



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**А.В. Иванов, М.В. Крапошин,
Т.Г. Елизарова**

О новом методе
регуляризации уравнений
двухфазной несжимаемой
среды

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Иванов А.В., Крапошин М.В., Елизарова Т.Г. О новом методе регуляризации уравнений двухфазной несжимаемой среды // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 61. 27 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-61>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-61>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША
Российской академии наук**

А.В. Иванов, М.В. Крапошин, Т.Г. Елизарова

**О новом методе регуляризации уравнений
двухфазной несжимаемой среды**

Москва — 2021

Иванов А.В., Крапошин М.В., Елизарова Т.Г.

О новом методе регуляризации уравнений двухфазной несжимаемой среды

В данной работе приведён новый метод численного моделирования двухфазных несжимаемых несмешивающихся сред. В основе методики лежит использование квазигидродинамического подхода регуляризации уравнений гидродинамики. Из конечно-разностных соображений построены две системы регуляризованных уравнений, отличающиеся определением регуляризующей поправки к скорости. Приведено сравнение описанных систем и апробация численной модели на двух тестах: двумерной задаче распада столба воды (разрушения плотины) с неровностью дна, для которой описаны экспериментальные данные, и трёхмерной задаче об эволюции кубической капли. Последняя задача хорошо демонстрирует эффекты поверхностного натяжения и является модельной с искусственно заданными параметрами.

Численная модель двухфазных течений реализована на базе открытой интегрируемой платформы OpenFOAM с использованием метода контрольных объёмов.

Ключевые слова: несжимаемые двухфазные течения, квазигидродинамический подход, регуляризованные уравнения, Volume of Fluid, OpenFOAM.

*Aleksandr Vladimirovich Ivanov, Matvey Viktorovich Kraposhin,
Tatiana Gennadyevna Elizarova*

On a new method for regularizing equations two-phase incompressible fluid

This paper presents a new method for the numerical simulation of two-phase incompressible immiscible flows. The methodology is based on the hydrodynamic equations regularization method using the quasi-hydrodynamic approach. Two systems of regularized equations are developed, which differ in terms of velocity regularization. The comparison of the described equations systems and the approbation of the numerical model on two numerical tests are given: 2-d dam break problem with the bottom step, for which the experimental data are described (Koshizuka's experiment), and the cubic drop evolution 3-d problem. The latter problem is a model one with artificially specified parameters that demonstrates the effects of surface tension.

A numerical model of two-phase flows is implemented in the open-source platform OpenFOAM using the finite volume method.

Key words: two-phase incompressible flows, quasi-hydrodynamic approach, regularized equations, Volume of Fluid, OpenFOAM.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 19-11-00169.

Введение

Теория многофазной смеси имеет обширный спектр задач для приложения. Это и задачи динамики смеси двух и более газов, задачи исследования течений нескольких несмешивающихся жидкостей, задачи дефлаграции, т.е. перехода горение–детонация, в химически активных сыпучих веществах и т.д. В зависимости от постановки и принятых ограничений их можно разделить на различные классы, для каждого из которых построено большое количество физико-математических моделей различного типа сложности.

Методики численного решения систем уравнений для описания многофазных сред также довольно разнообразны. Одним из способов, например, является использование методов, зарекомендовавших себя в решении систем уравнений газо- и гидродинамики, адаптированных для многофазных течений. В данной работе представлен комбинированный метод, в основе которого лежит квазигидродинамический (КГиД) подход [1]. Идея метода заключается в осреднении по времени системы уравнений для многофазной несжимаемой среды с целью получения системы регуляризованных уравнений. Численное решение системы регуляризованных уравнений, в свою очередь, может быть получено с помощью простых схем с центральными разностями, чего нельзя добиться для исходных уравнений. С другой стороны, таким образом строится новая теоретическая модель для описания гетерогенных сред. Подобным образом в работе [2] наряду с феноменологическим выводом системы КГиД уравнений приводится и её вывод из конечно-разностных соображений.

Важно отметить, что квазигидродинамическая модель для описания течений смеси сжимаемых сред разработана, описана и широко исследована в работах, опубликованных группой ученых в составе В.А. Балашова, А.А. Злотника и Е.Б. Савенкова. В их публикациях описан принципиально другой подход к решению уравнений КГиД методом, для примера укажем здесь ссылки на некоторые работы: [3–9]. Фундаментально-теоретический, на основе процедуры Коулмана-Нолла, с гарантией выполнения закона неубывания энтропии, вывод системы уравнений этой модели описан в статье [3], а в [4] приведено её численное исследование. Система уравнений из [3] отличается от приведенной в данной статье. Основной целью данной работы является получение КГиД системы уравнений для моделирования течения несмешивающихся несжимаемых жидкостей альтернативным методом исходя из конечно-разностных соображений.

План данной работы строится следующим образом. В разд. 1 приведена исходная физико-математическая модель многокомпонентной смеси, которая закладывается в основу для вывода системы регуляризованных уравнений. Там же приводится ряд допущений и ограничений, накладываемых на модель, которые обозначают границы применимости КГиД подхода для двухфазных течений.

Раздел 2 посвящен выводу системы регуляризованных уравнений из конечно-разностных соображений. Исходя из выражения для регуляризующей добавки к скорости представлено две системы регуляризованных уравнений.

Описание численной модели и выбора параметра регуляризации τ приведено в разд. 3.

В разд. 4 приведено описание модельных тестов: задача о распаде разрыва при наличии неровности дна (dam break), а также задача об эволюции кубической капли.

1. Исходная система уравнений

Для начала рассмотрим наиболее общую концепцию – модель многоскоростного гетерогенного континуума, которая подробно описана в монографии Р.И. Нигматулина [10]. Многоскоростная многофазная среда представляет собой совокупность из N составляющих, заполняющих один и тот же объём, занятый смесью. Таким образом, некоторый физически бесконечно малый объём смеси dV массой dm содержит в себе N компонент объёма dV_i и массой dm_i , причём

$$dV = \sum_{i=1}^N dV_i, \quad dm = \sum_{i=1}^N dm_i.$$

Плотность смеси ρ , а также приведённую ρ_i и истинную $\tilde{\rho}_i$ плотности её составляющих можно определить как

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad \rho_i = \frac{dm_i}{dV}, \quad \tilde{\rho}_i = \frac{dm_i}{dV_i}. \quad (1)$$

Для компонентов многоскоростного континуума в каждой точке определяется приведенная плотность ρ_i , скорость \mathbf{u}_i и другие параметры, относящиеся к компоненту. При этом по аналогии с [10] можно определить барицентрическую скорость \mathbf{u} смеси:

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{u}_i. \quad (2)$$

В соответствии с этим вводятся субстанциональные производные, характеризующие движение i -й составляющей (d_i/dt) и среды в целом (d/dt):

$$\begin{aligned} \frac{d_i}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla, \\ \frac{d}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку каждая из фаз многокомпонентной смеси занимает лишь часть всего объёма, удобно ввести величину объёмной доли α_i , характеризующей долю объёма отдельного компонента во всей смеси $\alpha_i = dV_i/dV$, причём

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1. \quad (4)$$

Тогда приведенную плотность ρ_i и плотность смеси ρ можно представить в виде

$$\rho_i = \alpha_i \tilde{\rho}_i, \quad \rho = \sum_{i=1}^N \rho_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{\rho}_i. \quad (5)$$

Важным ограничением, позволяющим существенно упростить модель, является предположение о том, что давление в каждой из фаз смеси одинаково

$$p_1 = p_2 = \dots = p_N = p. \quad (6)$$

Как отмечается в [10], соотношение (6) представляет собой условие совместного деформирования фаз, регулирующее их объёмные содержания. В ряде случаев в качестве такого условия может выступать условие несжимаемости одной из фаз. Несовпадение давлений в фазах может иметь место из-за капиллярных эффектов, прочности и инерции фаз в их мелкомасштабном движении. Несмотря на ограничения, накладываемые условием (6), мы существенно упрощаем получаемую систему уравнений.

Отметим также, что для гетерогенных сред выполняется условие: каждый из компонентов многофазной смеси описывается теми же соотношениями, которые справедливы для среды, состоящей только из этого компонента. Исключением являются процессы на границе раздела фаз, а именно: обмен массой, импульсом и энергией.

С учётом вышесказанного запишем уравнения неразрывности и импульса для некоторой фазы описываемой среды:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_i \mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^N J_{ki}, \quad (7)$$

$$\rho_i \frac{d_i \mathbf{u}_i}{dt} = -\alpha_i \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_i + \alpha_i \mathbf{f}_i + \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_{ki} + J_{ki}(\mathbf{u}_{ki} - \mathbf{u}_i)), \quad (8)$$

где \mathbf{f}_i – вектор внутренних и внешних микросил, а $\mathbf{\Pi}_i$ – тензор напряжений i -го компонента.

Дополнив уравнения (7) и (8) уравнением для энергии и соотношениями, определяющими межфазную силу \mathbf{F} и интенсивность межфазного перехода

массы J , получим систему уравнений для многоскоростного и многотемпературного течения гетерогенной среды с общим давлением фаз, феноменологический вывод которой описан в [10].

Немаловажным направлением в тематике гетерогенных сред является исследование двухфазных течений. В научной литературе моделирование двухфазной смеси связано с задачами дефлаграции, т.е. перехода горение–детонация (deflagration-to-detonation transition, далее DDT), в химически активных сыпучих веществах. Исчерпывающий обзор современного состояния данного направления, а также описание актуальных физических моделей приведены в [11]. В связи с этим в дальнейшем речь пойдёт именно о двухкомпонентных смесях, хотя потенциально описываемый подход можно применить и к случаям многофазной смеси. Именно поэтому все выкладки для отдельной фазы будут проводиться в терминах переменных с индексом i , подразумевая, что $i = 1, 2$.

