

の有無によるものであり, 曲げ応力の計算にこの作用を考慮しなければならない。

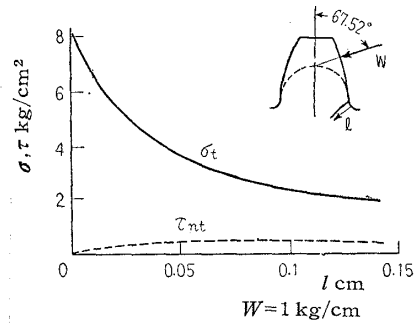
(2) 危険断面上の応力分布はほぼ公称応力と同じ傾向であるが, すみ肉部では応力集中を起し, 危険断面に垂直な引張応力も, せん断応力も公称応力よりかなり大きくなる。

(3) 内部応力計算の結果, 主応力も最大せん断応力もすみ肉曲線から内部にはいるに従って急速に小さくなり, 疲れの面から考えてもすみ肉曲線上の最大応力をもって歯車を設計してさしつかえないことが明らかになった。

この研究結果を発展して歯車の曲げ強さ設計式を導くことができる。

文 献

(1) G.Niemann u. H.Glaubitz, *VDI-Z*, 92, 33(1950), 923.



第 12 図 すみ肉部の内部応力の分布

(2) J. Ishikawa, *Bull. Tokyo Inst. Technol.*, Ser. A, No. 3 (1957).
 (3) N. Muschelivili, *Z. angew. Math. Mech.*, 13, 4 (1933), 264.
 (4) 倉西, 弾性学 (昭 23) 392, 日本機械学会.
 (5) 平野, 応用数学力学, 1, 3 (昭 22), 109.
 (6) 平野, 機械学会論文集, 17, 61 (昭 26), 12.
 (7) H. Hofer, *ATZ*, 48, 1(1946); 49, 2 (1947) (J. Ishikawa, *Bull. Tokyo Inst. Technol.*, Ser. A, No. 3 (1957), 208. による).

621. 833. 1. 031. 2:539. 384:620. 171. 5

平 歯 車 の 曲 げ 応 力 に つ い て*

(第 2 報, 歯の応力集中係数と曲げ応力計算式)

会 田 俊 夫**, 寺 内 喜 男***

On the Bending Stress of Spur Gear

(2nd Report, The Stress Concentration Factor and the Equation for the Calculation of Bending Stress of Gear Tooth)

by Toshio AIDA and Yoshio TERAUCHI

In the present paper the authors studied the position of the weakest section of gear tooth and the stress concentration factor at the tensile-side fillet of tooth. Then the authors calculated the stress concentration factors for some components of the force on the tooth profile, and found the relation among these factors.

Consequently the following formula has been introduced for the bending stress of gear tooth :

$$\sigma_t = \left(1 + 0.08 \frac{S}{\rho}\right) \{0.66\sigma_{Nt} + 0.40\sqrt{\sigma_{Nt}^2 + 36\tau_{Nt}^2} + 1.15\sigma_{Nc}\}$$

By this formula the authors calculated the bending stress of gear tooth of some shapes, and compared the result with that of photoelastic experiments.

1. ま え が き

最近の歯車製作技術の向上によって高精度のかたさ

の高い歯面をもつ歯車の製作が可能になり, 歯面の強さはおおいに向上され, これに伴って歯車は小形化される傾向にある。この場合, 歯面の強さよりも歯の曲げ強さのほうが受ける影響は大であり, この意味からも正確な曲げ強さの設計式が必要になる。

本報では第 1 報⁽¹⁾に計算した応力の値から種々の負荷条件に対する応力集中係数をもとめ, これらを組み

* 昭和 34 年 4 月 4 日 第 36 期通常総会講演会および昭和 35 年 4 月 1 日 第 37 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 36 年 2 月 16 日。

