

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков, С. М. Ситник, О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 239–250

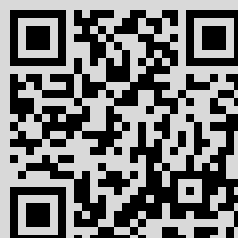
DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 106.51.226.7

24 августа 2022 г., 14:48:09





О константах Рисса

для некоторых систем целочисленных сдвигов

Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков, С. М. Ситник

В работе изучаются однопараметрические семейства целочисленных сдвигов функций Гаусса и Лоренца. В случае функции Лоренца получены формулы для коэффициентов ряда, задающего узловые функции, и показано, что предельным значением узловых функций является функция отсчетов. Для систем сдвигов, порожденных как функциями Гаусса и Лоренца, так и связанными с ними узловыми функциями, получены явные выражения для констант Рисса и изучено поведение этих констант в зависимости от параметра. Установленная при доказательстве результатов работы монотонность одного специального отношения тета-функций Якоби имеет самостоятельное значение.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10386

1. Введение. Время до 1950-х годов можно назвать господством ортогональных систем функций в математике, которое длилось почти два с половиной века [1]. После этого рубежа началось время широкого использования неортогональных систем, поскольку они лучше приспособлены для описания локальных свойств изучаемых функций, а не их упрощенных средних характеристик. Обычно платой за неортогональность является неустойчивость численных методов решения поставленных задач. Мерой неустойчивости служит соотношение констант Рисса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1; с. 17], [2; с. 13]. Функции $\varphi_k(t) \in L_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют систему Рисса, если существуют положительные константы A и B такие, что для любой последовательности коэффициентов $c \in l_2$ выполнена двусторонняя оценка

$$A\|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(t) \right\|_{L_2}^2 \leq B\|c\|_{l_2}^2.$$

Наибольшая из величин A называется *нижней константой Рисса*, наименьшая из величин B – *верхней константой Рисса*. Для ортонормированных систем функций обе константы равны 1. В случае конечного набора линейно независимых функций $\varphi_k(t)$ аналогами констант Рисса являются минимальное и максимальное собственные значения матрицы Грама, образованной попарными скалярными произведениями этих функций [1; с. 489]. Число обусловленности матрицы Грама равно отношению максимального собственного значения к минимальному. Если оно

велико, то матрица называется *плохо обусловленной* и при работе с ней требуется применять специальные приемы для обеспечения устойчивости вычислений [3; с. 163].

Широкий класс разложений в функциональные ряды может быть охарактеризован как аппроксимации по мультипликативным или аддитивным сдвигам одной функции $\varphi(t)$. Наиболее известными представителями семейства разложений по мультипликативным сдвигам вида

$$\sum_k f_k \varphi(a_k t),$$

где f_k – искомые коэффициенты разложения заданной функции $f(t)$, a_k – заданный набор сдвигов (масштабирующих коэффициентов), являются ряды Фурье, ряды Каптейна и Шлемильха по функциям Бесселя [4].

Второе семейство – это аппроксимации аддитивными сдвигами вида

$$\sum_k f_k \varphi(t - b_k),$$

где b_k – заданный набор сдвигов. Сюда относятся разложения с использованием формулы Уиттекера–Шеннона–Котельникова, сплайнов Стренга–Фикса, функций Рвачёвых и многие другие.

На комбинациях двух указанных семейств разложений построены теории всплесков [1], [2], [5] и фреймов [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $\tilde{\varphi}(t)$, являющаяся линейной комбинацией системы целочисленных аддитивных сдвигов $\varphi_k(t) = \varphi(t - k)$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \varphi(t - k), \quad (1.1)$$

называется *узловой функцией*, если для нее выполнена система равенств

$$\tilde{\varphi}(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (1.2)$$

где δ_{0m} – символ Кронекера.

С помощью узловой функции решается задача интерполяции на бесконечной равномерной сетке, поскольку функция

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \tilde{\varphi}(t - n)$$

совпадает с функцией $f(t)$ в целых узлах, т.е. $\tilde{f}(m) = f(m)$ при $m \in \mathbb{Z}$.