Другим важным ограничением является вопрос о природе исследуемых компонентов. В данной работе речь идёт о несжимаемых средах. Помимо этого встаёт вопрос о наличии переходных процессов между компонентами. Будем считать, что один компонент не может переходить в другой, т.е. таким образом рассматривается задача о течении двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Это приводит к очевидному ограничению вида

$$\tilde{\rho}_i = const, \quad J_{ki} = 0.$$

Ограничившись рассмотрением только вязких компонент тензора напряжений $\mathbf{\Pi}_i = \alpha_i \mathbf{\Pi}_{NS,i}$, приняв межфазную силу $\mathbf{F}_{ki} = 0$ и оставив только массовую силу \mathbf{f}_i , выпишем уравнение неразрывности (9) и баланса импульса (10) для i -й фазы:

$$\frac{\partial \alpha_i \tilde{\rho}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \tilde{\rho}_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \alpha_i \tilde{\rho}_i \mathbf{u}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \tilde{\rho}_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \alpha_i \mathbf{f}_i + \nabla \cdot \alpha_i \mathbf{\Pi}_{NS,i}. \quad (10)$$

Уравнение энергии для несжимаемой среды вырождается в независимое уравнение теплопроводности. В данной работе считаем смесь изотермической, поэтому уравнение теплопроводности опускается.

Поскольку плотность фаз постоянна $\tilde{\rho}_i = const$, то уравнение баланса массы (9) может быть представлено в виде уравнения сохранения объёмной доли компонента:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \mathbf{u}_i) = 0. \quad (11)$$

С учётом уравнения (11) и выражения для материальной производной (3) уравнение сохранения импульса i -й фазы (10) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{d_i \mathbf{u}_i}{dt} + \frac{\nabla p}{\tilde{\rho}_i} = \frac{\mathbf{f}_i}{\tilde{\rho}_i}. \quad (12)$$

Заметим, что если фазы находятся в кинематическом равновесии в объёмах, занимаемых двумя и более средами, то:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}. \quad (13)$$

Приняв данное ограничение, получим односкоростную модель, или так называемую модель Volume of Fluid (VoF) [12]. Далее везде полагаем, что $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}$.

Перейдём к уравнениям для описания смеси в целом. Несмотря на то что плотность отдельных компонент смеси постоянна, просуммировав по i уравнение (9) с учётом условия на объёмные доли (4) и выражения для плотности (5), получим уравнение неразрывности для ρ , из которого следует, что $\partial \rho / \partial t \neq 0$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (14)$$

Просуммировав аналогично уравнение (10), получим уравнение импульса для среды в целом

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_{NS}, \quad (15)$$

где $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{f}_i$, $\mathbf{\Pi}_{NS} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{\Pi}_{NS,i}$.

2. Система регуляризованных уравнений

Вывод системы регуляризованных уравнений

Воспользуемся процедурой регуляризации по аналогии с построением КГиД системы, описанной в [2]. Поскольку уравнения баланса массы и импульса каждой из компонент в сумме отражают законы сохранения для смеси в целом, построим сначала регуляризованные уравнения объёмной доли и импульса отдельной фазы, а затем сложим их, получив регуляризованные уравнения смеси.

Рассмотрим некоторый неподвижный объём V , ограниченный гладкой поверхностью Σ , ориентированной полем внешних нормалей \mathbf{n} . Для данного объёма в течение малого промежутка времени $[t, t + \Delta t]$ запишем в конечно-разностном виде интегральные соотношения, выражающие закон сохранения

объёмной доли (11) и импульса (10) каждого компонента, воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\Delta t} dV + \iint_{\Sigma} (\alpha_i^* \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_i \int_V \frac{\hat{\alpha}_i \hat{\mathbf{u}} - \alpha_i \mathbf{u}}{\Delta t} dV + \tilde{\rho}_i \iint_{\Sigma} \alpha_i^* \mathbf{u}^* (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma + \iint_{\Sigma} \alpha_i^* p^* \mathbf{n} d\Sigma - \\ - \int_V p^* (\nabla \alpha_i)^* dV = \int_V \alpha_i^* \mathbf{f}_i dV + \iint_{\Sigma} (\alpha_i^* \mathbf{\Pi}_{NS,i}^* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (17)$$

где верхними индексами $\hat{}$ и * отмечены величины, взятые в точках $(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ и $(\mathbf{x}, t + \Delta t/2)$ соответственно.

Далее по аналогии с выводом КГД системы [2] предположим, что за физически бесконечно малое время $\tau = \Delta t/2$ успевают заметно измениться лишь взвешенная скорость $\alpha_i \mathbf{u}$ и объёмная доля α_i , тогда как давление p остаётся практически неизменным:

$$\begin{aligned} \alpha_i^* &= \alpha_i + \tau \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}, \\ \alpha_i^* \mathbf{u}^* &= \alpha_i \mathbf{u} + \tau \frac{\partial \alpha_i \mathbf{u}}{\partial t}, \\ p^* &= p, \end{aligned} \quad (18)$$

где в первых двух равенствах мы воспользовались разложением по формуле Тейлора, ограничившись членами нулевого и первого порядка малости по Δt при $\Delta t \rightarrow 0$. Заметим при этом, что в отличие от вывода регуляризованных уравнений гидродинамики [2] нельзя говорить, что плотность смеси ρ остаётся неизменной ввиду соотношений (5).

Подставив выражения (18) в (16) и (17), отбросим все члены, имеющие формальные порядки малости $O(\Delta t^2)$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Заметим, что ввиду малости коэффициентов вязкости слагаемые, содержащие произведение $\Delta t \mathbf{\Pi}_{NS,i}$ также можно отбросить. Заменяем разностные аналоги производных по времени на обычные производные:

$$\frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}, \quad \frac{\hat{\alpha}_i \hat{\mathbf{u}} - \alpha_i \mathbf{u}}{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial \alpha_i \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Выразим частные производные $\partial(\alpha_i \mathbf{u})/\partial t$ и $\partial \alpha_i/\partial t$ из уравнений (10) и (11) соответственно. Далее сложим уравнения баланса импульса (17) для всех компонентов с учётом (4) и (5). Заметим, что в таком случае $\sum_{i=1}^N (\nabla \alpha_i)^* = 0$ ввиду соотношения (4).

Таким образом, учитывая, что объём V – произвольный, придём к регуляризованным уравнениям баланса объёмной доли и импульса смеси в

целом:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{u} \right) + \nabla p = \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}) + \\ + \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \tau \nabla \cdot (\alpha_i \mathbf{u})) \mathbf{f}_i + \nabla \cdot \alpha_i \mathbf{\Pi}_{NS,i}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\mathbf{v}_i = \alpha_i (\mathbf{u} - \mathbf{w}_i) - \tau \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_i), \quad (21)$$

$$\mathbf{w}_i = \tau \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\tilde{\rho}_i} \nabla p - \frac{1}{\tilde{\rho}_i} \mathbf{f}_i \right), \quad (22)$$

$$\mathbf{w} = \tau \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \right). \quad (23)$$

При этом выполняется соотношение

$$\rho \mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{\rho}_i \mathbf{w}_i. \quad (24)$$

Уравнение для давления следует из регуляризованного уравнения неразрывности, которое получается путём сложения регуляризованных уравнений баланса объёмных долей (19), где, раскрыв сумму с учётом (4) и $\sum_{i=1}^N \nabla \alpha_i = 0$, получим:

$$\nabla \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i = \nabla \cdot \left(\mathbf{u} - \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{w}_i \right) = 0. \quad (25)$$

Выделив в уравнении (25) τ -слагаемые с градиентом давления, получим уравнение Пуассона для определения давления:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{u} - \tau (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \tau \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\tilde{\rho}_i} \mathbf{f}_i \right) - \nabla \cdot \left(\tau \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\tilde{\rho}_i} \nabla p \right) = 0. \quad (26)$$

Упрощённый подход к регуляризации

Таким же образом можно построить и более простую систему уравнений. Сам вывод практически полностью повторяет предыдущие выкладки, за исключением одного условия: теперь вместо уравнения баланса импульса фазы

(17) рассмотрим закон сохранения импульса смеси в целом

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\widehat{\rho\mathbf{u}} - \rho\mathbf{u}}{\Delta t} dV + \iint_{\Sigma} \rho^* \mathbf{u}^* (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma + \iint_{\Sigma} p^* \mathbf{n} d\Sigma = \\ = \sum_{i=1}^N \int_V \alpha_i^* \mathbf{f}_i dV + \sum_{i=1}^N \iint_{\Sigma} (\alpha_i^* \mathbf{\Pi}_{NS,i}^* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (27)$$

Повторяя предыдущие рассуждения, предположим, что за физически бесконечно малое время $\tau = \Delta t/2$ меняются только скорость \mathbf{u} и объёмная доля α_i (а соответственно и плотность смеси ρ), тогда как давление p остаётся неизменным:

$$\begin{aligned} \alpha_i^* &= \alpha_i + \tau \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}, \\ \rho^* &= \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u} + \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \\ p^* &= p. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставив выражения (28) в (16) и (27), отбросим все члены, имеющие формальные порядки малости $O(\Delta t^2)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, в том числе слагаемые, содержащие произведение $\Delta t \mathbf{\Pi}_{NS,i}$, а также заменим разностные аналоги производных по времени на обычные производные:

$$\frac{\widehat{\alpha}_i - \alpha_i}{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}, \quad \frac{\widehat{\rho\mathbf{u}} - \rho\mathbf{u}}{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial \rho\mathbf{u}}{\partial t}.$$

Выразим частные производные $\partial \alpha_i / \partial t$, $\partial \rho / \partial t$ и $\partial(\rho\mathbf{u}) / \partial t$, из уравнений (11), (14) и (15) соответственно.

