Miroslav Šisler
Über ein zweiparametriges Iterationsverfahren

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 5, 325–332

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103485`

ÜBER EIN ZWEIPARAMETRIGES ITERATIONSVERFAHREN

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen am 13. Oktober 1972)

Die Arbeit befasst sich mit einem gewissen allgemeinen Iterationsverfahren für die Lösung eines linearen Gleichungssystems von der Form

$$(1) \qquad (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,$$

wo $\boldsymbol{E}$ eine Einheitsmatrix und $\boldsymbol{B}$ eine im allgemeinen nichtsymmetrische Blockmatrix ist. Das Iterationsverfahren von der Form

$$(2) \qquad \boldsymbol{x}_{\nu+1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{b}$$

entspricht dann dem gewöhnlichen Jacobi-Verfahren.

Die Matrix $\boldsymbol{B}$ sei nun von der Form

$$(3) \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}\,,$$

wo $\boldsymbol{U}$ (bzw. $\boldsymbol{L}$) eine obere (bzw. untere) verallgemeinerte Dreiecksmatrix ist und wo die Diagonalblöcke der Matrix $\boldsymbol{B}$ Nullmatrizen sind. Man wählt nun solche beliebige Zahlen α, β, dass die Matrix $\alpha\boldsymbol{E} + \beta\boldsymbol{L}$ nichtsingulär ist (dass gilt immer für $\alpha \neq 0$) und man bildet die Matrizen

$$(4) \qquad \boldsymbol{T}(\alpha, \beta) = (\alpha\boldsymbol{E} + \beta\boldsymbol{L})^{-1}\,[(\alpha - 1)\,\boldsymbol{E} + (\beta + 1)\,\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}]\,,$$

$$(5) \qquad \boldsymbol{P}(\alpha, \beta) = (\alpha\boldsymbol{E} + \beta\boldsymbol{L})^{-1}\,.$$

Wir definierten jetzt ein Iterationsverfahren durch die folgende Formel:

$$(6) \qquad \boldsymbol{x}_{\nu+1} = \boldsymbol{T}(\alpha, \beta)\,\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{P}(\alpha, \beta)\,.$$

Dieses Verfahren hängt von zwei reellen Parametern α und β ab und solange der Spektralradius der Matrix $\boldsymbol{T}(\alpha, \beta)$ kleiner als 1 ist, konvergiert dieses Verfahren zur Lösung des Systems (1), da die Gleichung (1) und die Gleichung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}(\alpha, \beta)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}(\alpha, \beta)$ äquivalent sind.

Es ist noch zu bemerken, dass das Iterationsverfahren (6), das in dieser Arbeit untersucht wird, eine gewisse Modifikation der in der Arbeit [3] untersuchten Methode darstellt.

Wir werden jetzt einige Spezialfälle mit Rücksicht auf die Wahl der Parameter α, β betrachten.

I) Es sei $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Dann ist

$$\mathbf{T}(1, 0) = \mathbf{L} + \mathbf{U} = \mathbf{B}\,, \quad \mathbf{P}(1, 0) = \mathbf{E}$$

und das Iterationsverfahren (6) ist von der Form

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{b}\,. \tag{2}$$

Es handelt sich also um das Jacobi-Verfahren.

II) Es sei $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Dann ist

$$\mathbf{T}(1, -1) = (\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1}\,\mathbf{U}\,, \quad \mathbf{P}(1, -1) = (\mathbf{E} - \mathbf{U})^{-1}\,,$$

was dem Gauss-Seidelschen Verfahren entspricht.

III) Es sei $\alpha = 1/\omega$ $(\omega \neq 0)$ und $\beta = -1$. Dann ist

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\omega}, -1\right) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1}\left[(1 - \omega)\,\mathbf{E} + \omega\mathbf{U}\right],$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\omega}, -1\right) = \left(\frac{1}{\omega}\,\mathbf{E} - \mathbf{L}^{-1}\right),$$

was dem Oberrelaxations-Verfahren entspricht.

IV) Es sei $\alpha = 1/\omega$ $(\omega \neq 0)$, $\beta = 0$. Dann ist

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\omega}, 0\right) = (1 - \omega)\,\mathbf{E} + \omega\mathbf{B}\,, \quad \mathbf{P}\left(\frac{1}{\omega}, 0\right) = \omega\mathbf{E}\,,$$

was dem sog. verallgemeinerten (extrapolierten) Jacobi-Verfahren entspricht (für $\omega = 1$ bekommt man den Fall I)).

