Czechoslovak Mathematical Journal

Vlastimil Pták; Jiří Sedláček

Об индексе импримитивности неотрицательных матриц

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 4, 496–501

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100323

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

ОБ ИНДЕКСЕ ИМПРИМИТИВНОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

ВЛАСТИМИЛ ПТАК (Vlastimil Pták), Прага
и ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага

(Поступило в редакцию 31/III 1958 г.)

В настоящей заметке даются некоторые комбинаторные характеризации индекса импримитивности неотрицательной матрицы.

В работе [2] была исследована комбинаторная сущность некоторых свойств неотрицательных матриц. В предлагаемой заметке мы характеризуем также индекс импримитивности неотрицательной неразложимой матрицы, пользуясь несложными комбинаторными рассуждениями. Основные понятия и обозначения содержатся в работе [2]. В первой части настоящей статьи приводится главный комбинаторный результат, во второй части мы отмечаем его значение для теории неотрицательных матриц и даем простой способ определения индекса импримитивности данной матрицы.

1

Обозначения. Пусть n — натуральное число, $N = \{1, \ldots, n\}$.[1]) Пусть φ — неразложимое аддитивное отображение $\exp N$ в $\exp N$. Мы скажем, что множества $P_0, P_1, \ldots, P_{s-1}$ образуют *циклическое разложение* множества N (относительно φ), если они образуют разложение множества N и если притом $P_j = \varphi(P_{j-1})\,(j = 1, \ldots, s-1)$, $P_0 = \varphi(P_{s-1})$. Число s назовем *длиной* этого циклического разложения. Наибольшую возможную длину циклического разложения, которое можно построить при данном N и φ, обозначим символом $r(\varphi)$. Если $r(\varphi) = 1$, мы скажем, что φ *примитивно*.

(1,1) *Пусть s — длина циклического разложения. Пусть j — натуральное число, $x \in N$; пусть $x \in \varphi^j(x)$. Тогда s является делителем числа j.*

[1]) Все результаты предлагаемой работы (за исключением **(1,3)**) справедливы и в том случае, когда множество N бесконечно.

Доказательство. Пусть $P_0, \ldots, P_{s-1}$ — циклическое разложение; можно предположить, что $x \in P_0$. Положим $j = ks + q$ $(0 \leqq q < s)$. Имеем $x \in \varphi^j(x) \subset \varphi^j(P_0) = \varphi^q(\varphi^{ks}(P_0)) = \varphi^q(P_0) = P_q$, следовательно, $q = 0$.

(1,2) *Пусть $P_0, \ldots, P_{s-1}$ — циклическое разложение; пусть $\Phi = \varphi^s$. Тогда отображение Φ неразложимо на любом из множеств P_j. Если $Q \subset N$, $\Phi(Q) \subset Q$, то Q равно соединению некоторых P_j (и, следовательно, $\Phi(Q) = Q$). Если $s = r(\varphi)$, то отображение Φ на любом из множеств P_j примитивно.*

Доказательство. Пусть $\emptyset \neq R \subset P_0$, $\Phi(R) \subset R$; положим $R_i = \varphi^i(R)$ $(i = 0, \ldots, s-1)$, $N^* = R_0 \cup \ldots \cup R_{s-1}$. Очевидно, $\varphi(N^*) \subset N^*$, следовательно, $N^* = N$; так как $R_i \subset P_i$, $\bigcup R_i = \bigcup P_i$, будет $R_i = P_i$. Мы видим, что Φ неразложимо на P_0, а, значит, и на любом P_i.

Если $\Phi(Q) \subset Q$ и если $P_i \cap Q = Q_i \neq \emptyset$, то

$$\Phi(Q_i) \subset \Phi(P_i) \cap \Phi(Q) \subset P_i \cap Q = Q_i$$

и, следовательно, $Q_i = P_i$. Мы видим, что Q равно соединению тех P_j, для которых $P_j \cup Q \neq \emptyset$.

Пусть, наконец, $Q_0, \ldots, Q_{v-1}$ — циклическое разложение длины $v > 1$ множества P_0 (относительно отображения Φ); образуем множества $Q_j^k = \varphi^k(Q_j)$ $(k = 0, \ldots, s-1;\ j = 0, \ldots, v-1)$. Тогда

$$Q_0^0, Q_0^1, \ldots, Q_0^{s-1}, Q_1^0, \ldots, Q_1^{s-1}, \ldots, Q_{v-1}^0, \ldots, Q_{v-1}^{s-1}$$

будет циклическим разложением множества N длиной $sv > s$, так что $s \neq r(\varphi)$.

