

N.Ya. Medvedev

О решётке o -аппроксимируемых ℓ -многообразий

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 34 (1984), No. 1, 6–17

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101921>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1984

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О РЕШЁТКЕ o -АППРОКСИМИРУЕМЫХ l -МНОГООБРАЗИЙН. Я. МЕДВЕДЕВ, Барнаул¹⁾

(Поступило в редакцию 4. мая 1981г.)

l -многообразии V , в котором справедливо тождество $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$ называется o -аппроксимируемым l -многообразием (т.е. многообразие всех решёточно упорядоченных групп). Множество L_o — o -аппроксимируемых l -многообразий является дуально брауэровой решёткой относительно естественно определённых операций объединения и пересечения [1]. Пусть \bar{V} , $V \in L_o$, тогда говорят, что \bar{V} покрывает V в решётке L_o , если $\bar{V} \supset V$ и из $\bar{V} \supseteq U \supseteq V$ следует $\bar{V} = U$ или $V = U$, где $U \in L_o$. Ранее, в работах [1], [2] ставился и решался вопрос о существовании покрытий для конкретных l -многообразий из L_o . В этой статье получены следующие результаты: 1) доказано, что решётка L_o не обладает свойством покрытия, а именно, построено неконечнообразимое l -многообразие V , не являющееся наибольшим l -многообразием в решётке L_o и не имеющее покрытий в L_o ; 2) доказано, что решётка L_o не является брауэровой; 3) вычислен базисный ранг l -многообразий \mathcal{LR} и \mathcal{LN} , определяемых тождествами $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$ и $|x| |y| \wedge |y|^2 |x|^2 = |x| |y|$ соответственно, что даёт ответ на вопрос 12 работы [1].

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Очевидно, что l -многообразие \mathcal{LR} , определяемое тождеством $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$ есть наибольший элемент в решётке L_o . l -многообразие \mathcal{LW} , определяемое тождеством $(|x|^2 \vee y^{-1}|x|y) |x|^{-2} = e$, называется l -многообразием жёстко упорядоченных l -групп, причём $\mathcal{LW} \subset \mathcal{LR}$ (см. [3]). Решётка L называется брауэровой, если в ней выполнено тождество $x \wedge (\bigvee_{\alpha \in I} y_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in I} (x \wedge y_\alpha)$. Всюду буква N обозначает множество натуральных чисел. Группу G , наделённую линейным порядком P , будем обозначать (G, P) . Операции объединения и пересечения в решётке L_o обозначаем \bigvee и \bigwedge соответственно. Как обычно $|x| = x \vee x^{-1}$. $|a| \geq |b|$ означает, что $|a|$ и $|b|$ архимедово неэквив-

¹⁾ Работа выполнена автором при прохождении научной стажировки на кафедре математики Высшей технической школы в Кошице.

валентны, то есть $|a| > |b|^n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Основные факты по линейно и решёточно упорядоченным группам можно найти в [4] и [5], по теории групп — в [6] и [7].

Пусть A_β — подгруппа аддитивной группы действительных чисел \mathbb{R} , $1 \neq \beta$ — положительное действительное число, такое, что из $a \in A_\beta$ следует $\beta a, \beta^{-1}a \in A_\beta$. Пусть B_β — бесконечная циклическая подгруппа мультипликативной группы положительных действительных чисел, порождённая числом β . Рассмотрим множество

$$T_\beta = \{(r, a) \mid r \in B_\beta = \langle \beta \rangle, a \in A_\beta\}$$

с операцией умножения

$$(r, a)(r', a') = (rr', r'a + a').$$

Считаем $T_\beta \ni (r, a) \geq e$, если $r = \beta^p$ и $p > 0$, либо $p = 0$ и $a \geq 0$. Тогда T_β — линейно упорядоченная группа. Пусть P_β — этот линейный порядок группы T_β . Отметим, что множество элементов T_β вида $(1, a)$, где $a \in A_\beta$, образует выпуклую инвариантную подгруппу T_β , изоморфную A_β и при этом

$$(r, c)^{-1}(1, a)(r, c) = (1, ra).$$

Обозначим эту подгруппу A'_β . Множество элементов T_β вида $(r, 0)$, где $r \in B_\beta$, образует подгруппу B'_β , изоморфную B_β . Так как для произвольного элемента (r, a) группы T_β справедливо $(r, a) = (r, 0)(1, a)$, то группа T_β есть полупрямое произведение A'_β и бесконечной циклической группы B'_β (см. [7], стр. 336).

