

Miroslav Šisler

Über die Konvergenz eines zweiparametrischen Iterationsverfahrens

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 6, 452–461

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103501>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER DIE KONVERGENZ EINES ZWEIPARAMETRIGEN ITERATIONSVERFAHRENS

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen am 23. Februar 1973)

Die Arbeit [4] befasst sich mit einem gewissen zweiparametrischen Iterationsverfahren für die Lösung eines linearen Gleichungssystems von der Form

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

wo \mathbf{B} im allgemeinen eine nichtsymmetrische Blockmatrix ist, deren Diagonalblöcke Nullmatrizen sind. Wenn man die Matrix \mathbf{B} in der Form

$$(2) \quad \mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$$

schreibt, wo \mathbf{L} bzw. \mathbf{U} die untere bzw. obere verallgemeinerte Dreiecksmatrix ist, dann kann man ein zweiparametrisches Iterationsverfahren durch die Formel

$$(3) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_v + \mathbf{P}(\alpha, \beta) \mathbf{b}$$

definieren, wo

$$\mathbf{T}(\alpha, \beta) = (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{L})^{-1} [(\alpha - 1) \mathbf{E} + (\beta + 1) \mathbf{L} + \mathbf{U}],$$

$$\mathbf{P}(\alpha, \beta) = (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{L})^{-1}$$

ist und α, β beliebige Zahlen (Parameter) sind.

Mit der Beziehung dieses Verfahrens zu den üblichen Iterationsmethoden (Jacobi-Verfahren, Gauss-Seidelsches Verfahren, Oberrelaxations-Verfahren u. a.) befasst sich die Arbeit [4]. Ähnlicherweise, wie in der Arbeit [4], wird vorausgesetzt, dass die Matrix \mathbf{B} einen gewissen Vektorraum \mathbf{R} der Dimension n in \mathbf{R} abbildet, dass der Vektorraum \mathbf{R} durch die direkte Summe der Unterräume v_1, \dots, v_m ($m \leq n$) gebildet wird und dass die Matrizen \mathbf{L}, \mathbf{U} die Bedingungen

$$\mathbf{L}v_i \subset v_{i+h},$$

$$\mathbf{U}v_i \subset v_{i-h}, \quad i = 1, \dots, m$$

erfüllen, wo h, k positive teilerfremde ganze Zahlen mit $h + k = p \leq m$ sind (Dabei setzt man $v_i = 0$ für $i < 1$ und $i > m$.) Unter diesen Voraussetzungen gilt dann der folgende Satz:

1. Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$, $\beta \neq 0$. Falls $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ ist und falls die Zahl μ die Beziehung

$$(4) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^p = \mu^p(1 + \beta - \lambda\beta)^k,$$

erfüllt, ist μ der Eigenwert der Matrix \mathbf{B} . Falls dagegen μ ein Eigenwert der Matrix \mathbf{B} ist, dann ist jede der Beziehung (4) genügende Zahl λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$.

Satz 1 zeigt also den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrizen \mathbf{B} und $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ im Falle, dass \mathbf{B} in die oben erwähnte Matrizenklasse gehört (\mathbf{B} ist eine gewisse zyklische Matrix). Der Beweis dieses Satzes ist in [4] durchgeführt.

Diese Arbeit befasst sich mit der Konvergenz des durch die Formel (3) definierten Iterationsverfahrens. Genauer gesagt, es werden einige Mengen von Punkten $[\alpha, \beta]$ in der Ebene bestimmt, für die die Methode (3) konvergiert, bzw. die Mengen, in welchen die Methode sicher nicht konvergiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Satze 1). Achse $\beta = 0$ nicht zu der Ebene gehört (angesichts der Beziehung $\beta \neq 0$ in dem In der Ebene gehört auch nicht die Achse $\alpha = 0$, da für $\alpha = 0$ die Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ singular ist. In der ganzen Arbeit setzt man ferner voraus, dass μ_i , $i = 1, \dots, n$ Eigenwerte der Matrix \mathbf{B} sind. Es gilt der folgende Satz:

