сходятся к  $f \in L^2(\Omega \times \square)$ . Тогда последовательность решений  $u_\varepsilon$  слабо (сильно) двухмасштабно сходится к решению задачи (5.7).

Доказательство дано в §6, а сейчас мы обсудим само предельное уравнение.

**5.2.** С пространством  $X$  будут связаны краевые задачи, описывающие “мягкую” компоненту решения предельного уравнения, и нам потребуется неравенство

$$\langle h^2 \rangle \leq C \langle |\nabla h|^2 \rangle, \quad h \in X. \quad (5.9)$$

Действительно, допустив, что оно не имеет места, найдем

$$h_n \in X: \quad \langle h_n^2 \rangle = 1, \quad \langle |\nabla h_n|^2 \rangle \rightarrow 0.$$

Тогда из неравенства Пуанкаре (1.16) следует, что

$$\langle |h_n - c_n|^2 \rangle \rightarrow 0, \quad c_n = \langle h_n \rangle.$$

Поэтому последовательность  $h_n$  компактна в  $L^2(\square, d\mu)$  и ее предел  $h$  есть ненулевая константа. В то же время,  $h|_F = 0$ , что невозможно.

В качестве образца краевой задачи возьмем следующую:

$$w \in X, \quad -\operatorname{div}(A_0 \nabla w) = p - \operatorname{div} q \quad \text{в } F_0, \quad \text{где } p \in L^2(F_0, d\mu), \quad q \in L^2(F_0, d\mu)^N. \quad (5.10)$$

По определению функция  $w \in X$  есть решение, если

$$\langle A_0 \nabla w \cdot \nabla h \rangle = \langle p h \rangle + \langle q \cdot \nabla h \rangle \quad \forall h \in X.$$

С помощью оценки (5.9) нетрудно доказать, что решение существует и единственно вместе с градиентом.

Воспользуемся этим фактом и убедимся, что разделяющие функции  $E_j$  можно подчинить дополнительному условию  $\operatorname{div}(A_0 \nabla E_j) = 0$  в  $F_0$ , т.е.

$$\langle A_0 \nabla E_j \cdot \nabla h \rangle = 0 \quad \forall h \in X. \quad (5.11)$$

Достаточно вместо  $E_j$  взять  $E_j + v_j$ , где  $v_j$  – решение задачи  $v_j \in X$ ,  $\operatorname{div} A_0 \nabla v_j = -\operatorname{div}(A_0 \nabla E_j)$  в  $F_0$ . В свою очередь, из (5.11) следует равенство

$$\sum_{j=1}^k \nabla E_j = 0 \quad \mu\text{-п.в.} \quad (5.12)$$

Действительно,  $-1 + \sum_{j=1}^k E_j = v \in X$  и  $\operatorname{div} A_0 \nabla v = 0$  в  $F_0$ . Поэтому  $\nabla v \equiv 0$ .



Так как  $b_i - E_i \in X$ , то

$$c_{ij} = \langle A_0 \nabla E_i \cdot \nabla b_j \rangle = \langle A_0 \nabla E_i \cdot \nabla E_j \rangle = c_{ji} \quad (\text{симметрия}).$$

Заметим, что матрица  $\{c_{ij}\}$  – неотрицательно определенная и не зависит от  $\lambda$ . Эта “матрица связи” удовлетворяет условию  $\sum_i c_{ij} = 0$ , как это следует из (5.12). Для  $k = 2$  матрица связи имеет структуру

$$\begin{pmatrix} q & -q \\ -q & q \end{pmatrix}, \quad q = \langle A_0 \nabla E_1 \cdot \nabla E_1 \rangle.$$

Нетрудно проверить, что матрица  $\{\beta_{ij}\}$  – также симметрическая и положительно определенная. Нелинейный характер ее зависимости от  $\lambda$  указывает, что система (5.15) как таковая не является резольвентной. В этом нет ничего особенного, поскольку эта система – всего лишь некоторая “проекция” предельной задачи (5.7). Сама же предельная задача имеет резольвентный характер, и это – наиболее важное в данном случае обстоятельство.

## § 6. Доказательство сходимости

**6.1.** Будем изучать общий случай задания проницаемости на мягкой фазе:  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  произвольно, см. (5.2).

Пусть  $u_\varepsilon$  – решение исходной задачи (1.12). Без потери общности считаем, что имеет место слабая двухмасштабная сходимость

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y). \quad (6.1)$$

Нам нужно выяснить структуру предельной функции  $u$ .

**ЛЕММА 6.1.** *Найдутся функции  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x) \in H_0^1(\Omega)$  такие, что*

$$u(x, y) = u_1(x), \quad \text{если } y \in F_1, \quad (6.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon^1} A_1(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} A_1^{\text{hom}} \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (6.3)$$

*и аналогично для других жестких компонент.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\chi_1(y)$  – характеристическая функция множества  $F_1$ . Тогда по свойству (2.7) двухмасштабной сходимости

$$\chi_1(\varepsilon^{-1}x) u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \chi_1(y) u(x, y).$$

С другой стороны, сужения  $u_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon^1}, \nabla u_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon^1}$  удовлетворяют условиям теоремы 4.2 по отношению к мере  $\mu|_{F_1}$ . Поэтому  $\chi_1(\varepsilon^{-1}x) u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u_1(x) \in H_0^1(\Omega)$  и равенство (6.2) доказано. Далее, для пробной функции

$$\psi(x) = \psi_\varepsilon(x) = \varepsilon w(y) \varphi(x), \quad \text{где } y = \varepsilon^{-1}x, \quad w(y) \in C_{\text{per}}^\infty(\square), \quad \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega),$$

имеем

$$\nabla \psi_\varepsilon|_{\Omega_1^\varepsilon} = \varphi(x) \nabla_y w + \varepsilon w \nabla \varphi, \quad \nabla \psi_\varepsilon|_{\Omega_j^\varepsilon} = \varepsilon w \nabla \varphi \quad \text{при } j > 1, \quad |\nabla \psi_\varepsilon| \leq C \quad \text{на } \Omega_0^\varepsilon.$$

Подставим  $\psi = \psi_\varepsilon$  в интегральное тождество (5.3). Из оценок (5.4) легко заключаем, что все слагаемые, кроме, может быть, слагаемого

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} A_1(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla_y w(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) d\mu_\varepsilon,$$

сходятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Но тогда и указанное слагаемое сходится к нулю. По лемме 4.3 получаем искомую сходимость (6.3), и доказательство закончено.