В данной статье рассматриваются системы целочисленных аддитивных сдвигов функции Гаусса $\varphi(t) = \exp(-t^2/(2\sigma^2))$ и функции Лоренца $\varphi(t) = \sigma^2/(\sigma^2 + t^2)$. Для исходных систем, а также для систем, порожденных сдвигами соответствующих узловых функций, получены явные аналитические формулы для констант Рисса и изучено их предельное поведение при $\sigma \rightarrow \infty$.

Название *функция Лоренца* мы используем для краткости. Более точно, эта функция возникла у Коши как плотность соответствующего вероятностного распределения, в физических приложениях используются названия функция Лоренца [7; с. 23] и функция Брейта–Вигнера.

2. Основные результаты. Для функции Гаусса в дальнейшем используется индекс G , для функции Лоренца – индекс L . Все изучаемые в работе величины рассматриваются как функции, зависящие от параметра $\sigma > 0$. В таблице 1 представлены введенные нами обозначения.

Таблица 1. Основные обозначения

Исходная функция $\varphi(t)$	Функция Гаусса $\varphi_G(t, \sigma) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$	Функция Лоренца $\varphi_L(t, \sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$
Константы Рисса для системы сдвигов $\varphi(t - k)$	$A_G(\sigma), B_G(\sigma)$	$A_L(\sigma), B_L(\sigma)$
Коэффициенты d_k ряда для узловой функции	$d_{G,k}(\sigma)$	$d_{L,k}(\sigma)$
Узловая функция $\tilde{\varphi}(t)$	$\tilde{\varphi}_G(t, \sigma)$	$\tilde{\varphi}_L(t, \sigma)$
Константы Рисса для сдвигов узловой функции	$\tilde{A}_G(\sigma), \tilde{B}_G(\sigma)$	$\tilde{A}_L(\sigma), \tilde{B}_L(\sigma)$

В статье [8] показано, что целочисленные сдвиги функции Гаусса образуют систему Рисса с константами

$$A_G(\sigma) = \sigma\sqrt{\pi}\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2}, q\right), \quad B_G(\sigma) = \sigma\sqrt{\pi}\vartheta_3(0, q), \quad q = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\right),$$

где $\vartheta_3(t, q)$ – третья тета-функция Якоби [9; с. 336]

$$\vartheta_3(t, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikt}, \quad |q| < 1. \quad (2.1)$$

В настоящей работе получены также явные выражения для констант Рисса в случае функции Лоренца.

ТЕОРЕМА 1. *Целочисленные сдвиги функции Лоренца образуют систему Рисса с константами*

$$A_L(\sigma) = \frac{\sigma^2\pi^2}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)}, \quad B_L(\sigma) = \frac{\sigma^2\pi^2 \operatorname{ch}(2\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)}.$$

Численные значения констант Рисса для рассматриваемых двух случаев представлены в таблице 2. Все значащие цифры верные (с точностью до округления).

Перейдем к узловым функциям. В случае функции Гаусса аналитическое выражение для коэффициентов d_k из формулы (1.1) приведено в [10; с. 152]:

$$d_{G,k}(\sigma) = \frac{1}{C(\sigma)} \cdot \exp\left(\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Аналогичное утверждение нами доказано и для случая функции Лоренца.

ТАБЛИЦА 2. Значения констант Рисса для систем сдвигов, порожденных функцией Гаусса и функцией Лоренца

σ	$A_G(\sigma)$	$B_G(\sigma)$	$B_G(\sigma)/A_G(\sigma)$	$A_L(\sigma)$	$B_L(\sigma)$	$B_L(\sigma)/A_L(\sigma)$
0.2	0.353	0.356	1.01	0.245	0.464	1.90
0.4	0.415	1.009	2.43	0.258	1.600	6.21
0.6	0.130	2.262	17.46	0.164	3.557	21.70
1.0	$6.45 \cdot 10^{-4}$	6.283	$9.67 \cdot 10^3$	0.037	9.870	267.75
2.0	$3.60 \cdot 10^{-16}$	25.13	$6.98 \cdot 10^{16}$	$2.75 \cdot 10^{-4}$	39.48	$1.43 \cdot 10^5$
3.0	$3.00 \cdot 10^{-37}$	56.55	$1.88 \cdot 10^{38}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	88.83	$7.68 \cdot 10^7$
4.0	$5.28 \cdot 10^{-67}$	100.53	$1.91 \cdot 10^{68}$	$3.84 \cdot 10^{-9}$	157.91	$4.11 \cdot 10^{10}$
5.0	$2.18 \cdot 10^{-105}$	157.08	$7.19 \cdot 10^{106}$	$1.12 \cdot 10^{-11}$	246.74	$2.20 \cdot 10^{13}$