2. Es sei $\Omega^{(1)}(\mu_i)$ eine solche Menge der Punkte $[\alpha, \beta]$, dass

$$(5) \quad [\alpha, \beta] \in \Omega^{(1)}(\mu_i) \Leftrightarrow |(1 - \alpha)^p - \mu_i(1 + \beta)^k| \geq |\alpha|^p, \\ \beta \neq 0, \quad \alpha \neq 0$$

ist. Es sei ferner $\Omega^{(1)} = \bigcup_i \Omega^{(1)}(\mu_i)$ und $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(1)}$. Dann ist der Spektralradius $\rho(\mathbf{T}(\alpha, \beta))$ der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ grösser oder gleich 1 (das Iterationsverfahren (4) konvergiert also nicht).

Beweis. Es sei $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(1)}$. Dann existiert eine solche Zahl i_0 , dass $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(1)}(\mu_{i_0})$ ist und nach (5) gilt dann die Ungleichung

$$(6) \quad |(1 - \alpha)^p - \mu_{i_0}(1 + \beta)^k| \geq |\alpha|^p.$$

Aus Satz 1 folgt, dass die Wurzeln der Gleichung

$$(7) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^p - \mu_{i_0}(1 + \beta - \lambda\beta)^k = 0$$

(das ist die Gleichung (4) für $\mu = \mu_{i_0}$) die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ darstellen.

Das Absolutglied der Gleichung (7) ist dann die Zahl

$$\frac{1}{\alpha^p} [(1 - \alpha)^p - \mu_{i_0}^p (1 + \beta)^k].$$

Angesichts (6) gilt $|(1/\alpha^p) [(1 - \alpha)^p - \mu_{i_0}^p (1 + \beta)^k]| \geq 1$ und es ist also $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \geq 1$, was wir beweisen sollten.

Beispiel 1. Um eine anschauliche Vorstellung zu haben, betrachte man nun den Fall, wenn $p = 2$, $h = k = 1$ ist und wenn die Zahlen μ_i^2 reell sind mit $0 < \mu_i^2 < 1$. In Abb. 1 ist die Form der Menge $\Omega^{(1)}(\mu_i)$ für $\mu_i^2 = 0,5$ dargestellt. Aus der Ungleichung (5) folgt nun leicht, dass die Menge $\Omega^{(1)}(\mu_i)$ aus der durch die Parabel begrenzten Menge $\beta \geq (1/\mu_i^2) [(\alpha - 1)^2 + \alpha^2] - 1$ und der durch die Gerade begrenzten Menge $\beta \leq (1/\mu_i^2) (1 - 2\alpha) - 1$ gebildet wird. Dabei geht die Gerade $\beta = (1/\mu_i^2) \cdot (1 - 2\alpha) - 1$ durch den Punkt $[\frac{1}{2}, -1]$ und stellt die Tangente der Parabel $\beta = (1/\mu_i^2) [(\alpha - 1)^2 + \alpha^2] - 1$ im Punkte $[0, (1/\mu_i^2) - 1]$ dar. (Die Teile der Geraden $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ gehören allerdings nicht der Menge $\Omega^{(1)}(\mu_i)$ an.)

Man bezeichne nun $m = \min \mu_i^2$, $M = \max \mu_i^2$. Es ist dann leicht festzustellen, dass die Menge $\Omega^{(1)} = \bigcup_i \Omega^{(1)}(\mu_i)$ aus den folgenden Mengen besteht:

- a) für $\alpha < \frac{1}{2}[1 - (M/m) - \sqrt{((1 - (M/m))^2 - 2)}]$ ist
 $\beta \geq (1/M) [(\alpha - 1)^2 + \alpha^2] - 1$ oder $\beta \leq (1/m)(1 - 2\alpha) - 1$;
- b) für $\frac{1}{2}[1 - (M/m) - \sqrt{((1 - (M/m))^2 - 2)}] \leq \alpha \leq$
 $\leq \frac{1}{2}[1 - (M/m) + \sqrt{((1 - (M/m))^2 - 2)}]$ ist β beliebig;
- c) für $\frac{1}{2}[1 - (M/m) + \sqrt{((1 - (M/m))^2 - 2)}] < \alpha < \frac{1}{2}$ ist
 $\beta \geq (1/M) [(\alpha - 1)^2 + \alpha^2] - 1$ oder $\beta \leq (1/m)(1 - 2\alpha) - 1$;
- d) für $\frac{1}{2} \leq \alpha$ ist
 $\beta \geq (1/M) [(\alpha - 1)^2 + \alpha^2] - 1$ oder $\beta \leq (1/m)(1 - 2\alpha) - 1$.