Таким образом, учитывая, что объём V – произвольный, придём к системе уравнений, схожей с (19)–(23)

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_i = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_i \boldsymbol{\varphi}_i \otimes \mathbf{u} \right) + \nabla p = \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}) + \\ + \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \tau \nabla \cdot (\alpha_i \mathbf{u})) \mathbf{f}_i + \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_{NS}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \alpha_i (\mathbf{u} - \mathbf{w}) - \tau \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_i), \quad (31)$$

а регуляризирующая добавка \mathbf{w} вычисляется по упомянутой выше формуле (23).

Сложив регуляризованные уравнения баланса объёмных долей (29), получим уравнение неразрывности:

$$\nabla \cdot \sum_{i=1}^N \varphi_i = \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0. \quad (32)$$

Выделив в уравнении (32) τ -слагаемые с градиентом давления, получим уравнение Пуассона для определения давления:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{u} - \tau(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{\tau}{\rho} \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\tau}{\rho} \nabla p \right) = 0. \quad (33)$$

Здесь и далее во избежание путаницы, говоря о *системе регуляризованных уравнений* или о *системе 1*, будем иметь в виду систему, полученную первым способом, т.е. уравнения (19)–(23) и уравнение для давления (26). Под *системой 2* или *упрощённой системой* (регуляризованных уравнений) будем подразумевать уравнения (29), (30), (23) и (33).

Основное отличие более простой системы уравнений (29), (30), (23) от системы (19)–(23) заключается в использовании общей регуляризирующей добавки \mathbf{w} , причём с учётом (24) выполняется соотношение:

$$\sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_i \varphi_i = \rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}) - \tau \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho). \quad (34)$$

Отсюда меняется и уравнение Пуассона для давления, которое во втором случае (33) имеет более сложный вид ввиду нелинейного множителя при градиенте давления τ/ρ , тогда как в (26) множитель $\sum_{i=1}^N (\alpha_i/\tilde{\rho}_i)$ линейно зависит от α_i . С другой стороны, ввиду равенства (34), уравнения импульса для обоих методов (20) и (30) идентичны.

Далее речь пойдёт о системе 1, при этом все рассуждения, там где не оговорено обратное, справедливы также и для упрощённой системы.

Граничные условия

Систему уравнений (19)–(23), (26) необходимо дополнить начальными условиями и граничными условиями на внешних границах.

Можно выделить три характерных типа граничных условий:

- а) непроницаемая стенка (wall);
- б) условия на входе (inlet);
- в) условия на выходе (outlet).

Проблемой классических моделей гидродинамики как для однофазной, так и для двухфазной несжимаемой среды является постановка граничного

условия для давления, которое необходимо для решения уравнения Пуассона, получаемого из уравнения для импульса среды. В таком случае, как правило, условия для давления записываются из неких дополнительных соображений либо используется аппроксимация уравнений на разнесенных сетках, что позволяет избежать данной проблемы. Подобные методы усложняют процесс численного решения системы уравнений.

В случае системы регуляризованных уравнений, как было показано выше, уравнение Пуассона для давления получается из уравнения неразрывности. Это позволяет естественным образом получить условия для давления на границе, исходя из граничных условий для скорости \mathbf{v}_i .

Для примера опишем постановку граничных условий на непроницаемой стенке. В таком случае нормальная компонента скорости на границе равна нулю: $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{\Gamma} = 0$, где \mathbf{n} – внешняя единичная нормаль к границе Γ . Граничное условие для давления p (или величины его возмущения \tilde{p}) можно получить непосредственно из условия фиксированного значения нормальной компоненты скорости смеси u_n на границе:

$$\left(\mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \right) \Big|_{\Gamma} = u_n,$$

или

$$-(\mathbf{n} \cdot \nabla p)|_{\Gamma} = \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\tilde{\rho}_i} \mathbf{f}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\tilde{\rho}_i} \right)^{-1} = 0. \quad (35)$$

Вязкость

Как было сказано ранее, вязкие слагаемые $\mathbf{\Pi}_{NS,i}$ в уравнении баланса импульса учитываются с весом, пропорциональным объёмной доле α_i фазы смеси, и имеют вид

$$\alpha_i \mathbf{\Pi}_{NS,i} = \alpha_i \mu_i (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (36)$$

где $\mathbf{\Pi}_{NS,i}$ – тензор вязких напряжений i -ой фазы в отсутствие других фаз, μ_i – коэффициент динамической вязкости i -ой фазы.

Ввиду малых значений коэффициента вязкости μ_i слагаемые, содержащие произведение $\mu_i \tau$, можно отбросить ввиду их малости. С учетом этого получаем выражение для тензора вязких напряжений смеси:

$$\mathbf{\Pi}_{NS} = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (37)$$

где $\mu = \sum_i \alpha_i \mu_i$ – эффективный коэффициент динамической вязкости смеси.

Выражения для силового воздействия

Распишем подробнее выражения для силового воздействия внешних сил \mathbf{f}_i .

Рассмотрим элемент массы dm_i i -й фазы. На него действует сила тяжести $\mathbf{g}\alpha_i\tilde{\rho}_i dV$, соответственно, на элемент объёма смеси в целом dV , содержащий несколько фаз, будет действовать сила, равная сумме сил тяжести всех фаз $\mathbf{g}\rho dV$. Переходя к дифференциальной записи и регуляризуя выражение для объёмной плотности силы тяжести смеси, получаем от неё вклад в регуляризованное уравнение баланса импульса \mathbf{f}_g :

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{g}(\rho - \tau \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})). \quad (38)$$

В регуляризирующее выражение для скоростей \mathbf{w}_i и \mathbf{w} сила тяжести фазы, отнесенная к плотности фазы, входит как постоянная \mathbf{g} :

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_i} \mathbf{f}_{g,i} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \mathbf{f}_g = \mathbf{g}.$$

Помимо силы тяжести, важным аспектом моделирования многофазных течений является определение силы поверхностного натяжения. Заметим, что поверхностным натяжением называется касательное напряжение, действующее на элемент межфазной поверхности в тангенциальном направлении, природа которого связана с разницей в силе молекулярного притяжения двух соседних жидкостей, разделенных резкой границей.

Сложность моделирования сил этого типа состоит в их поверхностной “разрывной” природе, вследствие чего их явная аппроксимация методами конечных объёмов (МКО) или конечных элементов (МКЭ), наиболее часто используемыми в гидродинамике жидкостей, проблематична и приводит к ряду ошибок и погрешностей.

Для учета сил поверхностного напряжения существуют различные подходы, среди которых можно указать [13]:

- Volume of Fluid (VoF) + Continuum Surface Stress (CSS) Model;
- VoF + Continuum Surface Force (CSF) Model;
- Finite Volume Method (FVM)/Finite Elements Method (FEM) + Level set method;
- VoF + Level set method + FVM;
- FVM/FEM + Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) method;
- FVM+Finite Area Method (FAM).

Одним из распространенных подходов является метод VOF (Volume-of-Fluid), используемый совместно с моделью Распределенной Поверхностной Силы (Continuos Surface Force Model), которая в настоящее время реализована в качестве основной модели в пакете OpenFoam [14]. В этой модели

поверхностная сила заменяется объёмной таким образом, чтобы интеграл последней по объёму в окрестности поверхности раздела фаз был равен силе поверхностного натяжения:

$$\mathbf{f}_{CSF} = \kappa \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma, \quad (39)$$

где κ – кривизна поверхности, σ – коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|}$ – нормаль к “размытой” поверхности, δ_σ – дельта функция, принимающая ненулевые значения в областях, охватывающих границу раздела фаз, отнесенная к “толщине размытия”.

В методе конечных объёмов δ_σ обычно вычисляется как:

$$\delta_\sigma = |\nabla \alpha|. \quad (40)$$

Для получения соответствующего слагаемого в уравнении баланса импульса необходимо регуляризовать вклад в эту силу от каждой компоненты и сложить их аналогично тому, как это делалось для силы тяжести. Поскольку применяемая модель распределенной поверхностной силы сама по себе является довольно грубым приближением, то представляется целесообразным разделение вклада от этой силы для каждой пары фаз в баланс импульса смеси пропорционально их объёмным долям. В этом случае выражение для силы поверхностного натяжения \mathbf{f}_{st} регуляризованного баланса импульса принимает вид:

$$\mathbf{f}_{st} = \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \tau \nabla \cdot (\alpha_i \mathbf{u})) \mathbf{f}_{CSF}. \quad (41)$$

Тем не менее, поскольку величина коэффициента поверхностного натяжения достаточно мала, то вклад данной силы в регуляризацию довольно мал, поэтому слагаемые, содержащие \mathbf{f}_{CSF} , целесообразно исключить из регуляризирующих добавок к потокам.

