

# Aplikace matematiky

---

Miroslav Šisler

Über die Konvergenz eines gewissen Iterationsverfahrens für zyklische Matrizen

*Aplikace matematiky*, Vol. 18 (1973), No. 2, 89–98

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103455>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ÜBER DIE KONVERGENZ EINES GEWISSEN ITERATIONSVERFAHRENS FÜR ZYKLISCHE MATRIZEN

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen am 8. April 1972)

Die Arbeit befasst sich mit einigen Eigenschaften eines in der Arbeit [3] untersuchten Iterationsverfahrens für die Lösung eines linearen Gleichungssystems  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Das Iterationsverfahren wird folgenderweise definiert:

Es sei  $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{P} - \mathbf{R}$  eine gewisse Zerlegung der Matrix  $\mathbf{A}$ , wo  $\mathbf{D}$  eine verallgemeinerte Diagonalmatrix ist und  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{R}$  die zugehörigen verallgemeinerten Dreiecksmatrizen sind. Die Matrix  $\mathbf{A}$  drückt man ferner in der Form  $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$  aus, wo  $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \omega\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{N} = (1 - \omega)\mathbf{P} + \mathbf{R}$  ist und  $\omega$  ein reeller Parameter ist. Die Iterationsvorschrift für die betrachtete Methode ist von der Form

$$(1) \quad (\mathbf{D} - \omega\mathbf{P}) \mathbf{x}_{v+1} = [(1 - \omega)\mathbf{P} + \mathbf{R}] \mathbf{x}_v + \mathbf{b}.$$

Falls man  $\mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}$  setzt, geht die Formel (1) in die Form

$$(\mathbf{E} - \omega\mathbf{L}) \mathbf{x}_{v+1} = [(1 - \omega)\mathbf{L} + \mathbf{U}] \mathbf{x}_v + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b},$$

über, d. h. in die Form

$$(2) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\omega) \mathbf{x}_v + \mathbf{b}',$$

wo  $\mathbf{b}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$  und

$$(3) \quad \mathbf{T}(\omega) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega)\mathbf{L} + \mathbf{U}]$$

ist.

Für  $\omega = 1$  geht offensichtlich das durch die Beziehungen (2) und (3) definierte Verfahren in das übliche Gauss-Seidelsche Verfahren über; für  $\omega = 0$  in das Jacobi-Verfahren über.

Ähnlicherweise wie in der Arbeit [3] setzt man voraus, dass die Matrix  $\mathbf{B} = \mathbf{T}(0) = \mathbf{L} + \mathbf{U}$  einen linearen Operator darstellt, welcher den Vektorraum  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{R}$  abbildet, und dass dieser Vektorraum durch die direkte Summe der Unterräume  $v_1, \dots, v_m$



Satz 4 in der Arbeit [3] gibt das Intervall für die Werte des Parameters  $\omega$  an, für die der Spektralradius  $\varrho(\mathbf{T}(\omega))$  der Matrix  $\mathbf{T}(\omega)$  kleiner als 1 ist (d. h. die Werte  $\omega$ , für die das untersuchte Verfahren konvergiert) und es wurde hier auch der Optimalparameter  $\omega_b$  angegeben, für den der Wert  $\varrho(\mathbf{T}(\omega))$  minimal ist.

Diese Arbeit befasst sich mit einem allgemeineren Fall, wenn  $p \geq 2$  ist. Man befasst sich mit der Frage, für welche Parameterwerte  $\omega$  unseres Iterationsverfahren konvergiert, d. h. wann  $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$  ist. Im ganzen Artikel wird vorausgesetzt, dass  $\varrho(\mathbf{B}) < 1$  ist (d. h. dass das Verfahren für  $\omega = 0$  konvergiert).

1. Es sei  $\varrho(\mathbf{B})$  der Spektralradius der Matrix  $\mathbf{B}$ . Dann ist  $\varrho(\mathbf{T}(0)) = \varrho(\mathbf{B})$  und  $\varrho(\mathbf{T}(1)) = \varrho^{p/(p-k)}(\mathbf{B})$ , sodass  $\varrho(\mathbf{T}(1)) < \varrho(\mathbf{B}) < 1$  gilt.