(Dabei ist $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.)

Für den Fall $p = 2$ und $\mu_i^2 > 0$, $i = 1, \dots, n$ bekommt man also das folgende Ergebnis:

wenn

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[1 - (M/m) - \sqrt{((1 - (M/m))^2 - 2)}] &\leq \alpha \leq \\ &\leq \frac{1}{2}[1 - (M/m) + \sqrt{((1 - (M/m))^2 - 2)}], \end{aligned}$$

oder $\beta \geq (1/M) [(\alpha - 1)^2 + \alpha^2] - 1$ ist, ist $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \geq 1$ und das Iterationsverfahren (3) konvergiert nicht.

Nun werden wir uns mit der Bestimmung solcher Mengen in der Ebene $[\alpha, \beta]$ befassen, in welchen $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ ist (und wo also die Methode (3) konvergiert). Es gilt der folgende Satz:

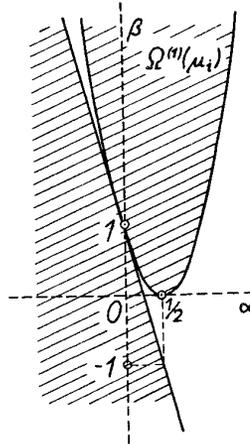


Abb. 1.

3. Es sei $\alpha \geq 1$ und die Mengen $\Omega^{(2)}(\mu_i)$ ($i = 1, \dots, n$) seien folgenderweise definiert:

$$(8) \quad [\alpha, \beta] \in \Omega^{(2)}(\mu_i) \Leftrightarrow |\mu_i|^{p/k} \left[\left| 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^k \right] < 1.$$

Dann gilt für jeden Punkt $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(2)} = \bigcap_i \Omega^{(2)}(\mu_i)$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, die Ungleichung $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$.

Beweis. In der Gleichung (4) für $\mu = \mu_i$ führt man die Substitution $\tau = 1 - \alpha + \lambda$, d. h. $\lambda = (\tau + \alpha - 1)/\alpha$ durch. Man bekommt dann die Gleichung

$$(9) \quad \tau^p - \mu_i^p \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} - \tau \frac{\beta}{\alpha} \right)^k = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung liegen bekanntlich in der Vereinigung des Bereiches $|\tau| \leq 1$ und des Bereiches

$$(10) \quad \left| \tau^k - \mu_i^p (-1)^k \frac{\beta^k}{\alpha^k} \right| \leq |\mu_i|^p \left[\left| 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^k \right] - |\mu_i|^p \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^k$$

(der Beweis dieser Feststellung ist z. B. in [1] angeführt). Dann gilt angesichts (10)

$$|\tau|^k \leq \left| \tau^k - \mu_i^p (-1)^k \frac{\beta^k}{\alpha^k} \right| + |\mu_i|^p \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^k \leq |\mu_i|^p \left[\left| 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^k \right].$$

Hiervon folgt sofort nach (8), dass

$$|\tau| \leq |\mu_i|^{p/k} \left[\left| 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \right] < 1$$

und

$$|\tau + (\alpha - 1)| \leq |\mu_i|^{p/k} \left[\left| 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \right] + |\alpha - 1| < 1 + \alpha - 1 = \alpha = |\alpha|$$

gilt (da $\alpha \geq 1$ ist). Es ist also

$$|\lambda| = \left| \frac{\tau + \alpha - 1}{\alpha} \right| < \frac{|\alpha|}{|\alpha|} = 1.$$

Die Wurzeln der Gleichung (4) für $\mu = \mu_i$ liegen dann für die Punkte $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(2)}(\mu_i)$ im Einheitskreis. Dort liegen also die Wurzeln der Gleichung (4) für jeden Wert $\mu = \mu_i$, $i = 1, \dots, n$, solange $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_i \Omega^{(2)}(\mu_i)$ ist, was wir beweisen sollten.