** 正員, 京都大学工学部。

*** 正員, 広島大学工学部(広島市千田町 3 丁目)。

あわせて実用応力計算式を導き、二、三の歯車について応力計算を行なった。またこれらの計算式によって求めた結果を光弾性実験の結果と比較検討した。

また危険断面の位置についても考察を行ない、作図法でもとめる方法の誤差について検討した。

2. 応力集中係数とすみ肉部応力計算式

歯に加わる荷重は第1図に示すように歯の中心線に垂直な曲げ荷重と、これに平行な圧縮荷重に分けることができる。この場合危険断面上の公称応力を初等材料力学理論で考えると、曲げ荷重による危険断面上の公称応力の分布は σ_{Nb_1} のようになり、圧縮荷重による公称応力は圧縮応力の σ_{Nc_1} と、中心線よりのへだたりによる曲げ応力 σ_{Nb_2} になる。また集中曲げ荷重が作用する場合のせん断力に基いて、危険断面には公称せん断応力 τ_N が断面一様に分布すると考えることができる。ここで危険断面としてはいちおう Hofer の作図法⁽²⁾でもとめた位置を考える。

各分力による危険断面の引張側周縁部の応力をそれぞれ σ_{Nb} , σ_{Nc} , τ_N とすると、

$$\sigma_{Nb} = \sigma_{Nb_1} = \frac{6P \sin \theta (l_e + l_d)}{S^2 b} \dots\dots\dots(1)$$

$$\sigma_{Nc} = \sigma_{Nc_1} + \sigma_{Nb_2} = -\frac{P \cos \theta}{Sb} - \frac{6P \cos \theta y}{S^2 b} \dots\dots\dots(2)$$

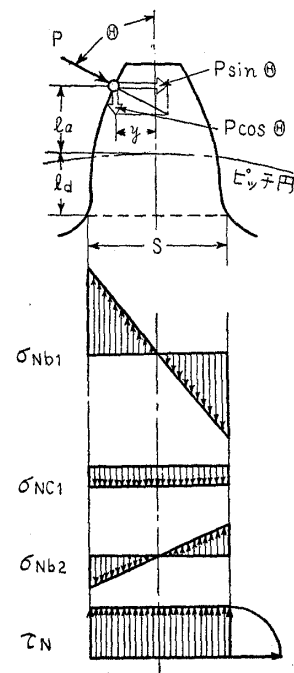
$$\tau_N = \frac{P \sin \theta}{Sb} \dots\dots\dots(3)$$

になる。ただし P : 荷重, θ : 歯の中心線と負荷線とのなす角, l_e : 負荷点より歯の中心線に引いた垂線の足よりピッチ点までの距離, l_d : ピッチ点より危険断面までの距離, S : 危険断面上の歯厚, b : 歯幅, y :

負荷点より歯の中心線までの距離である。

第1報にもとめた集中荷重による曲げがかかった場合のすみ肉曲線上の応力 σ_{ib} を, (1) 式で計算された σ_{Nb} で割ると, 集中荷重による曲げに対する応力集中係数 α_b がもとまる。また純粋曲げモーメントによる曲げの場合も同様に, σ_{iM} と公称応力 σ_{NM} (σ_{NM} は σ_{Nb} に等しい) より α_M がもとまる。

第2図に示す 12 種類の写像図形に対して負荷の位置を変えて α_b の値をもとめると, 第3図に示すような値になる。ここで縦軸に α_b をとり, 横軸には負荷点より危険断面までの距離 l と危険断面の歯厚 S の比をとっている。また $l/S = \infty$ においては $\alpha_b = \alpha_M$ と



第1図 公称応力

I	II	III	IV	V
$S = 4.78$ $S/p = 31.39$	$S = 5.07$ $S/p = 27.63$	$S = 5.47$ $S/p = 23.26$	$S = 6.04$ $S/p = 18.06$	$S = 6.57$ $S/p = 14.44$
VI	VII	VIII	IX	
$S = 7.42$ $S/p = 9.62$	$S = 7.77$ $S/p = 7.82$	$S = 8.08$ $S/p = 6.40$	$S = 8.57$ $S/p = 3.98$	
X	XI	XII		
$S = 10.18$ $S/p = 11.75$	$S = 10.96$ $S/p = 9.04$	$S = 11.87$ $S/p = 5.95$		