V) Es sei $\alpha = 1/\omega$ $(\omega \neq 0)$ und $\beta = -1/\omega$. Dann ist

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = (\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1}\left[(1 - \omega)\,\mathbf{E} - (1 - \omega)\,\mathbf{L} + \omega\mathbf{U}\right],$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \omega(\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1}\,,$$

was dem sog. extrapolierten Gauss-Seidelschen Verfahren entspricht (für $\omega = 1$ bekommt man den Fall II)).

VI) Es sei $\alpha = 1$, $\beta = -\omega$. Dann ist

$$\mathbf{T}(1, -\omega) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1}\left[(1 - \omega)\,\mathbf{L} + \mathbf{U}\right], \quad \mathbf{P}(1, -\omega) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1}\,.$$

Diese Methode stellt die gleichzeitige Extrapolation des Jacobischen und Gauss-Seidelschen Verfahrens dar, da man für $\omega = 0$ den Fall I) und für $\omega = 1$ den Fall II) bekommt. Mit diesem Verfahren befassten sich die Arbeiten [4], [5] des Verfassers.

VII) Es sei $\alpha = 1/\varphi\omega$ ($\omega \neq 0$, $\varphi \neq 0$) und $\beta = -1/\varphi$. Dann ist

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\varphi\omega}, -\frac{1}{\varphi}\right) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1} \left[(1 - \varphi\omega)\,\mathbf{E} + \omega(\varphi - 1)\,\mathbf{L} + \varphi\omega\mathbf{U}\right],$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\varphi\omega}, -\frac{1}{\varphi}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\omega}\mathbf{E} - \mathbf{L}\right)^{-1},$$

was dem sog. extrapolierten Oberrelaxations-Verfahren entspricht (für $\varphi = 1$ bekommt man nämlich den Fall III)).

Ferner werden wir das allgemeine Verfahren (6) in dem Falle untersuchen, wenn die Matrix $\mathbf{B}$ eine spezielle Struktur hat. In der Arbeit werden die Ergebnisse der Arbeit [4] verallgemeinert. Es wird der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ und den Eigenwerten der Matrix $\mathbf{B}$ (die dem Jacobi-Verfahren entspricht) untersucht.

In der ganzen Arbeit wird vorausgesetzt, dass die Matrix $\mathbf{B}$ einen linearen Operator darstellt, welcher den Vektorraum R in R abbildet, und dass dieser Vektorraum durch die direkte Summe der Unterräume $v_1, \ldots, v_m$ gebildet wird. Ferner setzen wir voraus, dass die Matrizen $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$\mathbf{L}v_i \subset v_{i+h}, \qquad \mathbf{U}v_i \subset v_{i-k}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

wo h, k teilerfremde natürliche Zahlen sind, für die $h + k = p \leqq m$ ist. Dabei setzt man $v_i = 0$ für $i < 1$ und $i > m$.

Nun gilt der folgende Satz:

1. *Die Matrizen $\mathbf{B}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ sollen die Voraussetzungen (3) und (7) erfüllen. Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$, $\beta \neq 0$. Falls $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ ist und falls die Zahl μ die Bedingung*

$$(1 - \alpha + \lambda\alpha)^p = \mu^p(1 + \beta - \lambda\beta)^k \tag{8}$$

erfüllt, ist μ der Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$. Falls dagegen μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ ist, dann ist jede der Gleichung (8) genügende Zahl λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$.

Beweis. A) Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ und $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ ($\beta \neq 0$). Dann existiert ein Vektor $\mathbf{x}$, sodass

$$(\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L})^{-1} \left[(\alpha - 1)\,\mathbf{E} + (\beta + 1)\,\mathbf{L} + \mathbf{U}\right] \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

oder

$$(1 - \alpha + \lambda\alpha)\,\mathbf{x} = (1 + \beta - \lambda\beta)\,\mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{x} \tag{9}$$

gilt. Man bezeichne $\sigma = 1 - \alpha + \lambda\alpha$, $\tau = 1 + \beta - \lambda\beta$. Wegen $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ ist $\tau \neq 0$. Aus (9) folgt sofort, dass

$$\sigma\mathbf{x} = \tau\mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{x}$$

gilt und dass also auch

$$\sigma^p\mathbf{x} = (\tau\mathbf{L} + \mathbf{U})^p\,\mathbf{x} \tag{10}$$

ist. Den Ausdruck $(\tau\mathbf{L} + \mathbf{U})^p$ kann man folgendermassen schreiben:

$$(\tau\mathbf{L} + \mathbf{U})^p = \sum_{s=0}^{p} \tau^s\{\mathbf{L}^s\mathbf{U}^{p-s}\}\,. \tag{11}$$