(1,3) *Пусть $s = r(\varphi)$, k — целое число, $k \geqq 1 + (n-s)^2$, $x \in N$. Тогда $x \in \varphi^{ks}(x)$.*

Доказательство. Пусть $P_0, \ldots, P_{s-1}$ — циклическое разложение множества N; пусть P_i содержит n_i элементов. Очевидно, $n_i \leqq n - s + 1$; так как $\Phi = \varphi^s$ по предыдущей теореме примитивно на любом P_i, то по теореме 1 из работы [2] будет $x \in \Phi^k(x)$ для любого $x \in N$ и любого $k \geqq 1 + (n-s)^2$.

(1,4) *Длина каждого циклического разложения является делителем числа $r(\varphi)$.*

Доказательство. По теоремам (1,1) и (1,3) длина произвольного циклического разложения является делителем каждого достаточно большого числа, кратного $r(\varphi)$.

Замечание 1. Из теоремы (1,2) следует, что в сущности имеется не более одного циклического разложения длиною s; дело в том, что P_i являются наименьшими непустыми множествами M, для которых $\varphi^s(M) = M$ (или $\varphi^s(M) \subset M$).

Замечание 2. Теорема (1,4) допускает обращение: Каждый положительный делитель числа $r(\varphi)$ является длиной циклического разложения. Действительно, если $r(\varphi) = ks$ (k, s — натуральные числа) и если $P_0, \ldots, \ldots, P_{r(\varphi)-1}$ — циклическое разложение, то множества $T_j = P_j \cup P_{j+s} \cup \ldots \ldots \cup P_{j+(k-1)s}$ ($j = 0, \ldots, s-1$) образуют, очевидно, циклическое разложение длины s.

Обозначения. Конечную последовательность

$$x_0, x_1, \ldots, x_q \tag{1}$$

элементов из N мы назовем *псевдоциклом*, если $x_i \in \varphi(x_{i-1})$ ($i = 1, \ldots, q$), $x_0 = x_q$. Если, кроме того, $x_i \neq x_j$, где $0 \leqq i < j < q$, то мы назовем последовательность (1) *циклом*. Число q мы назовем *длиной* псевдоцикла (соотв. цикла) (1).

Теорема. *Число $r(\varphi)$ является общим наибольшим делителем длин всех циклов.*

Доказательство. Пусть $d > 0$ есть общий наибольший делитель длин всех циклов. Из теоремы (1,3) следует, что каждое достаточно большое число, кратное $r(\varphi)$, является длиной псевдоцикла; однако, легко обнаружить, что длину каждого псевдоцикла можно выразить в виде суммы длин циклов. Отсюда следует, что d является делителем числа $r(\varphi)$. Согласно теореме (1,1), однако, и $r(\varphi)$ является делителем числа d, так что, действительно, $d = r(\varphi)$.

Замечание 3. Итак, каждому неразложимому отображению φ отнесено некоторое число $r(\varphi)$, которое согласно полученным выше результатам характеризует некоторые свойства степеней отображения φ. Ввиду связи с теорией неотрицательных матриц, которая поясняется во второй части этой работы, представляется целесообразным назвать это число *индексом импримитивности* отображения φ.

2

Обратимся теперь к неотрицательным матрицам. Связь теории неотрицательных матриц с теорией аддитивных отображений изложена во второй части работы [2]. Смысл числа $r(\varphi)$ для неотрицательных неразложимых матриц тогда нетрудно выяснить из замечания 3 и из теоремы (2,5) работы [2]. Мы видим, что это понятие совпадает с тем, что обычно в учебниках определяется (при помощи спектральных свойств матрицы), как индекс импримитивности матриц. Ядро нашей настоящей заметки является комбинаторной сущностью результата, который был, собственно говоря, известен уже Фробениусу [1].