ТЕОРЕМА 2. Для коэффициентов узловой функции, построенной по системе сдвигов функции Лоренца, справедлива формула

$$d_{L,k}(\sigma) = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi^2} \int_0^\pi \frac{\cos(kt)}{\operatorname{ch}(\sigma t)} dt.$$

Подпространства, порожденные сдвигами узловой функции, совпадают с подпространствами, порожденными сдвигами исходной функции. Но константы Рисса различаются, поскольку базисы разные.

ТЕОРЕМА 3. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{A}_G(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{A}_L(\sigma) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{B}_G(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{B}_L(\sigma) = 1.$$

Соответственно, предел отношения верхней константы Рисса к нижней для узловых функций равен 2.

Случай функции Гаусса рассмотрен в [11]. Утверждение для $\tilde{B}_G(\sigma)$ там доказано, а для $\tilde{A}_G(\sigma)$ получен более слабый результат:

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{A}_G(\sigma) \leq \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь поведение узловых функций при $\sigma \rightarrow \infty$. Известно [12], что в случае функции Гаусса

$$\tilde{\varphi}_G(t, \sigma) \xrightarrow[\sigma \rightarrow \infty]{L_2(\mathbb{R})} \operatorname{sinc}(\pi t),$$

где функция отсчетов определяется так:

$$\operatorname{sinc}(\pi t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$

Нами установлено аналогичное утверждение и для функции Лоренца.

ТЕОРЕМА 4. Справедливо предельное соотношение

$$\tilde{\varphi}_L(t, \sigma) \xrightarrow[\sigma \rightarrow \infty]{L_2(\mathbb{R})} \operatorname{sinc}(\pi t).$$

Функция отсчетов порождает ортонормированную систему целочисленных сдвигов. Следовательно, предел нижней константы Рисса для обеих изучаемых узловых функций не равен нижней константе от предельной функции.

3. Доказательства. Основные инструменты при изучении систем сдвигов – это преобразование Фурье

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.1)$$

являющееся при таком выборе нормировочного множителя унитарным оператором в $L_2(\mathbb{R})$, и формула суммирования Пуассона [5; с. 85]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) \cdot e^{-ik\omega} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega + 2\pi k). \quad (3.2)$$

Выпишем образы Фурье по переменной t для функций Гаусса и Лоренца:

$$\widehat{\varphi}_G(\omega, \sigma) = \sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}\right), \quad \widehat{\varphi}_L(\omega, \sigma) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma|\omega|}. \quad (3.3)$$

Формула (3.2) для двух рассматриваемых функций имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot e^{-ik\omega} = \sigma \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2(\omega + 2\pi k)^2}{2}\right), \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + k^2} \cdot e^{-ik\omega} = \sigma \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\sigma|\omega + 2\pi k|}. \quad (3.5)$$

Из равенств (1.1) и (1.2) получается следующая бесконечная система уравнений относительно неизвестных d_k :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \varphi(m - k) = \delta_{0m}, \quad (3.6)$$

которая представляет собой систему типа свертки. Рассмотрим ряды Фурье с коэффициентами d_k и $\varphi(k)$

$$D(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-ikt}, \quad \Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{-ikt}.$$

Для решения системы уравнений (3.6) достаточно найти функцию $D(t) \in L_2(\mathbb{R})$ с коэффициентами Фурье d_k , удовлетворяющую равенству

$$D(t) \cdot \Phi(t) = 1 \quad (3.7)$$

при почти всех t . Следовательно, для нахождения коэффициентов d_k нужно разложить в ряд Фурье функцию $1/\Phi(t)$.