Лемма 1. Пусть (G, P) — неабелева линейно упорядоченная группа, обладающая архимедовой, инвариантной, выпуклой подгруппой A , такой, что факторгруппа G/A — бесконечная циклическая группа. Тогда (G, P) изоморфна линейно упорядоченной группе T_β для некоторого $\beta \neq 1$ и $A_\beta \subseteq \mathbb{R}$.

Доказательство. Хорошо известно ([7], стр. 336), что группа G есть полупрямое произведение подгруппы A и бесконечной циклической группы $B = \langle b \rangle$, где $e < b \notin A$. Поскольку A — выпуклая подгруппа и $b \notin A$, то $b > a$ для каждого $a \in A$. Любой элемент g группы G единственным образом записывается в виде $g = b^p a$ и $g = b^p a > e$, если $p > 0$, либо $p = 0$ и $a > e$ в A . Поскольку A — архимедова, то по теореме Гёльдера ([4], стр. 27) A порядково изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы действительных чисел \mathbb{R} . Пусть φ — этот изоморфизм. Так как ([4], стр. 28) любой порядковый автоморфизм линейно упорядоченной группы $\varphi(A) \subseteq \mathbb{R}$ есть умножение на некоторое положительное действительное число β , то

$$\varphi(b^{-1}ab) = \beta \varphi(a) \quad \text{для } a \in A, \quad \beta > 0.$$

Так как G — неабелева, то $\beta \neq 1$. Теперь непосредственная проверка показывает, что отображение $f: b^p a \rightarrow (\beta^p, \varphi(a))$ является изоморфизмом линейно упорядоченных групп (G, P) и (T_β, P_β) , причём $A_\beta = \varphi(A) \subseteq \mathbb{R}$ и $B_\beta = \langle \beta \rangle$.

Пусть $U_\beta = \text{var}_l(T_\beta, P_\beta)$ — l -многообразие, порождённое линейно упорядоченной группой (T_β, P_β) . Через $\mathcal{L}A$ обозначим l -многообразие абелевых l -групп.

Лемма 2. Пусть $U_\beta = \text{var}_l(T_\beta, P_\beta)$. Тогда существует l -многообразие U'_β , обладающее свойствами: 1) $U'_\beta \subset U_\beta$, 2) $U'_\beta \neq \mathcal{L}A$.

Доказательство. Считаем, вначале, что $\beta > 1$. Тогда существуют натуральные числа k и n такие, что $\beta < n < \beta^k$. Рассмотрим подгруппу $T'_\beta \subseteq T_\beta$, где $T'_\beta = \{(r, a) \mid r \in B'_\beta = (\beta^k), a \in A_\beta\}$, линейно упорядоченную относительно индуцированного порядка $P'_\beta = T'_\beta \cap P_\beta$. Покажем, что в качестве U_β можно взять $\text{var}_l(T'_\beta, P'_\beta)$. Так как T'_β неабелева, то $\text{var}_l(T'_\beta, P'_\beta) = U'_\beta \neq \mathcal{L}A$ и, поскольку (T'_β, P'_β) — l -подгруппа (T_β, P_β) , то $U'_\beta \subseteq U_\beta$. Покажем теперь, что тождество 1) $(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n = |[x, y]|^n$, где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, выполняется на линейно упорядоченной группе (T'_β, P'_β) и не выполняется на линейно упорядоченной группе (T_β, P_β) . Пусть $x, y \in (T'_\beta, P'_\beta)$. Если $[x, y] = e$, то тождество 1) справедливо. Пусть $|[x, y]| = (1, a)$, где $a > 0$. Тогда

$$(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) = (1, \beta^{kt}a)$$

для некоторого $t \in N$. Но

$$(1, \beta^{kt}a) \geq (1, \beta^k a) > (1, na) = (1, a)^n$$

ввиду выбора $n, k \in N$. Следовательно

$$\begin{aligned} (|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n &= (1, \beta^{kt}a) \wedge (1, a)^n = \\ &= (1, a)^n = |[x, y]|^n. \end{aligned}$$