Im Falle $k = 1$ gilt die folgende (bessere) Abschätzung:

4. Es sei $\alpha \geq 1$, $k = 1$ und die Menge $\Omega^{(3)}(\mu_i)$ ($i = 1, \dots, n$) seien folgenderweise definiert:

$$(11) \quad [\alpha, \beta] \in \Omega^{(3)}(\mu_i) \Leftrightarrow \left| -\mu_i^p \frac{\beta}{\alpha} + \alpha - 1 \right| < |\alpha| - |\mu_i|^p \left| 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right|.$$

Dann gilt für jeden Punkt $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(3)} = \bigcap_i \Omega^{(3)}(\mu_i)$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, die Ungleichung $\varrho(\mathcal{T}(\alpha, \beta)) < 1$.

Beweis. Für $k = 1$ ist die Ungleichung (10) von der Form

$$(12) \quad \left| \tau + \mu_i \frac{\beta}{\alpha} \right| \leq |\mu_i|^p \left| 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right|.$$

Angesichts (11) und (12) folgt schrittweise

$$\begin{aligned} |\tau + \alpha - 1| &\leq \left| \tau + \mu_i \frac{\beta}{\alpha} \right| + \left| -\mu_i \frac{\beta}{\alpha} + \alpha - 1 \right| < |\mu_i|^p \left| 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \\ &\quad - |\mu_i|^p \left| 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right| + |\alpha| = |\alpha|, \end{aligned}$$

sodass

$$|\lambda| = |\tau + \alpha - 1|/|\alpha| < 1$$

ist. Hiervon folgt sofort die Behauptung des Satzes 4.

Beispiel 2. Es sei wieder wie im Beispiel 1 $k = 1$ und es sei $1 > \mu_i^p > 0$, $i = 1, \dots, n$. Die die Menge $\Omega^{(2)}(\mu_i)$ bestimmenden Ungleichungen sind dann von der Form $\alpha \geq 1$, $\beta < \frac{1}{2}((1/|\mu_i|^p) - 1)\alpha$, $\beta > -\frac{1}{2}((1/|\mu_i|^p) + 1)\alpha$. Man kann leicht feststellen, dass die Menge $\Omega^{(2)} = \bigcap_i \Omega^{(2)}(\mu_i)$, $i = 1, \dots, n$, in welcher nach Satz 3 $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ ist, durch die Ungleichungen

$$\alpha \geq 1, \quad \beta < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} - 1 \right) \alpha, \quad \beta > -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + 1 \right) \alpha,$$

mit $M = \max_i |\mu_i|^p$ bestimmt ist.

Wenn man unter den gleichen Voraussetzungen die Ungleichungen aus dem Satz 4 gebraucht, sind die Mengen $\Omega^{(3)}(\mu_i)$ durch die Ungleichungen

$$\alpha \geq 1, \quad \beta < \frac{1}{2|\mu_i|^p} (2\alpha^2 - \alpha(1 + |\mu_i|^p)), \quad \beta > -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{|\mu_i|^p} + 1 \right) \alpha$$

gegeben. Die Menge $\Omega^{(3)} = \bigcap_i \Omega^{(3)}(\mu_i)$, für die $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ ist, ist dann durch die Ungleichungen

$$\alpha \geq 1, \quad \beta < \frac{1}{2M} [2\alpha^2 - \alpha(1 + M)], \quad \beta > -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + 1 \right) \alpha$$

gegeben und man stellt leicht fest, dass $\Omega^{(3)} \supset \Omega^{(2)}$ gilt (der Satz 4 gibt also für den betrachteten Spezialfall eine umfangreichere Menge an).