第2図 写像図形

考えられるので, 第3図の右端に α_M をとった. この図に示されるように, l/S が大きくなると α_b は小さくなり, この曲線群によく一致する形として次のような式を導くことができる.

$$\alpha_b = \alpha_M \{c_1 + c_2 \sqrt{1 + (S/l)^2}\} \dots\dots\dots(4)$$

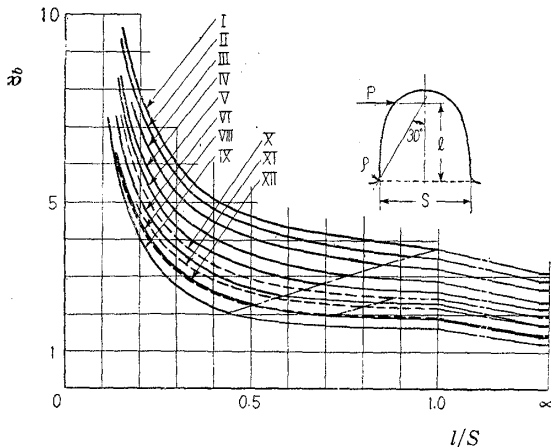
c_1, c_2 の定数は理論的には $c_1 + c_2 = 1$ になるようえらぶべきであるが, 実際には $c_1 = 0.66, c_2 = 0.40$ にえらぶと歯形によく似た図形(X~XII)の曲線によく一致し, また他の曲線にも比較的好く一致する.(3), (1)式に $\theta = \pi/2$ を代入し, その比をとると $\tau_N/\sigma_{Nb} = S/6l$ になり, これを(4)式に代入すると

$$\sigma_{tb} = \alpha_M \{c_1 \sigma_{Nb} + c_2 \sqrt{\sigma_{Nb}^2 + 36\tau_N^2}\} \dots\dots\dots(5)$$

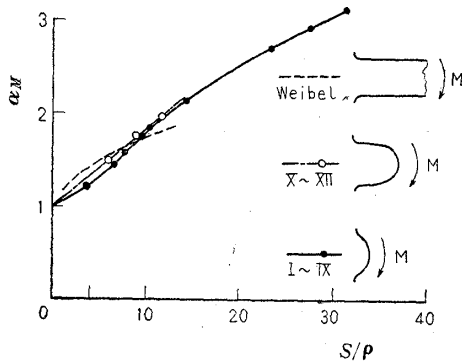
になり, 主応力の計算式に似た形をとっている.

つぎに α_M は曲率半径 ρ によって変化するが, いま α_M と S/ρ の関係を検討してみると, α_M は S/ρ によって変わるのみならず, 突起の形状によっても変化することがわかった.

第4図は α_M と S/ρ の関係を示したものであり, I~IXのような図形とX~XIIのような図形は S/ρ が10付近では一致するが, S/ρ が小さくなると多少異なり, 前者では下に凸な曲線であるが, 後者ではほとんど直線になる. またWeibel⁽³⁾が半円形すみ肉曲



第3図 α_b と l/S の関係



第4図 α_M と S/ρ の関係

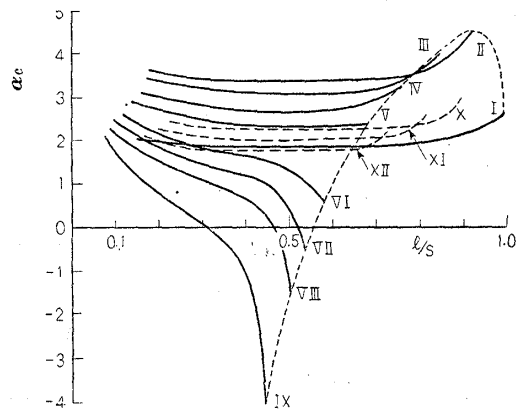
線をもつ片持はりに純粋曲げモーメントを加えて, 光弾性実験から α_M をもとめた結果を示すと, 図の点線で示す曲線になる. この場合, 公称応力は平行部の断面について計算したものであり, 危険断面での公称応力は多少小さくなるので, α_M は図の値より多少大きくなるが, 最大応力の発生する位置は中立軸と 10° で交わり, すみ肉曲線に接する直線の接点であると報告されているのでその差はごく小さい. これらの曲線を考察すると突起の程度が非常に高い場合は α_M と S/ρ を表わす曲線は上に凸の形をとるが, 突起が低くなるにつれて直線になり, さらに低くなるとしだいに下に凸の形をとることがわかる.

