

УДК 519.21

**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ МЕР КАК
СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПУАССОНОВСКОЙ МЕРЕ**

Б. Григелионис

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — основное вероятностное пространство и пусть задана возрастающая система σ -алгебр \mathcal{F}_t , таких, что $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_{t+0}$, $t \geq 0$. Будем предполагать что σ -алгебры \mathcal{F} и \mathcal{F}_t , $t \geq 0$ наполнены по мере \mathbf{P} .

Говорим, что последовательность $m+1$ -мерных случайных векторов (τ_k, X_k) , $k \geq 1$, таких, что $0 < \tau_k \leq \infty$, а X_k принимает значения в m -мерном евклидовом пространстве (R_m, \mathcal{B}_m) , задает целочисленную случайную меру на σ -алгебре $\mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}_m^*$, согласованную с системой σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \geq 0$, если почти всюду по мере \mathbf{P} (п.в.) на множестве $\{\omega : \tau_k(\omega) < \infty\}$, $|X_k| > 0$, п.в. на множестве $\{\omega : \tau_k(\omega) < \infty\} \cup \{\omega : \tau_l(\omega) < \infty\}$, $\tau_k \neq \tau_l$, $k \neq l$, и $\{\tau_k \leq t, X_k \in \Gamma\} \in \mathcal{F}_t$ для всех $t > 0$, $k \geq 1$, $\Gamma \in \mathcal{B}_m$. Определим ее равенством:

$$p(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_A(\tau_k, X_k), \quad A \in \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}_m,$$

где χ_A — индикатор множества A .

Обозначим

$$p(t, \Gamma) = p([0, t] \times \Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{B}_m,$$

и допустим, что для всех $t < \infty$ и $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} \{p(t, U_\varepsilon) < \infty\} = 1, \quad \text{где } U_\varepsilon = \{x : |x| \geq \varepsilon\}.$$

Случайную меру $p(A)$, $A \in \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}_m$, называем пуассоновской, если для всех непересекающихся множеств A_1, \dots, A_k , таких, что $A_i \in \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}_m$ и $\mathbf{E} p(A_i) < \infty$, $i=1, \dots, k$, $k \geq 1$, значения $p(A_1), \dots, p(A_k)$ взаимно независимы и имеют пуассоновское распределение.

Основной целью настоящей работы является исследование условий, при которых для данной целочисленной случайной меры $p(A)$ можно построить, возможно, в определенном расширении основного вероятностного пространства пуассоновскую меру $\tilde{p}(A)$ со средним $\mathbf{E} \tilde{p}(A) = \int_A \frac{dx dt}{|x|^{m+1}}$, которую мы будем называть стандартной, так что

$$p(t, \Gamma) = \int_0^t \int_{R_m} \chi_\Gamma(\varphi(s, x)) \tilde{p}(ds, dx),$$

*) $\mathcal{B}[0, \infty)$ — σ -алгебра борелевских подмножеств интервала $[0, \infty)$.

где $\varphi(s, x)$ — определенная случайная функция со значениями в R_m , а интеграл понимается в смысле К. Ито [1]. Прежде, чем перейти к точным формулировкам, приведем ряд понятий и фактов теории мартингалов (см. [2] — [6]).

2. Случайный процесс $X(t)$, $t \geq 0$, принимающий значения в некотором измеримом пространстве, мы будем называть согласованным с системой σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \geq 0$, если при каждом t случайная величина X_t является \mathcal{F}_t -измеримой.

Обозначим $\mathfrak{M}^{(m)}$ класс всех m -мерных непрерывных справа интегрируемых с квадратом мартингалов относительно системы σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \geq 0$. Подкласс $\mathfrak{M}^{(m)}$ непрерывных п.в. мартингалов будем обозначать $\mathfrak{M}^{(m)}$.

Класс m -мерных случайных процессов $X(t)$, $t \geq 0$, согласованных с \mathcal{F}_t , таких, что существует возрастающая последовательность $\{T_n\}$ моментов останова (м.о.)^{*)}, $T_n \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и $X_{t \wedge T_n} \in \mathfrak{M}^{(m)}$ для всех $n \geq 1$ ^{**)}, мы обозначим $\mathfrak{M}^{(m), \text{loc}}$.

Далее, обозначим \mathfrak{A}^+ множество всех естественно возрастающих процессов (см. [4], [5]) $A(t)$, $t \geq 0$, согласованных с \mathcal{F}_t и $\mathbf{E} A(t) < \infty$ для всех $t < \infty$, $\mathfrak{A} = \{A : A = A_1 - A_2, A_1, A_2 \in \mathfrak{A}^+\}$. Аналогично определяются классы случайных процессов $\mathfrak{M}_c^{(m), \text{loc}}$, \mathfrak{A}_c , $\mathfrak{A}^{\text{loc}}$, $\mathfrak{A}_c^{\text{loc}}$. При $m=1$ верхний индекс (m) всюду будем опускать.

Известно [5], что для любых $X, Y \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}$ существует единственный с точностью до эквивалентности процесс $\langle X, Y \rangle \in \mathfrak{A}^{\text{loc}}$, такой, что п.в.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\left(X(t \wedge T_n) - X(s \wedge T_n) \right) \left(Y(t \wedge T_n) - Y(s \wedge T_n) \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \\ = \mathbf{E} \left[\langle X, Y \rangle_{t \wedge T_n} - \langle X, Y \rangle_{s \wedge T_n} \middle| \mathcal{F}_s \right] \end{aligned}$$

для всех $t \geq s \geq 0$, $n \geq 1$ и всех $\{T_n\}$, таких, что $X(t \wedge T_n)$, $Y(t \wedge T_n) \in \mathfrak{M}$.

Следуя [5], для каждого $X \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}$ определим класс случайных процессов $\mathbf{L}(\langle X \rangle)$ таким образом.