Ряд Фурье $D(t)$ называется *маской* [2; с. 23] (или *символом* [5; с. 10]) последовательности $\{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. В случае функции Гаусса маски $D(t)$ и $\Phi(t)$ будем обозначать как $D_G(t, \sigma)$ и $\Phi_G(t, \sigma)$, в случае функции Лоренца – как $D_L(t, \sigma)$ и $\Phi_L(t, \sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для систем целочисленных сдвигов одной заданной функции известно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5 [2; с. 16]. Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. Для того, чтобы система функций $\varphi(t-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, являлась системой Рисса с постоянными A, B , необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $\omega \in \mathbb{R}$ выполнялось соотношение

$$A \leq 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq B. \quad (3.8)$$

Сумма в неравенстве (3.8) представляет собой периодическую функцию от ω с периодом 2π . Поэтому, если обозначить

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2, \quad (3.9)$$

то константы Рисса находятся с помощью следующих соотношений:

$$A = \inf_{0 \leq \omega \leq 2\pi} P(\omega), \quad B = \sup_{0 \leq \omega \leq 2\pi} P(\omega).$$

В случае функции Гаусса $P(\omega)$ будем обозначать как $P_G(\omega, \sigma)$, а соответствующий ряд для узловой функции – как $\widetilde{P}_G(\omega, \sigma)$. Аналогично определяются для функции Лоренца величины $P_L(\omega, \sigma)$ и $\widetilde{P}_L(\omega, \sigma)$.

Подставляя образ Фурье функции Лоренца (3.3) в формулу (3.9), получим

$$P_L(\omega, \sigma) = \sigma^2 \pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma|\omega+2\pi k|}.$$

Раскроем модули, считая, что $\omega \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\begin{aligned} P_L(\omega, \sigma) &= \sigma^2 \pi^2 \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} e^{2\sigma(\omega+2\pi k)} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\sigma(\omega+2\pi k)} \right) \\ &= \sigma^2 \pi^2 \left(e^{2\sigma\omega} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4\sigma\pi k} + e^{-2\sigma\omega} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-4\sigma\pi k} \right). \end{aligned}$$

Получившиеся в последней формуле ряды легко вычисляются как суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий:

$$P_L(\omega, \sigma) = \sigma^2 \pi^2 \left(\frac{e^{2\sigma\omega-4\sigma\pi}}{1-e^{-4\sigma\pi}} + \frac{e^{-2\sigma\omega}}{1-e^{-4\sigma\pi}} \right) = \frac{\sigma^2 \pi^2 \operatorname{ch}(2\sigma(\omega-\pi))}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)}.$$

Минимальное значение $\operatorname{ch}(2\sigma(\omega-\pi))$ достигается при $\omega = \pi$, а максимальное – при $\omega = 0$ и $\omega = 2\pi$. Следовательно,

$$A_L(\sigma) = P_L(\pi, \sigma) = \frac{\sigma^2 \pi^2}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)}, \quad B_L(\sigma) = P_L(0, \sigma) = \frac{\sigma^2 \pi^2 \operatorname{ch}(2\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Вычислим $\Phi_L(t, \sigma)$, пользуясь формулой (3.5):

$$\Phi_L(t, \sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + k^2} e^{-ikt} = \sigma\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\sigma|t+2\pi k|}.$$

Разбив, как и при доказательстве теоремы 1, последний ряд в сумму двух геометрических прогрессий, получим

$$\Phi_L(t, \sigma) = \sigma\pi \frac{\operatorname{ch}(\sigma(t - \pi))}{\operatorname{sh}(\sigma\pi)}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (3.10)$$

Так как $\Phi_L(t, \sigma) > 0$ при всех значениях t , то на основании формулы (3.7)

$$D_L(t, \sigma) = \frac{1}{\Phi_L(t, \sigma)} = \frac{\operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi \operatorname{ch}(\sigma(t - \pi))} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{L,k}(\sigma) \cdot e^{-ikt}.$$

Отсюда находим

$$d_{L,k}(\sigma) = \frac{\operatorname{sh}(\sigma\pi)}{2\sigma\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{\operatorname{ch}(\sigma(t - \pi))} dt.$$

Преобразуем последнюю формулу, сделав в интеграле замену переменных $t - \pi = x$

$$d_{L,k}(\sigma) = \frac{\operatorname{sh}(\sigma\pi)}{2\sigma\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikx}}{\operatorname{ch}(\sigma x)} dx = \frac{\operatorname{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi^2} \cdot (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx)}{\operatorname{ch}(\sigma x)} dx.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3: СЛУЧАЙ ФУНКЦИИ ЛОРЕНЦА. Сначала найдем образ Фурье узловой функции:

$$\widehat{\varphi}_L(\omega, \sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{L,k} \cdot \widehat{\varphi}_L(\omega, \sigma) e^{-ik\omega} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma|\omega|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{L,k}(\sigma) e^{-ik\omega}.$$