標準の歯たけをもつような歯形に対しては α_M と S/ρ の関係は $S/\rho = 0$ で $\alpha_M = 1$ を通る直線とみなすことができる. したがって

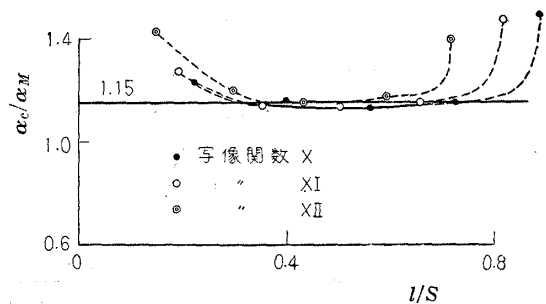
$$\alpha_M = 1 + c_3 \frac{S}{\rho} \dots\dots\dots(6)$$

を導くことができる. ただし第4図から $c_3 = 0.08$ と定められる.

つぎに集中荷重による圧縮がかかった場合のすみ肉曲線上の応力 σ_{te} と公称応力 σ_{Ne} より α_e をもとめると第5図に示すような値になる. ここで縦軸に α_e をとり, 横軸に l/S をとっている. VI~IXのように突起の高さが低くなるような図形では α_e は l/S に応じて大きく変化するが, 歯形のような図形X~XIIでは



第5図 α_e と l/S の関係



第6図 α_e/α_M と l/S の関係

l/S の両端を除いてあまり変化しない。

つぎにこの α_0 とさきにもとめた α_M の比をとると第 6 図に示すように l/S の両端を除いて一定値になる。
 $\alpha_0/\alpha_M = c_4 = 1.15 \dots\dots\dots(7)$

l/S の左端は歯底近く荷重がかかる場合であり、このような位置で負荷を受ける場合は強さを計算する上において問題にならない。また l/S の右端は突起の中心線付近に負荷される場合であるが、写像図形は歯形のインボリュート曲線にほぼ一致し、歯先部は円弧で結んだような形状になっているので、実際の歯形ではこのような位置に負荷されることがなく、結局 α_0/α_M の値が 1.15 よりはずれることについて関心をはらう必要はない。

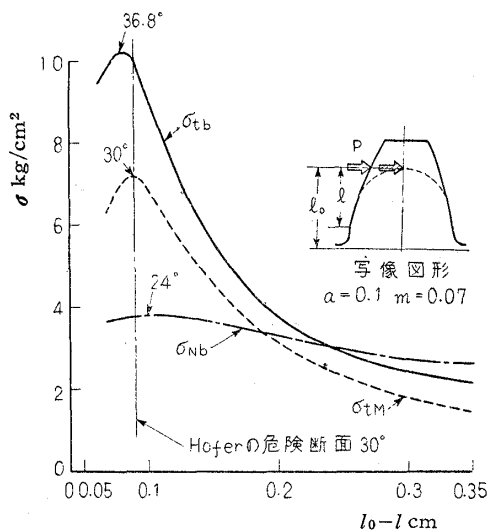
ゆえに (7) 式より

$$\sigma_{ic} = 1.15 \alpha_M \sigma_{Nc} \dots\dots\dots(8)$$

の関係が導かれる。

すみ肉部の実応力 σ_t は σ_{ib} と σ_{ic} の和であるから

$$\sigma_t = \{1 + c_3(S/\rho)\} \{c_1 \sigma_{Nb} + c_2 \sqrt{\sigma_{Nc}^2 + 36 \tau_{Nc}^2} + c_4 \sigma_{Nc}\} \dots\dots\dots(9)$$