Bemerkung 2. Satz 1 vergleicht also die Konvergenzgeschwindigkeit des Gauss-Seidelschen und des Jacobi-Verfahrens im Falle einer zyklischen Matrix  $\mathbf{B}$ . Das Gauss-Seidelsche Verfahren konvergiert in diesem Falle schneller als das Jacobi-Verfahren.

Beweis. Da  $\mathbf{T}(0) = \mathbf{B}$  ist, ist auch  $\varrho(\mathbf{T}(0)) = \varrho(\mathbf{B})$ . Falls man in (5)  $\omega = 1$  legt, bekommt man die Beziehung

$$(6) \quad \lambda^p = \mu^p \lambda^k.$$

Nach Satz 1 der Arbeit [3] und aus (6) folgt sofort, dass im Falle, wenn  $\mu$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}$  ist, die Nullstellen der Gleichung (6) die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{T}(1)$  darstellen. Die Gleichung (6) besitzt aber die  $k$ -fache Nullstelle  $\lambda = 0$  und ferner sind ihre Nullstellen die  $(p - k)$ -ten Wurzeln der Zahl  $\mu^p$ . Es ist offensichtlich  $\varrho(\mathbf{T}(1)) = \varrho^{p/(p-k)}(\mathbf{B}) < \varrho(\mathbf{B}) = \varrho(\mathbf{T}(0))$ , wodurch der Satz 1 bewiesen ist.

2. Es sei

$$(7) \quad \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\varrho^{p/k}(\mathbf{B})} \right) < \omega < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\varrho^{p/k}(\mathbf{B})} \right).$$

Dann gilt  $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$ .

Beweis. Die Gleichung (5) schreibt man in der Form

$$(8) \quad \lambda^p - \mu_i^p \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} \omega^{k-j} (1 - \omega)^j = 0$$

( $\mu_i^p$  bezeichnet irgendeinen Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^p$ ). Nach der bekannten Gerschoring-Abschätzung liegen alle Nullstellen der Gleichung (8) in dem Einheitskreise, wenn

$$(9) \quad |\mu_i|^p \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |\omega|^{k-j} |1 - \omega|^j < 1$$

gilt.

a) Es sei  $\omega > 1$ . Dann kann man (9) folgenderweise schreiben:

$$|\mu_i|^p \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \omega^{k-j} (\omega - 1)^j < 1, \quad |\mu_i|^p (\omega + \omega - 1)^k < 1$$

oder

$$\omega < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{|\mu_i|^{p/k}} \right).$$

b) Es sei  $0 < \omega < 1$ . Dann kann man (9) folgenderweise schreiben:

$$|\mu_i|^p \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \omega^{k-j} (1 - \omega)^j < 1, \quad |\mu_i|^p (\omega + 1 - \omega)^k < 1,$$

was für jedes  $\omega$  mit  $0 < \omega < 1$  gilt.

c) Es sei  $\omega < 0$ . Dann bekommt man aus (9) schrittweise die Ungleichungen

$$|\mu_i|^p \sum_{j=0}^k (-\omega)^{k-j} (1 - \omega)^j < 1, \quad |\mu_i|^p (-\omega + 1 - \omega)^k < 1,$$

$$\omega > \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{|\mu_i|^{p/k}} \right).$$

d) Mit dem Fall  $\omega = 0$  und  $\omega = 1$  befasst sich der Satz 1.

Aus den Fällen a), b), c) und d) bekommt man insgesamt, dass bei gegebenem Eigenwert  $\mu_i$  der Matrix  $\mathbf{B}$  alle Nullstellen der Gleichung (5) in dem Einheitskreise liegen, wenn  $\omega$  dem Intervalle

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{|\mu_i|^{p/k}} \right) < \omega < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{|\mu_i|^{p/k}} \right).$$

zugehört. Da  $\varrho(\mathbf{B}) = \max_{i=1, \dots, n} |\mu_i|$  ist, gilt für alle  $\omega$  aus dem Intervalle (7)  $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$ , was wir beweisen sollten.