3. Численное решение регуляризованных уравнений

Численное решение системы регуляризованных уравнений (19)–(24), (26) с учётом выражений для силы тяжести и силы поверхностного натяжения, а также вязкости выполнено методом конечных объёмов с применением двухслойной явной по времени схемы с аппроксимацией потоков центральными разностями:

$$\frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\Delta t} + \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{s}_f \cdot \mathbf{v}_{i,f} = 0, \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\widehat{\rho \mathbf{u}} - \rho \mathbf{u}}{\Delta t} + \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{s}_f \cdot \left(\sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_i \mathbf{v}_{i,f} \otimes \mathbf{u}_f \right) - \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{s}_f \cdot (\rho_f \mathbf{u}_f \otimes \mathbf{w}_f) = \\
& = -\frac{1}{V} \sum_f p_f \mathbf{s}_f + \frac{1}{V} \sum_f \mu_f \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{n}_f} |\mathbf{s}_f| + \frac{1}{V} \sum_f \mu_f \mathbf{s}_f \cdot [\nabla \mathbf{u}]_f^T + \\
& + \sum_{i=1}^N \left(\rho - \frac{\tau}{V} \sum_f \mathbf{s}_f \cdot (\rho_f \mathbf{u}_f) \right) \mathbf{g} + \sum_{i=1}^N \left(\alpha_i - \frac{\tau}{V} \sum_f \mathbf{s}_f \cdot (\alpha_{i,f} \mathbf{u}_f) \right) \mathbf{f}_{CSF},
\end{aligned} \tag{43}$$

где

$$\mathbf{v}_{i,f} = \alpha_{i,f} (\mathbf{u}_f - \mathbf{w}_{i,f}) - (\tau_f \mathbf{u}_f (\mathbf{u}_f \cdot [\nabla \alpha_i]_f)), \tag{44}$$

$$\mathbf{w}_{i,f} = \tau_f \left(\mathbf{u}_f \cdot [\nabla \mathbf{u}]_f + \frac{1}{\tilde{\rho}_i} [\nabla p]_f - \mathbf{g} \right), \tag{45}$$

$$\mathbf{w}_f = \tau_f \left(\mathbf{u}_f \cdot [\nabla \mathbf{u}]_f + \frac{1}{\rho_f} [\nabla p]_f - \mathbf{g} \right), \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \sum_f \left(\tau_f \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_{i,f}}{\tilde{\rho}_i} \frac{\delta p}{\delta \mathbf{n}_f} |\mathbf{s}_f| \right) = \\
& = \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{s}_f \cdot \left(\mathbf{u}_f - \tau_f \mathbf{u}_f \cdot [\nabla \mathbf{u}]_f + \tau_f \mathbf{g} + \tau_f \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_{i,f}}{\tilde{\rho}_i} [\mathbf{f}_{CSF}]_f \right).
\end{aligned} \tag{47}$$

Все величины, взятые на следующем слое по времени отмечены индексом $\widehat{}$, а для величин на текущем слое по времени использованы прежние обозначения; V – объём расчётной ячейки, величины, значения которых взяты на грани f ячейки, обозначены нижним индексом f , \mathbf{n}_f – вектор единичной внешней нормали к грани f , $\mathbf{s}_f = s_f \mathbf{n}_f$ – вектор нормали, длина которого равна площади грани f , $\delta/\delta \mathbf{n}_f$ – аппроксимация производных по нормали к поверхности, скобки $[\cdot]_f$ обозначают, что оператор, заключенный в скобках, берётся в центре грани f .

Заметим, что для аппроксимации потоков требуется вычисление частных производных на гранях f вычислительной ячейки. В то время как нормальный к поверхности компонент дифференциальных операторов может быть аппроксимирован с помощью линейной интерполяции значений в центрах ячеек со смежными гранями, компоненты тангенциального направления требуют дополнительного рассмотрения. Для этого воспользуемся подходами, предложенными для аппроксимации τ -слагаемых в случае регуляризованных уравнений для моделирования несжимаемой жидкости:

а) расчет значений в центрах ячеек с линейной интерполяцией их на грани;

- б) редуцированный метод, при котором используется только нормальная к поверхности компонента производной, а тангенциальные компоненты не учитываются [15];
- в) метод наименьших квадратов, который использует разложение Тейлора для получения дискретных выражений для частных производных [15];
- г) применение метода Гаусса к фиктивному контрольному объему, определенному вокруг рассматриваемой грани f [16]. В рамках этого метода расчетный шаблон включает вершины грани и точки в ячейках, прилегающих к грани (см. рис. 1). Например, выражение для производной по x скалярного поля β на четырехугольной грани выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} \approx \frac{1}{V_f} \sum_{m=1}^8 n_{m,x} \beta_m,$$

где V_f – объём фиктивной восьмигранной ячейки, построенной вокруг грани f , m – индекс грани фиктивной ячейки, β_m – среднее значение скалярного поля β на грани m , $n_{m,x}$ – x -компонента нормали к грани m .

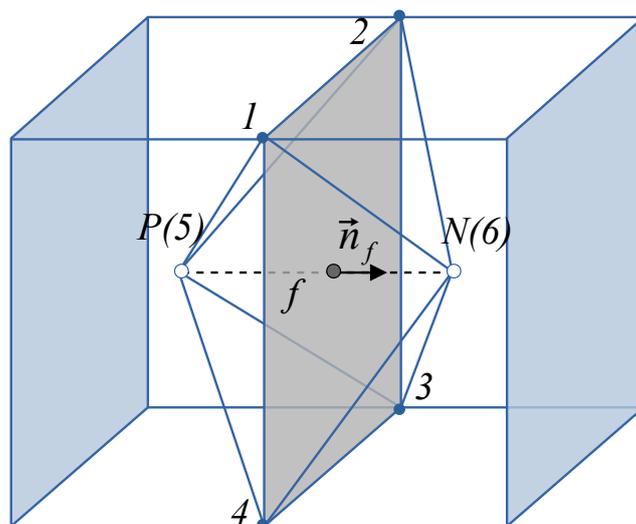


Рис. 1. Схема шаблона для вычисления частных производных на грани f конечного объема: P – центр ячейки с нормалью от f , направленной наружу, N обозначает центр ячейки, к которой нормаль от f направлена внутрь

Как показали численные эксперименты для моделирования однофазной несжимаемой среды, первый подход вносит слишком большую ошибку в численное решение и вызывает нефизичные колебания, а второй подход порождает чрезмерную численную диффузию [15], в то время как третий подход очень требователен с точки зрения качества сетки [15]. Таким образом, последний подход представляется наиболее эффективным с учетом предыдущей практики и успешного применения для однофазной несжимаемой среды [17], поэтому

именно данный подход был применен для аппроксимации производных на границах ячеек в данной работе.

Устойчивость и параметр регуляризации τ

Устойчивость численного алгоритма, а также степень сглаженности численного решения определяется параметром регуляризации τ . По аналогии с КГиД подходом [1], его удобно связать с некоторым характерным гидродинамическим временем задачи τ_0 : $\tau \leq \tau_0$. Величину τ_0 можно выбрать с использованием характерной величины скорости u , кинематической вязкости ν , пространственного шага расчётной сетки Δx или других параметров.

Приведём здесь несколько наиболее распространенных способов задания τ :

- а) $\tau = \Delta x / u$;
- б) $\tau = \nu / u^2$;
- в) $\tau = \Delta x^2 / \nu$;
- г) $\tau = \tau_0 / Gr$;
- д) $\tau = \tau_0 / Re$;
- е) $\tau = \tau_0$;

где $\tau_0 = const$ здесь некоторое постоянное характерное гидродинамическое время, Gr – число Грасгофа, а Re – число Рейнольдса.

Шаг интегрирования по времени, обеспечивающий условную устойчивость разностного алгоритма, не должен превосходить величину τ и часто выбирается в виде

$$\Delta t \leq \tau / 2.$$

При слишком больших значениях τ диссипативные слагаемые, получившиеся вследствие регуляризации, начинают доминировать, что приводит к разрушению численного решения. Если τ слишком мало, то для устойчивости численного решения требуется неприемлемо малый шаг по времени. Как показывает опыт вычислений, начиная с некоторого значения уменьшение параметра τ перестает влиять на точность численного решения. Поэтому выбор параметра регуляризации определяет устойчивость алгоритма, его точность и трудоемкость. Следовательно, в расчете необходимо подбирать оптимальное значение τ .

Алгоритм численного решения

Алгоритм численного решения системы регуляризованных уравнений для моделирования двухфазной несжимаемой жидкости реализован на базе фреймворка QGDsolver [18] в рамках открытой интегрируемой платформы OpenFOAM v2012 [19]. Решатель разработан по аналогии с уже реализованным КГиД методом, который описан и применён, например, для моделирования дискового насоса [20].

Процесс численного решения для обоих методов выглядит одинаково, поэтому опишем его для системы 1, рассмотрев некоторый текущий момент времени, обозначив относящиеся к нему величины верхним индексом k , а значения на следующем слое по времени $^{k+1}$. Алгоритм включает в себя следующие шаги:

- для текущего слоя по времени рассчитываются значения величин на гранях;
- методом сопряжённых градиентов с многосеточным методом в качестве предобуславливателя решается уравнение Пуассона (47) и находится давление p^k ;
- в соответствии с предыдущим шагом рассчитываются потоковые величины $\mathbf{v}_{i,f}^k$, $\mathbf{w}_{i,f}^k$, \mathbf{w}_f^k , удовлетворяющие уравнению неразрывности (25);
- из уравнения (42) рассчитывается величина объёмной доли α_1^{k+1} , а из условия (4) – объёмная доля $\alpha_2^{k+1} = 1 - \alpha_1^{k+1}$;
- затем согласно (5) вычисляется плотность ρ^{k+1} ;
- на финальном этапе рассчитывается величина скорости на новом слое по времени \mathbf{u}^{k+1} , что позволяет повторить описанную процедуру.

4. Расчётные задачи

Поскольку в обеих изложенных ниже задачах присутствует разрыв, при этом величины скоростей достаточно малы, для аппроксимации потока объёмной доли в уравнениях (19) и (29) использовалась схема ван Лиры (van Leer), [21]. Это необходимо ввиду того, что величины регуляризирующего слагаемого $\nabla \cdot (\tau \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_i))$ в уравнениях (19) и (29) недостаточно для сглаживания решения.