Der Ausdruck $\{\mathbf{L}^s\mathbf{U}^{p-s}\}$ wird dabei durch die Summe von $\binom{p}{s}$ Glieder gebildet, welche als Produkte von Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{U}$ dargestellt werden, wobei $\mathbf{L}$ in jedem Produkt s-mal und $\mathbf{U}$ $(p - s)$-mal vorkommt. Der Vektor $\mathbf{x}$ sei als die direkte Summe der Vektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ dargestellt. Angesichts (7) gilt für $1 \leqq i \leqq m$

$$\{\mathbf{L}^s\mathbf{U}^{p-s}\}\,\mathbf{x}_{i+p(k-s)} \subset \mathrm{V}_{i-p(s-k)+sh-(p-s)k} = \mathrm{V}_i\,. \tag{12}$$

Aus (10), (11) und (12) folgt also sofort, dass

$$\sigma^p\mathbf{x}_i = \sum_{s=0}^{p} \tau^s\{\mathbf{L}^s\mathbf{U}^{p-s}\}\,\mathbf{x}_{i+p(k-s)} \tag{13}$$

ist. Mit Hilfe des Vektors $\mathbf{x}$ wird ein neuer Vektor $\mathbf{y}$ als die direkte Summe von Vektoren $\mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, m$ gebildet, wo

$$\mathbf{x}_i = \tau^t\mathbf{y}_i\,, \quad i = 1, \ldots, m \tag{14}$$

gilt. Die Zahl t sei dabei folgenderweise definiert: Es sei $1 \leqq i \leqq m$. Es sei j eine solche ganze Zahl $1 \leqq j \leqq p$, dass $(i - j)/p$ eine nichtnegative ganze Zahl ist. Dann ist $t = (i - j)/p$, d.h. $i = j + tp$. Solange nun $i + p(k - s) < 1$ oder $i + p(k - s) > m$ ist, ist $\mathrm{V}_{i+p(k-s)} = 0$ und es ist also $\mathbf{x}_{i+p(k-s)} = 0$. Falls $1 \leqq i + p(k - s) \leqq m$ gilt, ist $i + p(k - s) = j + tp + p(k - s) = j + (t + k - s)\,p$ und es gilt nach (14)

$$\mathbf{x}_{i+p(k-s)} = \tau^{t+k-s}\,\mathbf{y}_{i+p(k-s)}\,. \tag{15}$$

Aus (13), (14) und (15) folgt schrittweise

$$\sigma^p\tau^t\mathbf{y}_i = \sum_{s=0}^{p} \tau^{s+t+k-s}\{\mathbf{L}^s\mathbf{U}^{p-s}\}\,\mathbf{y}_{i+p(k-s)}\,,$$

$$\sigma^p\mathbf{y}_i = \tau^k \sum_{s=0}^{p} \{\mathbf{L}^s\mathbf{U}^{p-s}\}\,\mathbf{y}_{i+p(k-s)}\,,$$

$$\sigma^p\mathbf{y} = \tau^k(\mathbf{L} + \mathbf{U})^p\,\mathbf{y}\,, \tag{16}$$

und da $\tau \neq 0$ ist, gilt

$$\frac{\sigma^p}{\tau^k} \mathbf{y} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})^p \mathbf{y} = \mathbf{B}^p \mathbf{y}\,, \tag{17}$$

sodass die Zahl

$$\frac{\sigma^p}{\tau^k} = \frac{(1 - \alpha + \lambda\alpha)^p}{(1 + \beta - \lambda\beta)^k}$$

ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}^p$ ist.