**3.** Es sei  $\omega \leq 0$ . Dann gilt immer  $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) \geq \varrho(\mathbf{B})$ .

**Beweis.** Man beweist, dass für gegebene  $\mu_i$  die Gleichung (5) wenigstens eine solche Nullstelle  $\lambda$  besitzt, dass  $|\lambda| \geq |\mu_i|$  ist, sodass  $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) \geq \varrho(\mathbf{B})$  ist.

Es gelte im Gegenteil für alle Nullstellen  $\lambda_s$  der Gleichung (5) die Ungleichung  $|\lambda_s| < |\mu_i|$ . Die Gleichung (5) schreibt man in der Form

$$\lambda^p - \mu_i^p \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j \omega^j (1 - \omega)^{k-j} = 0.$$

Das Absolutglied dieser Gleichung ist der Ausdruck  $-\mu_i^p(1 - \omega)^k$ . Da

$$|-\mu_i^p(1 - \omega)^k| = \prod_{s=1}^p |\lambda_s| < |\mu_i|^p$$

gilt, bekommen wir schrittweise ( $\omega < 0$ )

$$|\mu_i|^p (1 - \omega)^k \leq |\mu_i|^p \quad (1 - \omega)^k \leq 1,$$

was ein Widerspruch ist, da  $1 - \omega \geq 1$  ist. Dadurch ist der Satz 3 bewiesen.

Aus den Sätzen 3 und 1 ist klar, dass der Minimalspektralradius  $\varrho(\mathbf{T}(\omega))$  immer kleiner als die Zahl  $\varrho(\mathbf{B})$  ist (er ist sogar kleiner oder gleich der Zahl  $\varrho^{p/(p-k)}(\mathbf{B})$ ) und dass der Optimalparameter (d. h. der Parameterwert, für den  $\varrho(\mathbf{T}(\omega))$  minimal ist) also nicht im Intervalle  $\omega \leq 0$  liegen kann. Deshalb ist auch der negative Teil des Intervalles (7) aus Satz 2 vom Gesichtspunkte der Optimierung der Methode uninteressant. Weiter beschränken wir uns daher auf die obere Grenze des Intervalles der Werte  $\omega$ , für die  $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$  ist.

Es gilt der folgende Satz:

**4.** *Es sei  $\omega \geq 1 + 1/(\varrho^{p/k}(\mathbf{B}))$ . Dann gilt  $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) \geq 1$ .*

**Beweis.** Man beweist, dass für  $\omega \geq 1 + 1/|\mu_i|^{p/k}$ ,  $i = 1, \dots, n$  die Gleichung (5) (wo  $\mu = \mu_i$  ist) wenigstens eine solche Nullstelle  $\lambda$  besitzt, dass  $|\lambda| \geq 1$  gilt. Man setze im Gegenteil voraus, dass für alle Nullstellen  $\lambda_s$  der Gleichung (5)  $|\lambda_s| < 1$  gilt. Die Gleichung (5) schreibt man in der Form

$$\lambda^p - \mu_i^p \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j \omega^j (1 - \omega)^{k-j} = 0.$$

Das Absolutglied dieser Gleichung ist der Ausdruck  $-\mu_i^p(1 - \omega)^k$  und es gilt dabei, dass

$$|-\mu_i^p(1 - \omega)^k| = \prod_{s=0}^p |\lambda_s| < 1$$

ist, da  $|\lambda_s| < 1$  für alle  $s$  gilt. Man bekommt nun schrittweise (mit Rücksicht auf die Ungleichung  $\omega > 1$ )

$$|\mu_i|^p (\omega - 1)^k < 1, \quad \omega < 1 + \frac{1}{|\mu_i|^{p/k}},$$

was aber einen Widerspruch bedeutet. Für  $|\mu_i| = \varrho(\mathbf{B})$  dann bekommt man die Behauptung des Satzes 4.

Aus den Sätzen 2 und 4 folgt, dass für die obere Grenze  $\Omega$  des Intervalles der Parameterwerte  $\omega$ , für die  $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$  gilt, die Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\varrho^{p/k}(\mathbf{B})} \right) \leq \Omega \leq 1 + \frac{1}{\varrho^{p/k}(\mathbf{B})}$$

gelten.

