



Об эффективной реализации и возможностях метода коллокации и наименьших квадратов решения эллиптических уравнений второго порядка

В. А. Беляев

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича

СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5901-2880>, e-mail: belyaevasily@mail.ru

Аннотация: Исследованы возможности численного метода коллокации и наименьших квадратов (КНК) на примерах кусочно-полиномиального решения задачи Дирихле для уравнений Пуассона и типа диффузии-конвекции с особенностями в виде больших градиентов и разрыва решения на границах раздела двух подобластей. Предложены и реализованы новые варианты метода КНК, основанные на присоединении внутри области малых и/или вытянутых нерегулярных ячеек, отсекаемых криволинейной границей раздела от исходных прямоугольных ячеек сетки, к соседним самостоятельным ячейкам, с возможностью измельчать размер сетки (h-подход) и/или увеличивать степень аппроксимирующих полиномов (p-подход). Выписываются с учетом особенности условия согласования между собой кусков решения в ячейках, прилегающих с разных сторон к границе раздела. Проведено сравнение результатов, полученных методом КНК и другими высокоточными методами. Показаны преимущества и достоинства метода КНК. Для ускорения итерационного процесса применены современные алгоритмы и методы: предобуславливание; свойства локальной системы координат в методе КНК; ускорение, основанное на методах подпространств Крылова; операция продолжения на многосеточном комплексе; распараллеливание. Исследовано влияние этих способов на количество итераций и время расчетов при аппроксимации полиномами различных степеней.

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших квадратов, повышенный порядок точности, уравнение Пуассона, уравнение типа диффузии-конвекции, большие градиенты, разрыв решения, предобуславливание, подпространства Крылова, многосеточный комплекс, распараллеливание.

Благодарности: Автор выражает свою признательность Л. С. Брындину, В. П. Шалееву и С. К. Голушко за внимание и полезные советы, оказанные при подготовке статьи.

Работа выполнена в рамках государственного задания (номера госрегистрации проектов: 121030500137-5 и АААА-А19-119051590004-5).

Для цитирования: Беляев В. А. Об эффективной реализации и возможностях метода коллокации и наименьших квадратов решения эллиптических уравнений второго порядка // Вычислительные методы и программирование. 2021. 22, 211–229. doi 10.26089/NumMet.v22r313.



On the effective implementation and capabilities of the least-squares collocation method for solving second-order elliptic equations

V. A. Belyaev

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5901-2880>, e-mail: belyaevasily@mail.ru*

Abstract: The capabilities of the numerical least-squares collocation (LSC) method of the piecewise polynomial solution of the Dirichlet problem for the Poisson and diffusion-convection equations are investigated. Examples of problems with singularities such as large gradients and discontinuity of the solution at interfaces between two subdomains are considered. New hp-versions of the LSC method based on the merging of small and/or elongated irregular cells to neighboring independent cells inside the domain are proposed and implemented. Hp-versions are combinations of the h-approach related to grid refinement and the p-approach related to increasing the degree of approximating polynomials. They cut off by a curvilinear interface from the original rectangular grid cells. Taking into account the problem singularity the matching conditions between the pieces of the solution in cells adjacent from different sides to the interface are written out. The results obtained by the LSC method are compared with other high-accuracy methods. Advantages of the LSC method are shown. For acceleration of an iterative process modern algorithms and methods are applied: preconditioning, properties of the local coordinate system in the LSC method, Krylov subspaces; prolongation operation on a multigrid complex; parallelization. The influence of these methods on iteration numbers and computation time at approximation by polynomials of various degrees is investigated.

Keywords: least-squares collocation method, high order of accuracy, Poisson equation, diffusion-convection equation, large gradients, discontinuity of solution, preconditioning, Krylov subspaces, multigrid complex, parallelization.

Acknowledgements: The author expresses his gratitude to L.S. Bryndin, V.P. Shapeev, and S.K. Golushko for the attention and useful advice provided during the preparation of the article.

The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project Nos. 121030500137-5 and AAAA-A19-119051590004-5).

For citation: V. A. Belyaev, “On the effective implementation and capabilities of the least-squares collocation method for solving second-order elliptic equations,” *Numerical Methods and Programming*, 22 (3), 211–229 (2021). doi 10.26089/NumMet.v22r313.

1. Введение. Моделирование различных процессов и явлений зачастую сводится к решению краевых задач для уравнений с частными производными (УЧП). При этом к численным методам решения возникающих математических проблем предъявляются повышенные требования. Важными вопросами являются устойчивость, скорость, точность и сходимость приближенных решений, а также область применимости конкретных методов к классам задач. В результате в последнее время наблюдается поиск новых вариантов численных методов, обладающих лучшими свойствами, чем методы, применявшиеся ранее. С другой стороны, новые проблемы часто требуют комплексного подхода к их решению. Поэтому гибкие и универсальные численные методы, которые можно относительно легко адаптировать для решения различных задач, становятся удобными инструментами.

Метод коллокации и наименьших квадратов (КНК) возник относительно недавно, хорошо себя зарекомендовал для решения различных одно-, дву- и трехмерных линейных и нелинейных задач и продолжает развиваться. Например, в качестве приложения метод КНК в разное время применялся для решения задач гидродинамики [1, 2] и механики деформируемого твердого тела (МДТТ) [3–5], моделирования лазерной сварки металлических пластин [6]. Метод КНК использовался для решения хорошо и плохо обусловленных задач [3–5], краевых задач для УЧП низкого и высокого порядков различного типа



в канонических и нерегулярных областях [4, 5, 7], а также для обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений [8]. Областью интересов вычислителей, занимающихся разработкой новых вариантов метода КНК, является его верификация на решении ряда тестовых задач, в том числе с особенностями [9], и проведение сравнения с результатами авторов, использовавших другие методы, с демонстрацией достоинств и преимуществ предлагаемых подходов [1, 4, 9]. Особое место занимает проблема ускорения итерационного процесса и улучшения свойств сходимости в методе КНК с использованием современных вычислительных методов и алгоритмов [2].

УЧП эллиптического типа второго порядка зачастую встречаются на практике, например в МДТТ [10] или при рассмотрении стационарных режимов [11]. Они могут входить как часть в более общие модели механики сплошных сред (МСС), поэтому одной из актуальных задач вычислительной математики является умение их решать быстро и с высокой точностью. Кроме того, решение тестовых краевых задач является хорошим способом проведения верификации численных методов и определения их возможностей относительно других методов, что представляет собой отдельный интерес.

Целью настоящей работы является исследование возможностей метода КНК решения эллиптических уравнений второго порядка с различными особенностями и его эффективности при сочетании с современными способами ускорения итерационного процесса. Здесь уделяется внимание решению краевой задачи Дирихле для уравнений Пуассона и типа диффузии-конвекции с малым параметром при старших производных. Рассматриваются примеры с особенностями в виде больших градиентов и разрыва решения на границе раздела двух подобластей. Для этих целей построены hp-варианты метода КНК с возможностью измельчать размер сетки (h-подход) и/или увеличивать степени аппроксимирующих полиномов (p-подход) в сочетании с разными способами ускорения итерационного процесса. К последним относятся: применение в методе КНК локальной системы координат, взвешенного метода наименьших квадратов, различных современных алгоритмов (ускорение, основанное на методах подпространств Крылова [12], алгоритмы с многосеточными комплексами [13], предобусловливание [14]), а также распараллеливание.

В предыдущих исследованиях были рассмотрены частные случаи. Так, в работе [15] было проведено исследование влияния управляющих параметров (координаты точек коллокации, координаты точек записи условий согласования и весовые множители) при решении уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса. В первом случае использовались полиномы только второй степени, а во втором рассматривались полиномы второй и первой степеней для аппроксимации компонент скорости и давления соответственно. В [2] при решении уравнений Навье–Стокса с применением полиномов второй и первой степеней было показано, что одновременное применение всех трех способов ускорения итераций (предобусловливание, ускорение по Крылову и многосеточный алгоритм) позволило сократить время расчетов до 160 раз по сравнению со случаем, когда ни один из способов не использовался. Исследование влияния значений весовых множителей, а также замечание относительно эффективности использования свойств локальной системы координат в методе КНК и ускорения по Крылову при решении бигармонического уравнения четвертого порядка методом КНК с использованием полиномов четвертой степени приведены в работе [3]. В данной работе проводится более подробный сравнительный анализ, в том числе с распараллеливанием, влияния указанных в предыдущем абзаце способов ускорения, учитывающий как отдельный вклад алгоритмов, так и их совместный вклад, при применении различных степеней аппроксимирующих полиномов в методе КНК решения УЧП эллиптического типа второго порядка.

При наличии в области линии разрыва решения на ней аппроксимируются вытекающие из постановки задачи условия согласования (сопряжения) примыкающих с разных сторон к ней кусков глобального решения. А в случае криволинейной формы границы раздела используется присоединение малых и/или вытянутых нерегулярных ячеек (n-ячеек), а также законтурных частей. Здесь отметим, что аналогичная идея присоединения малых и/или вытянутых n-ячеек с некоторыми отличиями успешно применялась при построении приближенного решения в граничных ячейках с записью краевых условий точно на границе области в методе КНК в нерегулярных областях [4]. Новизна данной работы по сравнению с [4] заключается в использовании n-ячеек именно внутри расчетной области для аппроксимации условий согласования на разрыве точно на границе раздела подобластей. Это позволяет достичь повышенного порядка сходимости приближенного решения рассмотренной задачи. Также полезные соображения относительно слияния ячеек можно найти в [16].

Проведено сравнение полученных здесь численных результатов с результатами авторов, использовавших метод конечных разностей (МКР) [17, 18] и адаптивный разрывный метод Галеркина высоких порядков аппроксимации [19, 20]. Исследование показало преимущества и достоинства метода КНК.

Личный вклад автора заключается в разработке hp-вариантов метода КНК и компьютерной программы, реализующей его в комбинации с разными вычислительными алгоритмами, в проведении расчетов, анализе полученных результатов и сравнении их с результатами других авторов.

2. Постановка задачи. Для исследования возможностей метода КНК, реализованного в комбинации с современными способами ускорения итерационного процесса, требуется численно решить краевую задачу для эллиптических уравнений второго порядка. Для этого сначала рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в квадратной области Ω с границей $\delta\Omega$

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u|_{\delta\Omega} &= g(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \delta\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа, $u(x_1, x_2)$ — искомая функция, $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ — заданные функции. Отличия, связанные с решением других краевых задач для УЧП второго порядка, заключаются в аппроксимации соответствующих уравнений, методика которой становится очевидной при описанном ниже алгоритме метода КНК на примере решения задачи (1).