Значит тождество 1) справедливо на (T'_β, P'_β) и, следовательно, на $U'_\beta = \text{var}_l(T'_\beta, P'_\beta)$. Заметим, что тождество 1) не выполняется на (T_β, P_β) при $x = (\beta, 0)$, $y = (1, a)$, где $a > 0$. Действительно

$$\begin{aligned} |[x, y]| &= |(\beta, 0)^{-1} (1, a)^{-1} (\beta, 0) (1, a)| = |(\beta^{-1}, 0) (1, -a) (\beta, 0) (1, a)| = \\ &= |(1, -\beta a) (1, a)| = |(1, (1 - \beta) a)| = (1, (\beta - 1) a) \neq e. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} (|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) &= (\beta, 0)^{-1} (1, (\beta - 1) a) (\beta, 0) = \\ &= (1, \beta(\beta - 1) a) < (1, n(\beta - 1) a) = (1, (\beta - 1) a)^n = |[x, y]|^n. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду выбора n , получаем

$$\begin{aligned} (|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n &= \\ &= (1, \beta(\beta - 1) a) \wedge (1, n(\beta - 1) a) = \\ &= (1, \beta(\beta - 1) a) \neq (1, n(\beta - 1) a) = |[x, y]|^n. \end{aligned}$$

Пусть теперь $0 < \beta < 1$. Тогда существуют $k, n \in N$, такие, что $\beta^{-1} < n < \beta^k$. Полагаем $T'_\beta = \{(r, a) \mid r \in B'_\beta = (\beta^k), a \in A_\beta\} \subseteq T_\beta$ и $P'_\beta = T'_\beta \cap P_\beta$. В качестве U'_β можно взять $\text{var}_1(T'_\beta, P'_\beta)$. Доказательство аналогично предыдущему, с той лишь разницей, что вместо тождества 1) надо рассмотреть тождество 2) $(|x| \vee |y|) |[x, y]| (|x| \vee |y|)^{-1} \wedge |[x, y]|^n = |[x, y]|^n$.

Следствие. $(T_\beta, P_\beta) \in U_\beta \setminus U'_\beta$.

Пусть V -- l -многообразие, определяемое следующей бесконечной системой тождеств:

- а) $|([x, y])|^2 \vee y^{-1} |[x, y]| y |[x, y]|^{-2} \wedge |([x, y])|^2 \vee x^{-1} |[x, y]| x |[x, y]|^{-2} \wedge$
 $\wedge |((|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n) [x, y]|^{-n} \wedge$
 $\wedge |((|x| \vee |y|) |[x, y]| (|x| \vee |y|)^{-1} \wedge |[x, y]|^m) [x, y]|^{-m} = e$
 $(m, n \in N; m, n \geq 2)$
- б) $(u \wedge w^{-1} u^{-1} w) \vee e = e$

Очевидно, что $V \in L_o$. Простая проверка показывает, что $V \cong LW$ и, следовательно, $V \neq LA$.

Лемма 3. Пусть β положительное действительное число, $\beta \neq 1$ тогда справедливы соотношения: 1) $(T_\beta, P_\beta) \notin V$, 2) $V \not\subseteq U_\beta = \text{var}_1(T_\beta, P_\beta)$.

