【31】

氏名・(本籍)	味村良雄（みむらよしお）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 6250 号
学位授与の日付	昭和 58 年 12 月 13 日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**実2次体の整数環上の単位格子の類数**
論文審査委員	(主査) 教授 永尾 汎 (副査) 教授 尾関 英樹 教授 宮西 正宜 助教授 山本 芳彦

論文内容の要旨

総実な代数体Fの整数環上の単位格子E_n(対応する2次形式が$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$)の類数を$h_n(F)$とかく。則ちlocalにはE_nに同型な格子の全体(種という)をglobal な同型で分類したときの類の個数を考える。$h_n(F)=1$となる(n, F)を見つけることは類数1問題と呼ばれ，解決されている。ここでは$h_n(F)=2$，則ち類数2問題を扱う。($n\geqq 4$の条件のもとでは解決されている。)本論文は，Fを実2次体に制限して，$n\geqq 3$という一般的なnに対して結果を与える：

主定理

$n\geqq 3$でFが実2次体のとき，$h_n(F)=2$となる(n, F)は次で与えられる：

$n=5$; $Q(\sqrt{2})$, $n=3$; $Q(\sqrt{3})$, $n=5$; $Q(\sqrt{5})$,

$n=3$; $Q(\sqrt{13})$, $n=3$; $Q(\sqrt{33})$, $n=3$; $Q(\sqrt{41})$.

この類数問題について先駆者たちは殆んどSiegel Mass Formula を用いてきた。しかしここでは，それとは独立な方法(いわゆるKneserの隣接法で，直交群の近似定理で裏づけされる)を用いる。そのため，この証明の早い段階で，類数1問題の解答も自然に出てくる。また，類の代表も具体的に与えられる。

さて，隣接法とは，一つの格子から，いくつかの新しい格子を産み出す方法であり，

イ) 適当な条件C_1のもとでは，作られた格子は元の格子と同じ種に入り

ロ) 更にある条件C_2のもとでは，このような隣接法を次々と産み出された格子に施したときに，有限回でその種の中の各類の代表が必ず顔を出す

というものである，本論文では次の段階を追って，証明を完了する。

隣接法で得られる格子の間の同型性の十分条件を与える（Lem。2～4）。E_nの一回目の隣接化の簡易化（Prop 1，Lem 5）ののち，そうして得られた格子の性質（特に1や2の表現について）を調べる（Lem 6，Prop。2～7）。それを使って，一回目で（E_nを含めて）3つ以上の互いに同型でない格子が出てくる場合（従って$h_n(F) \geqq 3$）を調べ，$h_n(F) \leqq 2$となる必要条件を決定する（Prop. 8）。次に条件C_2を記述し（Lem。8，9），Prop。8で残った考察すべき場合が，C_2を満たすことを示し，隣接法を引きつづいて完全遂行する。E_nの一回目の隣接化でもうE_nと同型でないものが出てこないならば$h_n(F)=1$である。また一つだけ出てきたときに，この第二の格子から隣接化でもはや新しい格子が出てこなければ$h_n(F)=2$となる。こういう考えのもとに隣接法を使って，主定理がえられる。

論文の審査結果の要旨

Kは総実代数体，QはKの整数環，$V=Ke_1+\cdots+Ke_n$ は内積の定義されたK上n次元のベクトル空間で$\{e_1, \cdots e_n\}$はその正規直交基とし，$E=Qe_1+\cdots+Qe_n$ を単位格子とする。Vの格子Lは，Kの任意の有限素点$\mathfrak{p}$に対して$V_\mathfrak{p}=V\otimes K_\mathfrak{p}$ の直交変換$\sigma_\mathfrak{p}$が存在して$\sigma_\mathfrak{p} L_\mathfrak{p}=E_\mathfrak{p}$となるときEと同じ種に属するといい，このようなLの全体をgenEで表す。またgenEの元L，Mに対してVの直交変換σがあって$\sigma L=M$となるときLとMは同じ類に属するといい，genE内の類の個数を$h_n(K)$とかいてそれをEの類数という。類数の有限性はすでに知られているが，自然数kを与えて$h_n(K)=k$となる（K，n)をすべて求めるという問題は「類数k問題」とよばれる。

「類数1問題」は1960年から1977年にかけてDzewas，Nebelung，Pheuffer，Peters等によって完全に解決されている。また「類数2問題」は$n\geqq 4$のときPohst（1973年），Phéuffer（1978年）等によってほぼ解決されている。

本論文では「類数2問題」を$n\geqq 3$のときに考察し，Kが実2次体のとき$h_n(K)=2$ となるのは(K，n)$=(Q(\sqrt{2}),5)$，$(Q(\sqrt{3}),3)$，$(Q(\sqrt{5}),5)$，$(Q(\sqrt{13}),3)$，$(Q(\sqrt{33}),3)$，$(Q(\sqrt{41}),3)$に限ることを示してこの問題の解答を与えている。またこの証明も従来のSiegelのMass Formula を用いるものとは異なり，Kneserの方法を用いて独自の手法によるもので興味深い。

以上のように本論文は，2次形式の類数問題という困難な問題に新たな知見を加えるものであり，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。