In der Arbeit [3] wurde die Methode behandelt, die man aus (3) bekommt, falls man $\alpha = 1$, $\beta = -\omega$ legt (diese Methode ist eine gleichzeitige Extrapolation des Jacobi- und des Gauss-Seidelschen Verfahrens). Aus Satz 3 folgt sofort für diese Methode die folgende Behauptung:

5. Es sei $\frac{1}{2}(1 - (1/q^{p/k}(\mathbf{B}))) < \omega < \frac{1}{2}(1 + (1/q^{p/k}(\mathbf{B})))$. Dann ist $\varrho(\mathbf{T}(1, -\omega)) < 1$. (Dieses Resultat entspricht dem Satze 2 aus [3].)

Ferner gilt der folgende Satz:

6. Es sei $\Omega^{(4)} = \bigcap_i \Omega^{(4)}(\mu_i)$, wo die Mengen $\Omega^{(4)}(\mu_i)$ durch die Ungleichungen

$$(13) \quad (|\alpha| + |1 - \alpha|)^p + |\mu_i|^p (|\beta| + |1 + \beta|)^k < 2|\alpha|^p$$

definiert sind. Dann gilt für $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(4)}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, die Ungleichung $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$.

Beweis. Die Ungleichung (4) (für $\mu = \mu_i$) schreibt man in der Form

$$(14) \quad \sum_{j=0}^p (a_j + b_j) \lambda^j = 0,$$

wo

$$(15) \quad a_j = \binom{p}{j} \alpha^{j-p} (1-\alpha)^j \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, p,$$

$$b_j = -\mu_i^p (-1)^j \binom{k}{j} \beta^j \alpha^{-p} (1+\beta)^{k-j} \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, k,$$

$$b_j = 0 \quad \text{für } j = k+1, k+2, \dots, p$$

ist. Es ist offensichtlich $a_p + b_p = 1$. Aus (15) und (13) folgt nun, dass

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p-1} |a_j + b_j| &\leq \sum_{j=0}^{p-1} |a_j| + \sum_{j=0}^{p-1} |b_j| = \sum_{j=0}^p |a_j| - |a_p| + \sum_{j=0}^k |b_j| = \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} |\alpha|^{j-p} |1-\alpha|^j - 1 + |\mu_i|^p \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |\alpha|^{-p} |\beta|^j |1+\beta|^{k-j} = \\ &= |\alpha|^{-p} [(|\alpha| + |1-\alpha|)^p + |\mu_i|^p (|\beta| + |1+\beta|)^k] - 1 < 1 \end{aligned}$$

gilt. Es ist also $\sum_{j=0}^{p-1} |a_j + b_j| < 1$, sodass alle Wurzeln der Gleichung (14) im Einheitskreise liegen. Hiervon folgt sofort die Behauptung des Satzes 6.

Man kann leicht zeigen, dass aus dem Satze 6 für $\alpha = 1$, $\beta = -\omega$ wieder die Behauptung des Satzes 5 folgt.

Die Sätze 3, 4, 5, 6 haben nur notwendige Bedingungen für die Gültigkeit der Ungleichung $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ angegeben. Im folgenden Satze wird gezeigt, wie man im speziellen Falle, wenn μ_i^p für alle i reelle Zahlen sind, eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ angeben kann. Genauer gesagt, es wird eine solche Menge $\Omega^{(5)}$ bestimmt, dass $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(5)} \Leftrightarrow \varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) < 1$ gilt. Es gilt der folgende Satz:

7. Es seien μ_i^p , $i = 1, \dots, n$, reelle Zahlen. Ferner definiere man die Zahlen $c_{j,i}$, $j = 1, 2, \dots, p$, $i = 1, \dots, n$, wie folgt:

$$c_{j,i} = (-1)^j \binom{p}{j} A^j + (-1)^{j+1} \mu_i^p \sum_{s=0}^j \binom{k}{j-s} \binom{p-k}{j-s} B^s,$$

(hier ist $A = 1 - 2\alpha$, $B = 1 + 2\beta$).