Доказательство. Очевидно, что из 1) следует 2), поэтому доказываем 1). Пусть $\beta > 1$. Тогда существует $k \in N$, такое, что $\beta^k > 2$. Покажем, что тождества из а) при $m = 2$ и $\beta^k < n$ нарушаются на (T_β, P_β) . Действительно, положим $x = (\beta^k, a)$, где $a > 0$, $y = (\beta^k, 0)$. Тогда

$$|[x, y]| = (1, (\beta^k - 1) a) \neq e$$

так как $\beta^k > 2$. Пусть $(\beta^k - 1) a = b$. Тогда

$$|[x, y]|^2 = (1, 2b), \quad y^{-1} |[x, y]| y = (1, \beta^k b) = x^{-1} |[x, y]| x,$$

и ввиду выбора k

$$(1, 2b) < (1, \beta^k b).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & |([x, y])|^2 \vee x^{-1} |[x, y]| x |[x, y]|^{-2} = |([x, y])|^2 \vee y^{-1} |[x, y]| y |[x, y]|^{-2} = \\ & = |((1, 2b) \vee (1, \beta^k b)) \cdot (1, 2b)^{-1}| = |(1, \beta^k b) (1, 2b)^{-1}| = |(1, (\beta^k - 2) b)| > e. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} & |((|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n) \cdot [x, y]|^{-n} = \\ & = |((1, \beta^k b) \wedge (1, nb)) (1, nb)^{-1}| = |(1, \beta^k b) \cdot (1, nb)^{-1}| = |(1, (\beta^k - n) b)| > e \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & |(|x| \vee |y|) [x, y] (|x| \vee |y|)^{-1} \wedge |[x, y]|^2 |[x, y]|^{-2} = \\ & = |((1, \beta^{-k}b) \wedge (1, 2b)) (1, 2b)^{-1}| = |(1, \beta^{-k}b) (1, 2b)^{-1}| = |(1, (\beta^{-k} - 2)b)| > e \end{aligned}$$

Поскольку (T_β, P_β) – линейно упорядоченная группа, то

$$\begin{aligned} & |(1, (\beta^k - 2)b)| \wedge |(1, (\beta^k - n)b)| \wedge |(1, (\beta^{-k} - 2)b)| = \\ & = \min \{|(1, (\beta^k - 2)b)|, |(1, (\beta^k - n)b)|, |(1, (\beta^{-k} - 2)b)|\} > e \end{aligned}$$

Значит $(T_\beta, P_\beta) \notin V$ и, следовательно, $U_\beta = \text{var}_l(T_\beta, P_\beta) \not\subseteq V$.

Случай $\beta < 1$ разбирается аналогично, с той лишь разницей, что на (T_β, P_β) нарушаются тождества из а) при $n = 2$, $m > \beta^{-k}$, где $\beta^{-k} > 2$ и $x = (\beta^{-k}, a)$, $y = (\beta^{-k}, 0)$.

Следствие 1. Пусть U'_β – l -многообразие, определённое в лемме 2. Тогда $U'_\beta \not\subseteq V$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Следствие 2. $V \neq \mathcal{LR}$.

Лемма 4. Пусть V_1, V_2, V_3 – l -многообразия, $V_1 = V_2 \vee V_3$ и (G, P) – линейно упорядоченная группа. Если $(G, P) \in V_1$, то $(G, P) \in V_2$ или $(G, P) \in V_3$.

Доказательство. Хорошо известно [1], что если l -группа $H \in V_1 = V_2 \vee V_3$, то существуют l -идеалы A_1, A_2 , такие, что $H/A_1 \in V_2$ и $H/A_2 \in V_3$, причём $A_1 \cap A_2 = e$. Но (G, P) – линейно упорядоченная группа, поэтому либо $A_1 = e$, либо $A_2 = e$. В любом случае (G, P) принадлежит либо V_2 , либо V_3 .

§ 2. О НАКРЫТИЯХ В L_o

Теорема 1. l -многообразия V не имеет накрытий в решётке L_o .

Доказательство. Пусть, напротив, существует l -многообразие $\bar{V} \in L_o$, накрывающее V . Поскольку V – o -аппроксимируемое l -многообразие, то существует линейно упорядоченная группа $(G, P) \in \bar{V} \setminus V$, тождество б) выполнено на ней очевидным образом. Значит существуют $m, n \in \mathbb{N}(m, n \geq 2)$, $x, y \in G$, такие, что:

- 1) $|(|[x, y]|^2 \vee y^{-1}[x, y]| y) |[x, y]|^{-2}| > e$,
 $|(|[x, y]|^2 \vee x^{-1}[x, y]| x) |[x, y]|^{-2}| > e$,
- 2) $|((|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n) |[x, y]|^{-n}| > e$,
- 3) $|((|x| \vee |y|) |[x, y]| (|x| \vee |y|)^{-1} \wedge |[x, y]|^m) |[x, y]|^{-m}| > e$.