Man setze voraus, dass eine gewisse Zahl μ die Gleichung (8) erfüllt. Es gilt also nach (8) die Gleichung

$$\mu^p = \frac{(1 - \alpha + \lambda\alpha)^p}{(1 + \beta - \lambda\beta)^k} = \frac{\sigma^p}{\tau^k}$$

und nach (17) stellt die Zahl μ^p den Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}^p$ dar. Die Matrix $\mathbf{B}$ ist aber eine zyklische Matrix vom Index p. Dazu genügt zu beweisen, dass man den Raum R in die direkte Summe der Unterraume u_j, $j = 1, \ldots, p$, zerlegen kann, wobei die Beziehungen

$$\mathbf{B}\mathrm{u}_j \subset \mathrm{u}_{j-k}\,, \quad j = 1, \ldots, p \tag{18}$$

gelten (dabei ist $\mathrm{u}_{j-k} = \mathrm{u}_l$, wo $1 \leqq l \leqq m$, $j - k \equiv l \pmod p$ ist). Die Unterraume u_j definiert man folgenderweise:

$$\mathrm{u}_j = \mathrm{v}_j + \mathrm{v}_{j+p} + \mathrm{v}_{j+2p} + \ldots \quad (j = 1, \ldots, p)\,.$$

Nach (7) folgt dann (angesichts dessen, dass $p = h + k$ und $p \leqq m$ ist)

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\mathrm{u}_j = \mathbf{L}\mathrm{u}_j + \mathbf{U}\mathrm{u}_j &= \mathbf{L}(\mathrm{v}_j + \mathrm{v}_{j+p} + \mathrm{v}_{j+2p} + \ldots) + \mathbf{U}(\mathrm{v}_j + \mathrm{v}_{j+p} + \mathrm{v}_{j+2p} + \ldots) \subset \\ &\subset (\mathrm{v}_{j+h} + \mathrm{v}_{j+p+h} + \mathrm{v}_{j+2p+h} + \ldots) + (\mathrm{v}_{j-k} + \mathrm{v}_{j+p-k} + \mathrm{v}_{j+2p-k} + \ldots) \subset \\ &\subset \mathrm{v}_{j-k} + \mathrm{v}_{j-k+p} + \mathrm{v}_{j-k+2p} + \ldots = \mathrm{u}_{j-k}\,,\end{aligned}$$

sodass die Beziehung (18) gilt. Da die Matrix $\mathbf{B}$ eine zyklische Matrix vom Index p ist und die Zahl μ^p ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}^p$ ist, ist die Zahl μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ (dies folgt auch aus dem Satz 3 der Arbeit [4]), was zu beweisen war.

B) Es sei dagegen μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ und es sei die Zahl λ eine Wurzel der Gleichung (8). Es entsteht die Frage, wann $\tau = 0$ oder $\tau \neq 0$ ist. Es gibt drei Möglichkeiten.

a) Es sei $\alpha = -\beta$, $\mu \neq 0$. Die Gleichung (8) hat dann die Form

$$(1 + \beta - \lambda\beta)^p = \mu^p(1 + \beta - \lambda\beta)^k\,. \tag{19}$$

Diese Gleichung besitzt zuerst eine $(p - k)$-fache Wurzel $\lambda = (1 + \beta)/\beta$, d.h. $\tau = 0$. Man kann leicht beweisen, dass die Zahl $\lambda = (1 + \beta)/\beta$ dann ein Eigenwert der

Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ ist. Es sei $\mathbf{x}_0$ ein Eigenvektor der Matrix $\mathbf{U}$. Alle Diagonalblöcke dieser Matrix sind Nullmatrizen und es ist also

$$0 = \mathbf{U}\mathbf{x}_0 \,. \tag{20}$$

Wenn man jetzt in (9) $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\lambda = (1 + \beta)/\beta$, $\alpha = -\beta$ einsetzt, bekommt man angesichts (20) eine Identität, sodass $\lambda = (1 + \beta)/\beta$ wirklich ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ ist.

Es sei nun λ eine Wurzel der Matrix (19) und $\lambda \neq (1 + \beta)/\beta$. Dann ist $\tau \neq 0$.

b) Es sei $\alpha = -\beta$, $\mu = 0$. Dann besitzt die Gleichung (8) eine einige p-fache Wurzel $\lambda = (1 + \beta)/\beta$, d.h. es ist $\tau = 0$. Für diese Wurzel λ kann man ebenso wie im Falle a) beweisen, dass sie einen Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ darstellt.

c) Es sei $\alpha \neq -\beta$. Wir zeigen, dass dann $\tau \neq 0$ ist. Wenn nämlich $\tau = 1 + \beta - \lambda\beta = 0$ wäre, würde $\lambda = (1 + \beta)/\beta$ gelten und aus (8) würde folgen, dass $1 - \alpha + [(1 + \beta)/\beta]\,\alpha = 0$ oder $\beta = -\alpha$ gilt, was zu einem Widerspruch führt.

