

1968

УДК — 519.21

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ДВУМЕРНОЙ
ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

В. ПАУЛАУСКАС, А. СЛУШНИС

Настоящая заметка является обобщением работы С. М. Садиковой [1] на случай разнораспределенных независимых двумерных величин. Рассматривается также случай, когда все слагаемые вырождены, т. е. распределены на прямых. Этот случай рассмотрен де Баррой [2], но применение двумерного аналога неравенства Эссена намного упрощает доказательство, причем отпадает требование конечности четвертых моментов.

Пусть (ξ_j, η_j) $j=1, 2, \dots, n$ — независимые двумерные случайные величины с распределениями P_j , $j=1, 2, \dots, n$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} \mu_{ki}^j &= \iint x^k y^l P_j(dx dy), \quad \beta_{ki}^j = \iint |x^k y^l| P_j(dx dy), \\ \mu_{20}^j &= \sigma_{j1}^2, \quad \mu_{02}^j = \sigma_{j2}^2, \quad \rho_j = \frac{\mu_{11}^j}{\sigma_{j1} \sigma_{j2}}, \\ B_{n1}^2 &= \sum_{k=1}^n \sigma_{k1}^2, \quad B_{n2}^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_{k2}^2, \quad S_n = \left(\frac{1}{B_{n1}} \sum_{k=1}^n \xi_k, \frac{1}{B_{n2}} \sum_{k=1}^n \eta_k \right), \\ L_{3n}^{(1)} &= \frac{\sum_{k=1}^n \beta_{30}^k}{B_{n1}^3}, \quad L_{3n}^{(2)} = \frac{\sum_{k=1}^n \beta_{03}^k}{B_{n2}^3}. \end{aligned}$$

Не нарушая общности будем считать, что $\mu_{j0}^j = \mu_{0j}^j = 0$ для всех $j=1, 2, \dots, n$. Характеристическую функцию и функцию распределения двумерной случайной величины ξ будем обозначать $f_\xi(s, t)$ и $F_\xi(x, y)$ соответственно.

Пусть величины (ξ'_j, η'_j) распределены по двумерному нормальному распределению Φ_j , имеющему такие же первые два момента, как и P_j , и

$$S'_n = \left(\frac{1}{B_{n1}} \sum_{k=1}^n \xi'_k, \frac{1}{B_{n2}} \sum_{k=1}^n \eta'_k \right), \quad \tilde{\rho}_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_{k1} \sigma_{k2}}{B_{n1} B_{n2}} \rho_k.$$

Теорема 1. Если $\beta_{30}^i < \infty$, $\beta_{03}^i < \infty$, $i=1, 2, \dots, n$, то справедлива оценка

$$\sup_{x, y} |F_{S_n}(x, y) - \Phi_{S'_n}(x, y)| \leq C \frac{L_{3n}^{(1)} + L_{3n}^{(2)}}{(1 - \tilde{\rho}_n^2)^2}, \quad (1)$$

где C — абсолютная константа.

Пусть имеем последовательность одномерных величин ζ_j , $j=1, 2, \dots, n$ и рассмотрим вырожденные двумерные величины (ξ_j, η_j) где $\xi_j = a_j \zeta_j$ и $\eta_j = b_j \zeta_j$. Не ограничивая общности будем считать, что

$$M \zeta_j = 0, \quad M \zeta_j^2 = 1, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Тогда при наших обозначениях

$$\sigma_{j1}^2 = a_j^2, \quad \sigma_{j2}^2 = b_j^2, \quad B_{n1}^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2, \quad B_{n2}^2 = \sum_{j=1}^n b_j^2,$$

$$L_{3n}^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^n M |a_j \zeta_j|^2}{B_{n1}^3}, \quad L_{3n}^{(2)} = \frac{\sum_{j=1}^n M |b_j \zeta_j|^2}{B_{n2}^3}.$$