Из 1) следует

$$4) y^{-1} | [x, y] | y > | [x, y] |^2, x^{-1} | [x, y] | x > | [x, y] |^2.$$

Из 2) получаем

$$5) (|x| \vee |y|)^{-1} | [x, y] | (|x| \vee |y|) < | [x, y] |^n.$$

Из 3) вытекает

$$6) (|x| \vee |y|) | [x, y] | (|x| \vee |y|)^{-1} < | [x, y] |^m.$$

Пусть, для определённости, $|y| > |x|$. Тогда 5) и 6) переписываются следующим образом:

$$7) |y|^{-1} | [x, y] | |y| < | [x, y] |^n,$$

$$8) |y| | [x, y] | |y|^{-1} < | [x, y] |^m.$$

Сопрягая 8) элементом $|y|$, получаем

$$9) | [x, y] | < |y|^{-1} | [x, y] |^m |y| = (|y|^{-1} | [x, y] | |y|)^m.$$

Из 7) и 9) следует

$$10) | [x, y] | < (|y|^{-1} | [x, y] | |y|)^m < | [x, y] |^{mn}.$$

Неравенство 10) означает, что элементы $| [x, y] |$ и $|y|^{-1} | [x, y] | |y|$ архимедово эквивалентны, следовательно скачок $\bar{V}_x \supset V_x$ выпуклых подгрупп в G , определяемый элементом $| [x, y] |$, инвариантен относительно сопряжения элементом y . Рассмотрим подгруппу K группы G , порождённую элементами y и $[x, y]$, линейно упорядоченную относительно индуцированного порядка $Q = K \cap P$. Пусть $V_x \cap K = \bar{A}_x$ и $V_x \cap K = A_x$. Тогда A_x инвариантна в K . Рассмотрим фактор-группу $\bar{K} = K/A_x$, естественно линейно упорядоченную, $\bar{K} \supset \bar{A} = \bar{A}_x/A_x$ – выпуклая, архимедова, инвариантная подгруппа в \bar{K} . Пусть \bar{Q} – линейный порядок \bar{K} . Поскольку фактор-группа \bar{K}/\bar{A} – бесконечная циклическая группа и, как следует из неравенств 4), \bar{K} – неабелева, то по лемме 1 \bar{K} изоморфна некоторой линейно упорядоченной группе (T_β, P_β) из § 1. Значит l -многообразие V содержит l -многообразие $U_\beta = \text{var}_l(T_\beta, P_\beta)$. По лемме 2 существует l -многообразие U'_β , такое, что $U_\beta \supset U'_\beta$. По лемме 3 и следствию из леммы 3 $U_\beta \not\subseteq V$, $U'_\beta \not\subseteq V$, а по лемме 3 и следствию 1 из леммы 2 $(T_\beta, P_\beta) \notin V$, U'_β . Тогда $\bar{V} \cong U_\beta \vee V \supset V$ и $\bar{V} \cong U'_\beta \vee V \supset V$. Поскольку \bar{V} покрывает V , то $\bar{V} = U_\beta \vee V = U'_\beta \vee V$. Но $(T_\beta, P_\beta) \in \bar{V} = U'_\beta \vee V$, значит по лемме 4, либо $(T_\beta, P_\beta) \in U_\beta$, либо $(T_\beta, P_\beta) \in V$. Оба случая невозможны, противоречие.

Следствие 1. Решётка L_o не обладает свойством накрытия.

Следствие 2. Все накрытия l -многообразия $\mathcal{L}A$ абелевых l -групп в решётке L_o содержатся в V .