Доказанная лемма описывает поведение решений  $u_\varepsilon$  на жестких компонентах. Поведение решений на мягкой компоненте уже *зависит от асимптотики*  $\delta(\varepsilon)$ .

**6.2. Случай**  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$ . Этот случай соответствует сформулированной ранее теореме 5.1, которую мы сейчас докажем. Здесь  $u_\varepsilon, \varepsilon \nabla u_\varepsilon$  ограничены в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  и по теореме 4.5  $u(x, y) \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1)$ ,  $\varepsilon \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_y u$ . Поскольку  $\varepsilon \chi_j(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \rightarrow 0$  в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), то  $\nabla_y u|_F = 0$ . Поэтому функция  $u$  принадлежит классу  $V$ , см. (5.5).

Положим  $\psi(x) = \psi_\varepsilon(x) = \varphi(x, \varepsilon^{-1}x)$ , где  $\varphi$  – пробная функция (5.8). Очевидно,

$$\nabla \psi_\varepsilon|_{\Omega_j^\varepsilon} = \nabla \varphi_j, \quad \varepsilon \nabla \psi_\varepsilon = \nabla_y \varphi + o(1) \quad \text{по норме } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon).$$

Подставим  $\psi = \psi_\varepsilon$  в интегральное тождество (5.3):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k \int_{\Omega_j^\varepsilon} A_j(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi_j(x) d\mu_\varepsilon \\ & + \delta(\varepsilon) \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_0^\varepsilon} A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot [\nabla_y \varphi(x, \varepsilon^{-1}x) + o(1)] d\mu_\varepsilon \\ & + \lambda \int_{\Omega} u_\varepsilon \varphi d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} f_\varepsilon \varphi d\mu_\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Перейдем здесь к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Предел первой суммы уже вычислен в (6.3). Далее, в нашем случае  $\delta(\varepsilon) \varepsilon^{-1} = \varepsilon$ , и поэтому предел второго слагаемого, вычисляемый по двухмасштабной сходимости

$$\varepsilon A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} A_0(y) \nabla_y u(x, y),$$

равен  $\int_{\square} \int_{\Omega} A_0 \nabla_y u \cdot \nabla_y \varphi dx d\mu$ . В результате получим, что  $u$  удовлетворяет тождеству (5.7) на пробных функциях из (5.8). Как уже отмечалось, этого достаточно для того, чтобы  $u$  было решением предельной задачи (5.7).

Нам остается проверить, что имеет место сильная сходимость  $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ , если только правые части также сходятся сильно. Но это достигается тем же рассуждением, что и в теореме 4.4. Теорема 5.1 доказана.



**ТЕОРЕМА 6.3.** Пусть  $\varepsilon^{-2}\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  и правые части  $f_\varepsilon$  слабо (сильно) двухмасштабно сходятся к  $f \in L^2(\Omega \times \square)$ . Тогда последовательность решений слабо (сильно) двухмасштабно сходится к решению системы (6.6).

### § 7. Аналог сильной резольвентной сходимости

**7.1.** Определим гильбертово пространство  $H$  как подпространство в  $L^2(\Omega \times \square)$ , состоящее из функций

$$f = f(x, y) = \begin{cases} f_i(x), & \text{если } y \in F_i \ (i = 1, \dots, k), \\ f_0(x, y), & \text{если } y \in F_0. \end{cases}$$

Скалярное произведение в  $H$  наследуется из  $L^2(\Omega \times \square)$ . Такой выбор пространства  $H$  объясняется очень просто:  $H$  – это замыкание множества  $V$  в  $L^2(\Omega \times \square)$ , см. (5.5). С предельной задачей (5.7) свяжем самосопряженный оператор  $\mathcal{A}$  так, что само это уравнение запишется как операторное уравнение (3.5) в  $H$ . Для этого через  $D(\mathcal{A})$  обозначим совокупность решений задачи (5.7), в которой  $f$  пробегает  $H$ . На  $D(\mathcal{A}) \subset V \subset H$  положим  $\mathcal{A}u = f - \lambda u$ . Как и в случае уравнения (3.2), нужно проверить, что  $D(\mathcal{A})$  плотно в  $H$ . Для доказательства плотности возьмем второй экземпляр задачи (5.7), в котором  $f$  заменено на  $g$ , а  $u$  заменено на  $v$ . Получаем обычное равенство

$$\int_{\Omega} \int_{\square} f v \, dx \, d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} g u \, dx \, d\mu.$$

Пусть  $f \in H$ ,  $f \perp D(\mathcal{A})$  в  $H$ . Тогда  $u = 0$  (поскольку можно взять  $g = u$ ) и интегральное тождество (5.7) принимает вид

$$\int_{\Omega} \int_{\square} A_0 \nabla_y u \cdot \nabla_y \varphi \, dx \, d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \varphi \, dx \, d\mu \quad \forall \varphi \in V.$$

Полагая здесь  $\varphi = u$ , получаем  $\nabla_y u = 0$ . Тогда и  $f = 0$  ввиду плотности  $V$  в  $H$ . Тем самым доказана самосопряженность оператора  $\mathcal{A}$ .

Итак, имеем допредельные самосопряженные операторы  $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla)$ , заданные в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ , и предельный самосопряженный оператор  $\mathcal{A}$ , заданный в  $H$ .

Из теоремы 5.1 получаем следующий результат.