Теорема 2. Если $M |\zeta_j|^2 < \infty$, $j=1, 2, \dots, n$ и

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}, \quad (2)$$

то для величин $(a_j \zeta_j, b_j \zeta_j)$ $j=1, 2, \dots, n$ справедлива теорема 1 с

$$\tilde{\rho}_n = \sum_{j=1}^n \frac{a_j b_j}{B_{n1} B_{n2}}.$$

Доказательство. Для удобства обозначим:

$$f_{\xi_j, \eta_j}(s, t) = f_j(s, t),$$

$$f_{(\xi_j, \eta_j)}(s, t) = h_j(s, t) = e^{-\frac{1}{2} q_j(s, t)},$$

$$q_j(s, t) = s^2 \sigma_{j1}^2 + 2\rho_j \sigma_{j1} \sigma_{j2} st + t^2 \sigma_{j2}^2,$$

$$s' = \frac{s}{B_{n1}}, \quad t' = \frac{t}{B_{n2}}.$$

В доказательстве теоремы будем пользоваться следующей формулой из [1]:

$$\sup_{x, y} |F_{S_n}(x, y) - \Phi_{S_n}(x, y)| \leq \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left| \frac{A_n}{st} \right| ds dt +$$

$$+ 2 \sup_x |F_{S_n}(x, \infty) - \Phi_{S_n}(x, \infty)| +$$

$$+ 2 \sup_y |F_{S_n}(\infty, y) - \Phi_{S_n}(\infty, y)| + \frac{C}{T}, \quad (3)$$

где

$$A_n = (z_1 z_2 \dots z_n - w_1 w_2 \dots w_n) - (u_1 u_2 \dots u_n - t_1 \dots t_n),$$

$$z_k = f_k(s', t'), \quad w_k = f_k(s', 0) f_k(0, t'),$$

$$u_k = h_k(s', t'), \quad t_k = h_k(s', 0) h_k(0, t').$$

В доказательстве теорем будем также предполагать, что выполнено условие

$$\frac{L_{3n}^{(1)} + L_{3n}^{(2)}}{(1 - |\tilde{\rho}_n|)^{3/2}} \leq \frac{1}{32}. \quad (4)$$

Оно может не выполняться для первых n , но утверждение теоремы 1 останется в силе, если в (1) взять $C_1 = \max(C, 32)$.

Лемма 1. Пусть u_i, t_i, z_i, w_i — любые комплексные числа. Тогда справедливо следующее неравенство

$$|A_n| = |(z_1 \dots z_n - w_1 w_2 \dots w_n) - (u_1 u_2 \dots u_n - t_1 \dots t_n)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n |z_j - w_j| \left| \prod_{k=1}^n z_k \prod_{k=j+1}^n w_k - \prod_{k=1}^n u_k \prod_{k=j+1}^n t_k \right| +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \left| \prod_{k=1}^{j-1} u_k \right| |(z_j - w_j) - (u_j - t_j)| \left| \prod_{k=j+1}^n t_k \right| = I_1 + I_2. \quad (5)$$

Доказательство леммы следует из легко проверяемого тождества:

$$A_n = (z_1 z_2 \dots z_n - w_1 \dots w_n) - (u_1 u_2 \dots u_n - t_1 \dots t_n) = \\ = \sum_{k=1}^n (z_k - w_k) \prod_{j=1}^{k-1} z_j \prod_{j=k+1}^n w_j - \sum_{k=1}^n (u_k - t_k) \prod_{j=1}^{k-1} u_j \prod_{j=k+1}^n t_j.$$

Лемма 2. Во всей плоскости справедлива оценка

$$|z_k - w_k| \leq \frac{2|s| |t| \sigma_{k1} \sigma_{k2}}{B_{n1} B_{n2}}. \tag{6}$$

Лемма 3. Для всех s и t имеет место неравенство

$$|(z_k - w_k) - (u_k - t_k)| \leq |s| |t| \left(\frac{\beta_{30}^k}{B_{n1}^3} + \frac{\beta_{03}^k}{B_{n2}^3} \right) \left[2|s| + 2|t| + \right. \\ \left. + \frac{s^2}{2} \frac{\sigma_{k2}}{B_{n2}} + \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{k1}}{B_{n1}} \right]. \tag{7}$$

Доказательство обеих лемм аналогично доказательству соответствующих лемм в работе [1], и мы не будем его приводить здесь.