Задача о распаде водяного столба

Эта двумерная задача была описана в эксперименте Koshizuka [22]. Схема эксперимента представлена на рис. 2. Параметры области: $L = 0.146$ м, $h = 0.024$ м. Рассматриваются две несжимаемых среды:

а) α_l – более плотная (далее жидкость), $\rho_l = 1000$ кг/м³, $\nu_l = 10^{-6}$ м²/с;

б) $\alpha_g = 1 - \alpha_l$ – менее плотная (далее газ), $\rho_g = 1$ кг/м³, $\nu_g = 1.48 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

В начальный момент времени столб жидкости находится в свободном контакте с газом и ввиду наличия ускорения свободного падения $g = 9.81$ м/с² с течением времени постепенно распадается. Для численного расчета в области задавалась равномерная прямоугольная сетка с размером ячейки 0.0064×0.0064 м². Точность решения уравнения Пуассона для давления 10^{-8} .

Ниже на рис. 3–8 представлено сравнение результатов, полученных в эксперименте Koshizuka [22], и результатов расчетов, полученных с использованием системы 1 и системы 2. Изображения экспериментальных данных были

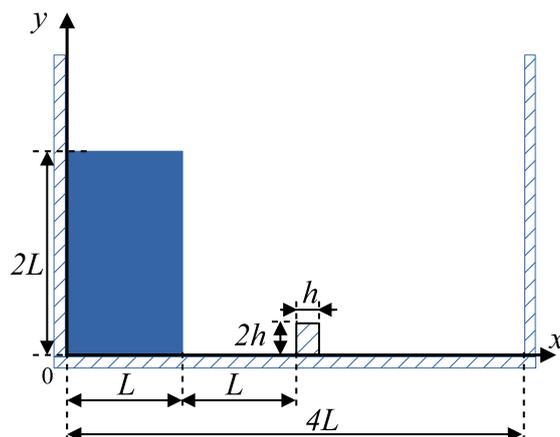


Рис. 2. Схема задачи распада разрыва. Синим цветом представлено заполнение $\alpha_l = 1$

взяты из [23]. Расчёты с использованием обеих систем регуляризованных уравнений производились для $\tau = 0.5 \cdot 10^{-3}$ с и $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-4}$ с. Можно заметить, что система 1 более точно описывает потоки, поскольку задаёт для каждой из сред свою поправку w_i , в отличие от неё система 2 даёт более сглаженную, размазанную, картину.

На рис. 7 можно заметить, что система 2 более близка к эксперименту. Однако при уменьшении регуляризатора τ решение первой системы также становится близко к эксперименту, тогда как решение второй системы не изменяется, рис. 9. С другой стороны для выполнения условия устойчивости расчёт задачи по второй системе требует меньшего шага по времени. Например, при $\tau = 0.5 \cdot 10^{-4}$ с для первой системы $\Delta t = 10^{-5}$ с, а для второй $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-6}$ с.

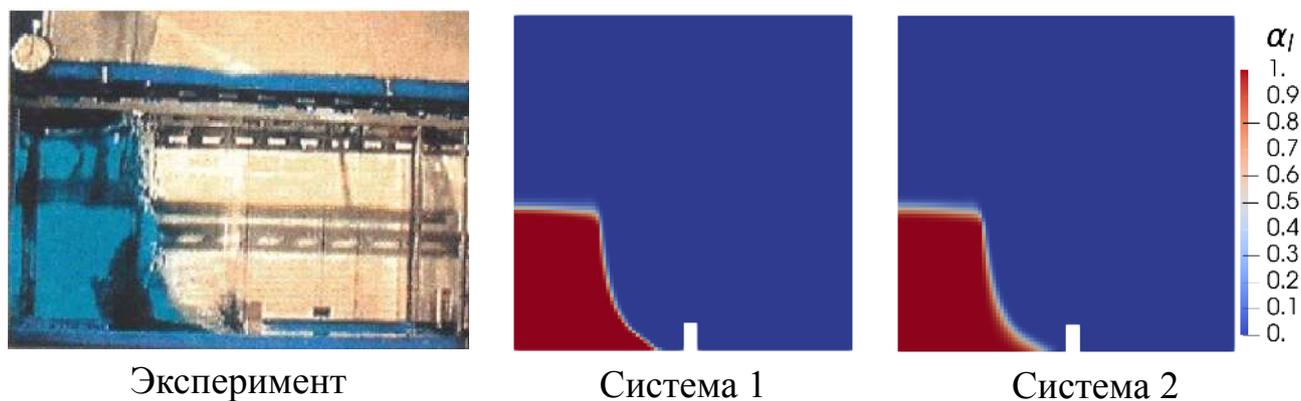


Рис. 3. Сравнение эксперимента и численных расчётов задачи распада водяного столба для времени $t = 0.1$ с.

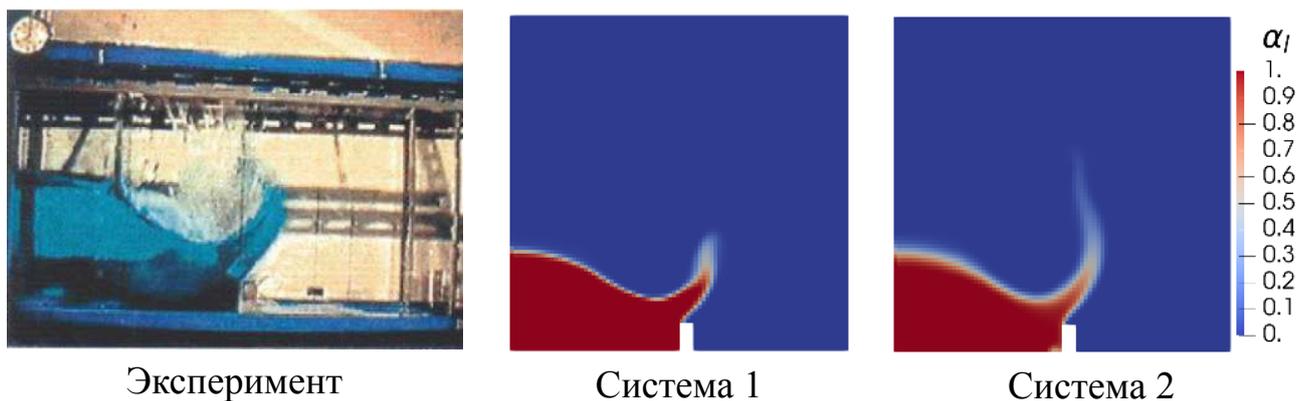


Рис. 4. Сравнение эксперимента и численных расчётов задачи распада водяного столба для времени $t = 0.2$ с.

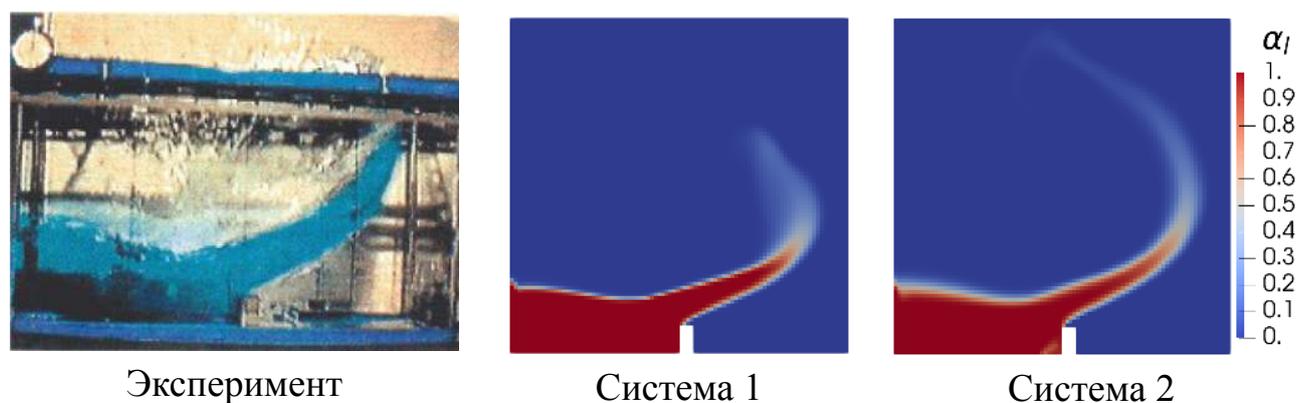


Рис. 5. Сравнение эксперимента и численных расчётов задачи распада водяного столба для времени $t = 0.3$ с.

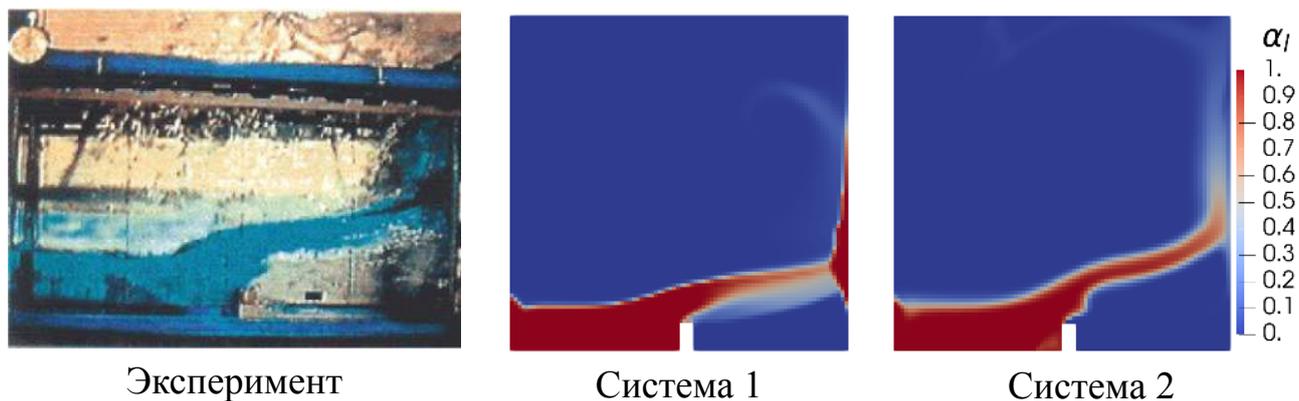


Рис. 6. Сравнение эксперимента и численных расчётов задачи распада водяного столба для времени $t = 0.4$ с.