*Имеет место сильная резольвентная сходимость, именно:*

$$\text{если } f_\varepsilon \xrightarrow{2} f \in H, \text{ то } (\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1} f_\varepsilon \xrightarrow{2} (\mathcal{A} + \lambda I)^{-1} f. \quad (7.1)$$

Указанная сходимость обладает всеми достоинствами классической сильной резольвентной сходимости: она влечет сильную двухмасштабную сходимость соответствующих спектральных проекторов и полугрупп (аналог теоремы Троттера–Като), см. [21]. Эти факты могут быть полезны в теории пористых сред. Дело в том, что исходным объектом в этой теории служит эволюционное уравнение

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}(A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon), \quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_\varepsilon|_{t=0} = f_\varepsilon. \quad (7.2)$$

Кроме того, важнейшим считается вопрос о характере спектра допредельного оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  при малых  $\varepsilon$ . Сильная сходимость спектральных проекторов позволяет делать на этот счет некоторые заключения, если, конечно, известен спектр предельного оператора. Ниже мы рассматриваем эти вопросы подробнее.





Выбирая здесь пробные функции (5.8) частного вида  $\varphi = \alpha(x)h(y)$ , а затем  $\varphi = \varphi_1(x)$ , получаем два равенства

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A_0(y)\nabla_y v) = f(x, y) \text{ в } F_0, \\ -\operatorname{div}(A_1^{\text{hom}}\nabla u_1) = \int_{\square} f(x, y) d\mu(y) = \langle f \rangle \text{ в } \Omega, \end{cases} \quad (8.1)$$

причем в первом из них  $x$  играет роль параметра.

Введем два самосопряженных оператора.

i)  $\mathcal{A}_0 = -\operatorname{div}_y(A_0(y)\nabla_y)$  определен в  $L^2(F_0, d\mu)$  по следующему правилу. Мы знаем (см. (5.10)), что задача

$$w \in X, \quad -\operatorname{div}_y(A_0(y)\nabla_y w) = p$$

имеет решение для любого  $p \in L^2(F_0, d\mu)$ . Оператор  $\mathcal{A}_0$  задается на множестве решений этого уравнения и оказывается положительно определенным в силу оценки (5.9). Кроме того, мы предполагаем, что обратный к нему вполне непрерывен. В модельных примерах это имеет место.

Тем же символом  $\mathcal{A}_0$  обозначается и соответствующий оператор в  $L^2(\Omega \times F_0)$ ; очевидно, спектр остается тем же, а собственные функции умножаются на произвольную функцию  $a(x) \in L^2(\Omega)$ .

Особенно просто выглядит оператор  $\mathcal{A}_0$  в том случае, когда  $d\mu = dx$  — мера Лебега, а мягкая фаза  $F_0$  дисперсна, например является периодической системой шаров,  $\square \cap F_0 = B$  — шар. Тогда пространство  $X$  (см. определение (5.6)) совпадает с множеством функций из  $H_0^1(B)$ , продолженных нулем на тор периодичности  $\square$ . Также с точностью до очевидного продолжения  $\mathcal{A}_0$  — это самосопряженный оператор  $-\operatorname{div}_y A_0(y)\nabla_y$  в  $L^2(B)$ , отвечающий задаче Дирихле в шаре  $B$ .

ii)  $\mathcal{A}_1 = -\operatorname{div}(A_1^{\text{hom}}\nabla)$  — это обычный усредненный оператор в  $L^2(\Omega)$ , отвечающий краевой задаче Дирихле.

Оператор  $\mathcal{A}_0$  назовем *блоховским*, а оператор  $\mathcal{A}_1$  — *пространственным*.

Теперь рассмотрим задачу на “спектре”:

$$\mathcal{A}u = su + f, \quad s \geq 0. \quad (8.2)$$

Согласно (8.1) имеем

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 v = s(u_1 + v) + f, \\ \mathcal{A}_1 u_1 = s\langle u_1 + v \rangle + \langle f \rangle. \end{cases}$$

Введем (пока формально) решения вспомогательных уравнений

$$\mathcal{A}_0 b = sb + 1, \quad \mathcal{A}_0 b_0 = sb_0 + f. \quad (8.3)$$

Тогда  $v = su_1 b + b_0$ ,

$$\mathcal{A}_1 u_1 = \beta(s)u_1 + \langle sb_0 + f \rangle, \quad (8.4)$$

где  $\beta(s) = s(1 + s\langle b \rangle)$ . Задачи (8.3), (8.4) разрешимы, если  $s$  не является точкой спектра оператора  $\mathcal{A}_0$ , а  $\beta(s)$  — точкой спектра оператора  $\mathcal{A}_1$ . Для таких  $s$  уравнение (8.2) имеет решение при любом  $f \in H$ . Итак,

если  $s \notin \operatorname{Sp} \mathcal{A}_0$  и  $\beta(s) \notin \operatorname{Sp} \mathcal{A}_1$ , то  $s \notin \operatorname{Sp} \mathcal{A}$ .

Изучим подробней спектр оператора  $\mathcal{A}$ . Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\mathcal{A}u = su \text{ или } \begin{cases} \mathcal{A}_0 v = s(u_1 + v), \\ \mathcal{A}_1 u_1 = s(u_1 + v). \end{cases} \quad (8.5)$$

Замечаем, что если  $\mathcal{A}_0 v = sv$  и  $\langle v \rangle = 0$ , то оба уравнения (8.5) выполняются при  $u_1 = 0$ . Другими словами, в этом случае  $u = v(y)$  будет собственной функцией оператора  $\mathcal{A}$ . Собственной функцией будет также  $a(x)v(y)$ ,  $a(x) \in L^2(\Omega)$ . Это тривиальные или *чисто блоховские* собственные функции.

По условию спектр оператора  $\mathcal{A}_0$  состоит из конечнократных собственных значений, образующих сходящуюся к бесконечности последовательность положительных чисел. Разобьем его на две непересекающиеся части

$$\text{Sp } \mathcal{A}_0 = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\},$$

отнеся ко второй части собственные значения, у которых все соответствующие собственные функции имеют нулевое среднее.