Im folgenden Satze 5 werden wir uns mit dem Fall befassen, wenn  $\Omega = \frac{1}{2}(1 + 1/q^{p/k}(\mathbf{B}))$  ist, d. h. wenn die obere Grenze des Intervalles (7) scharf ist (der Vollständigkeithalber geben wir auch die Fälle an, für die auch die untere Grenze scharf ist). Wir werden dabei voraussetzen, dass alle Eigenwerte  $\mu_i^p$  der Matrix  $\mathbf{B}^p$  reell sind. Dann gilt der Folgende Satz:

5. a) Es seien  $p$  und  $k$  ungerade Zahlen. Falls  $0 < \max_{i=1, \dots, n} \mu_i^p = q^p(\mathbf{B})$  (d. h. falls der im Absolutbetrag maximale Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^p$  positiv ist), hat die Matrix  $\mathbf{T}(\omega)$  für  $\omega_2 = \frac{1}{2}(1 + 1/q^{p/k}(\mathbf{B}))$  den Eigenwert  $\lambda = -1$  und es ist also  $q(\mathbf{T}(\omega_2)) \geq 1$ . Falls  $0 > \min_{i=1, \dots, n} \mu_i^p = -q^p(\mathbf{B})$  ist (d. h. falls der im Absolutbetrag maximale Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}^p$  negativ ist), hat die Matrix  $\mathbf{T}(\omega)$  für  $\omega_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/q^{p/k}(\mathbf{B}))$  den Eigenwert  $\lambda = -1$  und es ist also  $q(\mathbf{T}(\omega_1)) \geq 1$ .

b) Es sei  $p$  eine ungerade und  $k$  eine gerade Zahl. Falls  $0 > \min_{i=1, \dots, n} \mu_i^p = -q^p(\mathbf{B})$  ist, hat die Matrix  $\mathbf{T}(\omega)$  für  $\omega_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/q^{p/k}(\mathbf{B}))$  und auch für  $\omega_2 = \frac{1}{2}(1 + 1/q^{p/k}(\mathbf{B}))$  den Eigenwert  $\lambda = -1$  und es ist also  $q(\mathbf{T}(\omega_1)) \geq 1$ ,  $q(\mathbf{T}(\omega_2)) \geq 1$ .

c) Es sei  $p$  eine gerade und  $k$  eine ungerade Zahl. Falls  $0 < \max_{i=1, \dots, n} \mu_i^p = q^p(\mathbf{B})$  ist, hat die Matrix  $\mathbf{T}(\omega)$  für  $\omega_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/q^{p/k}(\mathbf{B}))$  den Eigenwert  $\lambda = -1$  und es ist also  $q(\mathbf{T}(\omega_1)) \geq 1$ . Falls  $0 > \min_{i=1, \dots, n} \mu_i^p = -q^p(\mathbf{B})$  ist, hat die Matrix  $\mathbf{T}(\omega)$  für  $\omega_2 = \frac{1}{2}(1 + 1/q^{p/k}(\mathbf{B}))$  den Eigenwert  $\lambda = -1$  und es ist also  $q(\mathbf{T}(\omega_2)) \geq 1$ .

Beweis. Es seien  $p, k$  ungerade Zahlen,  $0 < \max_i \mu_i^p = q^p(\mathbf{B})$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{2}(1 + 1/q^{p/k}(\mathbf{B}))$ . Wenn man in der Gleichung

$$\lambda^p - q^p(\mathbf{B})(1 - \omega_2 + \lambda\omega_2)^k = 0$$

$\lambda = -1$  setzt, bekommt man schrittweise

$$\begin{aligned} -1 - q^p(\mathbf{B}) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2q^{p/k}(\mathbf{B})} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2q^{p/k}(\mathbf{B})} \right)^k &= 0, \\ -1 - q^p(\mathbf{B}) \left( -\frac{1}{q^{p/k}(\mathbf{B})} \right)^k &= 0, \quad -1 + q^p(\mathbf{B}) \frac{1}{q^p(\mathbf{B})} = 0, \end{aligned}$$

was eine gültige Beziehung ist. Ganz analogisch verläuft der Beweis auch in den übrigen Fällen.