Следовательно,

$$\widehat{\varphi}_L(\omega, \sigma) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma|\omega|} \cdot D_L(\omega, \sigma) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma|\omega|} \frac{1}{\Phi_L(\omega, \sigma)}. \quad (3.11)$$

Вычислим $\widetilde{P}_L(\omega, \sigma)$ с помощью (3.9):

$$\widetilde{P}_L(\omega, \sigma) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sigma \sqrt{\pi/2} e^{-\sigma|\omega+2\pi k|}}{\Phi_L(\omega + 2\pi k, \sigma)} \right|^2 = \sigma^2 \pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\sigma|\omega+2\pi k|}}{|\Phi_L(\omega + 2\pi k, \sigma)|^2}.$$

В силу периодичности $\Phi_L(\omega, \sigma)$ и с учетом (3.10) получим

$$\widetilde{P}_L(\omega, \sigma) = \frac{\sigma^2 \pi^2}{|\Phi_L(\omega, \sigma)|^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma|\omega+2\pi k|} = \frac{\operatorname{sh}^2(\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)} \cdot \frac{\operatorname{ch}(2\sigma(\omega - \pi))}{\operatorname{ch}^2(\sigma(\omega - \pi))}. \quad (3.12)$$

Для нахождения констант Рисса необходимо теперь найти максимум и минимум полученной функции на отрезке $\omega \in [0, 2\pi]$. Преобразуем последнее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh}^2(\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)} \cdot \frac{\operatorname{ch}(2\sigma(\omega - \pi))}{\operatorname{ch}^2(\sigma(\omega - \pi))} &= \frac{\operatorname{sh}^2(\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)} \cdot \frac{2 \operatorname{ch}^2(\sigma(\omega - \pi)) - 1}{\operatorname{ch}^2(\sigma(\omega - \pi))} \\ &= \frac{\operatorname{sh}^2(\sigma\pi)}{\operatorname{sh}(2\sigma\pi)} \cdot \left(2 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\sigma(\omega - \pi))} \right). \end{aligned}$$

Полученная функция минимальна при $\omega = \pi$ и максимальна при $\omega = 0$ или $\omega = 2\pi$. Таким образом, получаем

$$\tilde{A}_L(\sigma) = \frac{\text{sh}^2(\sigma\pi)}{\text{sh}(2\sigma\pi)}, \quad \tilde{B}_L(\sigma) = \frac{\text{sh}^2(\sigma\pi)}{\text{sh}(2\sigma\pi)} \left(2 - \frac{1}{\text{ch}^2(\sigma\pi)} \right).$$

Осталось перейти к пределу при $\sigma \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{A}_L(\sigma) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\text{sh}(\sigma\pi)}{2 \text{ch}(\sigma\pi)} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\text{th}(\sigma\pi)}{2} = \frac{1}{2}. \\ \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{B}_L(\sigma) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{sh}^2(\sigma\pi)}{\text{sh}(2\sigma\pi)} \right) \cdot \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{\text{ch}^2(\sigma\pi)} \right) = 1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3: СЛУЧАЙ ФУНКЦИИ ГАУССА. В работе [11] для функции $\tilde{P}_G(\omega, \sigma)$ получено соотношение

$$\tilde{P}_G(\omega, \sigma) = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\omega + 2\pi k)^2)}{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(\omega + 2\pi k)^2\right) \right]^2}. \quad (3.13)$$

В этой же работе показано, что максимум $\tilde{P}_G(\omega, \sigma)$ достигается в точке $\omega = 0$, вычислен предел при $\sigma \rightarrow \infty$ верхней константы Рисса

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{B}_G(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{P}_G(0, \sigma) = 1$$

и получена оценка сверху для предельного значения нижней константы Рисса: поскольку $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{P}_G(\pi, \sigma) = 1/2$, получаем

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{A}_G(\sigma) \leq \frac{1}{2}.$$

Для полного доказательства теоремы 3 осталось проверить, что функция $\tilde{P}_G(\omega, \sigma)$ принимает минимальное значение в точке $\omega = \pi$. Мы докажем более общее утверждение о монотонном убывании данной функции на интервале $(0, \pi)$ и монотонном возрастании на интервале $(\pi, 2\pi)$.