3. Описание метода КНК. В Ω построим регулярную сетку $N \times N$ с квадратными ячейками размера $2h \times 2h$ (рис. 1). В каждой j -й ячейке ($j = 1, \dots, N^2$) введем локальную систему координат

$$y_1 = \frac{x_1 - x_{1j}}{h}, \quad y_2 = \frac{x_2 - x_{2j}}{h}, \tag{2}$$

где (x_{1j}, x_{2j}) — центр j -й ячейки. Таким образом, координаты $(y_1, y_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ (рис. 1 а), что позволяет избежать при аппроксимации задачи проблем, связанных с тем, что величины значений координат в разных ячейках могут сильно отличаться. Это может отрицательно сказываться на сходимости численного метода. Про другое преимущество локальной системы координат в методе КНК сказано ниже.

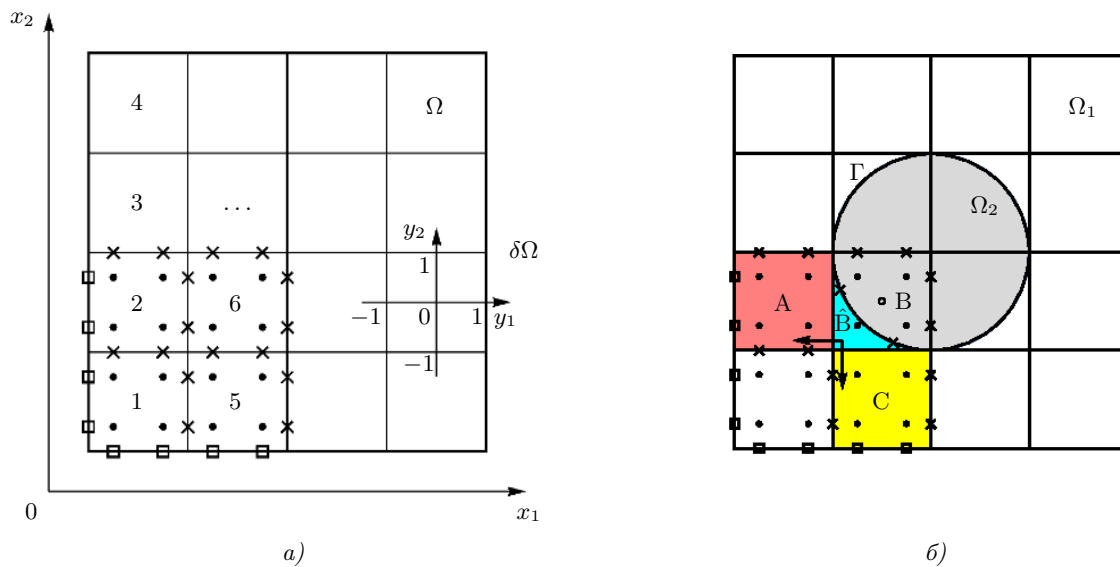


Рис. 1. Схема расположения точек коллокации “•”, согласования “×” и краевых условий “□” при $K = 2$:
 а) (x_1, x_2) и (y_1, y_2) — глобальные и локальные координаты, ячейки 1–5 — граничные, 6 — внутренняя;
 б) расчетная область с криволинейной границей раздела Γ , где серым цветом выделена подобласть Ω_2 , “о” — центр материнской ячейки, включающей n -ячейку B (серый цвет) и \hat{B} (голубой цвет), стрелки показывают присоединение n -ячейки \hat{B} к ячейкам A (розовый цвет) и C (желтый цвет)

Fig. 1. Arrangement diagram of the collocation “•”, matching “×”, and boundary condition “□” points at $K = 2$:
 а) (x_1, x_2) and (y_1, y_2) are the global and local coordinates, the boundary cells 1–5, the inner cell 6;
 б) the computational domain with the curved interface Γ , where the subdomain Ω_2 is highlighted in gray, “o” is the center of the mother cell, which includes the i -cells B (gray) and \hat{B} (cyan), the arrows show merging of the i -cell \hat{B} to the cells A (pink) and C (yellow)



Пусть $v(y_1, y_2) = u(x_1(y_1), x_2(y_2))$, тогда задача (1) в переменных (y_1, y_2) после замены (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} &= f(x_1(y_1), x_2(y_2)), & (y_1, y_2) \in \Omega, \\ v &= g(x_1(y_1), x_2(y_2)), & (y_1, y_2) \in \delta\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Приближенное решение задачи (3) в каждой ячейке будем искать в виде

$$v_{hj}(y_1, y_2) = \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^{K-i_1} c_{i_1 i_2, j} y_1^{i_1} y_2^{i_2},$$

где неизвестные коэффициенты $c_{i_1 i_2, j}$ определяются из решения переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящей из уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий в случае, если ячейка является граничной (рис. 1 а, ячейки с номерами 1–5). В методе КНК используются разные базисы при проектировании задачи в линейное функциональное пространство. При их выборе можно учитывать специфику задачи и особенности ее решения. Так, в работе [9] было показано, что в случае решения уравнения Пуассона с тестовым решением в виде функции Рунге оказывается эффективным использовать ортогональные полиномы Чебышева. При решении уравнений Навье–Стокса удобно вводить соленоидальный базис для тождественного выполнения уравнения неразрывности [1].

Уравнения коллокации, умноженные на положительный весовой множитель p_c , в каждой j -й ячейке выписываются в K^2 равномерно распределенных точках коллокации (рис. 1) и имеют вид

$$p_c \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y_2^2} \right) = p_c f. \quad (4)$$

В качестве условия согласования решения в K точках согласования (рис. 1) на каждой общей стороне между соседними ячейками требуется непрерывность линейной комбинации с весами p_{m_0}, p_{m_1} значений искомого приближенного решения и его производной по нормали

$$p_{m_0} v_{hj} + p_{m_1} \frac{\partial v_{hj}}{\partial n_j} = p_{m_0} \hat{v}_h + p_{m_1} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial n_j}, \quad (5)$$

где n_j — внешняя нормаль к границе j -й ячейки, v_{hj} и \hat{v}_h — пределы значений приближенного решения задачи при стремлении изнутри и извне к границе j -й ячейки соответственно.

Для граничных ячеек на каждой стороне, совпадающей с частью $\delta\Omega$, в K точках выписываются краевые условия (рис. 1)

$$p_b u = p_b g, \quad (6)$$

где p_b — положительный весовой множитель краевых условий Дирихле.

Рассмотрим случай, когда Ω границей раздела Γ (прямолинейной или криволинейной) разбивается на две подобласти Ω_1 и Ω_2 (рис. 1 б). На Γ могут возникать различные особенности, например решение или его некоторые производные могут терпеть разрыв. Условия подобного рода встречаются при моделировании различных явлений в прикладных задачах [19, 20].

Если Γ прямолинейна, то для построения сходящегося решения в методе КНК достаточно на сторонах ячеек, совпадающих с Γ , заменить (5) на условия, которые учитывают особенность, вытекающие из постановки задачи. Так, в разделе 3 в примере 2 рассматривается условие связи градиента функции u и ее скачка.

Криволинейная Γ , пересекая квадратные ячейки, делит их на две n -ячейки (рис. 1 б). Предлагается n -ячейку, которая сохранила центр исходной квадратной материнской ячейки, считать самостоятельной (рис. 1 б, ячейка В) и строить в ней свой отдельный кусок приближенного решения. Для этого здесь для простоты в материнской ячейке, содержащей n -ячейку, расставляется K^2 точек коллокации, в которых аппроксимируется уравнение (4). Заметим, что в этом случае может использоваться законтурная часть n -ячейки. Например, на рис. 1 б для ячейки В законтурной частью является дополняющая ее до исходной материнской ячейки несамостоятельная n -ячейка \hat{V} . Можно также реализовать варианты, когда точки коллокации будут расставлены только внутри самостоятельной n -ячейки. Однако, как показывают численные эксперименты, описанного здесь более простого способа может быть достаточно.

На общих сторонах между ячейками, которые находятся в одной и той же подобласти Ω_1 или Ω_2 , выписываются, как и прежде, K условий согласования. Несамостоятельная n -ячейка присоединяется к соседним самостоятельным ячейкам внутри той подобласти, в которой они находятся. Решение в конкретной точке присоединяемой ячейки продолжается из той соседней самостоятельной ячейки, центр которой находится ближе к данной точке. Так, на рис. 1 б несамостоятельная n -ячейка \hat{B} присоединяется к самостоятельным ячейкам A и C . При этом здесь считаем, что центр объединенной ячейки совпадает с центром исходной самостоятельной ячейки, к которой присоединяются несамостоятельные n -ячейки. При согласовании решений в ячейках, центры которых находятся в разных подобластях Ω_1 и Ω_2 , условия (5) выписываются в K точках, равномерно расположенных на части дуги Γ , которая находится в объединении этих ячеек (рис. 1 б). Таким образом, часть дуги Γ , принадлежащая несамостоятельной n -ячейке, может быть одновременно использована для записи условий согласования в нескольких самостоятельных ячейках, к которым она присоединяется.

Объединяя в каждой j -й ячейке уравнения коллокации (4), условия согласования (5) и краевые условия (6), если ячейка является граничной, получим переопределенную локальную СЛАУ. Глобальная СЛАУ является совокупностью всех локальных СЛАУ, для решения которой здесь использовался метод итераций по подобластям. При этом для построения решения в каждой ячейке применялась QR-декомпозиция локальных матриц. Итерации продолжались до тех пор, пока не было выполнено следующее условие их остановки:

$$\max_{i_1 i_2, j} |c_{i_1 i_2, j}^{n+1} - c_{i_1 i_2, j}^n| < \epsilon,$$

где n — номер итерации, ϵ — малая константа, называемая псевдопогрешностью решения и задаваемая вычислителем.

Для уменьшения времени выполнения итерационного процесса t_{sol} , сокращения количества итераций N_{iter} и улучшения свойств сходимости здесь применялись:

- диагональный предобуславливатель [2, 14];
- весовые множители $p_c, p_{m_0}, p_{m_1}, p_b$ (многопараметрический предобуславливатель);
- ускорение итерационного процесса, основанное на методах подпространств Крылова [2, 12];
- операция продолжения вдоль восходящей ветви V -цикла на многосеточном комплексе в методе Федоренко [2, 9, 13];
- свойства локальной системы координат в методе КНК;
- распараллеливание с помощью открытого стандарта OpenMP со способом обхода подобластей, основанном на красно-черном упорядочивании [21].