Лемма 4. В области

$$\max(|s|, |t|) \leq \frac{1 - |\tilde{p}_n|}{64(L_{3n}^{(1)} + L_{3n}^{(2)})} \tag{8}$$

справедлива оценка

$$|D_k| = \left| \prod_{j=1}^{k-1} z_j \prod_{j=k+1}^n w_j - \prod_{j=1}^{k-1} u_j \prod_{j=k+1}^n t_j \right| \leq \\ \leq 64 (|s|^3 + |t|^3) (L_{3n}^{(1)} + L_{3n}^{(2)}) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{12} \sum_{j=1}^n g_j(s', t') \right\} k = 1, 2, \dots, n. \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим через $(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j)$ двумерный вектор, компоненты которого независимы между собой и не зависят от (ξ_j, η_j) . Тогда D_k является значением разности характеристических функций $\varphi_k(\lambda) - \psi_k(\lambda)$ при $\lambda=1$, где

$$\varphi_k(\lambda) = \prod_{j=1}^{k-1} f_j(\lambda s', \lambda t') \prod_{j=k+1}^n f_j(\lambda s', 0) f_j(0, \lambda t')$$

является характеристической функцией величины

$$(s' \xi_1 + t' \eta_1) + \dots + (s' \xi_{k-1} + t' \eta_{k-1}) + \\ + (s' \tilde{\xi}_{k+1} + t' \tilde{\eta}_{k+1}) + \dots + (s' \tilde{\xi}_n + t' \tilde{\eta}_n), \tag{10}$$

а

$$\psi_k(\lambda) = \prod_{j=1}^{k-1} h_j(\lambda s', \lambda t') \prod_{j=k+1}^n h_j(\lambda s', 0) h_j(0, \lambda t')$$

есть характеристическая функция соответствующей нормальной величины.

Обозначив через L_k и σ_k^2 ляпуновское отношение и дисперсию величины (10), как и в лемме 2 из [1], можем написать, что при $\lambda \leq \frac{1}{4L_k \sigma_k}$

$$|\varphi_k(\lambda) - \psi_k(\lambda)| \leq 16 L_k \sigma_k^2 |\lambda|^3 e^{-\frac{\lambda^4 \sigma_k^4}{3}}. \tag{11}$$

Оцениваем L_k и σ_k^2

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= \sum_{j=1}^{k-1} M (s' \xi_j + t' \eta_j)^2 + \sum_{j=k+1}^n M (s' \tilde{\xi}_j + t' \tilde{\eta}_j)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} q_j (s', t') + \sum_{j=k+1}^n [(s')^2 \sigma_{j1}^2 + (t')^2 \sigma_{j2}^2] \geq \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n q_j (s', t') = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j (s', t') - \frac{1}{2} q_k (s', t') \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j (s', t') - \frac{1}{2} \max_{k \leq n} q_k (s', t') = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j (s', t') \left[1 - \frac{\max_{k \leq n} q_k (s', t')}{s^2 + 2 \bar{\rho}_n s t + t^2} \right] \geq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n q_j (s', t'), \end{aligned}$$

так как из условия (4) вытекает

$$\frac{\max_{k \leq n} q_k (s', t')}{s^2 + 2 \bar{\rho}_n s t + t^2} \leq \frac{1}{2}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{j=1}^{k-1} M |s' \xi_j + t' \eta_j|^3 + \sum_{j=k+1}^n M |s' \tilde{\xi}_j + t' \tilde{\eta}_j|^3 \leq \\ &\leq \frac{4}{\sigma_k^2} (|s|^3 + |t|^3) (L_{3n}^{(1)} + L_{3n}^{(2)}). \end{aligned}$$

Условие $L_k \sigma_k \leq \frac{1}{4}$ в области (8) выполняется для всех k , так что можем в (11) взять $\lambda=1$ и получить требуемую оценку, которая будет справедлива при всех k .

Лемма 5. Для всех k и s, t справедлива оценка

$$\prod_{j=1}^{k-1} |u_j| \prod_{j=k+1}^n |t_j| \leq \exp \left\{ -\frac{1}{8} \sum_{j=1}^n q_j (s', t') \right\}.$$

Эта оценка очевидным образом следует из неравенства

$$|t_j| = e^{-\frac{(s')^2 \sigma_{j1}^2 + (t')^2 \sigma_{j2}^2}{2}} \leq e^{-\frac{1}{4} q_j (s', t')}$$

и неравенства (12).