Пусть Φ — класс измеримых случайных процессов $\Phi(t)$, $t \geq 0$, таких, что $\Phi(T)$ \mathcal{F}_T -измерима для всех м.о. T , Φ_{rc} — класс ограниченных непрерывных справа, имеющих пределы слева случайных процессов и

$$\mathbf{L}(\langle X \rangle) = \Phi \cap \bar{\Phi}_{rc},$$

где $\bar{\Phi}_{rc} = \bigcup_{\{T_n\}} \bar{\Phi}_{rc}^{(T_n)}$ (суммируется по множеству всех монотонных последовательностей м.о. $\{T_n\}$, таких, что $T_n \uparrow \infty$ и $X(t \wedge T_n) \in \mathfrak{M}$ для всех $n \geq 1$), а $\bar{\Phi}_{rc}^{(T_n)}$

является замыканием Φ_{rc} по системе полунорм

$$\|\Phi\|_{\langle X \rangle, (t)}^{(T_n)} = \left[\mathbf{E} \left(\int_0^{t \wedge T_n} \Phi^2(s) d\langle X \rangle_s \right) \right]^{1/2}, \quad n \geq 1, t \in (0, \infty).$$

^{*)} Неотрицательная случайная величина T называется м.о., если $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для всех $t \geq 0$ и $\mathbf{P}\{T < \infty\} = 1$.

^{**)} $a \wedge b = \min(a, b)$.

Из результатов работы [5] (см. также [6]) следует, что для каждого $X \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}$ и $\Phi \in \mathbf{L}(\langle X \rangle)$ существует единственный с точностью до эквивалентности $Y \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}$ такой, что для всех $Z \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}$ п.в.

$$\langle Y, Z \rangle_t = \int_0^t \Phi(s) d\langle X, Z \rangle_s.$$

Y называется стохастическим интегралом от Φ по X и обозначается

$$Y(t) = \int_0^t \Phi(s) dX(s).$$

3. Рассмотрим теперь целочисленную случайную меру $p(A)$, $A \in \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}_m$, заданную последовательностью $\{(\tau_k, X_k)\}$, согласованную с системой σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \geq 0$, и предположим, что существует функция $\Pi(t, \Gamma) = \Pi(t, \omega, \Gamma)$, $(t, \omega, \Gamma) \in [0, \infty) \times \Omega \times \mathcal{B}_m$, являющаяся мерой по Γ при фиксированных (t, ω) , при каждом $\Gamma \in \mathcal{B}_m \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{F}$ — измеримая и $\Pi(T, \Gamma) \mathcal{F}_T$ — измеримая для каждого м.о. T , для некоторой последовательности м.о. $\{T_n\}$, $T_n \uparrow \infty$

$$\mathbb{E} \left(\int_0^{t \wedge T_n} \Pi(s, U_\varepsilon) ds \right) < \infty \text{ при всех } n \geq 1, \varepsilon > 0, t > 0,$$

и такая, что

$$q(t, \Gamma) = p(t, \Gamma) - \int_0^t \Pi(s, \Gamma) ds \in \mathfrak{M}^{\text{loc}} \quad (*)$$

для всех $\Gamma \in \mathcal{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Лемма 1 (ср. [7]). *При вышесделанных предположениях для всех $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$*

$$\langle q(\cdot, \Gamma_1), q(\cdot, \Gamma_2) \rangle_t = \int_0^t \Pi(s, \Gamma_1 \cap \Gamma_2) ds. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть последовательность м.о. $\{T_n\}$, $T_n \uparrow \infty$, такая, что $q(t \wedge T_n, \Gamma_i) \in \mathfrak{M}$, $i=1, 2$. Для краткости обозначим

$$q(t \wedge T_n, \Gamma) = q_n(t, \Gamma), \quad p(t \wedge T_n, \Gamma) = p_n(t, \Gamma)$$

и

$$\int_0^{t \wedge T_n} \Pi(s, \Gamma) ds = \Pi_n(t, \Gamma).$$

Пусть $0 < \delta < 1$. Для фиксированных $0 < s < t < \infty$, очевидно, можно выбрать последовательность м.о. $\{\sigma_n\}$ так, что $\sigma_0 \equiv s$, $\sigma_k \leq \sigma_{k+1}$, $k \geq 0$, существует $k_0 = k_0(\omega) < \infty$, такое, что п.в. $\sigma_k = t$ при всех $k \geq k_0$, и

$$\sup_{u, v \in \{\sigma_k, \sigma_{k+1}\}} |Y_n(u) - Y_n(v)| \leq \delta, \quad k \geq 0,$$

где

$$Y_n(t) = (p_n(t, \Gamma_1), p_n(t, \Gamma_2), \Pi_n(t, \Gamma_1), \Pi_n(t, \Gamma_2)).$$

Имеем, что

$$\begin{aligned}
 & \left(q_n(t, \Gamma_1) - q_n(s, \Gamma_1) \right) \left(q_n(t, \Gamma_2) - q_n(s, \Gamma_2) \right) = \\
 & = \sum_{i, j=1}^{\infty} \left(q_n(\sigma_i, \Gamma_1) - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1) \right) \left(q_n(\sigma_j, \Gamma_2) - q_n(\sigma_{j-1}, \Gamma_2) \right) = \\
 & = \sum_{i=1}^{\infty} \left(q_n(\sigma_i, \Gamma_1) - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1) \right) \left(q_n(\sigma_i, \Gamma_2) - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2) \right) = \\
 & = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(q_n(\sigma_i, \Gamma_1) - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1) \right) q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2) + \left(q_n(\sigma_i, \Gamma_2) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2) \right) q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1) \right]. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Поскольку для всех $i \geq 1$ и $k=1, 2$

$$\Pi_n(\sigma_i, \Gamma_k) - \Pi_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_k) \leq \delta, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\infty} \left(p_n(\sigma_i, \Gamma_1) - p_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1) \right) \left(p_n(\sigma_i, \Gamma_2) - p_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2) \right) = \\
 & = p_n(t, \Gamma_1 \cap \Gamma_2) - p_n(s, \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \tag{4}
 \end{aligned}$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(p_n(\sigma_i, \Gamma_k) - p_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_k) \right) = p_n(t, \Gamma_k) - p_n(s, \Gamma_k), \tag{5}$$

то из (3)–(5) получаем, что

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\infty} \left(q_n(\sigma_i, \Gamma_1) - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1) \right) \left(q_n(\sigma_i, \Gamma_2) - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2) \right) = \\
 & = p_n(t, \Gamma_1 \cap \Gamma_2) - p_n(s, \Gamma_1 \cap \Gamma_2) + R_n(s, t, \Gamma_1, \Gamma_2), \tag{6}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_n(s, t, \Gamma_1, \Gamma_2) = & - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left(\Pi_n(\sigma_i, \Gamma_1) - \Pi_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1) \right) \left[\left(p_n(\sigma_i, \Gamma_2) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - p_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2) \right) - \left(\Pi_n(\sigma_i, \Gamma_2) - \Pi_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2) \right) \right] + \left(p_n(\sigma_i, \Gamma_1) - \right. \\
 & \left. - p_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1) \right) \left(\Pi_n(\sigma_i, \Gamma_2) - \Pi_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2) \right) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