Напишем разложение

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad c_n = \langle \varphi_n \rangle,$$

где  $\varphi_n$  — нормированные в  $L^2(F_0, d\mu)$  собственные функции оператора  $\mathcal{A}_0$ . Считаем, что в этом разложении коэффициенты  $c_n \neq 0$ . Другими словами, собственные функции с нулевым средним здесь не участвуют. Тогда из  $\mathcal{A}_0 b = sb + 1$  находим

$$b = b(y, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \varphi_n(y)}{\omega_n - s}, \quad \beta(s) = s(1 + s\langle b \rangle) = s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^2 c_n^2}{\omega_n - s}.$$

Первое из уравнений (8.5) выполняется, если положить  $v(x, y) = s u_1(x) b(y, s)$ . Поскольку  $s\langle u_1 + v \rangle = \beta(s) u_1(x)$ , то второе уравнение удовлетворяется, если  $k = \beta(s)$  есть точка спектра оператора  $\mathcal{A}_1$ , а  $u_1(x)$  — соответствующая собственная функция.

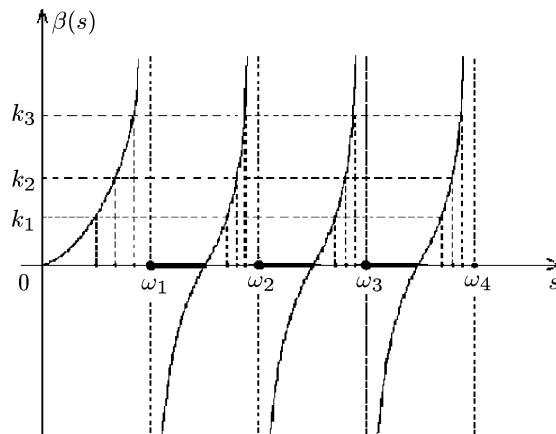


Рис. 6

Функция  $\beta(s)$  строго возрастает на промежутках между точками  $0, \omega_1, \omega_2, \dots$ . Из рис. 6 видно, что решения уравнения  $\beta(s) = k \in \text{Sp } \mathcal{A}_1$  образуют бесконечные серии, имеющие своими пределами точки  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . В результате получим:

*если  $k = \beta(s) \in \text{Sp } \mathcal{A}_1$ ,  $u_1(x)$  – собственная функция оператора  $\mathcal{A}_1$  с собственным значением  $k$ , то  $u_1(x)(1 + sb(y))$  – собственная функция оператора  $\mathcal{A}$  с собственным значением  $s$ .* (8.6)

Найденные “пространственные” собственные значения, конечно, могут попасть в множество  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ , и тогда им будут соответствовать еще и чисто блоховские собственные функции. Покажем, что *никаких других собственных функций (кроме указанных в (8.6) и возможных блоховских) нет*. Для этого достаточно проверить, что уравнение (8.2) разрешимо, если  $f$  ортогонально в  $L^2(\Omega \times \square)$  собственным функциям из (8.6) и соответствующим блоховским, т.е.

$$\int_{\Omega} \int_{\square} f(x, y) u_1(x) (1 + sb(y)) dx d\mu = 0, \quad (8.7)$$

$$\int_{\Omega} \int_{\square} f(x, y) a(x) \varphi(y) dx d\mu = 0, \text{ как только } \mathcal{A}_0 \varphi = s\varphi, \langle \varphi \rangle = 0, a \in L^2(\Omega). \quad (8.8)$$

Первое из уравнений (8.3), очевидно, разрешимо, поскольку  $s \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ . Разрешимость второго следует из (8.8). Для разрешимости уравнения (8.4) нужно проверить условие ортогональности

$$\langle sb_0 + f \rangle \perp u_1 \text{ в } L^2(\Omega). \quad (8.9)$$

Но из уравнений (8.3) имеем равенство  $\langle b_0 \rangle = \langle fb \rangle$ , откуда

$$\int_{\Omega} \int_{\square} b_0 u_1 dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} b f u_1 dx d\mu$$

и поэтому (8.9) следует из (8.7).

Наконец, выясним, когда точка  $s \in \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  будет собственным значением оператора  $\mathcal{A}$ . По определению множества  $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  имеем  $\mathcal{A}_0 \varphi = s\varphi, \langle \varphi \rangle \neq 0$ . Пусть  $u = u_1(x) + v(x, y)$  – собственная функция оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда из (8.5) следует ортогональность

$$\mathcal{A}_0 v - sv = su_1 \perp \varphi \text{ в } L^2(F_0, d\mu).$$

Отсюда  $u_1 \equiv 0$  и поэтому (см. второе уравнение (8.5))  $\langle v \rangle = 0$ . Видим, что собственная функция – чисто блоховская. При этом  $s$  должно быть кратным собственным значением оператора  $\mathcal{A}_0$ .

Итак, оператор  $\mathcal{A}$  имеет чисто точечный спектр в том смысле, что его *собственные функции образуют полную в  $H$  систему*.

При этом спектр оператора  $\mathcal{A}$  устроен следующим образом. Он состоит из спектра оператора  $\mathcal{A}_0$ , который разбивается на две непересекающиеся части  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ ,  $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ , и бесконечной серии конечнократных собственных значений, сходящихся слева к точкам  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . Точки  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  – это такие собственные значения  $\mathcal{A}_0$ , у которых все соответствующие собственные функции

имеют нулевое среднее. Они являются бесконечнократными собственными значениями самого оператора  $\mathcal{A}$  и составляют тривиальную или число блоховскую часть  $\text{Sp } \mathcal{A}$ .

Точка из  $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  будет собственным значением оператора  $\mathcal{A}$ , причем бесконечнократным, только в том случае, когда она есть кратное собственное значение оператора  $\mathcal{A}_0$ .