Лемма 6.

$$\int \int |s|^i e^{-(s^2 + 2\rho st + t^2)} ds dt \leq \frac{C}{(1 - \rho^2)^{\frac{i+1}{2}}} \quad i = 1, 2, 3.$$

Результат получается при помощи простого интегрирования. Теперь приступим к доказательству первой теоремы.

Из (6) и (9) получаем

$$I_1 \leq 128 |s| |t| (|s|^3 + |t|^3) (L_{3n}^{(1)} + L_{3n}^{(2)}) \exp \left\{ -\frac{1}{12} \sum_{j=1}^n q_j (s', t') \right\}. \tag{14}$$

Из (17) и (13) имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 64 |s| |t| \left[2 |s| + 2 |t| + \frac{s^2}{2} \frac{\max_{i \leq n} \sigma_{i2}}{B_{n2}} + \frac{t^2}{2} \frac{\max_{i \leq n} \sigma_{i1}}{B_{n1}} \right] \times \\ &\times (L_{3n}^{(1)} + L_{3n}^{(2)}) \exp \left\{ -\frac{1}{8} \sum_{j=1}^n q_j (s', t') \right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

В формуле (3) положим

$$T = \frac{1 - |\bar{\rho}_n|}{64 (L_{3n}^{(1)} + L_{3n}^{(2)})}.$$

Из (14) и (15) при помощи леммы 6 получаем

$$\int_{-T}^T \int_{-T}^T \left| \frac{A_n}{st} \right| ds dt \leq C \frac{L_{3n}^{(1)} + L_{3n}^{(2)}}{(1 - \bar{\rho}_n^2)^2}.$$

Применяя ко второму и третьему члену одномерную теорему Ляпунова, получаем утверждение теоремы 1.

Для доказательства второй теоремы сперва заметим, что условие (2), которое обозначает, что первые две величины распределены на различных прямых, обеспечивает условие

$$\bar{\rho}_n^2 = \frac{\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2}{B_{n1}^2 B_{n2}^2} \neq 1.$$

Далее заметим, что леммы 2 и 3 справедливы и для вырожденных величин. В доказательстве леммы 4 поясним, что обозначает $\tilde{\xi}_j$ и $\tilde{\eta}_j$. Берем величину $\tilde{\zeta}_j$, которая распределена так же как и ζ_j , но не зависит от нее (обычный прием симметризации величин).

Теперь положим $\tilde{\xi}_j = a_j \tilde{\zeta}_j$, $\tilde{\eta}_j = b_j \tilde{\zeta}_j$ и получим те величины $(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j)$, которые употребляются в доказательстве леммы 4.

Остальные рассуждения в доказательстве теоремы 1 остаются справедливыми и для величин $(a_j \tilde{\zeta}_j, b_j \tilde{\zeta}_j)$, поэтому теорема 2 доказана.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
5. II. 1968

Л и т е р а т у р а

1. С. М. Садикова, Двумерные аналоги неравенства Эссена с применением к центральной предельной теореме, Теория вероят. и ее прим. II, 3 (1965).
2. G. de Barra, The convergence of a sum of independent random variables, Proc. Camb. Philos. Society., 59, part. 2 (1963), 411—416.

KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTINIMAS DVIMATĖJE CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE

V. PAULAUSKAS, A. SLUŠNYS

(Reziumė)

Straipsnyje gautas S. Sadikovo darbo [1] apibendrinimas nevienodai pasiskirsčiusiems dvimačiams dydžiams. Taip pat išnagrinėtas atvejis, kai visi sumuojami dėmenys yra išsigimę, ta yra pasiskirstę ant tiesių.

ON THE ESTIMATION OF THE RATE OF CONVERGENCE IN THE TWO-DIMENSIONAL CENTRAL LIMIT THEOREM

V. PAULAUSKAS, A. SLUŠNYS

(Summary)

In the paper the generalization of S. M. Sadikova's result [1] for non-equal distributed two dimensional random variables is given. The case, when the values of summands are concentrated on lines is also discussed.