и

$$|R_n(s, t, \Gamma_1, \Gamma_2)| \leq \delta \left(p_n(t, \Gamma_1) + p_n(t, \Gamma_2) + \Pi_n(t, \Gamma_1) \right). \tag{7}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 q_k = & \sum_{i=1}^k \left[\left(q_n(\sigma_i, \Gamma_1) - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1) \right) q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2) + \right. \\
 & \left. + \left(q_n(\sigma_i, \Gamma_2) - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2) \right) q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1) \right]
 \end{aligned}$$

и заметим, что $\{q_k, \mathcal{F}_{\sigma_k}, k \geq 1\}$ является мартингалом, поскольку из известных свойств мартингалов (см., например, [2], гл. VII), имеем, что $(q_n(\sigma_k, \Gamma_j), \mathcal{F}_{\sigma_k}, k \geq 0), j = 1, 2$, являются мартингалами и

$$\mathbf{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t} (q_n(u, \Gamma_j))^2 \right] \leq 4 \mathbf{E} (q_n(t, \Gamma_j))^2 < \infty, \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Покажем, что

$$\mathbf{E} |q_k| \leq C < \infty, \quad (9)$$

где C не зависит от k .

В силу того, что при каждом $k \geq 2$ п.в.

$$\mathbf{E} (q_k | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E} (\mathbf{E} (q_k | \mathcal{F}_{\sigma_k}) | \mathcal{F}_s) = 0,$$

то из (9) будет следовать, что п.в.

$$\mathbf{E} (q_\infty | \mathcal{F}_s) = 0. \quad (10)$$

Имеем, что

$$\begin{aligned} q_k &= (q_n(\sigma_k, \Gamma_1) - q_n(s, \Gamma_1)) (q_n(\sigma_k, \Gamma_2) - q_n(s, \Gamma_2)) - \\ &- \sum_{i=1}^k (q_n(\sigma_i, \Gamma_1) - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1)) (q_n(\sigma_i, \Gamma_2) - q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2)). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (3)–(7) и (11) получаем, что

$$\begin{aligned} |q_k| &\leq \frac{1}{2} \left[\sup_{s \leq u \leq t} (q_n(u, \Gamma_1) - q_n(s, \Gamma_1))^2 + \sup_{s \leq u \leq t} (q_n(u, \Gamma_2) - \right. \\ &\left. - q_n(s, \Gamma_2))^2 \right] + p_n(t, \Gamma_1 \cap \Gamma_2) + \delta (p_n(t, \Gamma_1) + p_n(t, \Gamma_2) + \Pi_n(t, \Gamma_1)). \end{aligned}$$

Отсюда и (8) следует (9) и тем самым (10).

Теперь из (2), (6) и (10) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[(q_n(t, \Gamma_1) - q_n(s, \Gamma_1)) (q_n(t, \Gamma_2) - q_n(s, \Gamma_2)) | \mathcal{F}_s \right] &= \\ = \mathbf{E} \left[(\Pi_n(t, \Gamma_1 \cap \Gamma_2) - \Pi_n(s, \Gamma_1 \cap \Gamma_2)) | \mathcal{F}_s \right] + \\ + \mathbf{E} (R_n(s, t, \Gamma_1, \Gamma_2) | \mathcal{F}_s). \end{aligned} \quad (12)$$

Но, ввиду (7), п.в.

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E} (R_n(s, t, \Gamma_1, \Gamma_2) | \mathcal{F}_s) \right| &\leq \delta \mathbf{E} \left[(2\Pi_n(t, \Gamma_1) + \right. \\ &\left. + \Pi_n(t, \Gamma_2)) | \mathcal{F}_s \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12) и (13) в силу произвольности δ следует (1). Лемма 1 доказана.

Перейдем к определению стохастических интегралов по мерам p и q .

Пусть \mathbf{F} -класс $\mathcal{B} [0, \infty) \times \mathcal{B}_m \times \mathcal{F}$ — измеримых функций $f(t, x) = f(t, x, \omega)$, таких, что при каждом фиксированном x $f(T, x) \mathcal{F}_T$ — измерима для любого

м.о. T . Обозначим F_p подкласс функций $f \in F$, для которых суммы $\sum_{\tau_k \leq t} f(\tau_k, X_k)$, сходятся [п.в.]. Значение этой суммы мы будем называть интегралом функции f по мере p и обозначать

$$P_f(t) = \int_0^t \int_{R_m} f(s, x) p(ds, dx).$$

Далее, обозначим F_Q подкласс функций $f \in F$, таких, что

$$\mathbf{E} \left(\int_0^{t \wedge T_n} \int_{R_m} f^2(s, x) \Pi(s, dx) ds \right) < \infty$$

для некоторой последовательности $\{T_n\}$ м.о., $T_n \uparrow \infty$, и всех $n \geq 1$, $t > 0$.

Используя соотношение (1) стандартным образом для функций $f \in F_Q$ интеграл по мере q , обозначаемый

$$Q_f(t) = \int_0^t \int_{R_m} f(s, x) q(ds, dx),$$

можно определить как единственный с точностью до эквивалентности процесс $Q_f \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}$, такой, что

1) если $f(s, x) = \Phi(s) \chi_\Gamma(x)$, $\Phi \in L(\langle q(\cdot, \Gamma) \rangle)$, $\Gamma \in \mathfrak{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то

$$Q_f(t) = \int_0^t \Phi(s) q(ds, \Gamma);$$

2) если $f_1, f_2 \in F_Q$ и a_1, a_2 — действительные числа, то

$$Q_{a_1 f_1 + a_2 f_2} = a_1 Q_{f_1} + a_2 Q_{f_2};$$

3)

$$\mathbf{E} Q_f^2(t \wedge T_n) = \mathbf{E} \left(\int_0^{t \wedge T_n} f^2(s, x) \Pi(s, dx) ds \right)$$

для всех $n \geq 1$, $t > 0$ и каждой последовательности $\{T_n\}$ м.о., $T_n \uparrow \infty$, $Q_f(t \wedge T_n) \in \mathfrak{M}$.