При решении линейной задачи с постоянными коэффициентами вид матриц локальных СЛАУ всех внутренних ячеек (рис. 1 а, ячейка б) одинаковый и не зависит от номера итерации. Зависимость от него имеет место только у правых частей уравнений, полученных из условий согласования. Если на первой итерации запомнить вид матрицы Q , с помощью которой матрица СЛАУ внутренней ячейки была приведена к верхнетреугольному виду, то на каждой итерации достаточно умножать на Q только правую часть. Такой прием для краткости назовем “запоминание матриц”.

4. Результаты численных экспериментов. Ниже в таблицах приведены значения абсолютной погрешности приближенного решения в бесконечной норме

$$\|E_a\|_{\infty} = \max_{j=1, \dots, N^2} \left[\max_{m=1, \dots, 100} |u(x_{1m}, x_{2m}) - u_{hj}(x_{1m}, x_{2m})| \right],$$

где (x_{1m}, x_{2m}) — равномерно распределенные контрольные точки в материнской ячейке для подсчета в них погрешности, u — точное решение задачи, u_{hj} — приближенное решение в j -й ячейке, а также значения абсолютной погрешности в норме L_2

$$\|E_a\|_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} (u - u_h)^2 d\Omega},$$

где u_h — приближенное решение в Ω , а интеграл считался с помощью прямого произведения одномерных квадратурных формул Гаусса с 20 узлами по каждому из направлений координат.

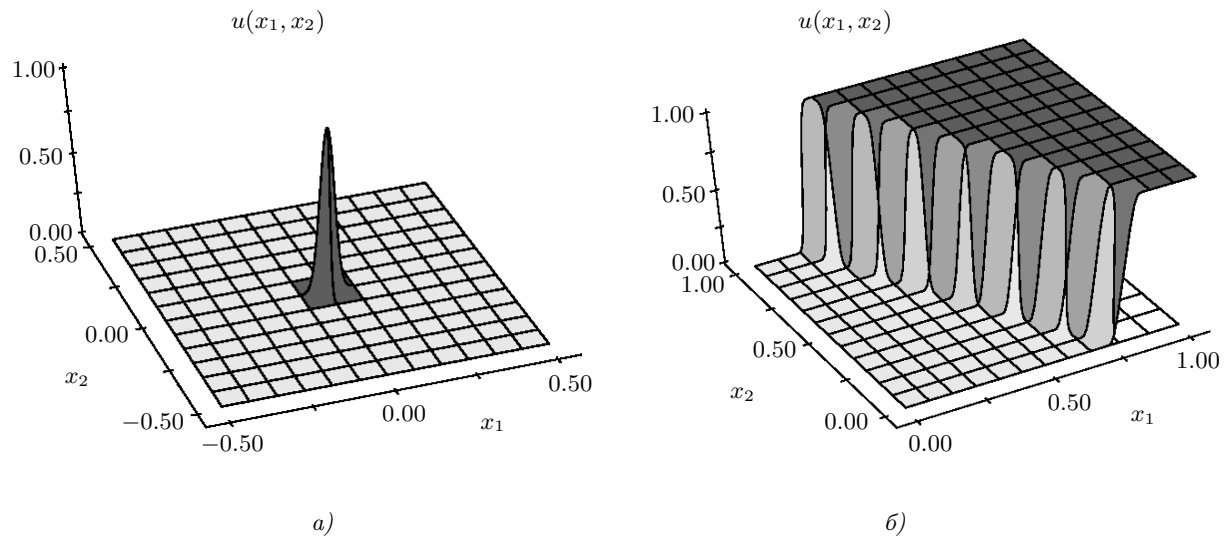


Рис. 2. Точное решение: а) в примере 1.1 при $\beta = 1000$; б) в примере 1.2 при $\beta = 10^{-4}$
 Fig. 2. Exact solution: а) in example 1.1 at $\beta = 1000$; б) in example 1.2 at $\beta = 10^{-4}$

Порядок сходимости приближенного решения определялся величиной

$$R = \log_2 \frac{E_p}{E_c},$$

где E_c — значение погрешности ($\|E_a\|_\infty$ или $\|E_a\|_{L_2}$) на сетке размера $N \times N$, E_p — значение погрешности на сетке размера $N/2 \times N/2$.

Пример 1. Рассмотрим несколько примеров краевых задач для уравнений Пуассона и типа диффузии-конвекции с малым параметром при старших производных и большими градиентами решения внутри расчетной области или около ее границы. Проведем сравнения с результатами других авторов, использовавших конечно-разностные схемы вплоть до восемнадцатого порядка.

Пример 1.1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона (1) в $\Omega = [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ с тестовым решением $u(x_1, x_2) = e^{-\beta(x_1^2 + x_2^2)}$ (рис. 2 а) и правой частью уравнения $f(x_1, x_2) = 4(\beta^2(x_1^2 + x_2^2) - \beta)e^{-\beta(x_1^2 + x_2^2)}$.

В табл. 1 и на рис. 3 приведены результаты численных экспериментов, полученные МКР [17] и методом КНК. В этой таблице для краткости K также обозначает порядок схемы для МКР (аналогично и в табл. 4). Видно, что результаты при $K = 2, 6$ у двух методов близки. При $K = 10$ и $\beta = 1000$, а также при $K = 18$ и $\beta = 100$ или $\beta = 1000$ методом КНК удается уже достигнуть заметно более высокой точности на одинакового размера сетках по сравнению с МКР. При этом авторы работы [17] отмечают, что для конечно-разностных схем десятого и восемнадцатого порядков в приграничных узлах применялась схема шестого порядка на девятиточечном шаблоне, однако в этом примере у них численное решение сходится с порядком, соответствующим порядку аппроксимации используемых схем. Стоит отметить, что здесь особенность в виде больших градиентов решения находится внутри области, поэтому аппроксимация в приграничных узлах схемой более низкого порядка может сказываться на порядке сходимости R в меньшей мере по сравнению с другими случаями. Кроме того, из табл. 1 видно, что порядки сходимости R в методе КНК и МКР для $K = 2, 6, 10$ приблизительно совпадают и равны двум, шести и десяти соответственно. Однако при $\beta = 100$ и $K = 10$ в методе КНК при переходе с 40×40 на 80×80 происходит заметное уменьшение R из-за достижения решением точности порядка ошибок округлений на компьютере. В этом случае, независимо от применяемых методов, возрастает роль погрешности округлений при вычислении порядка сходимости R и обычные формулы его подсчета становятся непригодными (аналогичный эффект в методе КНК при $\beta = 100$ и $K = 18$ при переходе с 10×10 на 20×20). При $K = 18$ в методе КНК R немного снижается, принимая значения не более 15, при этом точность решения остается повышенной. Такое поведение в методе КНК может наблюдаться при использовании полиномов высоких степеней из-за того, что с ростом K увеличивается количество арифметических действий и быстрее растет накопление по-

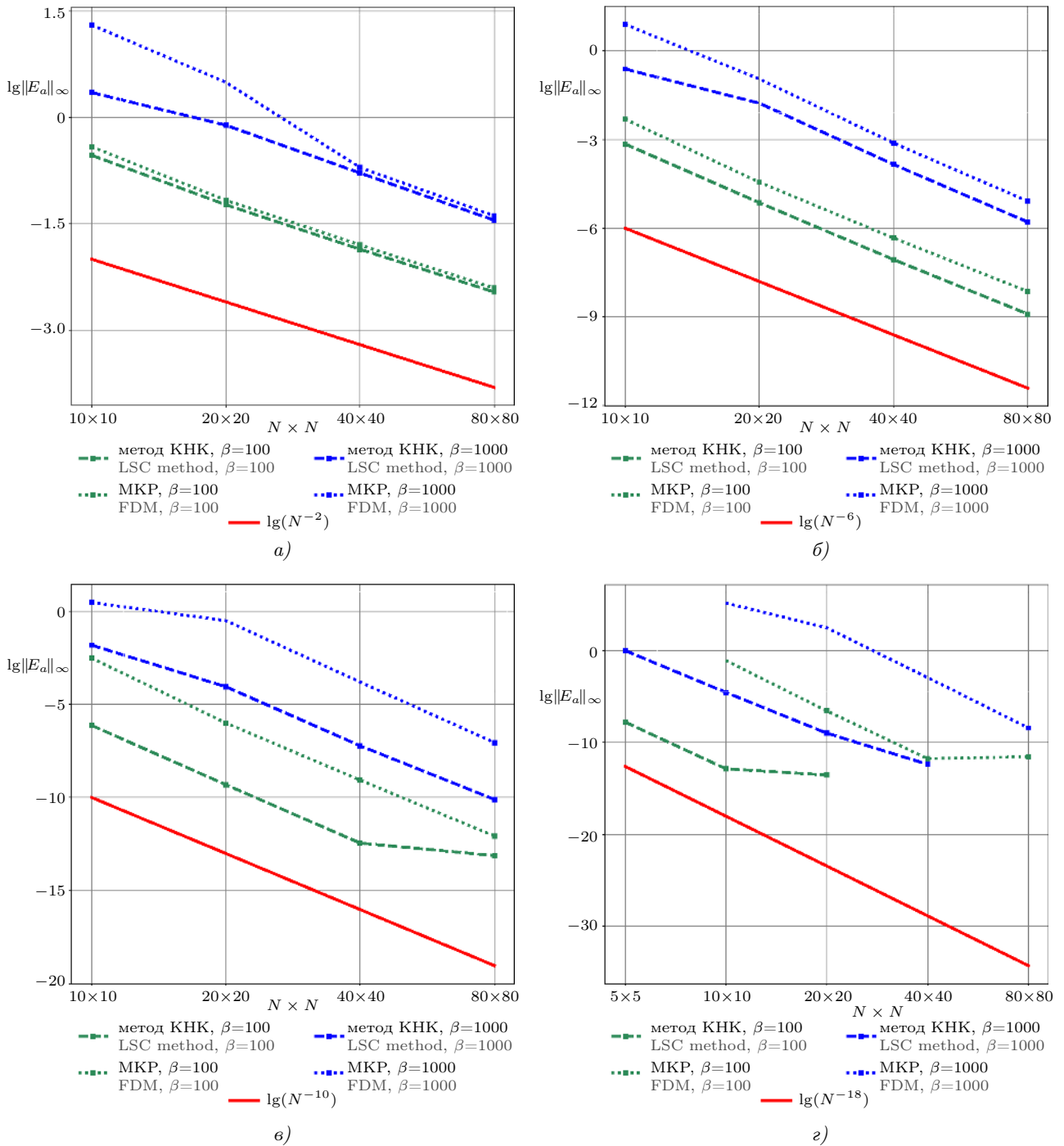


Рис. 3. Результаты численных экспериментов в примере 1.1: а) $K = 2$; б) $K = 6$; в) $K = 10$; г) $K = 18$

Fig. 3. Results of numerical experiments in example 1.1: а) $K = 2$; б) $K = 6$; в) $K = 10$; г) $K = 18$

грешности округлений. С другой стороны, независимо от этого, особенность решения задачи с большими градиентами также сказывается на точности решения: увеличение β ведет к увеличению остаточного члена аппроксимации и погрешности решения. Кроме того, с увеличением K растет число обусловленности матриц локальных СЛАУ. Так, при изменении K от 2 до 18 число обусловленности в спектральной норме увеличилось с $C_1 \cdot 10^0$ до $C_2 \cdot 10^6$, где C_1, C_2 — константы. В МКР при $K = 18$ порядок сходимости $R = 18$, однако улучшения точности на сетке 80×80 не происходит по сравнению с результатом на сетке 40×40 при $\beta = 100$. В методе КНК удается достигнуть максимальной точности приблизительно на два порядка лучше по сравнению с МКР, что подчеркивает хорошие аппроксимативные свойства метода КНК.