Bemerkung 3. Der Fall, wenn beide Zahlen  $p$  und  $k$  gerade sind, kommt nicht in Betracht, da die Zahlen  $p, k, h$  nach Voraussetzung teilerfremd sind.

**Bemerkung 4.** Eine anschauliche Vorstellung über die reellen Nullstellen der Gleichung (5) im Falle, wenn der Eigenwert  $\mu_i^p$  der Matrix  $\mathbf{B}^p$  reell und von Null verschieden ist, bekommt man, wenn man die Gleichung (5) in der Form

$$\frac{\lambda^p}{\mu_i^p} = (1 - \omega + \lambda\omega)^k$$

schreibt. Die graphische Darstellung der Funktion  $m_i(\lambda) = \lambda^p/\mu_i^p$  ist eine Parabel  $p$ -ten Grades mit dem Scheitelpunkt im Koordinatenursprung und die graphische Darstellung der Funktion  $g_\omega(\lambda) = (1 - \omega + \lambda\omega)^k$  ist eine Parabel  $k$ -ten Grades, die durch den Punkt  $[1, 1]$  geht und den Scheitelpunkt im Punkte  $[(\omega - 1)/\omega, 0]$

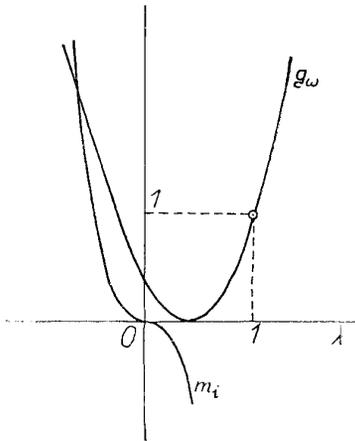


Abb. 1.

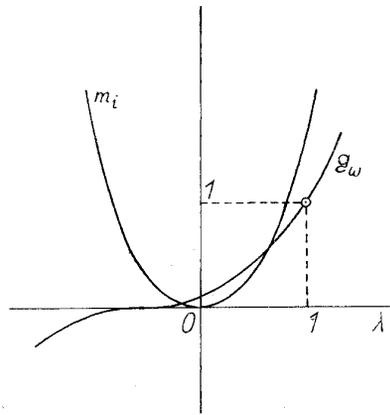


Abb. 2.

hat (es ist dabei  $(\omega - 1)/\omega > 1$  für  $\omega < 0$ ,  $(\omega - 1)/\omega < 0$  für  $0 < \omega < 1$  und  $0 < (\omega - 1)/\omega < 1$  für  $\omega > 1$ ). Der Anstieg der Tangente der Funktion  $g_\omega(\lambda)$  im Punkte  $[1, 1]$  ist dem Exponenten  $k$  gleich. Die Schnittpunkte beider Graphen der Funktionen  $m_i$  und  $g_\omega$  entsprechen dann den reellen Nullstellen der Gleichung (5). In Abb. 1 ist die Situation dargestellt, wenn  $p$  ungerade und  $k$  gerade ist,  $\mu_i^p < 0$  und  $1 < \omega$  ist. In Abb. 2 sehen wir den Fall, wenn  $p$  gerade und  $k$  ungerade ist,  $\mu_i^p > 0$  und  $0 < \omega < 1$  ist.

Zum Schluss führen wir noch den folgenden Satz an:

**6.** Es sei  $p$  gerade,  $k = 1$ ,  $0 < \max_{i=1, \dots, n} \mu_i = \varrho(\mathbf{B})$  und es gelte  $\omega \geq 1 + (p - 1)\varrho^p(\mathbf{B})$ . Dann liegt keiner von den Eigenwerten der Matrix  $\mathbf{T}(\omega)$  im Einheitskreise.