Пусть $g = (g_1, \dots, g_N)$, $f = (f_1, \dots, f_N)$, где $g_i \in F_p$, $f_i \in F_Q$ и $f_i g_i = 0$, $i = 1, \dots, N$. Обозначим $H(t) = (H_1(t), \dots, H_N(t))$, где $H_i(t) = X_i(t) + A_i(t) + Q_{f_i}(t) + P_{g_i}(t)$, $X_i \in \mathfrak{M}_c^{\text{loc}}$, $A_i \in \mathfrak{M}_c^{\text{loc}}$, $i = 1, \dots, N$.

Аналогично теореме 5.1 [5], имеет место следующая важная формула о преобразовании стохастических интегралов, являющаяся обобщенной формулой К. Ито [8] (см. также [5], [9] — [14]).

Лемма 2. Пусть $F(z_1, \dots, z_N)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что либо $\frac{\partial F}{\partial z_i}$, либо $f_i, i=1, \dots, N$, ограничены. Тогда верна формула:

$$\begin{aligned} F(H(t)) - F(H(s)) &= \sum_{i=1}^N \int_s^t \frac{\partial F}{\partial z_i}(H(u)) dX_i(u) + \\ &+ \int_s^t \int_{R_m} [F(H(u) + f(u, x)) - F(H(u))] g(du, dx) + \\ &+ \int_s^t \left\{ \int_{R_m} [F(H(u) + f(u, x)) - F(H(u))] - \right. \\ &- \left. \sum_{i=1}^N f_i(u, x) \frac{\partial F}{\partial z_i}(H(u)) \Pi(u, dx) \right\} du + P_G(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_s^t \frac{\partial F}{\partial z_i}(H(u)) dA_i(u) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_s^t \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j}(H(u)) d\langle X_i, X_j \rangle_u, \end{aligned}$$

где

$$G(t, x) = F(H(t) + g(t, x)) - F(H(t)).$$

4. Далее нам еще понадобятся следующие утверждения.

Лемма 3. Если выполнено предположение (*) п. 3, $\Pi(t, \Gamma)$ не зависит от ω и для всех $t \in (0, \infty)$

$$\int_0^t \int_{|x| \leq 1} |x|^2 \Pi(s, dx) ds < \infty,$$

то мера ν является пуассоновской.

Если, кроме того, существует $X = (X_1, \dots, X_r) \in \mathfrak{M}_c^{(r), \text{loc}}$, такой, что

$$\langle X_i, X_j \rangle_t = \int_0^t a_{ij}(s) ds, \quad i, j = 1, \dots, r,$$

где функции $a_{ij}(t)$ не зависят от ω , то мера ν и X независимы, а процесс X является гауссовским процессом с независимыми приращениями.

Доказательство этой леммы, используя лемму 2, аналогично доказательству теоремы 2 [14], и мы его не приводим.

Обозначим

$$C_n = \{x : 2^n \leq |x| < 2^{n+1}\},$$

$$C'_n(t) = \{x : r_n(t) \leq |x| < r_{n+1}(t)\},$$

где $r_n(t)$ определяются равенством

$$\int_{|x| \geq 2^n} \Pi(t, dx) = \int_{|x| \geq r_n(t)} \frac{dx}{|x|^{m+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Лемма 4. При предположении (*) п. 3 существует функция $\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_m(t, x))$, $\varphi_i \in \mathbb{F}$, $i=1, \dots, m$, такая, что для всех $\Gamma \in \mathcal{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и $t \in (0, \infty)$

$$\Pi(t, \Gamma) = \int_{R_m} \chi_\Gamma(\varphi(t, x)) \frac{dx}{|x|^{m+1}}$$

и

$$\varphi_\Gamma^{-1}(C_n) = C'_n(t, *),$$

причем $\varphi_\Gamma^{-1}(\{x\})$ состоит из единственной точки, если $\Pi(t, \{x\}) = 0$, является сферическим слоем $C'_n(t, x) = \{y : r'_n(t, x) \leq |y| < r''_n(t, x)\} \subset C'_n(t)$, если

$$\Pi(t, \{x\}) > 0, \quad x \in C_n, \quad \text{и} \quad \Pi(t, \{x\}) = \int_{C'_n(t, x)} \frac{dy}{|y|^{m+1}}.$$

Доказательство леммы 4 является довольно очевидным изменением доказательства леммы 2 в [15], стр. 89.

Пусть случайный вектор $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ имеет равномерное распределение в шаре $Q_1 = \{x : |x| < 1\}$, т.е.

$$\mathbf{P}\{Y \in \Gamma\} = \frac{\mu_m(\Gamma \cap Q_1)}{\mu_m(Q_1)},$$

где μ_m - мера Лебега в R_m .

Обозначим $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$, где

$$Z_i = \begin{cases} \frac{Y_i r r'}{|Y| (r + (r' - r) |Y|^m)} & \text{при } 0 < r < r' < \infty, \\ \frac{Y_i r}{|Y|^{m+1}} & \text{при } r > 0, r' = \infty, \end{cases} \quad (14)$$

$$Q_{r,r'} = \{x : r \leq |x| < r'\}.$$

Лемма 5. Имеем, что

$$\mathbf{P}\{|Y| < \rho\} = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \leq 0, \\ \rho^m & \text{при } 0 \leq \rho \leq 1, \\ 1 & \text{при } \rho > 1, \end{cases} \quad (15)$$

$$\mathbf{P}\{Z \in \Gamma\} = c_{r,r'}^{(m)} \int_{\Gamma \cap Q_{r,r'}} \frac{dx}{|x|^{m+1}}, \quad (16)$$

где

$$c_{r,r'}^{(m)} = \begin{cases} \frac{r r' \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}} (r' - r)} & \text{при } r' < \infty, \\ \frac{r \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} & \text{при } r' = \infty. \end{cases}$$

*) $\varphi_\Gamma^{-1}(\Gamma) = \{x : \varphi(t, x) \in \Gamma\}$.