Пользуясь предыдущими рассуждениями можно без труда найти индекс импримитивности данной неотрицательной неразложимой матрицы $A = \|a_{ik}\|_1^n$. Если хотя бы один элемент главной диагонали матрицы A положителен, то A примитивна (так как для подходящего $x \in N$ будет $x \in \varphi(x)$ и, следовательно, $r(\varphi) = 1$). Если же все элементы главной диагонали матрицы A равны нулю, то мы поставим матрице A в соответствие ориентированный граф следующим образом: возьмем n различных вершин $1, 2, \ldots, n$ и соединим стрелкой точку i с точкой k тогда и только тогда, когда $a_{ik} \neq 0$. По этому графу определим длины $c_1, c_2, \ldots, c_v$ всех возможных циклов и вычислим общий наибольший делитель чисел c_i. Это и будет искомый индекс импримитивности матрицы A.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Frobenius*: Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss. *23* (1912), 456—477.

[2] *Vlastimil Pták*: Об одной комбинаторной теореме и ее применении к неотрицательным матрицам, Чех. мат. ж., *8* (*83*), 1958, 487—495.

Summary

ON THE INDEX OF IMPRIMITIVITY OF NONNEGATIVE MATRICES

VLASTIMIL PTÁK and JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Received March 31, 1958)

In the present remark we complete the investigations of the first author [2]. It turns out that the methods of [2] may be refined so as to obtain a quantitative description of the decompositions treated in [2]. In this manner we obtain a simple combinatorial characterization of the so called *index of imprimitivity* of nonnegative matrices.

Let N be a given finite set.[1]) Let φ be an irreducible additive mapping of $\exp N$ into $\exp N$. The sets $P_0, P_1, \ldots, P_{s-1}$ are said to constitute a *cyclic partition of* N (with respect to φ), if $P_j = \varphi(P_{j-1})$ for $j = 1, 2, \ldots, s - 1$ and $P_0 = \varphi(P_{s-1})$ and if $P_0, P_1, \ldots, P_{s-1}$ is a partition of N. The number s is called the *length* of the partition.

(1,1) *Let $P_0, \ldots, P_{s-1}$ be a cyclic partition of N. Let j be a natural number, let $x \in N$ and suppose that $x \in \varphi^j(x)$. Then $s \mid j$.*

[1]) With the exception of (1,3), all results (and proofs) are valid even without the assumption that N is finite.

Proof. Clearly we may suppose that $x \in P_0$. We have $j = ks + q$ where $0 \leqq q < s$, whence $x \in \varphi^j(x) \subset \varphi^j(P_0) = \varphi^q(\varphi^{ks}(P_0)) = \varphi^q(P_0) = P_q$. It follows that $q = 0$.

Especially, it follows from (1,1) that, among all possible cyclic partitions of N there exists one of maximum length. This length will be called the *index of imprimitivity* of φ and will be denoted by $r(\varphi)$. If $r(\varphi) = 1$, the mapping φ is said to be *primitive*.

(1,2) *Let $P_0, \ldots, P_{s-1}$ be a cyclic partition of N, let $\Phi = \varphi^s$. Then Φ is irreducible on every P_j. Every Q such that $\Phi(Q) \subset Q$ may be expressed as the union of some P_j, so that $\Phi(Q) = Q$. If $s = r(\varphi)$, the mapping Φ is primitive on every P_j.*

Proof. Let $0 \neq R \subset P_0$, $\Phi(R) \subset R$. Let $R_i = \varphi^i(R)$ for $i = 0, 1, \ldots, s-1$, $N^* = R_0 \cup \ldots \cup R_{s-1}$. We find that $\varphi(N^*) \subset N^*$ whence $N^* = N$. Since $R_i \subset P_i$ and $\bigcup R_i = \bigcup P_i$, we have $R_i = P_i$. The mapping Φ is thus seen to be irreducible on every P_i.

Suppose now that, for some $Q \subset N$, we have $\Phi(Q) \subset Q$ and $Q_i = P_i \cap Q \neq 0$. It follows that

$$\Phi(Q_i) \subset \Phi(P_i) \cap \Phi(Q) \subset P_i \cap Q = Q_i$$

whence $Q_i = P_i$. Hence Q is the union of those P_j for which $Q \cap P_j \neq 0$.