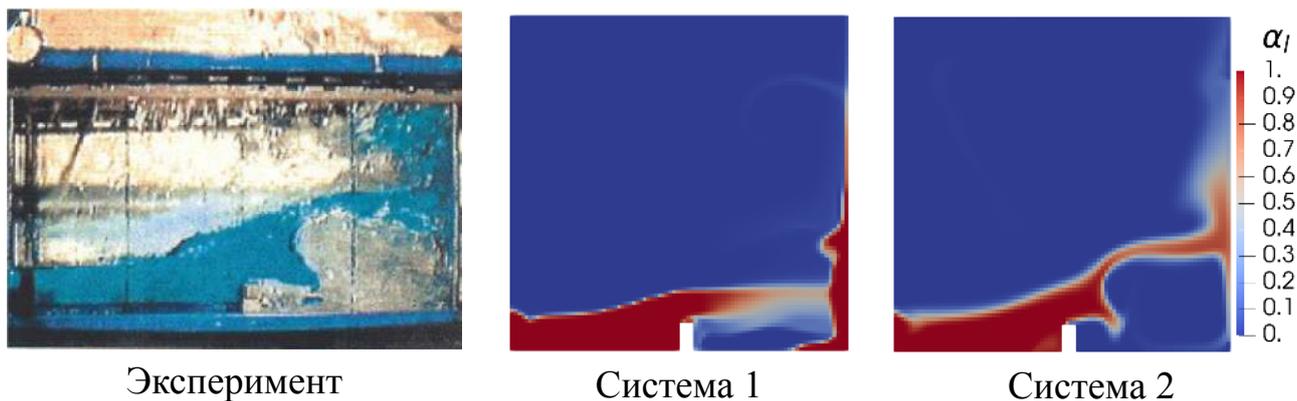


Рис. 7. Сравнение эксперимента и численных расчётов задачи распада водяного столба для времени $t = 0.5$ с.

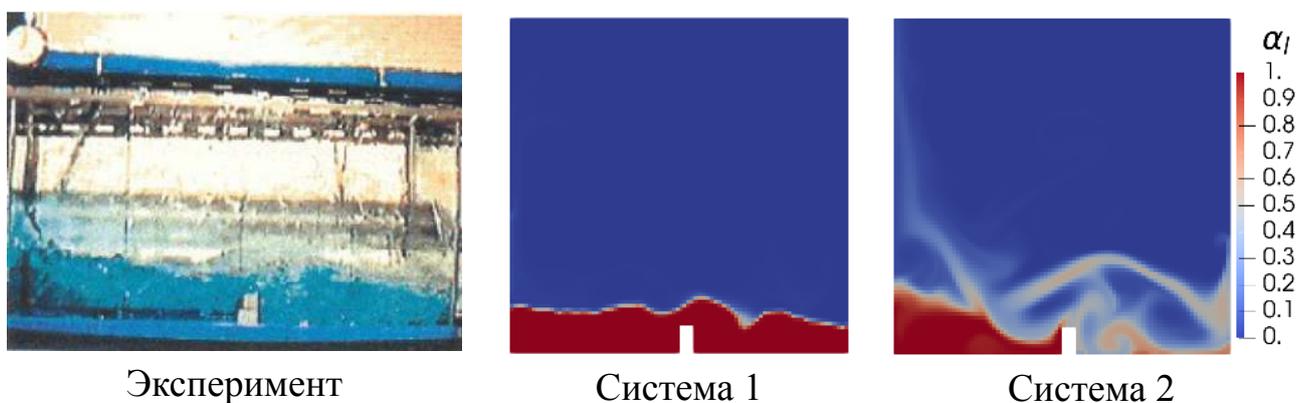


Рис. 8. Сравнение эксперимента и численных расчётов задачи распада водяного столба для времени $t = 1$ с.

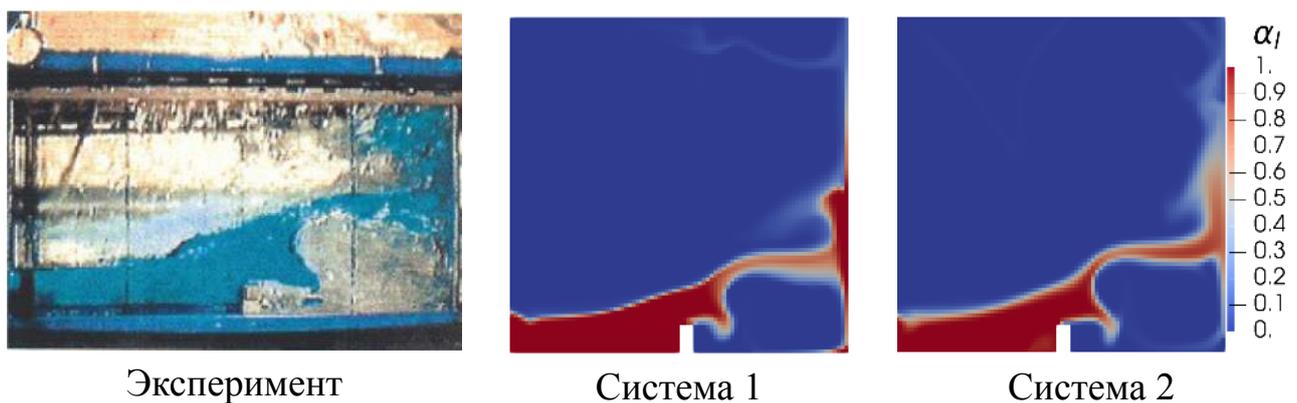


Рис. 9. Сравнение эксперимента и численных расчётов задачи распада водяного столба при $\tau = 0.5 \cdot 10^{-4}$ с для времени $t = 0.5$ с.

Задача об эволюции кубической капли

Данная задача является тестовой, её основная цель – качественная проверка эффекта поверхностного натяжения в трёхмерном случае и сравнение двух методик расчета. Похожие задачи использовались для оценки работоспособ-

ности численных алгоритмов в [24, 25]. Аналогично предыдущему случаю рассматриваются две несжимаемые среды, для удобства плотность, коэффициенты вязкости и поверхностного натяжения соответствуют данным для воды и воздуха:

а) α_l – более плотная (далее жидкость), $\rho_l = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\nu_l = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$;

б) $\alpha_g = 1 - \alpha_l$ – менее плотная (далее газ), $\rho_g = 1 \text{ кг/м}^3$, $\nu_g = 1.204 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

В центре кубической области, ограниченной квадратными стенками со стороной $L = 36.6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ рассматривается трёхмерная капля кубической формы с длиной ребра $d = 20 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, рис. 10. Давление во всей области в начальный момент времени взято равным нулю: $p|_{t=0} = 0 \text{ Па}$.

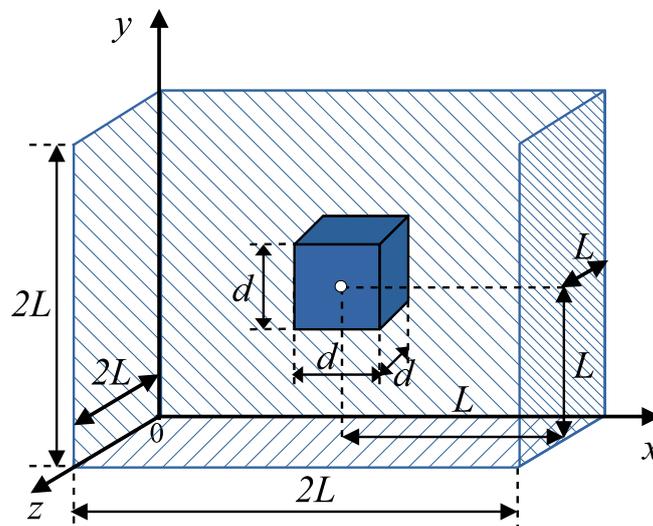


Рис. 10. Схема задачи эволюции кубической капли. Капля представлена синим цветом ($\alpha_l = 1$), белая точка обозначает центр кубической области, совпадающий с центром капли.

В данной задаче ускорение свободного падения g не учитывается. Значение коэффициента поверхностного натяжения $\sigma = 0.074 \text{ Н/м}$.

Расчетная область была разделена на две части: внутреннюю, представляющую собой куб, длина ребра которого $d' = 37.2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, а центр совпадает с центром капли, и внешнюю, охватывающую оставшееся пространство. Была построена тетраэдральная расчетная сетка со стороной ячеек во внешней области $2.44 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и во внутренней области $0.61 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, рис. 11.