Andere Möglichkeiten gibt es nicht. Wir haben gesehen, dass für $\tau = 0$ der Satz 1 bewiesen ist. Im folgenden werden wir uns mit dem Fall befassen, wenn $\tau \neq 0$ ist.

Es sei also λ eine Wurzel der Gleichung (8) und es sei $\tau \neq 0$, d.h. $\lambda \neq (1 + \beta)/\beta$. Es sei vorausgesetzt, dass dem Eigenwert μ^p der Matrix $\mathbf{B}^p$ der Eigenvektor $\mathbf{y}$ entspricht. Da $\tau = 1 + \beta - \lambda\beta \neq 0$ ist, folgt aus (8) die Beziehung (17). Aus (17) und (14) bekommt man dann leicht die Beziehung (10). Da beide Matrizen $\tau\mathbf{L} + \mathbf{U}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$ zyklische Matrizen vom Index p sind, ist die Zahl σ (vgl. Satz 3 in [4]) ein Eigenwert der Matrix $\tau\mathbf{L} + \mathbf{U}$, d.h. es gilt (9) und hiervon folgt, dass λ der Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ ist, was zu beweisen war.

Dadurch ist der Satz 1 gänzlich bewiesen.

In der Arbeit [4] wurde der Fall IV, wo $\alpha = 1$, $\beta = -\omega$ ist, untersucht. Für diesen folgt aus Satz 1 der folgende Satz:

2. *Die Matrizen* $\mathbf{B}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ *sollen die Voraussetzungen* (3) *und* (7) *erfüllen. Es sei* λ *ein Eigenwert der Matrix* $\mathbf{T}(1, -\omega)$, $\omega \neq 0$. *Falls* $\lambda \neq (\omega - 1)/\omega$ *ist und falls die Zahl* μ *die Beziehung*

$$\lambda^p = \mu^p(1 - \omega + \lambda\omega)^k \,, \tag{21}$$

erfüllt, ist μ *ein Eigenwert der Matrix* $\mathbf{B}$. *Falls dagegen* μ *ein Eigenwert der Matrix* $\mathbf{B}$ *ist, dann ist jede der Beziehung* (21) *genügende Zahl* λ *ein Eigenwert der Matrix* $\mathbf{T}(1, -\omega)$.

Der Satz 2 ist äquivalent mit dem Satz 1 des Artikels [4]. Im Satz 1 des Artikels [4] ist die Voraussetzung $\lambda \neq (\omega - 1)/\omega$ durch die äquivalente Voraussetzung $\omega \neq 1$ oder gleichzeitig $\omega = 1$ und $\lambda \neq 0$ ersetzt. Wenn nämlich gleichzeitig $\omega = 1$ und $\lambda \neq 0$ gilt, ist $\lambda = (\omega - 1)/\omega = 0$, was ein Widerspruch ist. Wenn ferner $\omega \neq 1$ ist, folgt aus (9) für $\alpha = 1$, $\beta = -\omega$ die Beziehung

$$\lambda^p = \mu^p \left(1 - \omega + \frac{\omega - 1}{\omega} \omega\right)^k = 0 ,$$

sodass $\lambda = 0$ ist, was wieder ein Widerspruch ist.

Man bemerke noch, dass die Gleichung (8), die den Zusammenhang der Eigenwerte der Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ ausdrückt, und die Bedingung $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ in den Spezialfällen II) bis VII) die folgende spezielle Form haben (die Fälle II) und IV), d.h. das Jacobische und das extrapolierte Jacobische Verfahren, sind hier nicht eingeschlossen, da $\beta = 0$ ist):

Methode	$\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$	Gleichung (8)
II	$\lambda \neq 0$	$\lambda^p = \mu^p \lambda^k$
III	$\lambda \neq 0$	$(\omega - 1 + \lambda)^p = \mu^p \omega^p \lambda^k$
V	$\lambda \neq 1 - \omega$	$(\omega - 1 + \lambda)^p = \mu^p \omega^{p-k} (\omega - 1 + \lambda)^k$
VI	$\lambda \neq (\omega - 1)/\omega$	$\lambda^p = \mu^p (1 - \omega + \lambda\omega)^k$
VII	$\lambda \neq 1 - \varphi$	$(\varphi\omega - 1 + \lambda)^p = \mu^p \omega^p \varphi^{p-k} (\varphi - 1 + \lambda)^k$