**Beweis.** Mit Rücksicht auf die kleinere praktische Bedeutung dieses Satzes deuten wir seinen Beweis nur kurz an. Man setze voraus, dass im Einheitskreise

eine Nullstelle  $\lambda = x + iy$  existiert, wo  $x^2 + y^2 = r^2 < 1$  ist. Aus (5) folgt, dass  $x$  und  $y$  die Gleichungen

$$(8) \quad \binom{p}{0} x^p - \binom{p}{2} x^{p-2} y^2 + \binom{p}{4} x^{p-4} y^4 - \dots + (-1)^{p/2} \binom{p}{p} y^p - \mu^p \omega x + \mu^p (\omega - 1) = 0,$$

$$(9) \quad \binom{p}{1} x^{p-1} y - \binom{p}{3} x^{p-3} y^3 + \binom{p}{5} x^{p-5} y^5 - \dots + (-1)^{p/2-1} \binom{p}{p-1} x y^{p-1} - \mu^p \omega y = 0$$

erfüllen. Da man leicht zeigen kann, dass die Gleichung (5) im Einheitskreise keine reelle Nullstelle besitzen kann, ist  $y \neq 0$  und angesichts der Beziehung  $y^2 = r^2 - x^2$  bekommt man nach einer Umformung und Addition der Gleichungen (8) und (9) die Gleichung

$$(10) \quad x^p \left( 1 - \binom{p}{1} \right) - x^{p-2} (r^2 - x^2) \left( \binom{p}{2} - \binom{p}{3} \right) + x^{p-4} (r^2 - x^2)^2 \left( \binom{p}{4} - \binom{p}{5} \right) - \dots + (-1)^{p/2} (r^2 - x^2)^{p/2} \binom{p}{p} + \mu^p (\omega - 1) = 0$$

und nach einer weiteren Umformung die Gleichung

$$(11) \quad \sum_{j=0}^{p/2} (-1)^j x^{p-2j} r^{2j} \left\{ \sum_{i=0}^{p/2-j} \left[ \binom{i+j}{j} \binom{p}{2(i+j)} - \binom{i+j}{j} \binom{p}{2(i+j)+1} \right] \right\} + \mu^p (\omega - 1) = 0.$$

Es ist also

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{p/2} (-1)^i x^{p-2i} r^{2i} 2^{p-2i} \binom{p-(i+1)}{i-1} + \mu^p (\omega - 1) = 0$$

in Hinsicht auf die kombinatorische Beziehungen

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{p/2-i} \left[ \binom{i+j}{j} \binom{p}{2(i+j)} - \binom{i+j}{j} \binom{p}{2(i+j)+1} \right] = \\ & = 2^{p-2i} \binom{p-(i+1)}{i-1}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\left( \text{hier setzt man für } i = 0 \binom{p-(i+1)}{i-1} = \binom{p-1}{-1} = 0. \right)$$

Man setze in (12)  $x = ur$ . Es genügt dann zu beweisen, dass die Gleichung

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{p/2} (-1)^{i-1} u^{p-2i} 2^{p-2i} \binom{p-(i+1)}{i-1} - \frac{\mu^p(\omega-1)}{r^p} = 0$$

für  $-1 < u < 1$  und  $\omega \geq 1 + (p-1)/\mu^p$  keine reellen Nullstellen besitzt. Dazu genügt zu beweisen, dass für  $-1 < u < 1$  die linke Seite der Gleichung (13) negativ ist. Da aber  $\mu^p(\omega-1)/r^p > p-1$  gilt, genügt es zu beweisen, dass die linke Seite der Gleichung

$$(14) \quad \sum_{i=1}^{p/2} (-1)^{i-1} u^{p-2i} 2^{p-2i} \binom{p-(i+1)}{i-1} - (p-1) = 0$$

für  $-1 < u < 1$  negativ ist.