Самое примечательное в геометрической структуре спектра оператора  $\mathcal{A}$  – это наличие особого рода “лакун”. На рис. 6 жирно отмечена бесконечная система интервалов, на которых функция  $\beta(s)$  отрицательна. Эти интервалы могут содержать точки из  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ , но все остальные точки  $\text{Sp } \mathcal{A}$  обязаны принадлежать дополнительным отрезкам, на которых  $\beta \geq 0$ . Это геометрическое расположение имеет место независимо от выбора области  $\Omega$ , поскольку функция  $\beta(s)$  строится только по блоховскому оператору  $\mathcal{A}_0$ . В частности, если вместо ограниченной области  $\Omega$  взять все пространство  $\mathbb{R}^N$ , то спектр оператора  $\mathcal{A}_1$  заполнит положительную полуось, а нетривиальный спектр  $\mathcal{A}$  – все отрезки, на которых  $\beta \geq 0$ , т.е. станет бесконечнозонным.

**8.2.** Теперь можно вернуться к вопросу о сходимости спектра при усреднении.

Рассмотрим случай, когда  $d\mu = dx$  – мера Лебега, а мягкая фаза  $F_0$  дисперсна, например  $F_0$  – периодическая система шаров,  $\square \cap F_0 = B$  – шар. Кроме того, для некоторого упрощения допустим, что мягкая фаза  $\Omega_0^\varepsilon$  состоит только из шариков – компонент множества  $F_0^\varepsilon$ , целиком содержащихся в  $\Omega$  (приграничные шарики отнесем к жесткой фазе  $\Omega_1^\varepsilon$ ).

В этих условиях мы докажем следующую теорему о сходимости спектра.

**ТЕОРЕМА 8.1.** *Спектр оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  сходится по Хаусдорфу к спектру оператора  $\mathcal{A}$ . Подробнее это означает:*

- 1) для любого  $s \in \text{Sp } \mathcal{A}$  найдется последовательность  $s_\varepsilon \in \text{Sp } \mathcal{A}_\varepsilon$  такая, что  $s_\varepsilon \rightarrow s$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- 2) все конечные предельные точки последовательности  $s_\varepsilon \in \text{Sp } \mathcal{A}_\varepsilon$  принадлежат  $\text{Sp } \mathcal{A}$ .

Из сходимости по Хаусдорфу ясно, что спектр оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  содержит лакуны (близкие к лакунам в спектре оператора  $\mathcal{A}$ ), причем число этих лакун растет до бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Теорема 8.1 остается верной, если ограниченную область  $\Omega$  заменить на  $\mathbb{R}^N$  (доказательство более громоздкое и здесь не приводится). Следовательно, заключение о существовании лакун в спектре справедливо и для самосопряженного оператора  $-\text{div}(A_\varepsilon \nabla)$  в  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .

Отметим, что свойство 1) сходимости по Хаусдорфу всегда обеспечивается сильной резольвентной сходимостью, в то время как более тонкое свойство 2) может отсутствовать. Дело здесь в следующем. Если  $u_\varepsilon$  – нормированные в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  собственные функции,  $\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon = s_\varepsilon u_\varepsilon$ , причем  $s_\varepsilon \rightarrow s$ ,  $u_\varepsilon \xrightarrow{2} u$ , то всегда  $\mathcal{A}u = su$ . Однако предельная функция  $u$  может оказаться нулевой, и тогда точка  $s$  не обязана принадлежать  $\text{Sp } \mathcal{A}$ .

Сейчас установим одно свойство компактности, из которого непосредственно следует свойство 2).

ЛЕММА 8.2. Пусть

$$\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon = s_\varepsilon u_\varepsilon, \quad \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx = 1.$$

Если  $s_\varepsilon \rightarrow s \notin \text{Sp } \mathcal{A}_0$ , то последовательность  $u_\varepsilon$  компактна в смысле сильной двухмасштабной сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad -\text{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) &= s_\varepsilon u_\varepsilon, \\ \int_{\Omega_1^\varepsilon} A_1(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega_0^\varepsilon} A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx &= s_\varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx = s_\varepsilon. \end{aligned}$$

Продолжим  $u_\varepsilon|_{\Omega_1^\varepsilon}$  на всю область  $\Omega$  с условием

$$\tilde{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 dx \leq C < \infty. \quad (8.10)$$

Хорошо известно, что такое продолжение возможно [9], [10; гл. III]. Дополнительно всегда можно обеспечить соотношение

$$-\text{div } A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla \tilde{u}_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega_0^\varepsilon.$$

Тогда для разности  $z_\varepsilon = u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon$  получаем

$$z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_0^\varepsilon), \quad \varepsilon^2 \text{div } A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla z_\varepsilon + s_\varepsilon z_\varepsilon = s_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon \text{ в } \Omega_0^\varepsilon. \quad (8.11)$$

Из оценки (8.10) видно, что последовательность  $\tilde{u}_\varepsilon$  компактна в  $L^2(\Omega)$ ,

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightarrow \tilde{u} \text{ в } L^2(\Omega), \quad (8.12)$$

и требуется проверить, что последовательность  $z_\varepsilon$  компактна в смысле сильной двухмасштабной сходимости.

Ниже мы имеем дело с последовательностями функций, заданных на  $\Omega_0^\varepsilon$ ; продолжаем эти функции нулем на  $\Omega$  и рассматриваем вопросы компактности. Например, правая часть (8.11) имеет вид  $s_\varepsilon \chi_0^\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon$ , где  $\chi_0^\varepsilon$  — характеристическая функция множества  $F_0^\varepsilon$ . Из (8.12) видно, что

$$\chi_0^\varepsilon(x) \tilde{u}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \tilde{u}(x) \chi_0(y). \quad (8.13)$$

Рассмотрим более общее уравнение

$$v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_0^\varepsilon), \quad \varepsilon^2 \text{div } A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla v_\varepsilon + s_\varepsilon v_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad f_\varepsilon \in L^2(\Omega_0^\varepsilon). \quad (8.14)$$

Нам потребуется следующее ключевое свойство:

$$\begin{aligned} \text{если } f_\varepsilon \xrightarrow{2} f \in H, \text{ то} \\ v_\varepsilon \xrightarrow{2} v = v(x, y), \quad v \in L^2(\Omega, X), \quad -\mathcal{A}_0 v + s v = f. \end{aligned} \quad (8.15)$$

(Напомним, что в нашем случае пространство  $X$  отождествляется с  $H_0^1(B)$ ,  $B = \square \cap F_0$  – шар.)