Таблица 1. Результаты численных экспериментов в примере 1.1
 Table 1. Results of numerical experiments in example 1.1

K	N×N	МКР[17] FDM[17]		метод КНК LSC method		МКР [17] FDM [17]		метод КНК LSC method	
		$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R
		$\beta = 100$				$\beta = 1000$			
2	10×10	$3.843 \cdot 10^{-1}$	—	$2.92 \cdot 10^{-1}$	—	19.978	—	2.23	—
	20×20	$6.771 \cdot 10^{-2}$	2.50	$5.85 \cdot 10^{-2}$	2.31	3.11	2.68	$7.74 \cdot 10^{-1}$	1.52
	40×40	$1.591 \cdot 10^{-2}$	2.09	$1.38 \cdot 10^{-2}$	2.08	$1.959 \cdot 10^{-1}$	3.99	$1.64 \cdot 10^{-1}$	2.23
	80×80	$3.921 \cdot 10^{-3}$	2.02	$3.45 \cdot 10^{-3}$	2.00	$4.104 \cdot 10^{-2}$	2.25	$3.55 \cdot 10^{-2}$	2.20
6	10×10	$4.942 \cdot 10^{-3}$	—	$7.11 \cdot 10^{-4}$	—	7.985	—	$2.46 \cdot 10^{-1}$	—
	20×20	$3.594 \cdot 10^{-5}$	7.10	$7.30 \cdot 10^{-6}$	6.60	$1.13 \cdot 10^{-1}$	6.14	$1.71 \cdot 10^{-2}$	3.84
	40×40	$4.635 \cdot 10^{-7}$	6.28	$8.65 \cdot 10^{-8}$	6.39	$7.624 \cdot 10^{-4}$	7.21	$1.44 \cdot 10^{-4}$	6.89
	80×80	$7.110 \cdot 10^{-9}$	6.03	$1.23 \cdot 10^{-9}$	6.13	$8.193 \cdot 10^{-6}$	6.54	$1.61 \cdot 10^{-6}$	6.48
10	10×10	$3.036 \cdot 10^{-3}$	—	$7.37 \cdot 10^{-7}$	—	2.936	—	$1.51 \cdot 10^{-2}$	—
	20×20	$9.894 \cdot 10^{-7}$	11.58	$4.81 \cdot 10^{-10}$	10.58	$3.086 \cdot 10^{-1}$	3.25	$8.76 \cdot 10^{-5}$	7.42
	40×40	$8.473 \cdot 10^{-10}$	10.19	$3.54 \cdot 10^{-13}$	10.40	$1.559 \cdot 10^{-4}$	10.95	$5.93 \cdot 10^{-8}$	10.52
	80×80	$8.407 \cdot 10^{-13}$	9.98	$7.52 \cdot 10^{-14}$	2.23	$8.78 \cdot 10^{-8}$	10.79	$7.75 \cdot 10^{-11}$	9.57
18	5×5	—	—	$1.74 \cdot 10^{-8}$	—	—	—	1.03	—
	10×10	$8.388 \cdot 10^{-2}$	—	$1.43 \cdot 10^{-13}$	13.57	154283	—	$2.91 \cdot 10^{-5}$	15.11
	20×20	$2.844 \cdot 10^{-7}$	18.17	$3.04 \cdot 10^{-14}$	2.23	307.82	8.97	$1.08 \cdot 10^{-9}$	14.71
	40×40	$1.826 \cdot 10^{-12}$	17.25	—	—	$1.19 \cdot 10^{-3}$	17.98	$4.33 \cdot 10^{-13}$	11.28
80×80	$2.992 \cdot 10^{-12}$	-0.71	—	—	$3.92 \cdot 10^{-9}$	18.21	—	—	

В работе [18] подчеркивается: “Очевидно, что сложность построения программной реализации схем высокого порядка аппроксимации не является их достоинством по сравнению со схемами низкого порядка аппроксимации”, при этом отмечается, что система компьютерной алгебры позволяет их преодолеть, чем и пришлось воспользоваться авторам работы [17]. Заметим, что схема алгоритма построения метода КНК универсальна и относительно легко реализуется с точки зрения программирования для произвольного K без возможного обращения к дополнительным пакетам прикладных программ. Кроме того, это является важным достоинством эффективной применимости метода КНК для аппроксимации интегральных [8] и дифференциальных уравнений разного порядка, входящих в постановки задач МСС.

В табл. 2 приведена информация об использовании способов ускорения в различных случаях, где значок “+” означает то, что этот способ применялся в расчетах в конкретном случае. При этом дополнительно везде использовался диагональный предобусловливатель, а значения весовых множителей были взяты $p_c = h^2$, $p_{m_0} = 1$, $p_{m_1} = h$, $p_b = 1$ (аналогичные веса использованы в примерах 1.2, 2.1 и 2.2). В тех случаях, когда распараллеливание не использовалось, применялся последовательный способ обхода

Таблица 2. Информация об использованных способах ускорения в различных случаях
 Table 2. Information on the acceleration methods used in various cases

Случай Case	Запоминание матриц Storage of matrices	Распараллеливание с помощью OpenMP Parallelization using OpenMP	Ускорения по Крылову Krylov acceleration	Операция продолжения Prolongation operation
A				
B	+			
C		+		
D			+	
E				+
F	+	+	+	+

области от одной ячейки к другой. Например, в области, приведенной на рис. 1 а, в соответствии с этим способом обход будет осуществляться в следующем порядке: 1, 2, ..., 6, В ускорении по Крылову использовалось 10 невязок. В табл. 3 и рис. 4 приведены N_{iter} , t_{sol} в секундах и их отношения AF_i и AF_t соответственно для разных случаев по отношению к случаю А с указанием значения псевдопогрешности ϵ для остановки итерационного процесса. Расчеты проведены на компьютере Intel Core i7-4700MQ CPU 2.80 GHz, DIMM DDR3 800 MHz 6 Gb, для распараллеливания использовалось четыре потока. В случаях Е и F предварительно для задания начального приближения был проведен расчет на более грубой сетке по сравнению с самой мелкой, указанной в табл. 3.

Проведенное исследование показало: 1) “запоминание матриц” (случай В) позволяет сократить время расчетов более чем в полтора раза для $K = 2$, а на сетке 80×80 для $K = 6$ в 2.8 раз; 2) распараллеливание (случай С) ускоряет время вычислений приблизительно в три раза для $K = 2, 6$, при этом количество итераций N_{iter} в этой задаче при обходе области, основанном на красно-черном упорядочивании, практически совпадает с N_{iter} при последовательном обходе области, т.е. от способа обхода области может зависеть количество итераций; 3) ускорение по Крылову (случай D) заметно уменьшает как количество итераций, так и время расчетов (от 4 до 13 раз для $K = 2, 6$); 4) операция продолжения (случай Е) и применение всех способов ускорения (случай F) становятся эффективнее с измельчением шагов сетки и

Таблица 3. Демонстрация эффективности применения различных способов ускорения в методе КНК
 Table 3. Demonstration of the effectiveness of using various acceleration methods in the LSC method

$K = 2$ при $\epsilon = 10^{-7}$												
$K = 2$ at $\epsilon = 10^{-7}$												
$N \times N$	случай А case A				случай В case B				случай С case C			
	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t
20×20	379	1.609	—	—	379	1.015	1	1.59	377	0.64	1.00	2.51
40×40	1280	21.39	—	—	1280	12.484	1	1.71	1278	7.063	1.00	3.02
80×80	4209	284.844	—	—	4209	156.984	1	1.81	4207	95.016	1.00	2.99
160×160	13230	3644.45	—	—	13230	2014.3	1	1.80	13228	1298.11	1.00	2.80
$N \times N$	случай D case D				случай E case E				случай F case F			
	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t
20×20	71	0.312	5.33	5.15	225	0.937	1.68	1.71	41	0.11	9.24	14.62
40×40	141	2.36	9.07	9.06	380	6.156	3.36	3.47	61	0.265	20.98	80.71
80×80	315	21.469	13.36	13.26	551	35.719	7.63	7.97	61	1.266	82.52	224.99
160×160	1384	379.14	9.55	9.61	850	222.953	15.56	16.34	71	6.328	186.33	575.92
$K = 6$ при $\epsilon = 10^{-13}$												
$K = 6$ at $\epsilon = 10^{-13}$												
$N \times N$	случай А case A				случай В case B				случай С case C			
	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t
10×10	283	8.484	—	—	283	5.015	1	1.69	296	3.547	0.95	2.39
20×20	1079	133.39	—	—	1079	58.969	1	2.26	1133	46	0.95	2.89
40×40	4098	2076.19	—	—	4098	770.203	1	2.69	4312	689.766	0.95	3.00
80×80	15497	30353	—	—	15497	10838.5	1	2.8	16360	10142.8	0.94	2.99
$N \times N$	случай D case D				случай E case E				случай F case F			
	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t	N_{iter}	t_{sol}	AF_i	AF_t
10×10	59	1.781	4.79	4.76	235	6.938	1.20	1.22	41	0.391	6.90	21.69
20×20	151	18.281	7.14	7.29	671	81.485	1.60	1.63	72	1.609	14.98	82.90
40×40	420	206.875	9.75	10.03	227	110.562	18.05	18.77	51	3.813	80.35	544.50
80×80	1120	2208.58	13.83	13.74	290	570.031	53.43	53.24	61	15.75	254.04	1927.17