Доказательство. В работе [2] построены три накрытия l -многообразия $\mathcal{L}A$ абелевых l -групп в решётке L_o : $\text{var}_l(N_o)$, $\text{var}_l(W^-)$, $\text{var}_l(W^+)$, причём доказано, что для каждого β выполняется $\text{var}_l(T_\beta, P_\beta) \cong \text{var}_l(W^-)$, если $\beta < 1$,

или $\text{var}_l(T_\beta, P_\beta) \cong \text{var}_l(W^+)$, если $\beta > 1$. Из определения линейно упорядоченной группы (T'_β, P'_β) и доказательства теоремы 1 работы [2] следует, что $\text{var}_l(T'_\beta, P'_\beta) \cong \text{var}_l(W^-)$, если $\beta > 1$, и $\text{var}_l(T'_\beta, P'_\beta) \cong \text{var}_l(W^+)$, если $\beta < 1$. Применяя лемму 2, получаем, что $\text{var}_l(T_\beta, P_\beta) \supset \text{var}_l(W^-)$, при $\beta > 1$, и $\text{var}_l(T_\beta, P_\beta) \supset \text{var}_l(W^+)$, при $\beta < 1$. Лёгкая проверка показывает, что $\text{var}_l(W^-)$, $\text{var}_l(W^+) \subseteq V$. Пусть l -многообразие U является покрытием l -многообразия абелевых l -групп $\mathcal{L}A$ в решётке и $U \not\subseteq V$. Тогда существует линейно упорядоченная группа $(G, P) \in U \setminus V$. По рассуждениям, аналогичным доказательству теоремы 1 следует, что $U \cong \text{var}_l(T_\beta, P_\beta)$ для некоторого $\beta \neq 1$. Следовательно $U \supset \text{var}_l(W^-) \supset \mathcal{L}A$, если $\beta < 1$, или $U \supset \text{var}_l(W^+) \supset \mathcal{L}A$, если $\beta > 1$. Оба случая противоречат тому, что U покрывает $\mathcal{L}A$.

Следствие 3. *l -многообразие V не допускает конечной базы тождеств.*

Доказательство. Действительно, если V конечнобазирваемо, то для произвольного l -многообразия W такого, что $W \supset V$, существует l -многообразие U , покрывающее V и $W \cong U$. Полагая $W = \mathcal{L}R$, получаем противоречие с теоремой 1.

§ 3. НЕБРАУЭРОВОСТЬ L_0

Пусть $\beta_n = n/(n+1)$ ($n \in \mathbb{N}$) и $A_{\beta_n} = R$, где R — аддитивная группа действительных чисел. Рассмотрим l -группу $G = \prod_{n \in \mathbb{N}} (T_{\beta_n}, P_{\beta_n})$, являющуюся декартовым l -произведением линейно упорядоченных групп $(T_{\beta_n}, P_{\beta_n})$. Очевидно, что $K = \prod_{n \in \mathbb{N}} (A'_{\beta_n}, P'_{\beta_n})$ (определения подгрупп A'_{β_n} см. в § 1) является l -идеалом l -группы G , где $P'_{\beta_n} = P_{\beta_n} \cap A'_{\beta_n}$. Каждый элемент K можно представить в виде бесконечной последовательности

$$k = ((1, a_1); \dots; (1, a_n); \dots) \quad \text{где } a_n \in R = A_{\beta_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть G_0 — l -подгруппа G , порождённая элементом $g = ((\beta_1, 0); \dots; (\beta_n, 0); \dots)$ и l -идеалом K . Очевидно, что K — l -идеал в G_0 . Рассмотрим множество

$$H = \{k = ((1, a_1); \dots; (1, a_n); \dots) \in K \mid \text{где } a_n \in R \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\}.$$

Лемма 5. *H — l -идеал в l -группе G_0 .*

Доказательство. Очевидно, что H — выпуклая l -подгруппа. Пусть $k = ((1, a_1); \dots; (1, a_n); \dots)$ — произвольный элемент из H . Тогда

$$g^{-1}kg = \left(\left(1, \frac{1}{2}a_1\right); \left(1, \frac{2}{3}a_2\right); \dots; \left(1, \frac{n}{n+1}a_n\right); \dots \right).$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/(n+1)) = 1$, следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot a_n \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Значит $g^{-1}kg \in H$ для произвольного $k \in H$, что и доказывает инвариантность H в G_0 .