Es sei $c_{pi} > 0$, $i = 1, \dots, n$. Die Menge $\Omega^{(5)}(\mu_i)$ soll durch die folgenden Ungleichungen definiert sein:

$$c_{pi} > 0, \quad D_{1i} > 0, \quad D_{2i} > 0, \quad \dots, \quad D_{p-1,i} > 0,$$

wo

$$D_{1i} = c_{p-1,i}, \quad D_{2i} = \begin{vmatrix} c_{p-1,i} & c_{p,i} \\ c_{p-3,i} & c_{p-2,i} \end{vmatrix}, \quad D_{3i} = \begin{vmatrix} c_{p-1,i} & c_{p,i} & 0 \\ c_{p-3,i} & c_{p-2,i} & c_{p-1,i} \\ c_{p-5,i} & c_{p-4,i} & c_{p-3,i} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$D_{p-1,i} = \begin{vmatrix} c_{p-1,i} & c_{p,i} & & 0 & \dots & 0 \\ c_{p-3,i} & c_{p-2,i} & c_{p-1,i} & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{3-p,i} & c_{4-p,i} & c_{5-p,i} & \dots & c_{1,i} & \end{vmatrix}$$

ist (hier legt man $c_{j,i} = 0$ für $r < 0$).

Es sei ferner $\Omega^{(5)} = \bigcap_i \Omega^{(5)}(\mu_i)$. Dann gilt (für $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$)

$$[\alpha, \beta] \in \Omega^{(5)} \Leftrightarrow \varrho(\mathcal{T}(\alpha, \beta)) < 1.$$

Beweis. In der Gleichung (4) mit $\mu = \mu_i$ führt man die Substitution $\lambda = (w-1)/(w+1)$ ein (diese konforme Abbildung transformiert den Einheitskreis in der Ebene λ in die Halbebene $\operatorname{Re} w < 0$ in der Ebene w).

Die Gleichung (4) geht dann in die Gleichung

$$(16) \quad (w-A)^p - \mu_i^p (w-1)^{p-k} (w-B)^k = 0$$

über. Aus (16) folgt ferner, dass

$$\sum_{j=0}^p c_{ji} w^j = 0$$

ist. Angesichts dessen, dass $D_{pi} = (1 - \mu_i^p) D_{p-1,i}$ mit

$$D_{p,i} = \begin{vmatrix} c_{p-1,i} & c_{p,i} & & 0 & \dots & 0 \\ c_{p-3,i} & c_{p-2,i} & c_{p-1,i} & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1-p,i} & c_{2-p,i} & c_{3-p,i} & \dots & c_{0,i} & \end{vmatrix}$$

und $c_{0,i} = 1 - \mu_i^p > 0$ gilt, folgt sofort die Behauptung 7 aus dem Hurwitzschen Satz.

Beispiel 3. Es sei $p = 2, h = k = 1, 0 < \mu_i^2 < 1, i = 1, \dots, n$. Dann ist

$$c_{2,i} = A^2 - \mu_i^2 B,$$

$$c_{1,i} = -2A + \mu_i^2 + \mu_i^2 B,$$

$$c_{0,i} = 1 - \mu_i^2.$$

Die Menge $\Omega^{(5)}(\mu_i)$ ist in diesen Falle durch die Ungleichungen

$$A^2 - \mu_i^2 B > 0, \quad -2A + \mu_i^2 + \mu_i^2 B > 0$$

bestimmt, d. h. durch die Ungleichungen

$$(16) \quad \beta < \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu_i^2} (1 - 2\alpha)^2 - 1 \right], \quad \beta > \frac{1}{\mu_i^2} (1 - 2\alpha) - 1 \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$$

(angesichts dessen, dass $\mu_i^2 > 0$ ist). Die Menge $\Omega^{(5)}(\mu_i)$ für $\mu_i^2 = 0,5$ sieht man in Abb. 2.

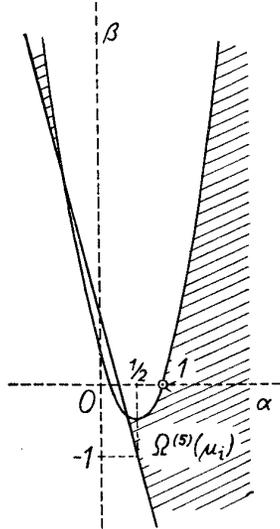


Abb. 2.