Результаты численного моделирования с применением первой системы продемонстрированы на рис. 12. Серым цветом обозначена изоповерхность капли, которая была построена по значению $\alpha_l = 0.5$. Величина параметра регуляризации $\tau = 10^{-5} \text{ с}$, а шаг по времени $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$. Расчет для второй системы также проводился. Его результаты близки к результатам первой системы, однако, как и в предыдущей задаче, для второй системы требуется большее значение коэффициента регуляризации τ , а также меньший шаг по

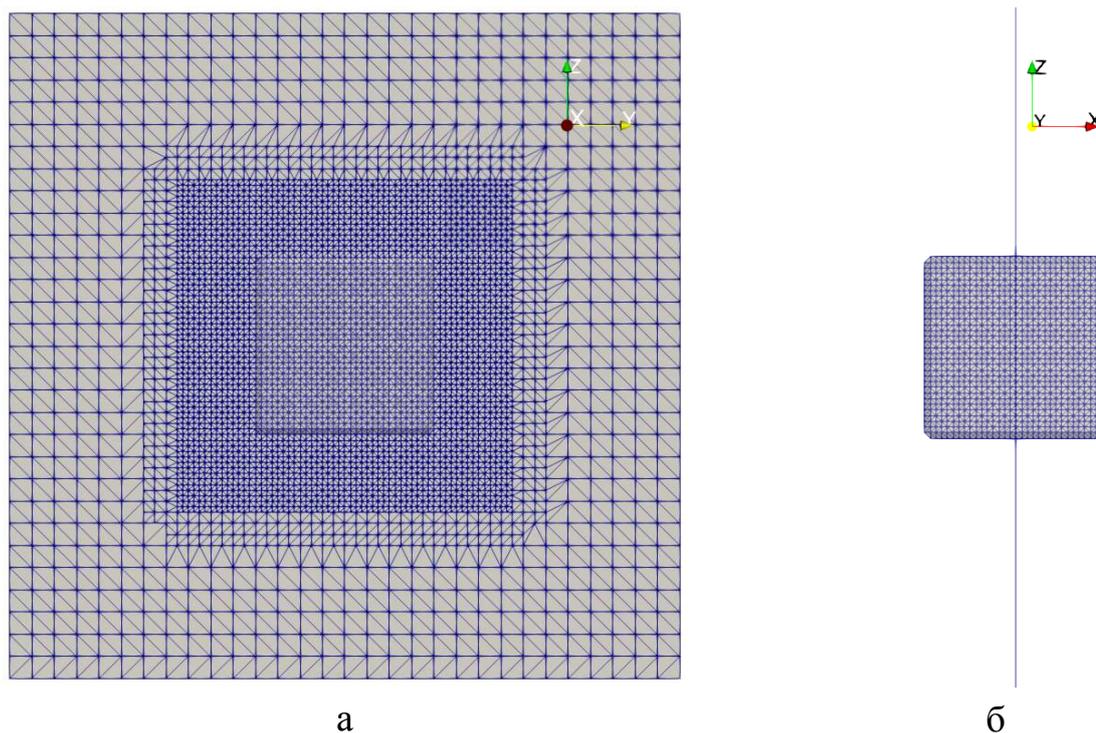


Рис. 11. Расчетная сетка для задачи эволюции кубической капли в разрезе по плоскости ZOY: (а) в проекции на ZOY; (б) в проекции на ZOX.

времени Δt . Эволюция капли на рис. 12 соответствует ожидаемым результатам. Процесс формирования сферической капли сопровождается колебаниями. На рис. 13 можно заметить периодичное изменение радиуса r кубической капли, где под радиусом подразумевается расстояние от центра капли до точки пересечения её поверхности с осью OY. Несмотря на то, что процесс установления сферической формы может длиться довольно долго, видно, что с течением времени амплитуда колебаний уменьшается, а в пределе ее значение стремится к искомому $r = 0.012$ м. Анимацию процесса преобразования формы капли изображена на рис. 14, а также она доступна по ссылке:

<https://keldysh.ru/e-biblio/elizarova/CubicDropAnimation.mp4>

Заключение

В ходе проделанной работы был получен новый метод регуляризации системы уравнений для модели двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей. Описаны два способа построения регуляризатора. Полученные таким образом системы уравнений дают различные численные решения. На примере двух задач было показано, что первая система требует меньших значений регуляризатора τ , однако более устойчива, тогда как численное решение с применением второй системы может быть получено при больших τ , но с меньшим шагом по времени Δt . Оба метода хорошо показали себя для моделирования двухфазных сред с соотношением плотностей $r = \rho_1/\rho_2 \sim 1000$.

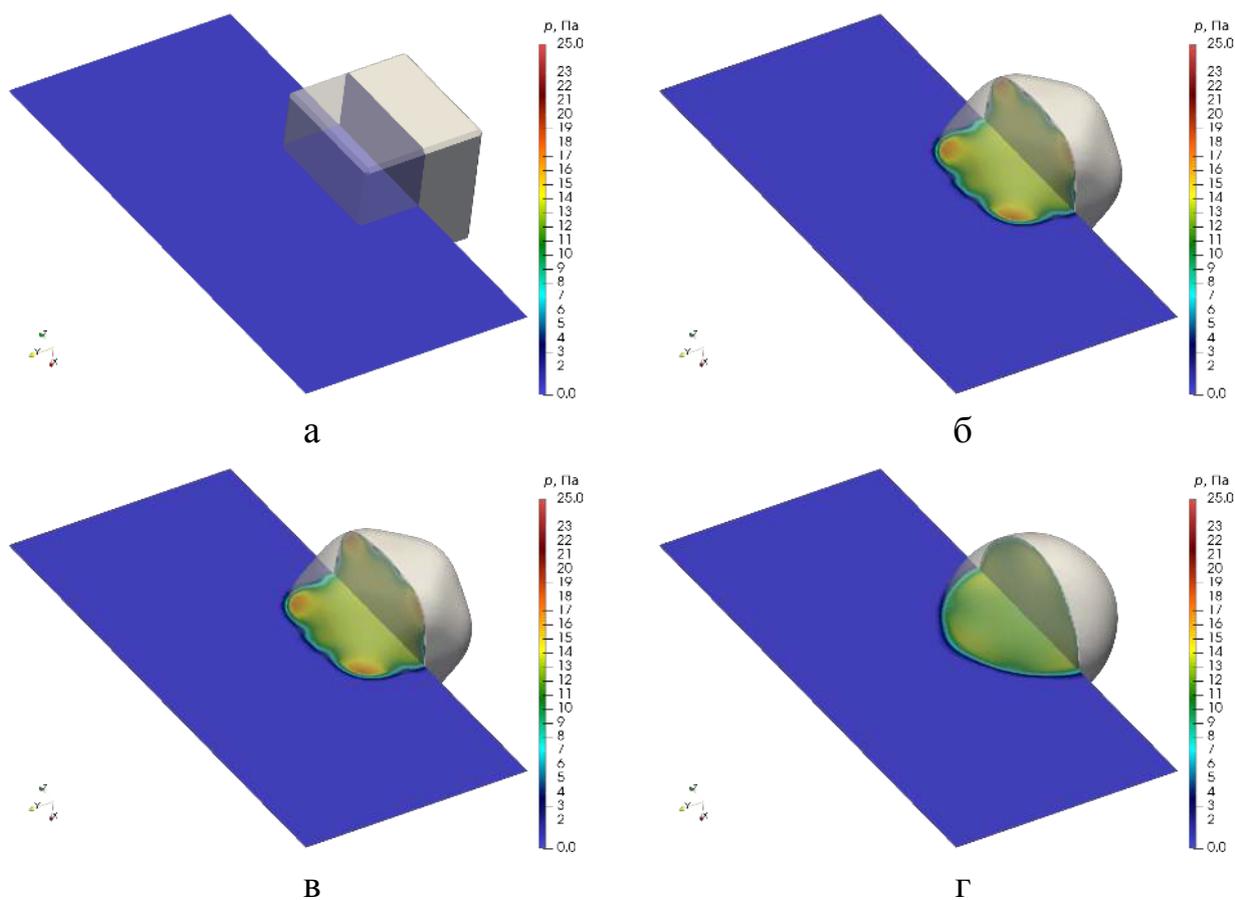


Рис. 12. Распределение давления задачи эволюции кубической капли для различных моментов времени: (а) $t = 0$ с; (б) $t = 0.25$ с; (в) $t = 0.5$ с; (г) $t = 0.75$ с.

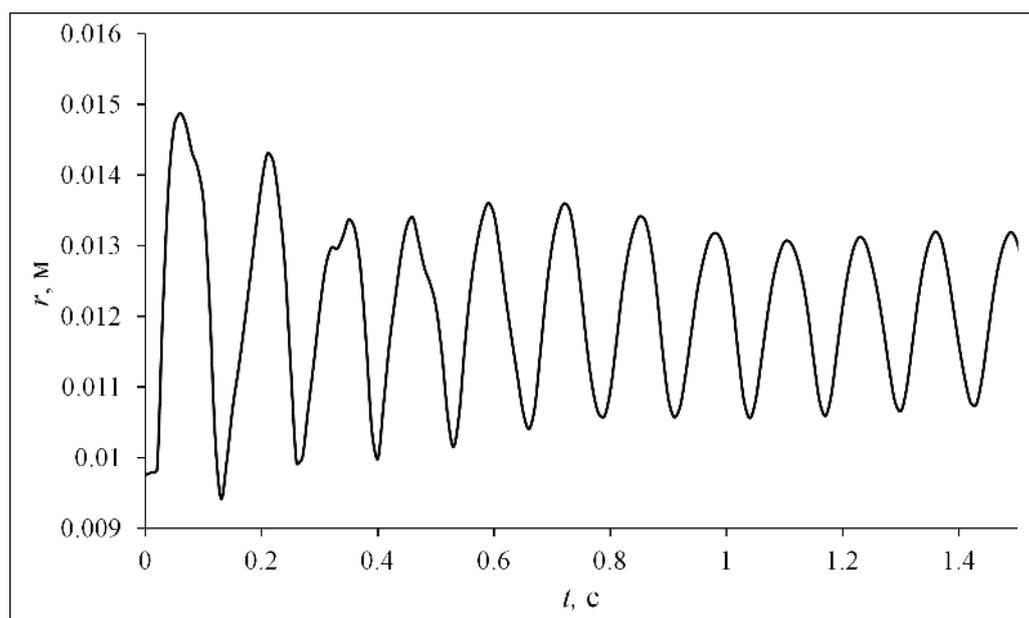


Рис. 13. Зависимость радиуса капли r от времени.