Легко видеть, что из свойства (8.15) (которое будет доказано ниже) следует компактность  $z_\varepsilon$ . Действительно, согласно (8.15), (8.13) имеем

$$z_\varepsilon \stackrel{2}{\rightharpoonup} z, \quad -\mathcal{A}_0 z + s z = s \tilde{u}.$$

Умножая уравнение (8.11) скалярно на  $v_\varepsilon$ , а уравнение (8.14) – на  $z_\varepsilon$ , получаем

$$\int_{\Omega} z_\varepsilon f_\varepsilon dx = s_\varepsilon \int_{\Omega} v_\varepsilon \chi_0^\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon dx.$$

В силу (8.15) и сильной сходимости (8.13)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} z_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x) dx = s \int_{\Omega} \int_{F_0} v(x, y) \tilde{u}(x) dx dy = \int_{\Omega} \int_{F_0} z(x, y) f(x, y) dx dy$$

(на последнем шаге мы использовали предельные уравнения для  $v$  и  $z$ ). В частности, взяв  $f_\varepsilon = z_\varepsilon$ , получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} z_\varepsilon^2(x) dx = \int_{\Omega} \int_{F_0} z^2(x, y) dx dy,$$

и искомая двухмасштабная компактность  $z_\varepsilon$  установлена.

Итак, нам остается доказать свойство сходимости (8.15).

Рассмотрим самосопряженный в  $L^2(\Omega_0^\varepsilon)$  оператор  $T_\varepsilon = -\varepsilon^2 \operatorname{div}(\mathcal{A}_0(\varepsilon^{-1}x)\nabla)$ , отвечающий задаче Дирихле в  $\Omega_0^\varepsilon$ . Так как  $\Omega_0^\varepsilon$  состоит из отдельных шаров, то оператор  $T_\varepsilon$  распадается и его спектр совпадает со спектром оператора  $\mathcal{A}_0$ :  $\operatorname{Sp} T_\varepsilon = \operatorname{Sp} \mathcal{A}_0$ . В нашем случае  $\mathcal{A}_0 = -\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y$  – самосопряженный оператор, отвечающий задаче Дирихле в шаре  $B = \square \cap F_0$ . Поскольку  $s_\varepsilon$  отделена от спектра  $T_\varepsilon$ , то

$$\|(T_\varepsilon - s_\varepsilon)^{-1}\| \leq \frac{1}{\rho(s_\varepsilon, \operatorname{Sp} \mathcal{A}_0)} \leq C < \infty. \quad (8.16)$$

Отсюда для решения  $v_\varepsilon$  уравнения (8.14) получаем оценку

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} v_\varepsilon^2 dx \leq C_1 < \infty. \quad (8.17)$$

Без потери общности считаем, что имеет место двухмасштабная сходимость

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v, \quad \varepsilon \nabla v_\varepsilon \stackrel{2}{\rightharpoonup} \nabla_y v, \quad v \in L^2(\Omega, H_0^1(B)).$$

В интегральном тождестве

$$-\int_{\Omega} \varepsilon^2 A_0(\varepsilon^{-1}x) \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \psi_\varepsilon dx + s_\varepsilon \int_{\Omega} v_\varepsilon \psi_\varepsilon dx = \int_{\Omega} f_\varepsilon \psi_\varepsilon dx$$

возьмем

$$\psi_\varepsilon(x) = \varphi(x) b(y), \quad y = \varepsilon^{-1}x, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad b(y) \in C_0^\infty(B)$$

(функция  $b(y)$  рассматривается как периодическая). Предельный переход дает

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \int_{\square} A_0(y) \nabla_y v \cdot \nabla_y b(y) \varphi(x) dx dy \\ & + s \int_{\Omega} \int_{\square} v(x, y) \varphi(x) b(y) dx dy = \int_{\Omega} \int_{\square} f(x, y) \varphi(x) b(y) dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда  $\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y v + s v = f$ , что и требовалось.

### §9. Приложение: о тангенциальном градиенте

**9.1.** Градиент функции из соболевского пространства  $H_{\text{per}}^1 = H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$  определен неоднозначно. Множество градиентов данной функции имеет структуру  $\nabla u + g$ , где  $\nabla u$  – некоторый градиент, а  $g$  – произвольный градиент нуля,  $g \in \Gamma(0)$ .

По определению  $g \in L^2(\square, d\mu)^N = (L^2)^N$  есть градиент нуля, если выполнено соотношение (3.1). Из него следует, что  $\Gamma = \Gamma(0)$  – подпространство векторного пространства  $(L^2)^N$ . Установим некоторые свойства этого подпространства.

i) Если  $g \in \Gamma$ ,  $a \in L^\infty$ , то  $ag \in \Gamma$ .

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть случай  $a \in C_{\text{per}}^\infty$ . Тогда из (3.1) имеем

$$a\varphi_n \xrightarrow{L^2} 0, \quad \nabla(a\varphi_n) = a\nabla\varphi_n + \nabla a\varphi_n \xrightarrow{(L^2)^N} ag \implies ag \in \Gamma.$$

ii) Пусть  $Q$  – ортогональный проектор из  $L^2(\square, d\mu)^N$  на  $\Gamma$ . Тогда

$$Q(ag) = aQg \quad \forall g \in L^2(\square, d\mu)^N, \quad a \in L^\infty(\square, d\mu).$$

В самом деле, положив  $\bar{g} = Qg$ , имеем

$$\bar{g} \in \Gamma, \quad g - \bar{g} \perp \Gamma.$$

Но тогда по свойству i)

$$a\bar{g} \in \Gamma, \quad \langle a(g - \bar{g}) \cdot h \rangle = 0 \quad \forall h \in \Gamma,$$

что и требуется.

iii) Множество  $\Gamma \cap L^\infty(\square, d\mu)^N$  плотно в  $\Gamma$ .