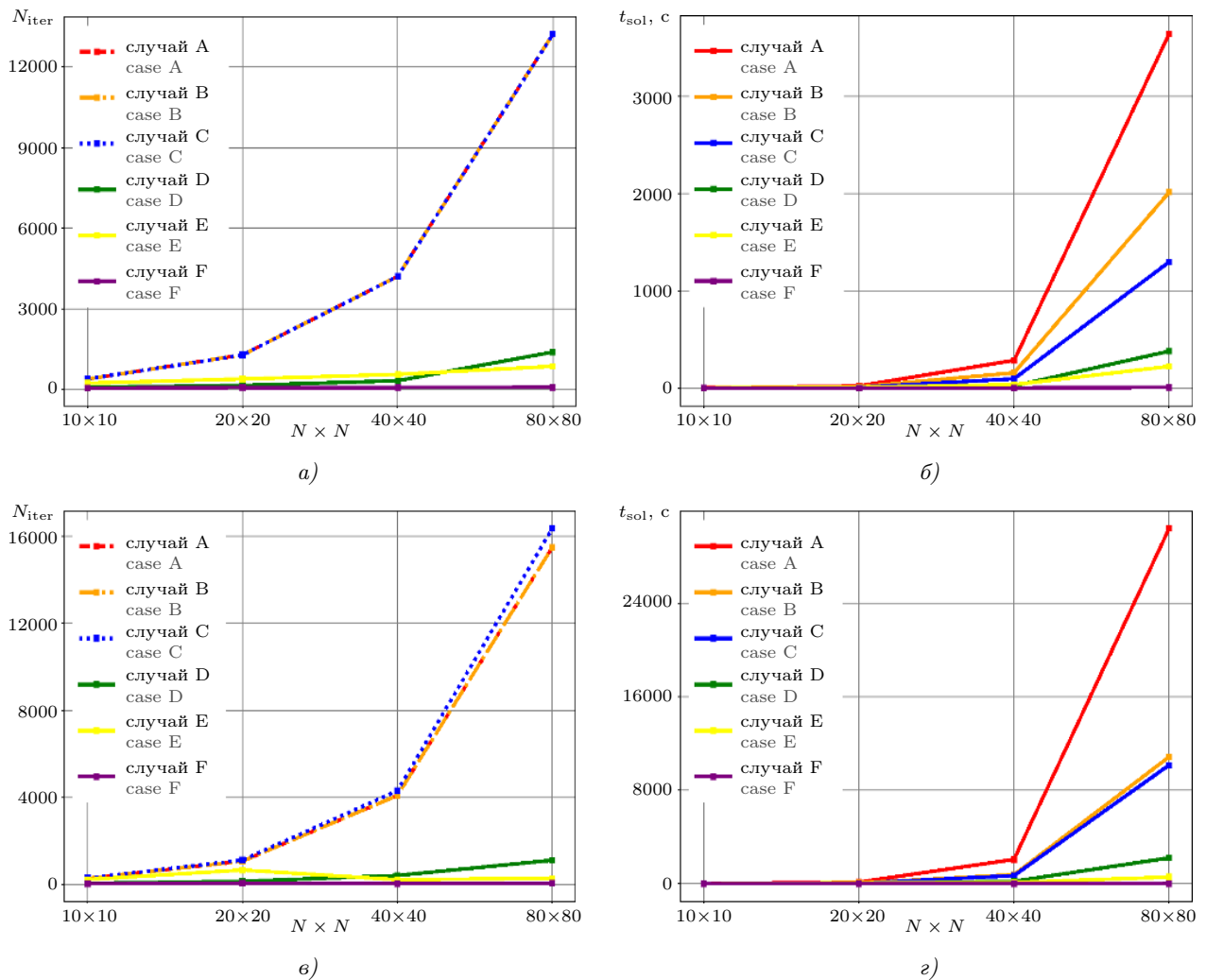


Рис. 4. Демонстрация эффективности применения различных способов ускорения в методе КНК:
 а) $K = 2$ для N_{iter} ; б) $K = 2$ для t_{sol} ; в) $K = 6$ для N_{iter} ; г) $K = 6$ для t_{sol}

Fig. 4. Demonstration of the effectiveness of using various acceleration methods in the LSC method:
 а) $K = 2$ for N_{iter} ; б) $K = 2$ for t_{sol} ; в) $K = 6$ for N_{iter} ; г) $K = 6$ for t_{sol}

увеличением степени аппроксимирующих полиномов K . Так, при $K = 10$ с $\epsilon = 10^{-14}$ на сетке 20×20 в случае А значения $N_{iter} = 1207$, $t_{sol} = 1129.2$, а в случае F значения $N_{iter} = 62$, $t_{sol} = 8.25$, следовательно, коэффициенты ускорения $AF_i = 19.47$ и $AF_t = 136.87$. Кроме того, с одной стороны, количество итераций может увеличиваться при измельчении шагов сетки, а с другой стороны, при использовании операции продолжения начальное приближение улучшается на более подробной сетке по сравнению с грубой. Последнее также влияет на количество итераций, поэтому на более подробной сетке может наблюдаться уменьшение N_{iter} по сравнению с более грубой сеткой.

Отметим, что многие рассмотренные способы ускорения в методе КНК относительно легко могут быть реализованы и добавлены в уже существующие компьютерные программы. Это делает его привлекательным для комбинированного использования с другими вычислительными алгоритмами. Так, в качестве примера, ниже приведен фрагмент кода алгоритмов на языке C (листинг 1), реализующих два

Листинг 1. Функция обхода области
 Listing 1. Domain traversal function

```

1 void domain_traversal()
2 {
3     if (parallel == 1) // traversal based on red-black ordering
4     {
5         omp_set_num_threads(4); // set the number of threads
    
```

```

6 #pragma omp parallel for
7   for (int i = 0; i < n1; i++) // n1, n2 grid sizes
8     for (int j = 0; j < n2; j++)
9       if ((i + j) % 2 == 0)
10        set(i, j); // form a matrix and find a solution of a local
11                  // system of linear algebraic equations in
12                  // a cell numbered (i,j)
13 #pragma omp parallel for
14   for (int i = 0; i < n1; i++)
15     for (int j = 0; j < n2; j++)
16       if ((i + j) % 2 == 1)
17        set(i, j);
18   }
19   else // serial traversal
20   {
21     for (int i = 0; i < n1; i++)
22       for (int j = 0; j < n2; j++)
23         set(i, j);
24   }
25 }
    
```

обхода области: первый способ основан на красно-черном упорядочивании с применением распараллеливания с помощью OpenMP, второй — последовательный обход. В случае применения других методов к аналогичным задачам такое комбинирование не всегда может быть простым.

Пример 1.2. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона (1) в $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ с тестовым решением $u(x_1, x_2) = G((x_1 - a) \cos(\phi) + (x_2 - b) \sin(\phi))$ (рис. 2б), где $G(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi/\sqrt{2\beta}} e^{-t^2} dt$, и правой частью уравнения $f(x_1, x_2) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta^{3/2}} \xi e^{-\xi^2/2\beta}$, $\xi = (x_1 - a) \cos(\phi) + (x_2 - b) \sin(\phi)$. Для подсчета интеграла использовалось прямое произведение одномерных квадратурных формул Гаусса. В табл. 4 и на рис. 5 приведены результаты численных экспериментов, полученные МКР [17] и методом КНК при $a = 0.6$, $b = 0.3$, $\phi = \frac{\pi}{6}$. Видно, что здесь также во многих случаях методом КНК удается достигнуть более высокой точности решения по сравнению с МКР. Однако порядок сходимости в случае конечно-разностной схемы десятого порядка оказался ниже ее порядка аппроксимации [17]. В этом примере большие градиенты присутствуют не только внутри расчетной области, но и вблизи ее границы, при этом для приграничных узлов, как уже было отмечено выше, использовался МКР шестого порядка.

Таблица 4. Результаты численных экспериментов в примере 1.2
 Table 4. Results of numerical experiments in example 1.2

K	N×N	МКР [17] FDM [17]		метод КНК LSC method		МКР [17] FDM [17]		метод КНК LSC method	
		$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R
		$\beta = 10^{-3}$				$\beta = 10^{-4}$			
2	10×10	$2.749 \cdot 10^{-1}$	—	$2.06 \cdot 10^{-1}$	—	9.31	—	1.39	—
	20×20	$3.96 \cdot 10^{-2}$	2.79	$5.27 \cdot 10^{-2}$	1.96	1.178	2.98	$3.61 \cdot 10^{-1}$	1.94
	40×40	$8.575 \cdot 10^{-3}$	2.20	$9.76 \cdot 10^{-3}$	2.43	$1.55 \cdot 10^{-1}$	2.93	$1.39 \cdot 10^{-1}$	1.37
	80×80	—	—	$1.99 \cdot 10^{-3}$	2.29	—	—	$3.00 \cdot 10^{-2}$	2.21
6	10×10	$9.147 \cdot 10^{-2}$	—	$9.35 \cdot 10^{-3}$	—	1.685	—	$2.73 \cdot 10^{-1}$	—
	20×20	$9.117 \cdot 10^{-4}$	6.65	$9.60 \cdot 10^{-5}$	6.60	$4.666 \cdot 10^{-1}$	1.85	$4.05 \cdot 10^{-2}$	2.77
	40×40	$5.531 \cdot 10^{-5}$	4.04	$1.07 \cdot 10^{-6}$	6.48	$2.383 \cdot 10^{-2}$	4.29	$1.59 \cdot 10^{-3}$	4.75
	80×80	—	—	$1.33 \cdot 10^{-8}$	6.33	—	—	$2.16 \cdot 10^{-5}$	6.20
10	10×10	$1.280 \cdot 10^{-1}$	—	$1.58 \cdot 10^{-4}$	—	1.98	—	$1.78 \cdot 10^{-1}$	—
	20×20	$9.804 \cdot 10^{-4}$	7.03	$1.12 \cdot 10^{-7}$	10.46	$6.049 \cdot 10^{-1}$	1.71	$4.39 \cdot 10^{-3}$	5.34
	40×40	$5.514 \cdot 10^{-5}$	4.15	$6.97 \cdot 10^{-11}$	10.65	$3.74 \cdot 10^{-2}$	4.01	$1.51 \cdot 10^{-5}$	8.18
	80×80	—	—	$4.35 \cdot 10^{-13}$	7.32	—	—	$1.22 \cdot 10^{-8}$	10.27