歯面荷重: $P=1$ kg, 歯幅: $b=10$ mm

第 7 図 最大応力の位置

$c_1=0.66, c_2=0.40, c_3=0.08, c_4=1.15$ を導くことができる。

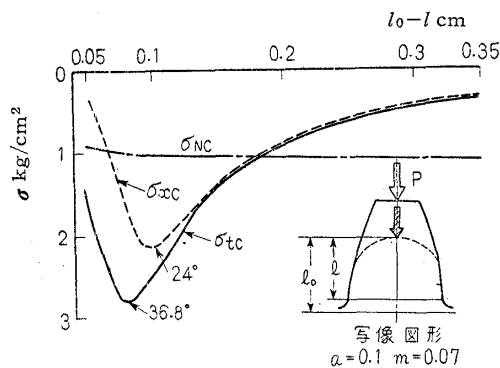
3. 危険断面の位置についての考察

危険断面の位置は Hofer の作図法⁽²⁾でもとめたが、最大応力発生位置とこの作図危険断面の位置のずれおよび両位置での応力の差について検討した。

第 7 図はすみ肉曲線の位置を横軸にとり、縦軸に $\sigma_{ib}, \sigma_{iM}, \sigma_{Nb}$ をとって示した。横軸の l_0-l は写像図形の基礎面より計算した位置までの高さである。図中に示される角度は最大応力の発生する位置ですみ肉曲線に接線を引いた場合に、接線が図形の中心線となす角 θ であって、 σ_{iM} では Hofer の作図と同じく 30° になっているが、 σ_{ib} では 36.8° , σ_{Nb} では 24° となる。

集中荷重による圧縮がかかった場合も第 8 図に示すように同じ値になる。すなわち最大応力の発生する位置は若干異なるわけであるが、応力差はごくわずかである。

第 9 図は l_0/S の大きさの異なる 3 種類の例について $\sigma_{\theta=30^\circ}$ と σ_{max} を比較したものである。実際の歯の負荷条件においては σ_{ib} に比較して圧縮応力 σ_{ic} の値は普通比較的小さいので σ_{ib} のみについて計算した。



歯面荷重: $P=1$ kg, 歯幅: $b=10$ mm

第 8 図 最大応力の位置

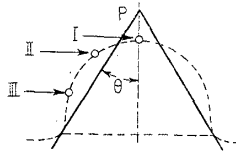
写 像 図 形			
σ_{max} kg/cm ²	4.71	10.15	7.26
θ	26.60°	36.77°	44.97°
$\sigma_{\theta=30^\circ}$ kg/cm ²	4.69	9.91	6.30
$\sigma_{\theta=30^\circ}/\sigma_{max}$	99.5%	97.7%	87.1%

歯面荷重: $P=1$ kg, 歯幅: $b=10$ mm

第 9 図 危険断面の位置と応力の関係

図において σ_{max} は σ_{ib} の最大値を, θ は最大値の発生する位置における接線の傾斜角を, $\sigma_{\theta=30^\circ}$ は Hofer の作図法でもとめた危険断面における σ_{ib} の値を示している. l_0/S が小さくなるにつれて, すなわち突起が低くなるにつれて θ は大きくなり, $\sigma_{\theta=30^\circ}/\sigma_{max}$ は小さくなる. 歯車の歯のような図形では $\sigma_{\theta=30^\circ}/\sigma_{max} > 95\%$ になるので, $\sigma_{\theta=30^\circ}$ を最大応力とみなすことができる.

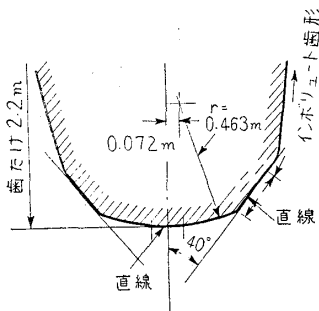
つぎに負荷の位置を変えた場合について検討すると, 第 10 図に示すように負荷の位置が歯元のほうに移るにしたがって θ は大きくなり, したがって最大応力の発生する位置は歯底のほうに移る. 圧縮側における最大応力の位置も同じ傾向にある. 実際の歯車で曲げ強さの計算の対象になる負荷の位置においては, $\sigma_{\theta=30^\circ}/\sigma_{max}$ の変化は問題にならない大きさであって Hofer の作図法でもとめた危険断面での応力を最大応力と考えてさしつかえないことがわかった.