Доказательство. Если обозначить $Q_\rho = \{x : |X| < \rho\}$, то будем иметь, что при $0 \leq \rho \leq 1$

$$\mathbf{P} \{ |Y| < \rho \} = \frac{\mu_m(Q_\rho)}{\mu_m(Q_1)} \quad (17)$$

и (15) следует из (17) и того, что, как хорошо известно,

$$\mu_m(Q_\rho) = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}} \rho^m}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Пусть далее $r' < \infty$. Тогда из (14) следует, что

$$|Z| = \frac{r r'}{r + (r' - r)} |Y|^m.$$

Отсюда имеем, что $\mathbf{P}\{|Z| < \rho\} = 0$ при $\rho \leq r$ и $= 1$ при $\rho \geq r'$, а при $r \leq \rho \leq r'$ в силу (15)

$$\mathbf{P} \{ |Z| < \rho \} = \mathbf{P} \left\{ |Y|^m > \frac{r}{\rho} \frac{r' - \rho}{r' - r} \right\} = 1 - \frac{r}{\rho} \frac{r' - \rho}{r' - r} = \frac{r r'}{r' - r} \int_r^\rho \frac{du}{u^2}. \quad (18)$$

С другой стороны, поскольку распределение вектора Y инвариантно относительно ортогональных поворотов системы координат около ее начала, то из (14) следует, что этим же свойством обладает и распределение вектора Z . Отсюда вытекает, что плотность $f(x)$ распределения вектора Z обладает свойством:

$$f(x) = f(|x|), \quad x \in R_m.$$

Поэтому при $r \leq \rho \leq r'$

$$\mathbf{P} \{ |Z| < \rho \} = \int_{Q_{r\rho}} f(|x|) dx = \int_r^\rho f(u) s_m(u) du, \quad (19)$$

где $s_m(\rho)$ — площадь m -мерной сферы радиуса ρ ,

$$s_m(\rho) = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}} \rho^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Сравнив (18) и (19), находим, что

$$f(\rho) = \frac{r r' \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}} (r' - r) \rho^{m+1}}.$$

Случай $r' = \infty$ исследуется аналогично. Лемма 5 доказана.

5. Пусть в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ последовательность $m+1$ -мерных случайных векторов (τ_k, X_k) , $k \geq 1$, задает целочисленную случайную меру p , согласованную с системой σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \geq 0$. Мы будем также рассматривать вероятностное пространство $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$, в котором определена последовательность независимых m -мерных случайных векторов $\{Y_k\}$, равномерно распределенных в шаре Q_1 , и вероятностное пространство $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbf{P}})$, в котором определена последовательность $m+1$ -мерных случайных векторов $\{(\hat{\tau}_k, \hat{X}_k)\}$, задающая стандартную пуассоновскую меру \hat{p} , согласованную с системой σ -алгебр $\hat{\mathcal{F}}_t$, $t \geq 0$.

Пусть мера p удовлетворяет предположению (*) п. 3. На вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) = (\Omega \times \Omega' \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \times \mathcal{F}' \times \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P} \times \mathbf{P}' \times \tilde{\mathbf{P}})$ определим последовательность $m+1$ -мерных случайных векторов $(\tilde{\tau}_k, \tilde{X}_k)$, как объединение следующих двух последовательностей:

$$(\tilde{\tau}_{k1}, \tilde{X}_{k1}) = \begin{cases} (\tau_k, \varphi_{\tau_k}^{-1}(\{X_k\})) & \text{при } \tau_k < \infty \text{ и } \Pi(\tau_k, \{X_k\}) = 0, \\ \left(\tau_k, \frac{r_k r'_k Y_k}{|Y_k| (r_k + (r'_k - r_k) |Y_k|^m)} \right) = (\tau_k, Z_k) & \text{при } \tau_k < \infty \\ & \text{и } \Pi(\tau_k, \{X_k\}) > 0 \\ (\tau_k, 0) & \text{при } \tau_k = \infty, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$r_k = r'_n(\tau_k, X_k), \quad r'_k = r''_n(\tau_k, X_k),$$

если

$$X_k \in C_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

и

$$(\tilde{\tau}_{k2}, \tilde{X}_{k2}) = \begin{cases} (\hat{\tau}_k, \hat{X}_k) & \text{при } (\hat{\tau}_k, \hat{X}_k) \in V_0, \\ (\infty, \hat{X}_k) & \text{при } (\hat{\tau}_k, \hat{X}_k) \notin V_0, \end{cases} \quad (21)$$

где $V_0 = \{(t, x) : |\varphi(t, x)| = 0\}$.

Далее, для простоты оставляя те же обозначения, все случайные величины будем считать определенными во всем пространстве $\tilde{\Omega}$, а также все подмножества и σ -алгебры как подмножества и σ -алгебры в $\tilde{\Omega}$ (см. [2], стр. 70). Среднее по мере $\tilde{\mathbf{P}}$ снова будем обозначать символом \mathbf{E} .

Если обозначить $K_t = \{k : \tau_k \leq t, \Pi(\tau_k, \{X_k\}) > 0\}$ и \mathcal{F}'_t - σ -алгебры, порожденные случайными событиями $\{Y_k \in \Gamma, k \in K_t\}$, $\Gamma \in \mathcal{B}_m, k \geq 1, t \geq 0$, то последовательность $(\tilde{\tau}_k, \tilde{X}_k), k \geq 1$, задает некоторую целочисленную случайную меру \tilde{p} , согласованную с системой σ -алгебр $\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}'_t \cup \tilde{\mathcal{F}}_t), t \geq 0$.

Теорема 1. При предположении (*) п. 3. случайная мера \tilde{p} является стандартной пуассоновской мерой, такой, что для всех $\Gamma \in \mathcal{B}_m \cap U_\varepsilon, \varepsilon > 0$,

$$p(t, \Gamma) = \int_0^t \int_{R_m} \chi_\Gamma(\varphi(s, x)) \tilde{p}(ds, dx). \quad (22)$$

Доказательство. Из (20) и (21) имеем, что для всех $A \in \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}_m$

$$\tilde{p}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_A(\tau_k, \tilde{X}_{k1}) + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_A \cap \nu_0(\hat{\tau}_k, \hat{X}_k),$$