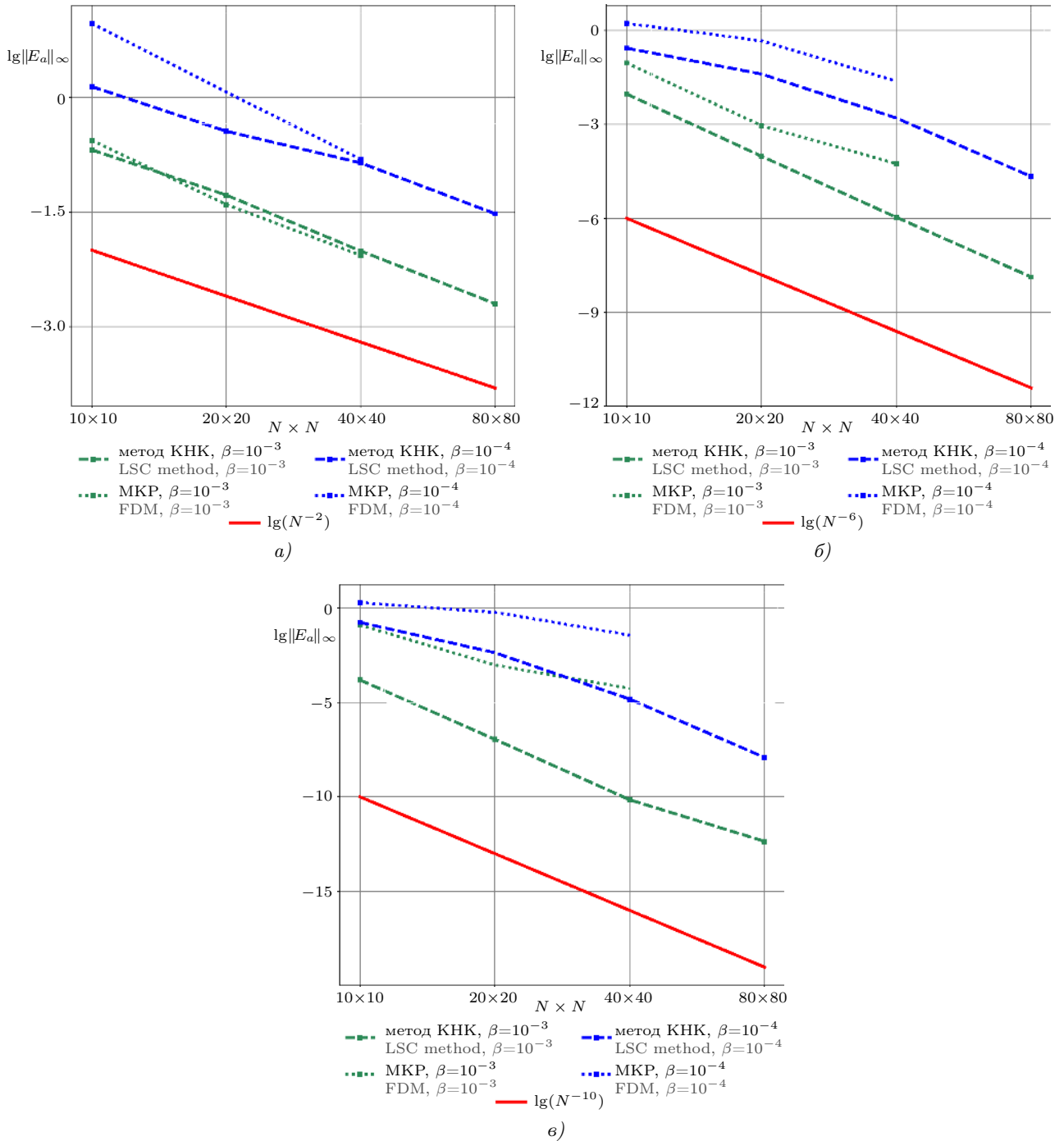


Рис. 5. Результаты численных экспериментов в примере 1.2: а) $K = 2$; б) $K = 6$; в) $K = 10$

Fig. 5. Results of numerical experiments in example 1.2: а) $K = 2$; б) $K = 6$; в) $K = 10$

Пример 1.3. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения типа диффузии-конвекции в $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ с малым параметром β при старших производных [7]

$$\begin{aligned} \beta \Delta^2 u + (x_1 - a)u_{x_1} + (x_2 - b)u_{x_2} &= 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u|_{\delta\Omega} &= v(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \delta\Omega, \end{aligned} \tag{7}$$

Таблица 5. Результаты численных экспериментов в примере 1.3
Table 5. Results of numerical experiments in example 1.3

$N \times N$	$\beta = 10^{-3}$				$\beta = 10^{-4}$			
	$K = 4$		$K = 6$		$K = 4$		$K = 6$	
	$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_a\ _\infty$	R
20×20	$4.59 \cdot 10^{-3}$	—	$3.09 \cdot 10^{-4}$	—	$2.47 \cdot 10^{-1}$	—	$9.78 \cdot 10^{-2}$	—
40×40	$2.70 \cdot 10^{-4}$	4.08	$4.06 \cdot 10^{-6}$	6.24	$2.28 \cdot 10^{-2}$	3.43	$3.11 \cdot 10^{-3}$	4.97
80×80	$1.14 \cdot 10^{-5}$	4.56	$5.37 \cdot 10^{-8}$	6.24	$1.78 \cdot 10^{-3}$	3.67	$2.55 \cdot 10^{-5}$	6.93
160×160	$5.67 \cdot 10^{-7}$	4.32	$4.61 \cdot 10^{-10}$	6.86	$7.16 \cdot 10^{-5}$	4.63	$2.67 \cdot 10^{-7}$	6.57

где $v(x_1, x_2)$ взята из точного решения. Уравнение (7) имеет следующее семейство точных решений:

$$u(x_1, x_2) = G((x_1 - a) \cos \phi + (x_2 - b) \sin \phi)G(-(x_1 - a) \sin \phi + (x_2 - b) \cos \phi), \quad (8)$$

где $G(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi/\sqrt{2\beta}} e^{-t^2} dt$. Решения (8) имеют ярко выраженный внутренний пограничный слой с большими градиентами. Небольшие отличия в этом примере при реализации метода КНК заключаются в том, что здесь аппроксимируется уравнение (7), а не (1). В табл. 5 приведены результаты численных экспериментов при $a = 0.6$, $b = 0.3$, $\phi = \frac{\pi}{6}$, $p_c = 10^3 h^2$, $p_{m_0} = 1$, $p_{m_1} = h$, $p_b = 1$ для $\beta = 10^{-3}$ и $\beta = 10^{-4}$, из которой видно, что методом КНК удается построить высокоточное решение.

В [7] при применении метода КНК эта задача решалась в четверти единичного круга при $\beta = 10^{-4}$ с использованием адаптивных сеток и полиномов второй и третьей степени, необходимых для вычисления приближенных решений и апостериорных оценок при сгущении сеток. Авторам удалось достигнуть точности $5.0 \cdot 10^{-4}$ при количестве используемых ячеек, равном 69718. Естественно, адаптивные варианты методов имеют более широкие возможности по сравнению с неадаптивными, однако реализация первых более сложная, чем вторых. В [18] решалась подобная задача МКР. На сетке 160×160 была достигнута точность $1.00 \cdot 10^{-5}$ и $3.22 \cdot 10^{-3}$ при использовании схемы четвертого порядка аппроксимации в случаях $\beta = 10^{-3}$ и $\beta = 10^{-4}$ соответственно. При этом авторы работы [18] делают справедливое замечание относительно схем высокого порядка: “Они могут дополнять, а иногда и заменять другие приемы достижения большей точности (применение адаптивных сеток, многосеточных алгоритмов и др.)”. Очевидно, что аналогичное замечание можно сделать относительно вариантов метода КНК с применением полиномов высоких степеней.

Пример 2. Рассмотрим решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона (1) в $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ с дополнительными условиями на связь градиента функции u и ее скачка на $\Gamma \subset \Omega$

$$\begin{aligned} n^1 \nabla u &= C_{\text{tr}}(u_2 - u_1), & (x_1, x_2) &\in \bar{\Omega}_1 \cap \Gamma, \\ n^2 \nabla u &= C_{\text{tr}}(u_1 - u_2), & (x_1, x_2) &\in \bar{\Omega}_2 \cap \Gamma, \end{aligned}$$

где $C_{\text{tr}} > 0$ — заданная константа, n^i — внешняя единичная нормаль к границе Ω_i , $i = 1, 2$. При реализации метода КНК, чтобы решение описывало особенность, которая имеет место в постановке задачи, на Γ выписываются и аппроксимируются условия согласования кусков глобального решения, примыкающих к ней с противоположных сторон. Отметим, что с точки зрения программной реализации это осуществить весьма просто, что является также одним из достоинств применяемого численного метода. При этом условия согласования на Γ домножались на весовой множитель h . Проведем сравнение результатов решения, полученных методом КНК и адаптивным разрывным методом Галеркина [19, 20] в двух разных случаях, когда Γ прямолинейна и когда криволинейна.