		引 張 側	圧 縮 側
I	σ_{max} kg/cm ²	10.15	-10.15
	θ	36.77°	36.77°
	$\sigma_{\theta=30^\circ}$ kg/cm ²	9.91	-9.91
	$\sigma_{\theta=30^\circ}/\sigma_{max}$	97.7%	97.7%
II	σ_{max} kg/cm ²	9.36	-8.71
	θ	38.57°	38.12°
	$\sigma_{\theta=30^\circ}$ kg/cm ²	9.05	-8.47
	$\sigma_{\theta=30^\circ}/\sigma_{max}$	96.7%	97.3%
III	σ_{max} kg/cm ²	7.57	-5.86
	θ	41.66°	39.01°
	$\sigma_{\theta=30^\circ}$ kg/cm ²	7.08	-5.61
	$\sigma_{\theta=30^\circ}/\sigma_{max}$	93.5%	95.7%

歯面荷重: $P=1$ kg, 歯幅: $b=10$ mm

第 10 図 負荷点の位置と応力の関係



ρ を大きく選んだ特殊歯形

第 11 図 歯みぞの形状

4. 応力計算結果と光弾性実験結果との比較

光弾性試験を行ない, (9) 式によりもとめた応力計算値と比較した. 光弾性材料は 6 mm 厚さのフェノライト板で, 次に示す 4 種類の歯形について 3 枚の歯をもつ模型を切出し, それぞれ歯先より歯元まで 4 箇所位置で荷重をかけて, すみ内部応力を測定した.

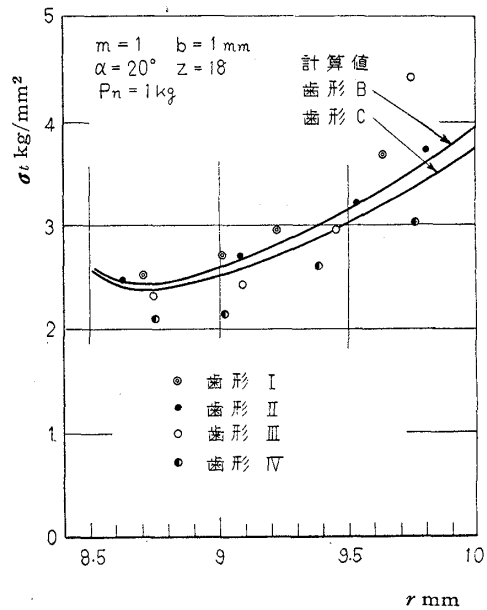
歯車は $m=12.7$, $\alpha=20^\circ$, $z=18$, バックラッシュなしに相当する.

- (i) 歯形 I 頂げき 0 m, カッタ歯先丸み半径 0 m のラック形カッタで歯切りしたもの.
- (ii) 歯形 II 頂げき 0.157 m, カッタ歯先丸み半径 0.238 m のラック形カッタで歯切りしたもの.
- (iii) 歯形 III シングルアールカッタ, すなわち頂げき 0.295 m, カッタ歯先丸み半径 0.449 m のラック形カッタで歯切りしたもの.
- (iv) 歯形 IV 特殊な形状の歯形で, 危険断面付近の曲率を特に大きくしたものであり, 第 11 図に示

第 1 表 計算して歯形 ($m=1$ ラック歯形にてあらわす)

歯 形	頂 げ き c	20°	
		B(1)	C(2)
歯 先 丸 み 半 径 r_0		0.157	0.25
歯先丸み中心よりピッチ線までの距離 η		0.238	0.375
		0.919	0.875