Действительно, если  $a_n$  – характеристическая функция множества  $\{x \in \square, |g| \leq n\}$ , то  $a_n g \in \Gamma$  и  $a_n g \rightarrow g$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**ЛЕММА 9.1.** *Существует  $\mu$ -измеримое периодическое подпространство  $D(x) \subset \mathbb{R}^N$  такое, что*

$$\Gamma = \Gamma(0) = \{g \in L^2(\square, d\mu)^N : g(x) \in D(x)\}. \quad (9.1)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $e^1, \dots, e^N$  – естественный базис в  $\mathbb{R}^N$ . Положим

$$\xi^i = Qe^i$$

и определим  $L(x)$  как линейную оболочку векторов  $\xi^1(x), \dots, \xi^N(x)$ .

Обозначим через  $B$  подпространство в  $L^2(\square, d\mu)^N$ , определенное правой частью (9.1). Требуется проверить, что  $\Gamma = B$ .

Пусть  $g \in \Gamma \cap (L^\infty)^N$ . Тогда по свойству ii)

$$g = g_1 e^1 + \dots + g_N e^N = Qg = g_1 \xi^1 + \dots + g_N \xi^N \in B.$$

В силу свойства iii) и замкнутости  $B$  получаем  $\Gamma \subseteq B$ . Проверим теперь, что  $B \subseteq \Gamma$ . Так как  $\xi^1, \dots, \xi^N \in \Gamma$ , то по свойствам i), ii)

$$a(x) \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi^i \in \Gamma, \quad a \in L^\infty, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^1.$$

Покажем, что такие элементы плотны в  $B$ . Пусть

$$b \in B, \quad \left\langle a(x)b(x) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi^i \right) \right\rangle = 0.$$

Поскольку  $a$  произвольно, то для  $\mu$ -п.в.  $x$

$$b(x) \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi^i(x) = 0,$$

что дает  $b(x) = 0$ . Лемма доказана.

Теперь мы можем уточнить предложение 3.1. Пусть  $T(x) = (D(x))^\perp$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2.** *Всякая функция из соболевского пространства  $H_{\text{per}}^1$  имеет единственный градиент, удовлетворяющий условию*

$$A(x)\nabla u(x) \in T(x). \quad (9.2)$$

Действительно, достаточно для  $\mu$ -п.в.  $x \in \square$  решить задачу

$$c(x) \in D(x), \quad A(x)[\nabla u(x) + c(x)] \perp D(x),$$

где  $\nabla u(x)$  – какой-то градиент  $u$ . Тогда  $\nabla u + c$  будет удовлетворять условию (9.2).

В частности, существует единственный тангенциальный градиент, т.е. удовлетворяющий условию  $\nabla u \in T(x)$ . Очевидно также, что если  $\nabla u(x)$  – какой-то градиент  $u$ , а  $P(x)$  – ортогональный проектор  $\mathbb{R}^N \rightarrow T(x)$ , то  $P(x)\nabla u(x)$  будет тангенциальным градиентом.

Резюмируем полученные результаты. Справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 9.3.** *Существует  $\mu$ -измеримое периодическое подпространство  $T(x)$  такое, что множество градиентов любой функции из  $H_{\text{per}}^1$  имеет вид  $\nabla u(x) + g(x)$ , где  $\nabla u(x) \in T(x)$ , а  $g(x)$  – произвольный вектор из  $L^2(\square, d\mu)^N$  такой, что  $g(x) \in T^\perp(x)$ .*

Подпространство  $T(x)$  называется *тангенциальным* в точке  $x$ , а  $\nabla u$  – тангенциальным градиентом.



**9.2.** В некоторых вопросах предпочтительно иметь дело исключительно с тангенциальным градиентом. Но вспомним, что интегральному тождеству (3.3) удовлетворяет функция  $u(x)$  вместе со своим градиентом, подчиненным условию (3.4), а не тангенциальным. В связи с этим возникает задача так изменить исходную матрицу  $A(x)$ , чтобы новому уравнению с матрицей  $\widehat{A}(x)$  удовлетворяла та же функция  $u(x)$  вместе со своим тангенциальным градиентом. Эта процедура носит название *релаксации*; смысл названия будет ясен из дальнейшего.

Благодаря теореме 9.3 задача нахождения матрицы  $\widehat{A} = \widehat{A}(x)$  носит *поточечный характер*. Положим

$$\widehat{A}(x)\xi \cdot \xi = \min_{\eta \in D(x)} A(x)(\xi + \eta) \cdot (\xi + \eta).$$

Симметрическая матрица  $\widehat{A}$  равна нулю на  $D$  и имеет  $T$  в качестве области значений, в частности  $\widehat{A}\xi = \widehat{A}P\xi$ . Кроме того,  $A\xi = \widehat{A}\xi$ , если  $A\xi \in T$ . Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} A(\xi + \eta) \cdot (\xi + \eta) &= A\xi \cdot \xi + A\eta \cdot \eta, \\ \widehat{A}\xi \cdot \xi &= A\xi \cdot \xi \implies A\xi = \widehat{A}\xi \quad (\text{поскольку } A \geq \widehat{A}). \end{aligned}$$

Возвратимся теперь к тождеству (3.3) и вспомним, что  $A\nabla u \in T$ . В результате

$$A\nabla u \cdot \nabla \varphi = \widehat{A}\nabla u \cdot \nabla \varphi = \widehat{A}P\nabla u \cdot \nabla \varphi,$$

и поскольку  $P\nabla u$  — тангенциальный градиент, задача релаксации решена.

Вектор-функцию  $b(x)$  будем называть тангенциальной, если  $b(x) \in T(x)$ . Из определения матрицы  $\widehat{A}$  видно, что вектор  $\widehat{A}(x)\xi$  тангенциален. Все собственные векторы матрицы  $\widehat{A}$  лежат в тангенциальном подпространстве.