Пример 2.1. В этом примере Γ определяется как $x_1 = 0$, $C_{\text{tr}} = 4$, тестовое решение (рис. 6 а):

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} (4x_1 + 4x_1^2)e^{(x_2^2-1)^2}, & (x_1, x_2) \in \Omega_1, \\ (-5x_1^3 + 4x_1 + 1)e^{(x_2^2-1)^2}, & (x_1, x_2) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Из табл. 6 видно, что методом КНК удается построить высокоточное решение. Порядок его сходимости R приблизительно равен $O(h^{K-K \bmod 2})$, где $K \bmod 2$ — остаток от деления числа K на 2. Зависимость R от

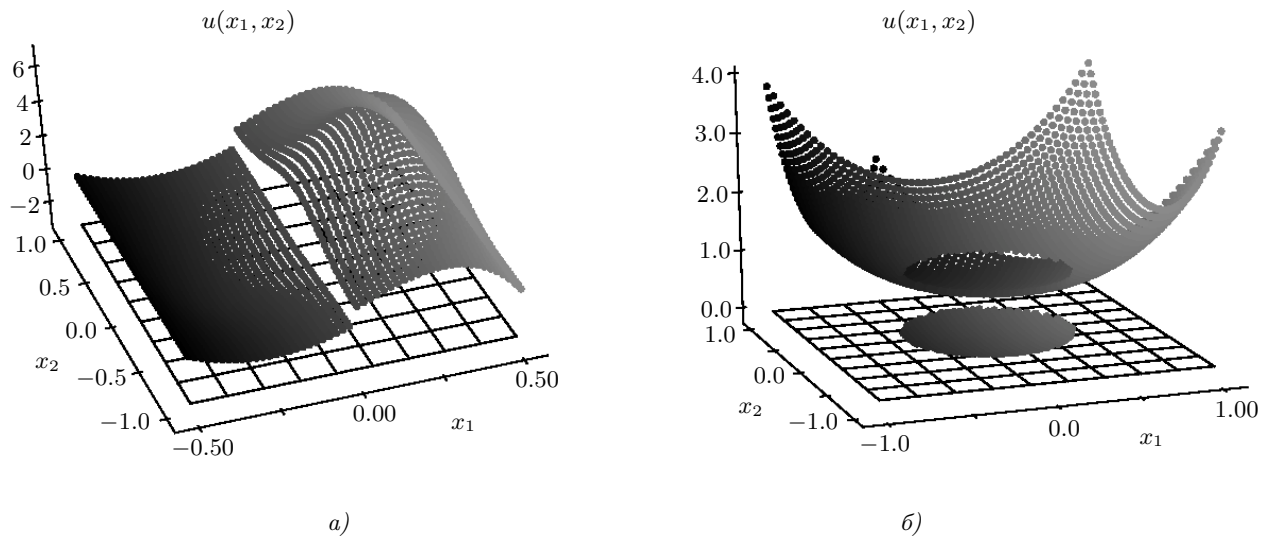


Рис. 6. Точное решение: а) в примере 2.1; б) в примере 2.2
 Fig. 6. Exact solution: а) in example 2.1; б) in example 2.2

Таблица 6. Результаты численных экспериментов в примере 2.1
 Table 6. Results of numerical experiments in example 2.1

$N \times N$	$K = 2$		$K = 3$		$K = 4$		$K = 5$		$K = 6$	
	$\ E_a\ _{L_2}$	R	$\ E_a\ _{L_2}$	R	$\ E_a\ _{L_2}$	R	$\ E_a\ _{L_2}$	R	$\ E_a\ _{L_2}$	R
10×10	$4.92 \cdot 10^{-2}$	—	$1.12 \cdot 10^{-3}$	—	$1.27 \cdot 10^{-4}$	—	$1.88 \cdot 10^{-5}$	—	$9.99 \cdot 10^{-7}$	—
20×20	$1.18 \cdot 10^{-2}$	2.05	$2.57 \cdot 10^{-4}$	2.12	$8.23 \cdot 10^{-6}$	3.94	$1.29 \cdot 10^{-6}$	3.86	$1.75 \cdot 10^{-8}$	5.85
40×40	$2.91 \cdot 10^{-3}$	2.01	$6.97 \cdot 10^{-5}$	1.88	$5.19 \cdot 10^{-7}$	3.98	$8.31 \cdot 10^{-8}$	3.95	$2.84 \cdot 10^{-10}$	5.94
80×80	$7.65 \cdot 10^{-4}$	1.92	$1.80 \cdot 10^{-5}$	1.95	$3.28 \cdot 10^{-8}$	3.98	$5.23 \cdot 10^{-9}$	3.98	$6.46 \cdot 10^{-12}$	5.45

четности степени аппроксимирующих полиномов в методе КНК также наблюдалась при решении уравнения Пуассона, когда в качестве базисных элементов применяемого функционального пространства были полиномы Чебышева [9]. Несмотря на то что порядок вариантов метода при разных K может быть одинаковым, зачастую точность решения задачи бывает выше при применении вариантов метода с полиномами более высоких степеней.

Эта же задача решалась адаптивным разрывным методом Галеркина в работе [19]. В частности, там было показано, что применение линейных элементов с количеством степеней свободы (DoFs) равным 65536 позволяет достичь точности решения $9.13 \cdot 10^{-4}$ (L^2 -error), а при применении квадратичных элементов с DoFs равным 147456 достигается точность $1.52 \cdot 10^{-6}$. При этом для L^2 -error порядок сходимости в первом случае был приблизительно равен двум, а во втором не хуже третьего. Как уже было отмечено выше, метод КНК имеет достоинство, заключающееся в том, что при увеличении K его реализация усложняется несущественно, в некоторых случаях (при достаточно высокой гладкости решения) можно добиться более высокой точности при применении полиномов высоких степеней на более грубых сетках по сравнению с полиномами низких степеней на подробных сетках. К примеру, в случае $K = 6$ на сетке 10×10 погрешность $\|E_a\|_{L_2} = 9.99 \cdot 10^{-7}$ при количестве неизвестных коэффициентов, равном 2800, а в случае $K = 2$ на сетке 80×80 погрешность $\|E_a\|_{L_2} = 7.65 \cdot 10^{-4}$ при количестве неизвестных коэффициентов, равном 34800.

Пример 2.2. В этом примере Γ — окружность $x_1^2 + x_2^2 = 0.5^2$, $C_{tr} = 0.75$, $\bar{\Omega}_1$ — круг, тестовое решение (рис. 6 б):

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} r^3, & (x_1, x_2) \in \Omega_1, \\ r^3 + 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_2, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Здесь решение имеет также особенность в виде разрыва производных третьего порядка и обращения в бесконечность производных четвертого порядка в точке $(0, 0)$, что, естественно, сказыв-

Таблица 7. Результаты численных экспериментов в примере 2.2
 Table 7. Results of numerical experiments in example 2.2

$N \times N$	$K = 2$		$K = 3$		$K = 4$		$K = 5$		$K = 6$	
	$\ E_a\ _{L_2}$	R	$\ E_a\ _{L_2}$	R	$\ E_a\ _{L_2}$	R	$\ E_a\ _{L_2}$	R	$\ E_a\ _{L_2}$	R
10×10	$6.89 \cdot 10^{-2}$	—	$4.05 \cdot 10^{-3}$	—	$2.98 \cdot 10^{-4}$	—	$3.72 \cdot 10^{-4}$	—	$8.48 \cdot 10^{-5}$	—
20×20	$4.14 \cdot 10^{-3}$	4.05	$5.93 \cdot 10^{-4}$	2.77	$4.57 \cdot 10^{-5}$	2.70	$1.58 \cdot 10^{-5}$	4.55	$3.25 \cdot 10^{-6}$	4.70
40×40	$1.05 \cdot 10^{-3}$	1.97	$1.36 \cdot 10^{-4}$	2.12	$1.14 \cdot 10^{-6}$	5.32	$2.15 \cdot 10^{-6}$	2.87	$2.21 \cdot 10^{-7}$	3.87
80×80	$2.49 \cdot 10^{-4}$	2.07	$3.27 \cdot 10^{-5}$	2.05	$2.03 \cdot 10^{-7}$	2.51	$2.46 \cdot 10^{-7}$	3.12	$1.64 \cdot 10^{-8}$	3.75

вается на точности численного решения. Из табл. 7 видно, что повышение степени полиномов в методе КНК при $K \geq 4$ здесь уже по сравнению с предыдущим примером не приводит к такому значительному улучшению точности и порядка сходимости R , который в среднем колеблется между тройкой и четверкой. Ограничение порядка сходимости из-за особенностей в эллиптической задаче также наблюдалось при решении уравнения Пуассона с разрывом вторых производных в угловых точках квадратной области методом КНК [9] и МКР [18].

В [20] авторам удалось добиться точности (L^2 -error) $9.76 \cdot 10^{-5}$, $5.74 \cdot 10^{-7}$ и $1.58 \cdot 10^{-9}$ при использовании линейных, квадратичных и кубических элементов с DoFs равным 196608, 110592 и 196608 и приблизительно вторым, третьим и четвертым порядком соответственно.

Здесь стоит отметить также, что адаптация алгоритма метода к особенности может позволить заметно улучшить точность и порядок сходимости приближенного решения. Например, это было продемонстрировано в работе [22] при решении краевой задачи для бигармонического уравнения (эллиптическое уравнение четвертого порядка) методом конечных элементов в L-образной области, когда в угловой точке обращались в бесконечность вторые производные, на равномерной и адаптивной сетках. Повышение точности решения задач с особенностями за счет адаптации методом КНК было продемонстрировано в [1, 7]. Однако, как это видно из полученных результатов, в методе КНК зачастую удается достигнуть высокой точности без применения сгущающихся сеток.

Метод КНК зачастую можно применить для решения краевых задач для дифференциальных уравнений в исходных широко распространенных постановках без каких-либо их модификаций. Это облегчает реализацию его численного алгоритма и, как видно из приведенных здесь и ранее примеров [9], во многих случаях оказывается достаточным для получения высокоточных решений задач, даже при наличии в них различных особенностей. В последнем случае при применении других методов для построения таких решений могут рассматриваться слабые постановки, решения уравнений высокого порядка сводиться к решению уравнений низкого порядка и т.д., что, с одной стороны, может являться усложнением и не всегда это удастся проделать тривиальным путем, а с другой стороны, имеет свои достоинства. Например, краевые задачи для уравнений низкого порядка являются лучше обусловленными, чем краевые задачи для уравнений высокого порядка. Также порядок сходимости и точность численного решения первых зачастую могут быть заметно выше по сравнению с решением вторых при применении одинаковых вычислительных средств: в проекционных методах одинаковых способов аппроксимации с использованием полиномов одинаковой степени или в МКР при применении одинаковых шаблонов для аппроксимации задач в обоих случаях. Этот факт был также продемонстрирован при сравнении решений краевой задачи для бигармонического уравнения и системы из двух уравнений Пуассона при моделировании изгиба шарнирно закрепленной изотропной пластины методом КНК на треугольных сетках в [5].

5. Заключение. Проведенное исследование показало:

- 1) в методе КНК относительно просто увеличивать точность аппроксимации задачи за счет увеличения степени базисных полиномов используемого пространства; учитывать особенности в постановке задачи за счет аппроксимации условий согласования соседних кусков приближенного глобального решения, что позволяет достигать высокого порядка сходимости решения задач с особенностями;
- 2) метод КНК во многих случаях не уступает по точности другим численным методам при достаточной гладкости решения задачи, при этом схема его построения достаточно проста и универсальна;
- 3) применение метода КНК в комбинации с различными способами ускорения итерационного процесса эффективно влияет на качество метода, позволяя уменьшить количество итераций более чем в 200 раз и сократить время расчетов практически в 2000 раз.