Преобразуем знаменатель (3.13) с помощью (3.4) и (2.1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2(\omega + 2\pi k)^2}{2}\right) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot e^{-ik\omega} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \vartheta_3\left(\frac{\omega}{2}, \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Сделаем аналогичное преобразование для числителя, получим равенство

$$\tilde{P}_G(\omega, \sigma) = \sigma\sqrt{\pi} \frac{\vartheta_3(\omega/2, \exp(-1/(4\sigma^2)))}{[\vartheta_3(\omega/2, \exp(-1/(2\sigma^2)))]^2}. \quad (3.14)$$

Введем следующие обозначения:

$$t = \frac{\omega}{2}, \quad t \in [0, \pi], \quad q = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\right), \quad P(t) = \frac{\tilde{P}_G(\omega, \sigma)}{\sigma\sqrt{\pi}}.$$

Тогда формула (3.14) примет вид

$$P(t) = \frac{\vartheta_3(t, q)}{[\vartheta_3(t, q^2)]^2}. \quad (3.15)$$

Воспользуемся тождеством Ватсона [13; с. 531]

$$\vartheta_3(t, q)\vartheta_3(w, q) = \vartheta_3(t+w, q^2)\vartheta_3(t-w, q^2) + \vartheta_2(t+w, q^2)\vartheta_2(t-w, q^2).$$

Выбрав $w = 0$, придем к равенству

$$\vartheta_3(t, q)\vartheta_3(0, q) = \vartheta_3^2(t, q^2) + \vartheta_2^2(t, q^2),$$

откуда следует другая форма записи (3.15)

$$P(t) = \frac{\vartheta_3(t, q)}{\vartheta_3^2(t, q^2)} = \frac{1}{\vartheta_3(0, q)} \left[1 + \left(\frac{\vartheta_2(t, q^2)}{\vartheta_3(t, q^2)} \right)^2 \right].$$

Обозначим $p = q^2$. Покажем, что функция $\vartheta_2(t, p)/\vartheta_3(t, p)$ монотонно убывает на интервале $(0, \pi)$. Согласно формуле для производной отношения двух тета-функций [14; с. 19]

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\vartheta_2(t, p)}{\vartheta_3(t, p)} \right] = -\vartheta_4^2(0, p) \frac{\vartheta_1(t, p)\vartheta_4(t, p)}{\vartheta_3^2(t, p)}.$$

Из представления тета-функций в виде бесконечного произведения [9; с. 344] следует, что $\vartheta_1(t, p)$ положительна при $t \in (0, \pi)$, а $\vartheta_3(t, p)$ и $\vartheta_4(t, p)$ положительны при всех $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, производная функции $\vartheta_2(t, p)/\vartheta_3(t, p)$ по t отрицательна при всех $t \in (0, \pi)$, а сама функция убывает. Так как $\vartheta_2(t, p)$ положительна при $t \in (0, \pi/2)$ и отрицательна при $t \in (\pi/2, \pi)$, то из формулы (3.15) следует монотонное убывание $P(t)$ на $(0, \pi/2)$ и монотонное возрастание на $(\pi/2, \pi)$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Так как преобразование Фурье (3.1) унитарно в $L_2(\mathbb{R})$, а образ Фурье функции $\text{sinc}(\pi t)$ равен $(1/\sqrt{2\pi})\chi_{[-\pi, \pi]}(\omega)$, где $\chi_{[a, b]}(\omega)$ – характеристическая функция отрезка $[a, b]$, то доказательство теоремы удобно проводить в образах Фурье. Согласно равенству Парсеваля и формуле (3.11)

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}_L(t, \sigma) - \text{sinc}(\pi t)\|_{L_2}^2 &= \left\| \widehat{\tilde{\varphi}}_L(\omega, \sigma) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{[-\pi, \pi]}(\omega) \right\|_{L_2}^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sigma\sqrt{\pi/2}e^{-\sigma|\omega|}}{\Phi_L(\omega, \sigma)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{[-\pi, \pi]}(\omega) \right|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Возведем подынтегральное выражение в квадрат. Обозначим интеграл (3.16) через I и разобьем его на три слагаемых: $I = I_1(\sigma) - 2I_2(\sigma) + I_3(\sigma)$, где