ПРИМЕР. Пусть  $N = 2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0,$$

$T$  — ось  $x_1$ . Тогда

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Термин “релаксация” связан со следующим обстоятельством. Функционал

$$\Phi(u) = \langle A(x)\nabla u \cdot \nabla u \rangle \quad \text{на } C_{\text{reg}}^\infty$$

не является полунепрерывным снизу относительно  $L^2$ -сходимости. Его релаксация

$$\widehat{\Phi}(u) = \inf_{u_\varepsilon \rightarrow u} \Phi(u_\varepsilon) = \min_{\nabla u \in \Gamma(u)} \langle A(x)\nabla u \cdot \nabla u \rangle = \langle \widehat{A}\nabla u \cdot \nabla u \rangle.$$

Последний интеграл справа уже не зависит от выбора градиента, и можно взять в нем тангенциальный градиент.

Лемма 9.1 доказана совместно с профессором Dal Maso, которому автор выражает благодарность за обсуждение вопросов, касающихся градиента. По поводу проблемы релаксации см. также [25].

**9.3.** Сделаем несколько замечаний относительно потенциальных и соленоидальных векторов. Очевидно, что любой градиент нуля есть потенциальный вектор. Напомним (см. (3.7)), что  $v$  потенциален,  $v \in V_{\text{pot}}$ , если

$$\exists \varphi_n \in C_{\text{per}}^\infty: \nabla \varphi_n \rightarrow v \text{ в } (L^2)^N.$$

Разлагая  $\nabla \varphi_n$  в ортогональную сумму  $\nabla \varphi_n = P\nabla \varphi_n + a_n$ ,  $a_n \in \Gamma$ , приходим к очевидному представлению

$$V_{\text{pot}} = \widehat{V}_{\text{pot}} \oplus \Gamma,$$

где  $\widehat{V}_{\text{pot}}$  есть замыкание в  $(L^2)^N$  множества  $\{P\nabla \varphi, \varphi \in C_{\text{per}}^\infty\}$ . Элементы из  $\widehat{V}_{\text{pot}}$  — это тангенциальные потенциальные векторы.

Любопытно, что соленоидальные векторы автоматически тангенциальны. Действительно, пусть вектор  $b$  соленоидален, т.е. выполнено условие ортогональности (3.8). Выбрав в (3.8)  $\varphi = \varphi_n$  — последовательность из (3.1), получим  $b \perp \Gamma(0)$ . Отсюда следует наше утверждение.

Отмеченное свойство позволяет описать соленоидальные векторы в случае периодического графа на плоскости. Соленоидальный вектор на каждом ребре направлен вдоль ребра и постоянен на этом ребре (последнее легко следует из (3.8)). Рассмотрим вершину графа. Пусть в ней сходится  $s$  ребер. Возьмем единичные векторы  $b^1, b^2, \dots, b^s$ , идущие вдоль ребер к вершине. Тогда на ребрах вектор  $b$  равен  $\lambda_1 b^1, \lambda_2 b^2, \dots, \lambda_s b^s$ , причем должно быть выполнено соотношение

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = 0,$$

легко вытекающее из (3.8). Такие соотношения нужно составить для каждой вершины, приняв во внимание условие периодичности. Дело сведется к решению некоторой однородной системы линейных уравнений.

#### Список литературы

1. *De Giorgi E., Spagnolo S.* Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine // Boll. Unione Mat. Ital. 1973. №8. P. 391–411.
2. *Бажвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. №3. С. 516–519.
3. *Бажвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
4. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623.
5. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.
6. *Жиков В. В.* О весовых соболевских пространствах // Матем. сб. 1998. Т. 189. №8. С. 27–58.
7. *Жиков В. В.* Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сб. 1996. Т. 187. №8. С. 3–40.
8. *Жиков В. В.* К технике усреднения вариационных задач // Функци. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. №1. С. 14–29.
9. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
10. *Zhikov V. V., Kozlov S. M., Olejnik O. A.* Homogenization of differential operators and integral functionals. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

11. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
12. Arbogast T., Douglas J., Hornung U. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 4. P. 823–836.
13. Hornung U., Jäger W. Diffusion, convection, adsorption, and reaction of chemicals in porous media // J. Differential Equations. 1991. V. 92. № 2. P. 199–225.
14. Bourgeat A., Mikelić A., Pyatnitski A. Modèle de double porosité aléatoire // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1998. V. 327. P. 99–104.
15. Hornung U. (ed.) Homogenization and porous media. New York: Springer-Verlag, 1997.
16. Сандраков Г. В. Осреднение нестационарных уравнений с контрастными коэффициентами // Докл. РАН. 1997. Т. 335. № 5. С. 605–608.
17. Сандраков Г. В. Осреднение нестационарных задач теории сильно неоднородных упругих сред // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 3. С. 308–311.
18. Экланд Н., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
19. Allaire G., Damlamian A., Hornung U. Two-scale convergence on periodic surfaces and applications // Mathematical modelling of flow through porous media / ed. A. Bourgeat, C. Carasso, S. Luckhaus, A. Mikelić. Singapore: World Scientific, 1995. P. 15–25.
20. Neuss-Radu M. Some extensions of two-scale convergence // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1996. V. 322. P. 899–904.
21. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
22. Khruslov E. Ya. Homogenized models of strongly inhomogeneous media // Proceedings of the International congress of mathematicians, Zurich, Switzerland, 1994. Basel: Birkhäuser, 1995.
23. Хруслов Е. Я. Усреднение модели сильно неоднородных сред с памятью // УМН. 1990. Т. 45. № 1. С. 197–199.
24. Khruslov E. Homogenized models of composite media // Composite media and homogenization theory / ed. G. Dal Maso, G. F. Dell'Antonio. Basel: Birkhäuser, 1991. P. 159–182.
25. Bouchitté G., Buttazzo G., Seppecher P. Energies with respect to a measure and applications to low dimensional structures // Calc. Var. Partial Differential Equations. 1997. V. 5. № 1. P. 37–54.

Владимирский государственный  
педагогический университет  
E-mail: zhikov@vgpu.vladimir.ru

Поступила в редакцию  
19.04.1999 и 17.02.2000