Обозначим через N_0 свободную нильпотентную группу

$$N_0 = gp(a, b, c \mid [a, b] = c, [a, c] = [b, c] = e),$$

упорядоченную линейно следующим образом: $N_0 \ni a^m b^n c^k > e$, если $m > 0$, или $m = 0$ и $n > 0$, или $m = n = 0$ и $k > 0$. Пусть P_0 — этот линейный порядок группы N_0 .

Лемма 6. Фактор-группа l -группы G_0 по l -исеалу H содержит линейно упорядоченную подгруппу, изоморфную (N_0, P_0) .

Доказательство. Рассмотрим в l -группе G_0 элементы

$$g = ((\beta_1, 0); \dots; (\beta_n, 0); \dots), \quad k_1 = ((1, 2); (1, 3); \dots; (1, n+1); \dots)$$

Тогда

$$k_2 = [g, k_1] = g^{-1}k_1^{-1}gk_1 = ((1, -1); \dots; \left(1, -\frac{n}{n+1}(n+1); \dots\right) \cdot ((1, 1); \dots; (1, n+1); \dots) = ((1, 1); \dots; (1, 1); \dots).$$

Очевидно, что $k_2 \notin H$. Далее

$$[g, k_2] = g^{-1}k_2^{-1}gk_2 = \left((1, \frac{1}{2}); \dots; \left(1, \frac{1}{n+1}\right); \dots \right).$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/(n+1)) = 0$, то $[g, k_2] \in H$. Из коммутативности K следует, что $[k_1, k_2] = e$. Поэтому в фактор-группе G_0/H , естественно решёточно упорядоченной, справедливы соотношения:

$$[\bar{g}, \bar{k}_1] = \bar{k}_2, \quad [\bar{g}, \bar{k}_2] = [\bar{k}_1, \bar{k}_2] = e; \quad \bar{g} \gg \bar{k}_1 \gg \bar{k}_2,$$

где $\bar{g}, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ — образы элементов g, k_1, k_2 при естественном l -гомоморфизме l -группы G_0 на l -группу G_0/H , что и доказывает линейную упорядоченность подгруппы $gp(\bar{g}, \bar{k}_1, \bar{k}_2)$, порождённой элементами $\bar{g}, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ l -группы G_0/H , и её изоморфность линейно упорядоченной группе (N_0, P_0) .

Теорема 2. Решётка o -аппроксимируемых l -многообразий не является брауэровой.

Доказательство. Заметим, что справедливо равенство:

1) $\text{var}_l(T_{\beta_n}, P_{\beta_n}) \wedge \text{var}_l(N_0, P_0) = \mathcal{L}A$ для каждого $n \in N$. Действительно, в l -многообразии $\text{var}_l(T_{\beta_n}, P_{\beta_n})$ справедливо тождество

$$\text{а) } (|x| \vee |y|)^k |[x, y]| (|x| \vee |y|)^{-k} \wedge |[x, y]|^3 = |[x, y]|^3 \text{ при } \beta^{-k} = ((n+1)/n)^k > 3.$$

Так как $[x, y]$ — центральный элемент в группе N_0 , то в $\text{var}_l(N_0, P_0)$ справедливо тождество

$$\text{б) } (|x| \vee |y|)^k |[x, y]| (|x| \vee |y|)^{-k} = |[x, y]|.$$

Непосредственная проверка показывает, что если на l -группе выполнены тождества а) и б) одновременно, то она абелева, что и доказывает справедливость равенства 1).

Очевидно, что $G, G_0, G_0/H \in \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \text{var}_l(T_{\beta_n}, P_{\beta_n})$. По лемме 6 линейно упорядоченная группа $(N_0, P_0) \in \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \text{var}_l(T_{\beta_n}, P_{\beta_n})$, следовательно имеет место

$$2) \text{var}_l(N_0, P_0) \wedge \left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \text{var}_l(T_{\beta_n}, P_{\beta_n}) \right) = \text{var}_l(N_0, P_0).$$

Из 1), 2) и того, что $\mathcal{L}A \neq \text{var}_l(N_0, P_0)$, следует небрауэровость решётки L_0 .