а для всех $\Gamma \in \mathcal{B}_m \cap U_\varepsilon, \varepsilon > 0, t > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{p}(t, \Gamma) &= \sum_{\tau_k \leq t} \chi_\Gamma(\tilde{X}_{k1}) + \int_0^t \int_{R_m} V_0^\Gamma(s, x) \tilde{p}(ds, dx) = \\ &= \int_0^t \int_{R_m} V_1^\Gamma(s, x) p(ds, dx) + \int_0^t \int_{R_m} V_0^\Gamma(s, x) \tilde{p}(ds, dx) - \\ &- \int_0^t \int_{R_m} V_2^\Gamma(s, x) p(ds, dx), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$V_0^\Gamma(s, x) = \chi_{\nu_s \cap \{0, \infty\} \times \Gamma}(s, x), \quad V_1^\Gamma(s, x) = \chi_{\varphi_s^{-1}(\Gamma)}(x)$$

и

$$V_2^\Gamma(s, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = \tau_k, x = X_k \text{ при некотором } k \geq 1, \\ \text{таком, что } \Pi(\tau_k, \{X_k\}) > 0 \text{ и } Z_k \in \Gamma, \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Пусть последовательность $\{T_n\}$ м.о., $T_n \uparrow \infty$, такая, что $q(t \wedge T_n, \Gamma) \in \mathfrak{M}$. Тогда из предположения (*) п.3, свойств стохастических интегралов и (23) имеем, что для всех $0 \leq s < t < \infty$ и $n \geq 1$ п.в.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\tilde{p}(t \wedge T_n, \Gamma) - \tilde{p}(s \wedge T_n, \Gamma) \mid \tilde{\mathcal{F}}_s \right) &= \mathbf{E} \left(\int_{s \wedge T_n}^{t \wedge T_n} \Pi(u, \varphi_u^{-1}(\Gamma)) du \mid \tilde{\mathcal{F}}_s \right) + \\ &+ \mathbf{E} \left(\int_{s \wedge T_n}^{t \wedge T_n} \int_{R_m} V_0^\Gamma(u, x) \frac{dx du}{|x|^{m+1}} \mid \tilde{\mathcal{F}}_s \right) - \mathbf{E} \left(\int_{s \wedge T_n}^{t \wedge T_n} \left[\Pi(u, \varphi_u^{-1}(\Gamma)) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \int_{R_m} (\chi_\Gamma(x) - V_0^\Gamma(u, x)) \frac{dx}{|x|^{m+1}} \right] du \mid \tilde{\mathcal{F}}_s \right) = \\ &= \mathbf{E} \left((t \wedge T_n - s \wedge T_n) \int_{\Gamma} \frac{dx}{|x|^{m+1}} \mid \tilde{\mathcal{F}}_s \right), \end{aligned} \quad (24)$$

поскольку в силу лемм 4 и 5

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_{s \wedge T_n}^{t \wedge T_n} \int_{R_m} V_2^\Gamma(u, x) p(du, dx) \mid \tilde{\mathcal{F}}_s \right) &= \\ &= \mathbf{E} \left\{ \sum_{\substack{s \wedge T_n < \tau_k \leq t \wedge T_n \\ \Pi(\tau_k, \{X_k\}) > 0, \varphi(\tau_k, X_k) \in \Gamma}} \int_{\{r_k \leq |x| < r'_k\} \cap (R_m) \setminus \Gamma} \frac{dx}{|x|^{m+1}} \mid \tilde{\mathcal{F}}_s \right\} = \\ &= \mathbf{E} \left\{ \int_{s \wedge T_n}^{t \wedge T_n} \left(\Pi(u, \varphi_u^{-1}(\Gamma)) - \int_{R_m} (\chi_\Gamma(x) - V_0^\Gamma(u, x)) \frac{dx}{|x|^{m+1}} \right) du \mid \tilde{\mathcal{F}}_s \right\} \end{aligned}$$

Из (24) и леммы 3 следует, что p является стандартной пуассоновской мерой.

Далее для всех $\Gamma \in \mathcal{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, находим, что

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{R_m} \chi_\Gamma(\varphi(s, x)) \tilde{p}(ds, dx) &= \int_0^t \int_{R_m} (1 - V_0^\Gamma(s, x)) \chi_\Gamma(\varphi(s, x)) \times \\ &\times \tilde{p}(ds, dx) = \sum_{\tau_k \leq t} \chi_\Gamma(\varphi(\tau_k, \tilde{X}_{k1})) = \sum_{\tau_k \leq t} \chi_\Gamma(X_k) = p(t, \Gamma), \end{aligned}$$

так как из (20) и леммы 4 имеем, что

$$\chi_\Gamma(\varphi(\tau_k, \tilde{X}_{k1})) = \chi_\Gamma(X_k).$$

Теорема 1 доказана.

Поскольку из теоремы 1 и леммы 4 имеем, что для всех

$$\Gamma \in \mathcal{B}_m \cap U_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in (0, \infty)$$

$$q(t, \Gamma) = \int_0^t \int_{R_m} \chi_\Gamma(\varphi(s, x)) \bar{q}(ds, dx),$$

где

$$\bar{q}(ds, dx) = \bar{p}(ds, dx) - \frac{ds dx}{|x|^{m+1}},$$

то нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Следствие 1. Если $f \in \mathbf{F}_P$, то

$$\int_0^t \int_{R_m} f(s, x) p(ds, dx) = \int_0^t \int_{R_m} f(s, \varphi(s, x)) \bar{p}(ds, dx).$$

Если же $f \in \mathbf{F}_Q$, то

$$\int_0^t \int_{R_m} f(s, x) q(ds, dx) = \int_0^t \int_{R_m} f(s, \varphi(s, x)) \bar{q}(ds, dx).$$

6. Как одно из приложений теоремы 1, рассмотрим задачу об отыскании условий, при которых m -мерный случайный процесс $(X(t), t \geq 0)$ с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями, определенный на вероятностном пространстве (Ω, F, \mathbf{P}) , можно рассматривать как решение определенного стохастического уравнения К. Ито (см. [2], [14], [16], [17]).

Пусть $\mathcal{F}_t = \overline{\mathcal{F}}_{t+0}$, где $\overline{\mathcal{F}}_t$ — σ -алгебры, положенные случайными величинами $X(s)$, $0 \leq s \leq t$, и пополненные по мере \mathbf{P} . Пусть (τ_k, X_k) , $k \geq 1$, — в некотором порядке занумерованные моменты и величины скачков процесса $X(t)$, $t \geq 0$, полагая для тех k и ω , для которых (τ_k, X_k) не определены, $\tau_k = \infty$ и $X_k = 0$. Последовательность (τ_k, X_k) , $k \geq 1$, очевидно, задает некоторую целочисленную случайную меру, называемую мерой скачков процесса $X(t)$, $t \geq 0$, согласованную с системой σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \geq 0$.