Vollständigheitshalber betrachte man zum Schluss das sog. extrapolierte Jacobi-Verfahren (siehe Fall IV). Hier ist $\beta = 0$, sodass die Voraussetzungen des Satzes 1 nicht erfüllt sind. Es sei λ ein Eigenwert der Matrix

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\omega}, 0\right) = (1 - \omega)\, \mathbf{E} + \omega \mathbf{B} , \quad \omega \neq 0 .$$

Dann existiert ein solcher Vektor $\mathbf{x}$, dass

$$(1 - \omega)\, \mathbf{E x} + \omega \mathbf{B x} = \lambda \mathbf{x}$$

oder

$$\frac{\lambda - 1 + \omega}{\omega} \mathbf{x} = \mathbf{B x}$$

gilt. Die Zahl $\mu = (\lambda - 1 + \omega)/\omega$ ist dann ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$, sodass zwischen Eigenwerten der Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{T}(1/\omega, 0)$ die Beziehung

$$\lambda - 1 + \omega = \mu\omega \tag{22}$$

gilt. Die Eigenvektorräume, die den einander durch die Beziehung (22) entsprechenden Eigenwerten λ, μ zugehören, sind dabei identisch. Man bemerke noch, dass die Beziehung (22) für eine beliebige Matrix $\mathbf{B}$ gilt.

Literaturverzeichnis

[1] *Kjellberg, G.:* On the successive over-relaxation method for cyclic operators. Numerische Math., 3, 1961, 87—91.
[2] *Varga, R. S.:* Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, INC, 1962.
[3] *Koliha, J. J.:* On the iterative solution of linear operator equations with self-adjoint operators. The Journal of the Australian mathematical society, vol. XIII, Part 2, 1972, 241—255.
[4] *Šisler, M.:* Über ein Iterationsverfahren für zyklische Matrizen. Aplikace matematiky, 17, 1972, 225—233.
[5] *Šisler, M.:* Über die Konvergenz eines gewissen Iterationsverfahrens für zyklische Matrizen. Aplikace matematiky, 18, 1973, 89—98.

Souhrn

O JEDNÉ DVOUPARAMETRICKÉ ITERAČNÍ METODĚ

MIROSLAV ŠISLER

Práce se zabývá jistou obecnou iterační metodou pro řešení soustavy lineárních rovnic tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde matice $\mathbf{B}$ je tvaru $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$, přičemž $\mathbf{L}$, resp. $\mathbf{U}$ je dolní, resp. horní trojúhelníková matice. Dále se předpokládá, že matice $\mathbf{B}$ představuje lineární operátor zobrazující vektorový prostor R do R, že prostor R je direktním součtem podprostorů $v_1, \ldots, v_m$ a že platí vztahy $\mathbf{L}v_i \subset v_{i+h}$, $\mathbf{U}v_i \subset v_{i-k}$, $i = 1, \ldots, m$ ($v_j = 0$ pro $j < 1$ a $j > m$), kde $h + k = p \leqq m$ a h, k jsou přirozená nesoudělná čísla. Iterační metoda je definována vzorcem

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta)\, \mathbf{x}_\nu + \mathbf{P}(\alpha, \beta)\,,$$

kde

$$\mathbf{T}(\alpha, \beta) = (\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L})^{-1} \left[(\alpha - 1)\, \mathbf{E} + (\beta + 1)\, \mathbf{L} + \mathbf{U}\right]$$

a

$$\mathbf{P}(\alpha, \beta) = (\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L})^{-1}\,, \alpha \neq 0\,.$$

Vhodnou volbou dvou parametrů α, β přechází tato metoda v některé známé metody (např. v Jacobiho, Gauss-Seidelovu, superrelaxační, extrapolovanou Jacobiho, extrapolovanou Gauss-Seidelovu, extrapolovanou superelaxační a též v metodu zkoumanou týmž autorem v práci [4]). V práci je dokázána formule (8) vyjadřující vzájemnou souvislost vlastních čísel matice $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ a $\mathbf{B}$, umožňující odhadnout rychlost konvergence zkoumané iterační metody, případně srovnávat její rychlost s rychlostí známých iteračních metod.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Miroslav Šisler*, CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, 115 67 Praha 1.