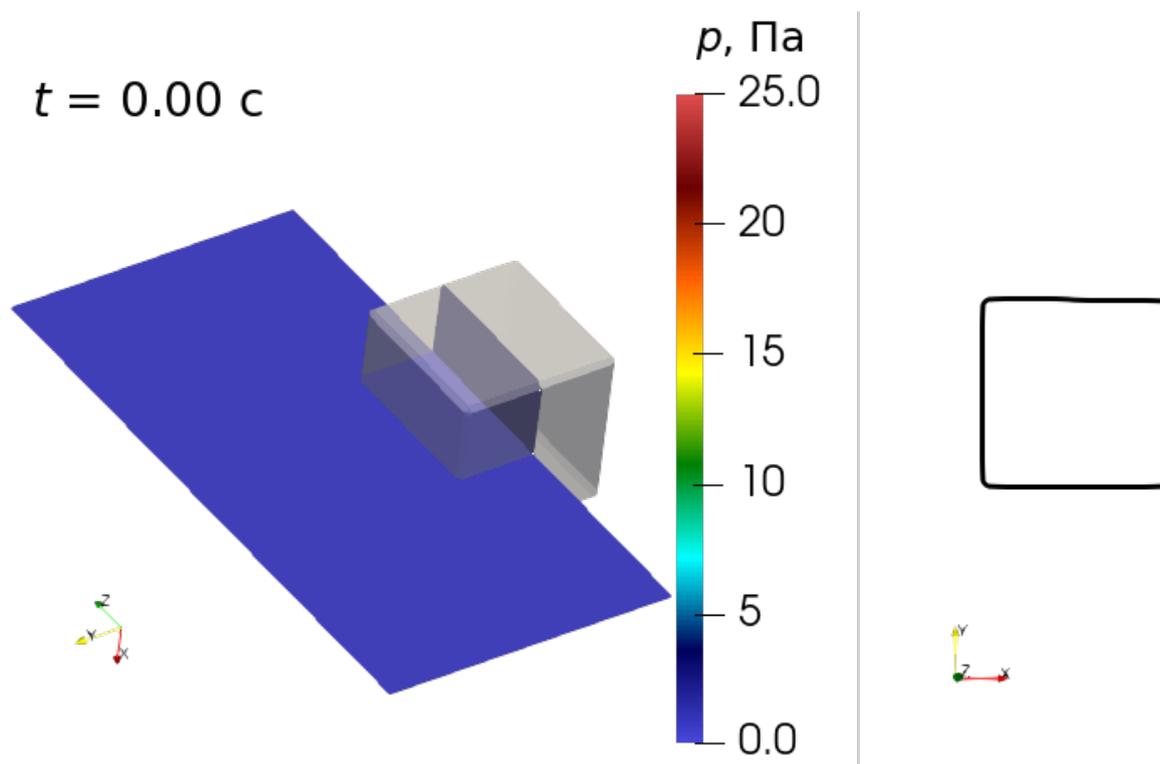


Рис. 14. (Анимация, для запуска необходимо просматривать препринт в Adobe Acrobat Reader) Колебательных характер перехода кубической капли в сферическую в течение $t = 1.5$ с: 3d вид (слева) и сечение поверхности капли плоскостью XOY (справа). Анимация также доступна по ссылке: <https://keldysh.ru/e-biblio/elizarova/CubicDropAnimation.mp4>

Библиографический список

- [1] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь : Тверской государственный университет, 2016. 222 с. Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/311562501_Regularized_Hydrodynamic_Equations.
- [2] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Ижевск : РХД, 2009. 400 с. Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/310596336_Continuum_Dynamics_under_Spatiotemporal_Averaging.
- [3] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Квазигидродинамическая модель для описания течений многофазной жидкости с учетом межфазного взаимодействия // ПМТФ. 2018. № 3. С. 57–68. Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20180306>.
- [4] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Численное исследование двумерной квазигидродинамической модели течения двухфазной изотермической жид-

кости с учетом поверхностных эффектов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 13. С. 1–20. Режим доступа: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-13>.

- [5] Balashov V.A., Zlotnik A.A., Savenkov E.B. Analysis of a regularized model for the isothermal two-component mixture with the diffuse interface // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2017. Vol. 32, no. 6. Access mode: <http://doi.org/10.1515/rnam-2017-0033>.
- [6] Balashov V.A., Zlotnik A.A. An energy dissipative spatial discretization for the regularized compressible Navier-Stokes-Cahn-Hilliard system of equations // *Math. Model. Anal.* 2020. Vol. 25, no. 1. P. 110–129. Access mode: <http://doi.org/10.3846/mma.2020.10577>.
- [7] Balashov V.A., Zlotnik A.A. An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // *J. Comput. Dyn.* 2020. Vol. 7, no. 2. P. 291–312. Access mode: <http://doi.org/10.3934/jcd.2020012>.
- [8] Balashov V.A., Zlotnik A.A., Savenkov E.B. Numerical method for 3D two-component isothermal compressible flows with application to digital rock physics // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2019. Vol. 34, no. 1. P. 1–13. Access mode: <http://doi.org/10.1515/rnam-2019-0001>.
- [9] Balashov V.A., Zlotnik A.A. On a New Spatial Discretization for a Regularized 3D Compressible Isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard System of Equations with Boundary Conditions // *Journal of Scientific Computing.* 2021. Vol. 86, no. 3. Access mode: <http://doi.org/10.1007/s10915-020-01388-6>.
- [10] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред (Ч.1). М. : Наука, 1987.
- [11] Saurel R., Pantano C. Diffuse-Interface Capturing Methods for Compressible Two-Phase Flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2018. Jan. Vol. 50, no. 1. P. 105–130. Access mode: <http://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122316-050109>.
- [12] Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. Comput. Phys.; (United States).* 1981. Vol. 39, no. 1. Access mode: [http://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90145-5](http://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5).
- [13] Assessment of Numerical Techniques for Micro-Drop Fluid Mechanics / Ausas R.F., Damian S.M., Montefusculo F., Buscaglia G.C. // *Mecánica Computacional.* 2014. Vol. 33, no. 7. P. 371–385. Access mode: <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/4648>.
- [14] Rusche H. Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions : Ph. D. thesis / H. Rusche ; Imperial College of Science, Technology & Medicine - University of London. 2002. Access mode: <https://spiral.imperial.ac.uk/handle/10044/1/8110>.
- [15] Development of OpenFOAM Solver for Compressible Viscous Flows Simulation Using Quasi-Gas Dynamic Equations / Kraposhin M.V., Daniil R.A., Smirnova E.V. et al. // 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS).

- IEEE, 2017. Nov. Access mode: <http://doi.org/10.1109/ISPRAS.2017.00026>.
- [16] Истомина М.А., Шильников Е.В. Об аппроксимации потоковых величин на пространственных сетках нерегулярной структуры // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. no. 86. P. 1–22. Access mode: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-86>.
- [17] Shilnikov E.V., Elizarova T.G. Simulation of hypersonic flows using the QGD-based parallel program complex “EXPRESS-3D” // High Temp. Mater. Processes: Int. Q. High-Technol. Plasma Processes. 2018. Vol. 22, no. 2–3. P. 99–113. Access mode: <http://doi.org/10.1615/HighTempMatProc.2018024713>.
- [18] Lab UniCFD, Kraposhin M.V., Vatutin K.A., Daniil R.A. QGDsolver – OpenFOAM+ framework for simulation of fluid flows using regularized equations approach. 2020. Jun. Access mode: <https://github.com/unicfdlab/QGDsolver>.
- [19] ESI Group. OpenFOAM+, 2021 (дата обращения 10.06.2021). Access mode: <https://openfoam.com/>.
- [20] Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 66. С. 1–30. Режим доступа: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-66>.
- [21] van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme // J. Comput. Phys. 1974. Mar. Vol. 14, no. 4. P. 361–370. Access mode: [http://doi.org/10.1016/0021-9991\(74\)90019-9](http://doi.org/10.1016/0021-9991(74)90019-9).
- [22] Koshizuka S., Tamako H., Oka Y. A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation // Comput. Fluid Dyn. 1995. P. 29–46.
- [23] Unified Lagrangian formulation for elastic solids and incompressible fluids: Application to fluid–structure interaction problems via the PFEM / S.R. Idelsohn, J. Marti, A. Limache, E. Oñate // Comput Methods Appl Mech Eng. 2008. Mar. Vol. 197, no. 19–20. P. 1762–1776. Access mode: <http://doi.org/10.1016/j.cma.2007.06.004>.
- [24] An implicit surface tension model for the analysis of droplet dynamics / Jarauta A., Ryzhakov P., Pons-Prats J., Secanell M. // Journal of Computational Physics. 2018. Dec. Vol. 374. P. 1196–1218. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2018.08.001>.
- [25] Yang L., Rakhsha M., Negrut D. Comparison of Surface Tension Models in Smoothed Particles Hydrodynamics Method // Volume 6: 15th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control. American Society of Mechanical Engineers, 2019. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1115/DETC2019-98124>.

Оглавление

Введение	3
1. Исходная система уравнений	4
2. Система регуляризованных уравнений	7
Вывод системы регуляризованных уравнений	7
Упрощённый подход к регуляризации	9
Граничные условия	11
Вязкость	12
Выражения для силового воздействия	13
3. Численное решение регуляризованных уравнений	14
Параметр регуляризации τ	17
Алгоритм численного решения	17
4. Расчётные задачи	18
Задача о распаде водяного столба	18
Задача об эволюции кубической капли	21
Заключение	23