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \frac{\sigma^2 \pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-\sigma|\omega|}}{\Phi_L(\omega, \sigma)} \right)^2 d\omega, \\ I_2(\sigma) &= \frac{\sigma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|\omega|}}{\Phi_L(\omega, \sigma)} \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega) d\omega, \\ I_3(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{[-\pi, \pi]}(\omega)|^2 d\omega = 1. \end{aligned}$$

Для вычисления $I_1(\sigma)$ разобьем \mathbb{R} на отрезки $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$I_1(\sigma) = \frac{\sigma^2 \pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{e^{-2\sigma|\omega|}}{(\Phi_L(\omega, \sigma))^2} d\omega.$$

В каждом из интегралов сделаем замену переменных $\xi = \omega - 2\pi n$. С учетом того, что знаменатель является 2π -периодической функцией, получим

$$I_1(\sigma) = \frac{\sigma^2 \pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2\sigma|\xi+2\pi n|}}{(\Phi_L(\xi, \sigma))^2} d\xi.$$

Так как функция в знаменателе $\Phi_L(\xi, \sigma)$ непрерывна и строго положительна, а числитель экспоненциально убывает, то операции суммирования и интегрирования можно поменять местами. Получающуюся бесконечную сумму мы уже вычисляли в п. 3 (см. формулу (3.12)):

$$I_1(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{sh}^2(\sigma\pi)}{\text{sh}(2\sigma\pi)} \int_0^{2\pi} \frac{\text{ch}(2\sigma(\xi - \pi))}{\text{ch}^2(\sigma(\xi - \pi))} d\xi. \quad (3.17)$$

Интеграл (3.17) с использованием формулы для гиперболического косинуса двойного угла вычисляется аналитически. Приведем окончательный результат:

$$I_1(\sigma) = \left(1 - \frac{1}{2\sigma\pi} \cdot \text{th}(\sigma\pi) \right) \cdot \text{th}(\sigma\pi).$$

Поскольку $\text{th}(\sigma\pi) \rightarrow 1$ при $\sigma \rightarrow \infty$, то $I_1(\sigma) \rightarrow 1$.

Осталось рассмотреть слагаемое $I_2(\sigma)$. Из-за наличия множителя $\chi_{[-\pi, \pi]}(\omega)$ пределы интегрирования становятся конечными. Кроме того, подынтегральная функция четная, поэтому

$$I_2(\sigma) = \sigma \int_0^{\pi} \frac{e^{-\sigma\omega}}{\Phi_L(\omega, \sigma)} d\omega = \frac{\text{sh}(\sigma\pi)}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\sigma\omega}}{\text{ch}(\sigma(\omega - \pi))} d\omega. \quad (3.18)$$

Интеграл (3.18) также легко вычисляется аналитически:

$$I_2(\sigma) = (1 - e^{-2\sigma\pi}) \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sigma\pi} \ln \left(\frac{1 + e^{-2\sigma\pi}}{2} \right) \right). \quad (3.19)$$

Оба сомножителя в (3.19) стремятся к 1 при $\sigma \rightarrow \infty$, следовательно, и $I_2(\sigma) \rightarrow 1$. Таким образом, окончательно получаем

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \|\tilde{\varphi}_L(t, \sigma) - \text{sinc}(\pi t)\|_{L_2}^2 = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} I_1(\sigma) - 2 \lim_{\sigma \rightarrow \infty} I_2(\sigma) + \lim_{\sigma \rightarrow \infty} I_3(\sigma) = 0.$$

Теорема доказана.

4. Обсуждение результатов. Системы целочисленных сдвигов функции Гаусса широко используются в различных разделах физики, например, в теории когерентных состояний. Особенно популярной эта тематика стала после появления пакета прикладных программ “Gaussian”, предназначенного для расчета сложных молекул. В качестве базисных функций в этом пакете используются произведения сдвигов функции Гаусса на многочлены невысоких степеней. Как показано в монографии Мазы, Шмидта [10], системы сдвигов функции Гаусса могут быть применены для аппроксимации различных потенциалов, а также для решения линейных и нелинейных граничных задач математической физики. Вычислительные аспекты интерполяции с помощью сдвигов функции Гаусса рассмотрены в [15].