Предположим, что выполнено предположение (*) п. 3 и $\Pi(t, \Gamma) = \Pi(t, X(t), \Gamma)$, где $\Pi(t, x, \Gamma)$ не зависит от ω . Обозначим

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x)) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leq 1, \\ x & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) = x - g(x).$$

Имеем очевидно, что $f_i \in \mathbf{F}_P$ и допустим, что $f_i \in \mathbf{F}_Q$, $i = 1, \dots, m$. Если обозначить $X_0(t) = X(t) - P_g(t) - Q_f(t)$, $t \geq 0$, то легко убедиться, что траектории процесса $X_0(t)$, $t \geq 0$, п.в. непрерывны (см. [14]).

Предположим теперь, что существуют функция $a(t, x) = (a_1(t, x), \dots, a_m(t, x))$ и матрица $A(t, x) = \|a_{ij}(t, x)\|_m^n$, такие, что функции $a_i(t, x)$, $a_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, \dots, m$, $\mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}_m$ — измеримы, и случайный процесс

$$\tilde{X}(t) = X_0(t) - \int_0^t a(s, X(s)) ds \in \mathfrak{M}^{(m), \text{loc}},$$

причем п.в.

$$\langle \bar{X}_i, \bar{X}_j \rangle = \int_0^t a_{ij} (s, X(s)) ds.$$

Пусть ранг $r(t)$ матрицы $A(t, X(t))$ п.в. по мере $\mu_1 \times \mathbf{P}$ удовлетворяет неравенству $r(t) \leq r \leq m$, где r — целое число.

При вышесделанных предположениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 2*). В определенном расширении основного вероятностного пространства можно построить r -мерный винеровский процесс $w(t) = (w_1(t), \dots, w_r(t))$ и независящую от него стандартную пуассоновскую меру \bar{p} такие, что процесс $X(t), t \geq 0$, является решением стохастического уравнения К. Это

$$\begin{aligned} X(t) = X(0) + \int_0^t \hat{a}(s, X(s)) ds + \sum_{k=1}^r \int_0^t b_k(s, X(s)) dw_k(s) + \\ + \int_0^t \int_{|y| \leq 1} \varphi(s, X(s), y) \bar{q}(ds, dy) + \\ + \int_0^t \int_{|y| > 1} \varphi(s, X(s), y) \bar{p}(ds, dy), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}(t, x) = a(t, x) + \int_{\substack{\varphi(t, x, y) \\ |y| \leq 1}} \varphi(t, x, y) \frac{dy}{|y|^{m+1}} - \\ - \int_{\substack{\varphi(t, x, y) \\ |y| > 1}} \varphi(t, x, y) \frac{dy}{|y|^{m+1}}, \\ \Pi(t, x, \Gamma) = \int_{R_m} \chi_\Gamma(\varphi(t, x, y)) \frac{dy}{|y|^{m+1}}, \end{aligned}$$

$b_k(t, x) = \sqrt{|\lambda_k(t, x)|} u_k(t, x)$, $u_k(t, x)$ — ортонормированные собственные векторы матрицы $A(t, x)$, соответствующие ненулевым собственным значениям $\lambda_k(t, x)$, $k=1, \dots, r$.

Доказательство этой теоремы и вид расширения основного вероятностного пространства вытекает из теоремы 1, следствия 1, леммы 3 и нижеследующей леммы 6.

Пусть $X = (X_1, \dots, X_m) \in \mathfrak{M}_c^{(m),loc}$ и п.в.

$$\langle X_i, X_j \rangle_t = \int_0^t a_{ij}(s) ds, \quad i, j=1, \dots, m, \quad (**)$$

где ранг $r(t)$ матрицы $A(t) = \|a_{ij}(t)\|_t^m$ удовлетворяет неравенству $0 \leq r' \leq r(t) \leq r \leq m$ п.в. по мере $\mu_1 \times \mathbf{P}$.

*) Утверждение теоремы 2, очевидно, сохраняет силу и в том случае, когда $a(t, \cdot)$, $A(t, \cdot)$ и $\Pi(t, \cdot, \Gamma)$ (соответственно, $a(t, \cdot)$, $b_k(t, \cdot)$ и $\varphi(t, \cdot, y)$) являются измеримыми функционалами от $X(s), 0 \leq s \leq t$.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$, на котором задан $r-r'$ -мерный винеровский процесс, и обозначим

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) = (\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \times \mathcal{F}', \mathbf{P} \times \mathbf{P}').$$

Лемма 6. При предположении (***) на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ можно построить r -мерный винеровский процесс $w(t) = (w_1(t), \dots, w_r(t))$, такой, что имеет место представление:

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^r \int_0^t b_k(s) dw_k(s),$$

где $b_k(t) = \sqrt{\lambda_k(t)} u_k(t)$, $u_k(t)$ — ортонормированные собственные векторы матрицы $A(t)$, соответствующие ненулевым собственным значениям $\lambda_k(t)$, $k=1, \dots, r$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 в [14].

Замечание 1. В случае, когда $\Pi(t, x, \Gamma) \equiv 0$, утверждение теоремы 2 является многомерным аналогом одной теоремы Дж. Л. Дуба ([2], стр. 259) (см. также [6]). Лемма 6 аналогично обобщает другой результат Дж. Л. Дуба ([2], стр. 403).

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 2 и уравнение (25) имеет единственное непрерывное справа решение, то случайный процесс $(X(t), t \geq 0)$ обладает марковским свойством.

В заключение отметим еще одно утверждение, вытекающее из леммы 3.