In Hinsicht auf die Gültigkeit der kombinatorischen Beziehung

$$(15) \quad \sum_{i=1}^{p/2} (-1)^{i-1} 2^{p-2i} \binom{p-(i+1)}{i-1} = p-1$$

ist nun klar, dass die Gleichung (14) reelle Nullstellen  $u = 1$  und  $u = -1$  hat. Wenn man die Gleichung (14) mit den Wurzelfaktor  $u^2 - 1 < 0$  dividiert, bekommt man angesichts (15) nach der Substitution  $z = 2u$  die Gleichung

$$(16) \quad f_p(z) = z^{p-4} \binom{p-2}{0} + z^{p-6} \left( 2^2 \binom{p-2}{0} - \binom{p-3}{1} \right) + \\ + z^{p-8} \left( 2^4 \binom{p-2}{0} - 2^2 \binom{p-3}{1} + \binom{p-4}{2} \right) + \dots + \left( 2^{p-4} \binom{p-2}{0} - \right. \\ \left. - 2^{p-6} \binom{p-3}{1} + \dots + (-1)^{(p-4)/2} \binom{p/2}{(p-4)/2} \right) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber positiv für alle reellen Zahlen  $z$ . Das kann man folgenderweise beweisen:

Es gilt vor allem, dass  $f_4(z) = \binom{2}{0} = 1 > 0$  ist. Ferner stellt man fest, dass  $f_{p+2}(z) \geq f_p(z)$  ist, da man den Ausdruck  $f_{p+2}(z) - f_p(z)$  angesichts (16) in der Form

$$f_{p+2}(z) - f_p(z) = \left[ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{1}{4}(p-2) \rfloor} (-1)^i z^{\frac{1}{2}(p-2-4i)} \binom{\frac{1}{2}(p-2-2i)}{i} \right]^2 \geq 0$$

schreiben kann (hier bezeichnet  $\lfloor \frac{1}{4}(p-2) \rfloor$  den ganzen Teil der Zahl  $\frac{1}{4}(p-2)$ ).

Man bekommt endlich einen Widerspruch mit der Voraussetzung, dass die Gleichungen (8) und (9) im Einheitskreise eine Nullstelle besitzen. Dadurch ist der Satz 6 bewiesen.

- [1] *Kjellberg, G.*: On the successive over-relaxation method for cyclic operators. *Numerische Math.*, 3, 1961, 87–91.  
 [2] *Varga, R. S.*: *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, INC, 1962.  
 [3] *Šisler, M.*: Über ein Iterationsverfahren für zyklische Matrizen. *Aplikace matematiky*, 17, 225–233, 1972.

## Souhrn

## O KONVERGENCI JEDNÉ ITERAČNÍ METODY PRO CYKlickÉ MATICE

MIROSLAV ŠISLER

V práci je zkoumána konvergence jisté iterační metody pro řešení soustavy lineárních rovnic  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Iterační metoda je definována vzorcem

$$\mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\omega) \mathbf{x}_v + \mathbf{b}'.$$

Zde  $\mathbf{T}(\omega) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega)\mathbf{L} + \mathbf{U}]$ ,  $\mathbf{b}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$ , kde  $\omega$  značí reálný parametr, matice  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  jsou definovány vztahy  $\mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}$  a  $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{P} - \mathbf{R}$  je jistý rozklad matice  $\mathbf{A}$  (přitom je  $\mathbf{D}$  blokově diagonální matice,  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{R}$  jsou odpovídající blokově trojúhelníkové matice). Je zřejmé, že metoda přechází pro  $\omega = 0$  v Jacobiho metodu a pro  $\omega = 1$  v Gauss-Seidelovu metodu. Předpokládá se, že matice  $\mathbf{B} = \mathbf{T}(0) = \mathbf{L} + \mathbf{U}$  je lineárním operátorem zobrazujícím vektorový prostor  $\mathbf{R}$  do  $\mathbf{R}$ , že  $\mathbf{R}$  je direktním součtem podprostorů  $v_1, \dots, v_m$  a že matice  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  splňují podmínky  $\mathbf{L}v_i \subset v_{i+h}$ ,  $\mathbf{U}v_i \subset v_{i-k}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , kde  $h, k$  jsou celá kladná čísla,  $h + k = p$ , přičemž čísla  $h, k, p$  nemají netriviálního dělitele.

V práci je zkoumána otázka, pro které hodnoty parametru  $\omega$  metoda konverguje jak v obecném případě, kdy vlastní čísla matice  $\mathbf{B}^p$  jsou komplexní, tak i ve speciálním případě reálných vlastních čísel matice  $\mathbf{B}^p$ .

*Anschrift des Verfassers*: Dr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, 115 67 Praha 1.