Системы целочисленных сдвигов функции Лоренца изучены существенно меньше. Но, как следует из доказанных в настоящей работе теорем, предельное поведение узловых функций и связанных с ними констант Рисса для случаев функций Гаусса и Лоренца практически одинаково. По-видимому, речь идет о какой-то общей закономерности, присущей достаточно широкому классу функций, порождающих системы целочисленных сдвигов.

Необходимо специально отметить, что неравенства для тета-функций Якоби и их различных отношений играют важную роль в математических и прикладных задачах. Например, в работе [16] неравенство о монотонности некоторого отношения тета-функций $\vartheta_2(x, q)$ является основным моментом при решении методом диссимметризации Дубинина обобщенной задачи Гончара о гармонической мере радикальных разрезов. Эта задача имеет длительную историю и свое развитие, в этом направлении см. [17]–[18] и библиографию в этих работах.

Две рассмотренные системы функций являются характерными для атомных спектров [7; с. 23, 25]. Дело в том, что даже в случае дискретных спектров действие различных механизмов приводит к уширению, т.е. к образованию некоторого спектрального распределения интенсивности вблизи частоты квантового перехода в атоме или молекуле. Функции Лоренца появляются, когда мал эффект Доплера. При сильном доплеровском уширении возникают функции Гаусса.

Сложные спектры состоят из суммы нескольких разнесенных по частотной оси функций. Требуется определить частоту и амплитуду каждой компоненты. Реальный сигнал задается, как правило, на равномерной сетке точек. Следовательно, математически задача представляет собой разложение сигнала по системе сдвигов одной функции.

Для надежного определения положения спектральной линии необходимо, чтобы на пике, связанном с этой линией, укладывалось как минимум 5–10 дискретных отсчетов, что соответствует значениям σ порядка 3–5. Следовательно, анализ устойчивости с ростом параметра σ используемых для разложения систем функций представляет большой практический интерес.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [2] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
- [3] Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, Наука, М., 1987.
- [4] D. Jankov, T. K. Pogány, “Integral representation of Schlömilch series”, *J. Classical Anal.*, 1:1 (2012), 75–84.

- [5] Ч. К. Чуи, *Введение в вэйлеты*, Мир, М., 2001.
- [6] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, 2003.
- [7] А. И. Дробышев, *Основы атомного спектрального анализа*, Изд-во С-Петербург. ун-та, СПб., 1997.
- [8] M. V. Zhuravlev, E. A. Kiselev, L. A. Minin, S. M. Sitnik, “Jacobi theta-functions and systems of integer shifted Gaussian functions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **173**:2 (2011), 231–241.
- [9] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*. Ч. 2. *Трансцендентные функции*, ГИФМЛ, М., 1963.
- [10] V. Maz’ya, G. Schmidt, *Approximate Approximations*, Math. Surveys Monogr., **141**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [11] М. В. Журавлев, “О константах Рисса для систем целочисленных сдвигов функции Гаусса”, *Научн. ведом. БелГУ. Матем. Физ.*, **22**:5 (100) (2011), 39–46.
- [12] Th. Schlumprecht, N. Sivakumar, “On the sampling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian”, *J. Approx. Theory*, **159**:1 (2009), 128–153.
- [13] *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [14] D. F. Lawden, *Elliptic Functions and Applications*, Appl. Math. Sci., **80**, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [15] М. В. Журавлев, Л. А. Минин, С. М. Ситник, “О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций”, *Научн. ведом. БелГУ. Матем. Физ.*, **17**/2:13 (68) (2009), 89–99.
- [16] А. Ю. Сольнин, “Гармоническая мера радиальных отрезков и симметризация”, *Матем. сб.*, **189**:11 (1998), 121–138.
- [17] A. Dixit, A. Roy, A. Zaharescu, “Convexity of quotients of theta functions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **386**:1 (2012), 319–331.
- [18] K. Schiefermayr, *Some New Properties of Jacobi’s Theta Functions*, 2013, arXiv: math.CV/1306.6220v1.

Е. А. Киселев

Воронежский государственный университет
E-mail: evg-kisel2006@yandex.ru

Поступило

29.08.2013

Исправленный вариант

02.12.2013

Л. А. Минин

Воронежский государственный университет
E-mail: mininla@mail.ru

И. Я. Новиков

Воронежский государственный университет
E-mail: igor.nvkv@gmail.com

С. М. Ситник

Воронежский институт МВД России
E-mail: pochtasms@gmail.com