
On images of weak Fano manifolds

Osamu Fujino and Yoshinori Gongyo

1 問題

$f : X \rightarrow Y$ を非特異複素射影多様体の中の滑らかな射とする。

問題: X のどのような性質が Y に遺伝するか？

定理 1: X がファノ多様体のとき、 Y もファノ多様体である。つまり、 $-K_X$ が豊富なら $-K_Y$ も豊富になる。

定理 2: $-K_X$ が数値的非負なら、 $-K_Y$ も数値的非負になる。

定理 1 と定理 2 は Kollár–宮岡–森による有理曲線の変形理論の応用としてよく知られている。定理 1 と定理 2 は正標数の世界でも正しいが、逆に正標数還元テクニックを使わない証明は知られていなかった。

2 主結果

定理 3: $-K_X$ が半豊富のとき、 $-K_Y$ は数値的非負である。

定理 4: X が弱ファノ多様体なら、 Y も弱ファノ多様体である。つまり、 $-K_X$ が数値的非負かつ巨大のとき、 $-K_Y$ も数値的非負かつ巨大である。

注意: 定理 3 は定理 2 より弱い結果であるが、証明には**正標数還元テクニック**を使わない。

注意: 定理 4 の証明も正標数還元テクニックは使わない。さらに、定理 4 の証明を精密化すると定理 1 の**正標数還元テクニック**を使わない証明も得られる。

3 予想

予想: $-K_X$ が半豊富のとき、 $-K_Y$ も半豊富である。

注意: 上の予想は**標準因子公式** (canonical bundle formula) に関する予想に帰着できる。したがって、少なくとも標数が零のときは正しいと思われる。

注意: $-K_X$ が巨大のとき $-K_Y$ は巨大か？という問題には簡単に反例が構成出来る。

4 標準因子公式

小平の標準因子公式の一般化

B が X 上の有効 \mathbb{Q} -因子とし、 (X, B) が川又対数的末端 (klt) で $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} f^* D$ とする。ただし、 D は Y 上の \mathbb{Q} -因子である。このとき、

$$D \sim_{\mathbb{Q}} K_Y + \Delta + M$$

と書ける。ここで、 Δ は $f : (X, B) \rightarrow Y$ の特異ファイバーからの寄与で決まる有効 \mathbb{Q} -因子で、 M は $f : (X, B) \rightarrow Y$ のモジュライから決まる \mathbb{Q} -因子である。

5 証明のアイデア

- (1) B を $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$ なる様を選ぶ。
- (2) 標準因子公式より $-K_Y \sim_{\mathbb{Q}} \Delta + M$ と書ける。ただし、 Δ と M は B に依存して決まる。
- (3) **藤田-川又の半正值性定理** (例えばHodge構造の変形理論より従う) より、 M はだいたい数値的非負と置いてよい。
- (4) C を Y 上の曲線とする。 $-K_Y \cdot C$ が非負を示すには、 M が数値的非負であることに注意すると、 $C \not\subset \Delta$ なる様に Δ が選べれば十分である。
- (5) B を一般に選ぶと Bertini の定理より $C \not\subset \Delta$ となるように出来る。

6 補足

証明のキーポイントは、 B を選ぶ際に自由度がある点である。

モジュライからの寄与 M はだいたい半豊富であると予想されている。この予想が正しければ**予想**は肯定的に解決される。

予想は、 $f : X \rightarrow Y$ のファイバーが1次元のときと、 Y の次元が2以下の場合には肯定的に解決出来ている。

定理4には globally F -regular variety の理論からのアプローチもある。

7 最後に

今回の仕事は東京大学の**権業善範**さんとの共同研究である。

今回の定理4は九州大学の**安武和範**さんの質問が出発点である。安武さんの明日の講演も聞いてください。