Suppose further that $v > 1$ and $Q_0, \ldots, Q_{v-1}$ is a cyclic partition of P_0 with respect to Φ. If $Q_j^k = \varphi^k(Q_j)$ for $k = 0, \ldots, s-1$ we find easily that the sets

$$Q_0^0,\ Q_1^0,\ \ldots,\ Q_0^{s-1},\ Q_1^0,\ \ldots,\ Q_1^{s-1},\ \ldots,\ Q_{v-1}^0,\ \ldots,\ Q_{v-1}^{s-1}$$

form a cyclic partition of N with respect to φ. The length of this partition being $s \,.\, v > s$, we have $s \neq r(\varphi)$.

(1,3) *Let $s = r(\varphi)$ and let $k \geqq 1 + (n-s)^2$. Then $x \in \varphi^{ks}(x)$ for every x.*

Proof. Let $P_0, \ldots, P_{s-1}$ be a cyclic partition of N. Clearly every P_i has at most $n - s + 1$ elements. Since Φ is primitive on every P_i, it follows from theorem 1 of [2] that $x \in \Phi^k(x)$ for every $x \in N$ and every $k \geqq 1 + (n-s)^2$.

A finite sequence

$$x_0, x_1, \ldots, x_q \tag{1}$$

of elements of N is said to constitute a *pseudocycle of* φ if $x_i \in \varphi(x_{i-1})$ for $i = 1, 2, \ldots, q$ and $x_0 = x_q$. If $x_i \neq x_j$ for every i, j such that $0 \leqq i < j < q$, the sequence (1) will be called a *cycle of* φ. The number q will be called the *length* of the pseudocycle (cycle). Since clearly the length of every pseudocycle may be expressed as the sum of the lengths of suitable cycles, it is easy to see that the greatest common divisor of all lengths of pseudocycles of φ coincides with the greatest common divisor of all lengths of cycles of φ.

The main result is the following:

Theorem. *Let $d > 0$ be the greatest common divisor of all lengths of cycles of φ. Then $r(\varphi) = d$.*

Proof. According to (1,1), the number $r(\varphi)$ divides the length of every pseudocycle of φ. Hence $r(\varphi)|d$. Take now an arbitrary $x \in N$ and put $P = x \cup \varphi^d(x) \cup \varphi^{2d}(x) \cup \dots$. If $P = N$, we have $x \in \varphi(N) = \varphi(P)$, whence $x \in \varphi^{jd+1}(x)$ for a suitable j. It follows that $d|jd + 1$ so that $d = 1$. We have thus $r(\varphi) = d = 1$. Suppose now that P is different from N. We show first that P has the following property: if $0 \neq P' \subset P$ and $\varphi^d(P') \subset P'$, then $P' = P$. To see that, consider a nonvoid $P' \subset P$ such that $\varphi^d(P') \subset P'$. Take a $z \in P'$. We have $z \in \varphi^{pd}(x)$ for some p and $x \in \varphi^k(z)$ for some k. Hence $x \in \varphi^{k+pd}(x)$, so that $d|k + pd$. It follows that $k = md$ for some m so that $x \in \varphi^{md}(z) \subset P'$. Hence $P \subset P'$. It is easy to prove (see the second part of the proof of the main theorem in [2]) that $\varphi^d(P) = P$ and that any two of the sets $P_j = \varphi^j(P)$ $(j = 0, 1, \dots, d - 1)$ are either disjoint or identical. Let t be the least integer for which $\varphi^t(P) = P$. We have then $x \in \varphi^{t+jd}(x)$ for some j, whence $d|t + jd$ so that $t = d$. The sets $P_0, \dots, P_{d-1}$ are thus seen to constitute a cyclic partition of length d. It follows that $d \leqq r(\varphi)$. This, together with $r(\varphi)|d$ proves the equation $r(\varphi) = d$.

(1,4) *The length of every cyclic partition is a divisor of $r(\varphi)$ and, to every divisor s of $r(\varphi)$, there exists a cyclic partition of length s.*

Proof. According to (1,1), the length of every cyclic partition is a divisor of d. We have $d = r(\varphi)$ according to the main theorem. To prove the second part of our assertion, consider an arbitrary divisor s of $r(\varphi) = d$. We have thus $d = k \,.\, s$. If $P_0, \dots, P_{d-1}$ is a cyclic partition of length d, it is easy to see that the sets

$$T_j = P_j \cup P_{j+s} \cup \dots \cup P_{j+(k-1)s} \quad (j = 0, 1, \dots, s - 1)$$

constitute a cyclic partition of length s.