Man kann leicht feststellen, dass die Menge $\Omega^{(5)} = \bigcap_i \Omega^{(5)}(\mu_i)$ so aussieht: Man bezeichne wie im Beispiele 1 $m = \min_i \mu_i^2$, $M = \max_i \mu_i^2$. Dann ist

a) für

$$\alpha < \frac{1}{2} [1 - (M/m) - \sqrt{((M^2/m^2) - M)}]$$

und für

$$\frac{1}{2} [1 - (M/m) + \sqrt{((M^2/m^2) - M)}] < \alpha < \frac{1}{2}$$

gleichzeitig

$$\beta < \frac{1}{2} [(1/M) (1 - 2\alpha)^2 - 1], \quad \beta > (1/m) (1 - 2\alpha) - 1;$$

b) für $\frac{1}{2} \cong \alpha$ gleichzeitig

$$\beta < \frac{1}{2} [(1/M) (1 - 2\alpha)^2 - 1], \quad \beta > (1/M) (1 - 2\alpha) - 1;$$

c) für

$$\frac{1}{2} [1 - (M/m) - \sqrt{((M^2/m^2) - M)}] \cong \alpha \cong \frac{1}{2} [1 - (M/m) + \sqrt{((M^2/m^2) - M)}]$$

gibt es kein β , für dass $[\alpha, \beta] \in \Omega^{(5)}$ ist (für α aus diesem Intervalle ist immer $q(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \cong 1$ und die Methode (3) konvergiert nicht).

Bemerkung. Aus den Sätzen 3, 4, 6, 7 bekommt man sofort die entsprechenden Ergebnisse für die Spezialfälle der in der Arbeit [4] eingeführten Methode. Wenn man z. B. die der Geraden $\beta = -1$ angehörenden Punkte der Mengen $\Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(5)}$ betrachtet, bekommt man die entsprechenden Behauptungen über die Konvergenz des Oberrelaxationsverfahrens (die Methode III aus der Arbeit [4]). Ähnliche ist die Situation im Falle der Methoden II, V, VI, VII aus der Arbeit [4].

Literaturverzeichnis

- [1] Parodi, M.: La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications, Paris, Gauthier-Villars, 1959.
- [2] Koliha, J. J.: On the iterative solution of linear operator equations with self-adjoint operators. The Journal of the Australian mathematical society, vol. XIII, Part 2, 1972, 241—255.
- [3] Šisler, M.: Bemerkungen zur Optimierung eines gewissen Iterationsverfahren, Apl. Mat., 18 (1973), 315—324.
- [4] Šisler, M.: Über ein zweiparametrisches Iterationsverfahren. Apl. Mat., 18 (1973), 325—332.

Souhrn

O KONVERGENCI JEDNÉ DVOUPARAMETRICKÉ ITERAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

V práci se zkoumá obor konvergence dvouparametrické iterační metody pro řešení soustavy lineárních rovnic tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde \mathbf{B} je jistá speciální (blokově cyklická) matice s nulovými diagonálními bloky. Práce navazuje na výsledky práce [4] téhož autora. Iterační metoda je definována předpisem

$$\mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_v + \mathbf{P}(\alpha, \beta) \mathbf{b},$$

kde

$$\mathbf{T}(\alpha, \beta) = (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{L})^{-1} [(\alpha - 1) \mathbf{E} + (\beta + 1) \mathbf{L} + \mathbf{U}],$$

$$\mathbf{P}(\alpha, \beta) = (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{L})^{-1}.$$

Přitom platí $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$, kde \mathbf{L} , resp. \mathbf{U} je dolní resp. horní blokově trojúhelníková matice a α, β jsou reálné parametry různé od nuly.

Práce se zabývá otázkou, kdy iterační metoda konverguje. Přesněji řečeno, v rovině α, β jsou nalezeny některé oblasti, ve kterých metoda konverguje a oblasti, ve kterých naopak metoda nekonverguje.

Výsledky práce lze aplikovat na řadu běžných iteračních metod (Gauss-Seidelovu, extrapolovanou Gauss-Seidelovu, superrelaxační, aj.).

Anschrift des Verfassers: RNDr. Miroslav Šisler CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, 115 67 Praha 1.