Список литературы

1. Исаев В.И., Шанеев В.П. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. **50**, № 10. 1758–1770. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15249920>
2. Vorozhtsov E.V., Shapeev V.P. On the efficiency of combining different methods for acceleration of iterations at the solution of PDEs by the method of collocations and least residuals // Applied Mathematics and Computation. 2019. **363**. 1–19. doi 10.1016/j.amc.2019.124644. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0096300319306368>
3. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шанеев В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислительные технологии. 2013. **18**, № 6. 31–43. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21118914>
4. Шанеев В.П., Беляев В.А. Решение с повышенной точностью бигармонического уравнения в нерегулярных областях методом коллокации и наименьших квадратов // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19** (4). 340–355. doi 10.26089/NumMet.v19r431. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36735987>
5. Шанеев В.П., Брындин Л.С., Беляев В.А. Решение эллиптических уравнений в полигональных областях методом коллокации и наименьших квадратов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия “Математическое моделирование и программирование”. 2019. **12**, № 3. 140–152. doi 10.14529/mmp190312. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41265010>
6. Isaev V.I., Shapeev V.P., Cherepanov A.N. Numerical study of heat modes of laser welding of dissimilar metals with an intermediate insert // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. **99**. 711–720. doi 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.04.019. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0017931015314101>
7. Беляев В.В., Шанеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // Вычислительные технологии. 2000. **5**, № 4. 13–21. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13026317>
8. Shapeev V.P., Golushko S.K., Belyaev V.A., Bryndin L.S., Kirillov P.I. New versions of the least-squares collocation method for solving differential and integral equations // Journal of Physics: Conference Series. 2021. **1715**, N 012031. 1–8. doi 10.1088/1742-6596/1715/1/012031. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1715/1/012031>
9. Беляев В.А. Решение уравнения Пуассона с особенностями методом коллокации и наименьших квадратов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2020. **23**, № 3. 249–263. doi 10.15372/SJNM20200302. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43792126>
10. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. Boca Raton: CRC Press, 2003.
11. Блохин А.М., Семисалов Б.В. Расчет стационарных неизотермических МГД течений полимерной жидкости в каналах с внутренними нагревательными элементами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2020. **23**, № 2. 17–40. doi 10.33048/SIBJIM.2020.23.202. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sjim&paperid=1085&option_lang=rus
12. Saad Y. Numerical methods for large eigenvalue problems. Philadelphia: SIAM, 2011. doi 10.1137/1.9781611970739. <https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781611970739>
13. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Московский физико-технический институт, 1994.
14. Ramšak M., Škerget L. A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function-vorticity formulation // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2004. **46**, N 8. 815–847. doi 10.1002/flid.776. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/flid.776>
15. Исаев В.И., Шанеев В.П., Еремин С.А. Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса // Вычислительные технологии. 2007. **12**, № 3. 53–70. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12878946>
16. Coirier W.J., Powell K.G. An accuracy assessment of Cartesian-mesh approaches for the Euler Equations // Journal of Computational Physics. 1995. **117**, N 1. 121–131. doi 10.1006/jcph.1995.1050. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999185710509>
17. Drozdov G.M., Shapeev V.P. CAS application to the construction of high-order difference schemes for solving Poisson equation // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8660. Cham: Springer, 2014. 99–110. doi 10.1007/978-3-319-10515-4_8. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-10515-4_8
18. Шанеев В.П., Шанеев А.В. Решение эллиптических задач с особенностями по схемам высокого порядка аппроксимации // Вычислительные технологии. 2006. **11**, часть 2, специальный выпуск. 84–91. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15281780>
19. Sabawi Y.A. Adaptive discontinuous Galerkin methods for interface problems. PhD Thesis. Leicester: University of Leicester, 2016.

20. Cangiani A., Georgoulis E.H., Sabawi Y.A. Adaptive discontinuous Galerkin methods for elliptic interface problems // *Mathematics of Computation*. 2018. **87**, N 314. 2675–2707. doi 10.1090/mcom/3322. <https://www.ams.org/journals/mcom/2018-87-314/S0025-5718-2018-03322-1/home.html>
21. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991.
22. Guo H., Zhang Z., Zou Q. A C^0 linear finite element method for biharmonic problems // *Journal of Scientific Computing*. 2018. **74**, N 3. 1397–1422. doi 10.1007/s10915-017-0501-0. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10915-017-0501-0>

Поступила в редакцию
29 июня 2021

Принята к публикации
20 августа 2021

Информация об авторе

Василий Алексеевич Беляев — младший науч. сотр., Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, д. 4/1, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. V. I. Isaev and V. P. Shapeev, “High-Accuracy Versions of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **50** (10), 1758–1770 (2010) [*Comput. Math. Math. Phys.* **50** (10), 1670–1681 (2010)]. doi 10.1134/S0965542510100040. <https://link.springer.com/article/10.1134/S0965542510100040>
2. E. V. Vorozhtsov and V. P. Shapeev, “On the Efficiency of Combining Different Methods for Acceleration of Iterations at the Solution of PDEs by the Method of Collocations and Least Residuals,” *Appl. Math. Comput.* **363** (2019). doi 10.1016/j.amc.2019.124644. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0096300319306368>
3. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, and V. P. Shapeev, “Application of Collocations and Least Residuals Method to Problems of the Isotropic Plates Theory,” *Vychisl. Tekhnol.* **18** (6), 31–43 (2013). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21118914>
4. V. P. Shapeev and V. A. Belyaev, “Solving the Biharmonic Equation with High Order Accuracy in Irregular Domains by the Least Squares Collocation Method,” *Vychisl. Metody Programm.* **19** (4), 340–355 (2018). doi 10.26089/NumMet.v19r431. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36735987>
5. V. P. Shapeev, L. S. Bryndin, and V. A. Belyaev, “Solving Elliptic Equations in Polygonal Domains by the Least Squares Collocation Method,” *Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Model. Programm.* **12** (3), 140–152 (2019). doi 10.14529/mmp190312. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41265010>
6. V. I. Isaev, V. P. Shapeev, and A. N. Cherepanov, “Numerical Study of Heat Modes of Laser Welding of Dissimilar Metals with an Intermediate Insert,” *Int. J. Heat Mass Transf.* **99**, 711–720 (2016). doi 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.04.019. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0017931015314101>
7. V. V. Beljaev and V. P. Shapeev, “The Collocation and Least Squares Method on Adaptive Grids in a Domain with a Curvilinear Boundary,” *Vychisl. Tekhnol.* **5** (4), 13–21 (2000). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13026317>
8. V. P. Shapeev, S. K. Golushko, V. A. Belyaev, et al., “New Versions of the Least-Squares Collocation Method for Solving Differential and Integral Equations,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **1715** (2021), 1–8. doi 10.1088/1742-6596/1715/1/012031. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1715/1/012031>
9. V. A. Belyaev, “Solving a Poisson Equation with Singularities by the Least-Squares Collocation Method,” *Sib. Zh. Vych. Mat.* **23** (3), 249–263 (2020). doi 10.15372/SJNM20200302 [*Numer. Anal. Appl.* 2020. **13** (3), 207–218 (2020)]. doi 10.1134/S1995423920030027. <https://link.springer.com/article/10.1134/S1995423920030027>
10. J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis* (CRC Press, Boca Raton, 2003).
11. A. M. Blokhin and B. V. Semisalov, “Simulation of the Stationary Nonisothermal MHD Flows of Polymeric Fluids in Channels with Interior Heating Elements,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **23** (2), 17–40 (2020). doi 10.33048/SIBJIM.2020.23.202 [J. Appl. Ind. Math. **14** (2), 222–241 (2020)]. doi 10.1134/S1990478920020027. <https://link.springer.com/article/10.1134/S1990478920020027>
12. Y. Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems* (SIAM, Philadelphia, 2011). doi 10.1137/1.9781611970739. <https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781611970739>
13. R. P. Fedorenko, *Introduction to Computational Physics* (Moscow Inst. Phys. Technol., Moscow, 1994) [in Russian].



14. M. Ramšak and L. Škerget, “A Subdomain Boundary Element Method for High-Reynolds Laminar Flow Using Stream Function-Vorticity Formulation,” *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. **46** (8), 815–847 (2004). doi 10.1002/fld.776. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/fld.776>
15. V. I. Isaev, V. P. Shapeev, and S. A. Eremin, “An Investigation of the Collocation and the Least Squares Method for Solution of Boundary Value Problems for the Navier–Stokes and Poisson Equations,” *Vychisl. Tekhnol.* **12** (3), 53–70 (2007). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12878946>
16. W. J. Coirier and K. G. Powell, “An Accuracy Assessment of Cartesian-Mesh Approaches for the Euler Equations,” *J. Comput. Phys.* **117** (1), 121–131 (1995). doi 10.1006/jcph.1995.1050. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999185710509>
17. G. M. Drozdov and V. P. Shapeev, “CAS Application to the Construction of High-Order Difference Schemes for Solving Poisson Equation,” in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Cham, 2014), Vol. 8660, pp. 99–110. doi 10.1007/978-3-319-10515-4_8. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-10515-4_8
18. V. P. Shapeev and A. V. Shapeev, “Solutions of the Elliptic Problems with Singularities Using Finite Difference Schemes with High Order of Approximation,” *Vychisl. Tekhnol.* **11** (special issue, part 2), 84–91 (2006). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15281780>
19. Y. A. Sabawi, *Adaptive Discontinuous Galerkin Methods for Interface Problems*, PhD Thesis (University of Leicester, Leicester, 2016).
20. A. Cangiani, E. H. Georgoulis, and Y. A. Sabawi, “Adaptive Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Interface Problems,” *Math. Comp.* **87**, 2675–2707 (2018). doi 10.1090/mcom/3322. <https://www.ams.org/journals/mcom/2018-87-314/S0025-5718-2018-03322-1/>
21. J. M. Ortega, *Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems* (Plenum, New York, 1988; Mir, Moscow, 1991). doi 10.1007/978-1-4899-2112-3.
22. H. Guo, Z. Zhang, and Q. Zou, “A C^0 Linear Finite Element Method for Biharmonic Problems,” *J. Sci. Comput.* **74**, 1397–1422 (2018). doi 10.1007/s10915-017-0501-0. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10915-017-0501-0>

Received
June 29, 2021

Accepted for publication
August 20, 2021

Information about the author

Vasily A. Belyaev — Junior Research Scientist, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Institutskaya ulitsa 4/1, 630090, Novosibirsk, Russia.