- (1) JIS B1701 に規定された最小の r_0 をもつ歯形
- (2) JIS B1701 の推奨歯形



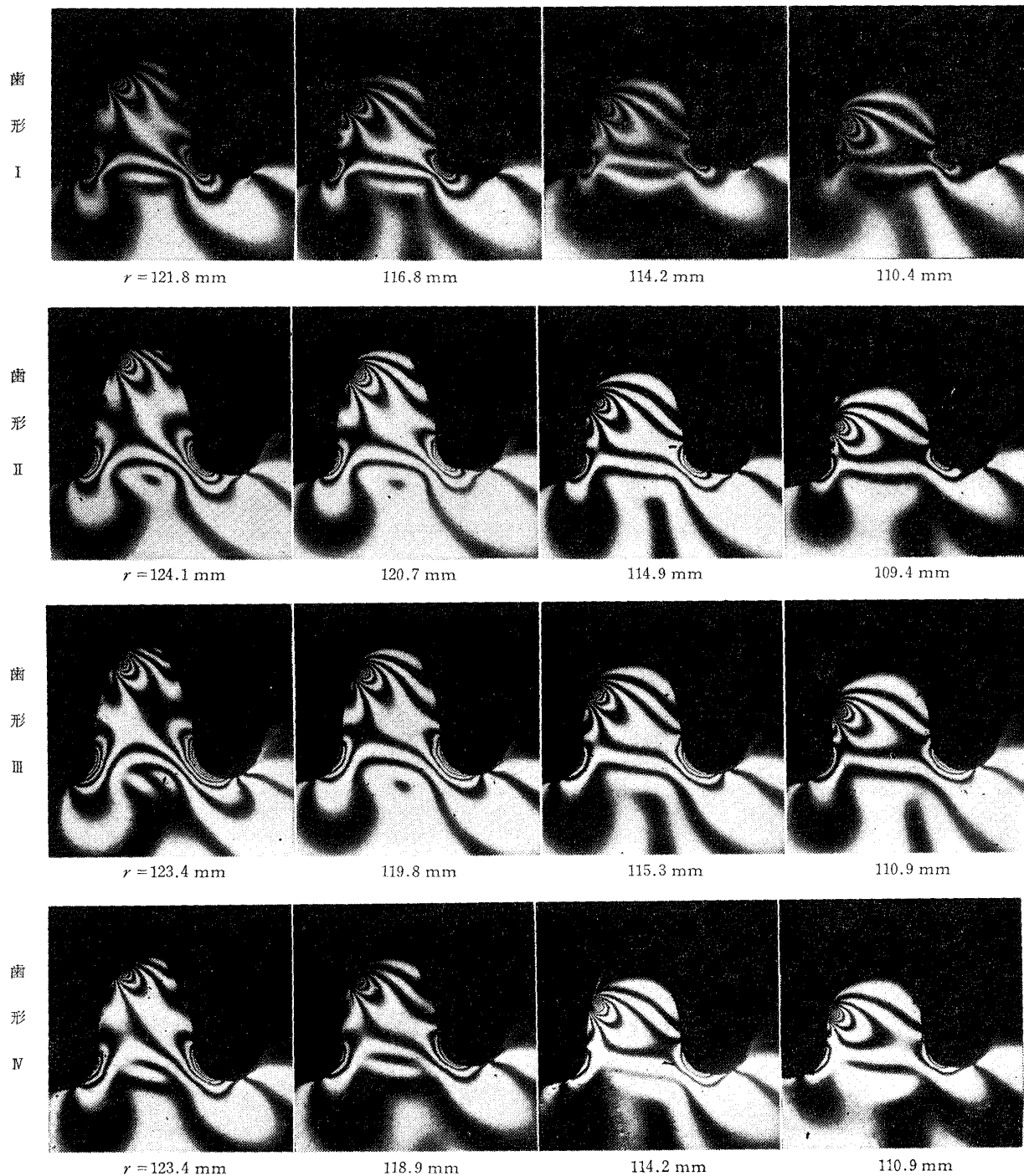
第 13 図 計算値と光弾性実験結果と比較

すように歯みぞの中心線に 40° をなす直線を採用している。

第 12 図は光弾性写真を示す。荷重は 25 kg であり、光弾性写真の一次のしまは $\sigma_t = 0.238 \text{ kg/mm}^2$ に相当する。この試験結果より $m=1, b=1 \text{ mm}, P_n=1 \text{ kg}$ の場合に換算した値を、縦軸に引張側のすみ肉部最大応力 σ_t をとり、横軸に負荷点までの半径 r をとって第 13 図に示した。