Теорема 3. Пусть мера скачков p процесса $X(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет предположению (*) п. 3, $\Pi(t, \Gamma)$ не зависит от ω и для всех $t \in (0, \infty)$

$$\int_0^t \int_{|x| \leq 1} |x|^2 \Pi(s, dx) ds < \infty.$$

Если, кроме того, существуют функция $a(t) = (a_1(t), \dots, a_m(t))$ и матрица $A(t) = \|a_{ij}(t)\|_m^m$, не зависящие от ω , такие, что

$$\tilde{X}(t) = X(t) - \int_0^t a(s) ds - P_g(t) - Q_f(t) \in \mathfrak{M}^{(m), \text{loc}}$$

и

$$\langle \tilde{X}_i, \tilde{X}_j \rangle_t = \int_0^t a_{ij}(s) ds,$$

то процесс $X(t)$, $t \geq 0$, имеет независимые приращения и

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp \left\{ i \left(X(t), z \right) \right\} &= \exp \left\{ i \int_0^t \left(a(s), z \right) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \left(z A(s), z \right) ds + \right. \\ &+ \int_0^t \int_{|y| \leq 1} \left(e^{i \langle y, z \rangle} - 1 - i \langle y, z \rangle \right) \Pi(s, dy) ds + \\ &\left. + \int_0^t \int_{|y| > 1} \left(e^{i \langle y, z \rangle} - 1 \right) \Pi(s, dy) ds \right\}. \end{aligned}$$

Замечание 2. Если условия теоремы 3 выполнены при $a(t) \equiv 0, \Pi(t, \Gamma) \equiv 0$ и $a_{ij}(t) \equiv \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, то процесс $X(t), t \geq 0$, является m -мерным винеровским процессом. Это утверждение является известной теоремой П. Леви (см. [2], [5], [18]).

Если же условия теоремы 3 выполнены при

$$a(t) \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_m), A(t) \equiv 0, \Pi(t, \{e_k\}) \equiv \lambda_k \geq 0, \quad k=1, \dots, m,$$

и

$$\Pi\left(t, R_m \setminus \bigcup_{k=1}^m \{e_k\}\right) \equiv 0,$$

где

$$e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-k}),$$

то процесс $X(t), t \geq 0$, является m -мерным пуассоновским процессом. При $m=1$ аналогичное утверждение другим путем доказано С. Ватанабе в [7].

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
27.I.1970

Л и т е р а т у р а

1. К. Ito, On stochastic differential equations, *Memoirs of Am. Math. Soc.*, 4 (1951), 1–51. (О стохастических дифференциальных уравнениях, *Математика* (сб. перев.), 1 : 1 (1957), 78–116.)
2. Дж. Л. Дуб, *Вероятностные процессы*, ИЛ, М., 1956.
3. Р. А. Meyer, A decomposition theorem for supermartingales, *Ill. J. Math.*, 6 (1962), 193–205.
4. Р. А. Meyer, Decomposition of supermartingales, The uniqueness theorem, *Ill. J. Math.*, 7(1963), 1–17.
5. Н. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, *Nagoya Math. J.*, 30 (1967), 209–245.
6. Р. А. Meyer, *Integrales stochastiques*, Séminaire de Probabilités I, *Lecture Notes in Math.*, 39(1967), Springer.
7. S. Watanabe, On discontinuous additive functionals and Lévy measures of Markov processes, *Japanese J. Math.*, 36 (1964), 53–70.
8. К. Ito, On a formula concerning stochastic differentials, *Nagoya Math. Journ.*, 3 (1951) 55–65. (Об одной формуле касающейся [стохастических дифференциалов, *Математика* (сб. перев.), 3:5 (1959), 131–141.)
9. Б. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Физматгиз, М., 1963.
10. И. И. Гихман, А. Я. Дороговцев, Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений, *Укр. матем. ж.*, **XVII**, 6(1965), 3–21.
11. А. В. Скороход, О локальном строении непрерывных марковских процессов, *Теория вероятн. и ее применен.*, **XI**, 3(1966), 381–423.
12. А. В. Скороход, Однородные марковские процессы без разрывов второго рода, *Теория вероятн. и ее применен.*, **XII**, 2(1967), 258–278.
13. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, „Наукова думка“, Киев, 1968.
14. Б. Григелионис, О марковском свойстве случайных процессов, *Лит. матем. сб.*, **VIII**, 3 (1968), 93–106.
15. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов*, Изд. КГУ, Киев, 1961.

16. G. Maruyama, Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rendiconti Circolo Math. Palermo*, 4 (1955), 1–43. (Непрерывные марковские процессы и стохастические уравнения, *Математика* (сб. перев.), 1:2 (1957), 125–159.)
17. Б. Григелионис, Об абсолютно непрерывной замене меры и марковском свойстве случайных процессов, *Лит. матем. сб.*, IX, 1 (1969), 57–71.
18. P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement Brownien*, Paris, 1948.

APIE ATSIKTIKINIŲ MATŲ SU SVEIKOMIS REIKŠMĖMIS IŠREIŠKIMA STOCHASTINIAIS INTEGRALAIS PUASONO MATO ATŽVILGIU

B. Grigelionis

Reziumė

Darbe nagrinėjami atsitiktiniai matai $p(A)$, $A \in \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}_m$, įgyjantieji tik sveikas neneigiamas reikšmes, ir randamos sąlygos, kada galima sukonstruoti standartinį Puasono matą \tilde{p} tokiu būdu, kad apibrėžtai funkcijai $\varphi(t, x)$ būtų teisinga išraiška:

$$p([0, t] \times \Gamma) = \int_0^t \int_{R_m} \chi_\Gamma(\varphi(s, x)) \tilde{p}(ds, dx).$$

Gauti rezultatai taikomi rasti sąlygoms, kurioms esant duotas m -matis atsitiktinis procesas yra apibrėžtos stochastinės K. Ito lygties sprendinys. Taip pat rastos sąlygos lokalinių martingalų terminais, kurioms esant duotas m -matis atsitiktinis procesas turi nepriklausomus pokyčius.

ON REPRESENTATION OF INTEGER-VALUED RANDOM MEASURES BY MEANS OF STOCHASTIC INTEGRALS WITH RESPECT TO THE POISSON MEASURE

B. Grigelionis

Summary

In the paper integer-valued random measures $p(A)$, $A \in \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}_m$ are examined and conditions, when we can construct the standard Poisson measure \tilde{p} in such a way that for defined function $\varphi(t, x)$ representation

$$p([0, t] \times \Gamma) = \int_0^t \int_{R_m} \chi_\Gamma(\varphi(s, x)) \tilde{p}(ds, dx)$$

is valid, are obtained. Given results are applied for obtaining conditions when the given m -dimensional stochastic process is a solution of defined stochastic equation of K. Ito. Conditions in the terms of local martingales when the given m -dimensional stochastic process has independent increments are also found.