また第 1 表に示した歯形 B, C に対する計算式より

もとめた応力の値をも示した。歯形 II と歯形 B とは同一歯形であり、計算結果とほぼ一致している。歯形 C は歯形 II と III の中間になる。また歯形 I では歯たけは短い、すみ肉曲率半径が小さくなり、歯たけの高い歯形 III に比較してかえって応力は高くなる。この傾向は図に示すように計算値も光弾性実験結果もよく一致している。また歯形 IV のように曲率半径を大きくすることは非常に有効である。この場合 40° の傾斜をもつ直線を歯形曲線に使用したが創成歯形でこれを実現す



第 12 図 光弾性写真

ることが困難な場合, たとえばだ円形すみ肉曲線にしてこの部分の曲率半径をできるだけ大きくすることが望ましい。

5. む す び

歯のすみ肉曲線上の応力の理論計算値をそれぞれ負荷の種類に応じて分類して考察することによって, それぞれの応力集中係数の間には関連性があり, つぎのように結論されることがわかった。

(1) 集中荷重による曲げがかかった場合の応力集中係数 α_b は曲げの腕 l と危険断面歯厚 S に関係があり, $\alpha_b = \alpha_M \cdot f_n(l/S)$ となる。

(2) 集中荷重による圧縮がかかった場合の応力集中係数 α_c と α_M との比は一定値になる。

そこでこのような関係をもとにして実用応力計算式

を導いた。また危険断面の位置についても考察し, Hofer の作図法でもとめた危険断面の応力を最大応力と考えてさしつかえないことを明らかにした。さらにこの計算式で二, 三の歯車の歯の曲げ応力を計算し, また光弾性実験結果と一致することを確認した。ここに求めた計算式は弾性学的にもとめたものであり, 今後広範囲の疲れ試験を行なって, これらの式の実際の各種材料の歯車に対する適用性についてしらべたいと考えている。

文 献

- (1) 会田, 寺内, 本論文集 853 ページ。
- (2) H. Hofer, *ATZ*, 48, 1 (1946); 49, 2 (1947) (J. Ishikawa, *Bull. Tokyo Inst. Technol.*, Ser. A, No. 3 (1957), 208 による)。
- (3) E. Weibel, *Trans. ASME*, 56, 13 (1934), 637。

621.833.1.031:2:539.384

平 歯 車 の 曲 げ 応 力 に つ い て*

(第3報, 曲げ応力計算結果について)

会 田 俊 夫**, 寺 内 喜 男***

On the Bending Stress of Spur Gear

(3rd Report, On the Calculation Results
of Bending Stress of Gear Tooth)

by Toshio AIDA and Yoshio TERAUCHI

For the purpose of calculating the bending strength of the gear tooth in general use, the authors studied theoretically the position of the weakest section of gear tooth and the point of the worst loading, and consequently defined the calculating method of nominal stress. Then by using the calculating equation of bending stress reduced above, authors calculated bending stress and stress concentration factor of gear teeth of various shapes in general use at present, and studied these relations.

1. は し が き

歯車の曲げ強さを計算する場合, 歯数や圧力角などによって定まる歯形や, カッタの種類および頂げき, 歯先丸み半径などによって定まるすみ肉曲線の形状が重要な問題になる。

歯車の曲げ応力について種々の計算方法が発表されているが^{(1)~(3)}, 筆者らは現在使用されている標準歯車について歯形およびすみ肉曲線の式より危険断面の歯厚およびその位置を計算し, さらに最悪負荷点の位置を計算して, 公称応力をもとめた。

これら公称応力の値と, すみ肉曲線の曲率およびすでに第2報に発表した曲げ応力計算式を使用して歯の曲げ応力を計算した。

この計算値は歯を弾性体と考えた場合, すみ肉曲線上に発生する最大応力と考えることができるので, 曲

* 昭和 35 年 4 月 1 日 第 37 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 36 年 2 月 16 日。

** 正員, 京都大学工学部。

*** 正員, 広島大学工学部(広島市千田町3丁目)。