§ 4. БАЗИСНЫЙ РАНГ

Напомним, что базисным рангом l -группы G называется наименьшая из мощностей множеств, порождающих G . Базисный ранг l -многообразия V равен наименьшему из базисных рангов l -групп $G \in V$, порождающих l -многообразие V ([8], стр. 345). Пусть A и B — l -группы, причём B — линейно упорядочена, тогда через $W = AWrB$ обозначим полное сплетение групп A и B , естественно решёточно упорядоченное (см. [9]). В [9] доказано, что любая счётная l -группа G изоморфно вложима в l -группу H с двумя порождающими, являющуюся l -подгруппой l -группы $(GWrB)WrC$, где B, C — линейно упорядоченные бесконечные циклические группы. Непосредственная проверка показывает, что если $G \in \mathcal{L}N$, то и $(GWrB)WrC \in \mathcal{L}N$, а значит, и $H \in \mathcal{L}N$.

Теорема 3. *Базисный ранг l -многообразий $\mathcal{L}R$ и $\mathcal{L}N$, определяемых тождествами $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$ и $|x| |y| \wedge |y|^2 |x|^2 = |x| |y|$ соответственно, равен 2.*

Доказательство. 1) Случай $\mathcal{L}N$. Пусть $F_{\mathcal{L}N}(2)$ — свободная l -группа в l -многообразии $\mathcal{L}N$ с двумя свободными порождающими. Через V обозначим l -многообразие, порождённое l -группой $F_{\mathcal{L}N}(2)$. Очевидно, что $V \subseteq \mathcal{L}N$. По вышеотмеченному существует l -группа $H \in \mathcal{L}N$ с двумя порождающими, содержащая в качестве l -подгруппы свободную в l -многообразии $\mathcal{L}N$ l -группу $F_{\mathcal{L}N}(\aleph_0)$ со счётным числом свободных порождающих. Поскольку H порождается двумя элементами, то она является гомоморфным образом l -группы $F_{\mathcal{L}N}(2)$ и, значит, $H \in V$. Следовательно $F_{\mathcal{L}N}(\aleph_0) \in V$. Хорошо известно, что l -многообразии однозначно определяется своей свободной l -группой со счётным чис-

лом свободных порождающих, поэтому $V = \mathcal{L}N$. Значит $F_{\mathcal{L}N}(2)$ порождает $\mathcal{L}N$ и, следовательно, базисный ранг l -многообразия равен 2.

2) Случая $\mathcal{L}R$. По теореме Неймана ([4], стр. 62) любая счётная линейно упорядоченная группа (G, P) изоморфно вложима в линейно упорядоченную группу (H, Q) с двумя порождающими и содержащую (G, P) как l -подгруппу. Пусть $(F(\aleph_0), P_\alpha)$ – свободная группа со счётным числом свободных порождающих, линейно упорядоченная относительно произвольного линейного порядка P_α (такие существуют, [4], стр. 33). Через V обозначим l -многообразие, порождённое l -группой $F_{\mathcal{L}R}(2)$, где $F_{\mathcal{L}R}(2)$ – свободная l -группа в l -многообразии $\mathcal{L}R$ с двумя свободными порождающими. Тогда для каждого P_α существует линейно упорядоченная группа (H_α, Q_α) с двумя порождающими, содержащая линейно упорядоченную группу $(F(\aleph_0), P_\alpha)$ в качестве l -подгруппы. Поскольку $H_\alpha \in V$, то $(F(\aleph_0), P_\alpha) \in V$ для каждого P_α . Но как показано в [10], свободная l -группа l -многообразия $\mathcal{L}R$, со счётным числом свободных порождающих, является l -подгруппой декартова l -произведения $\prod_{\alpha \in I} (F(\aleph_0), P_\alpha)$, где произведение берётся по всем линейным порядкам группы $F(\aleph_0)$. Значит свободная l -группа l -многообразия $\mathcal{L}R$ со счётным числом свободных порождающих содержится в V , поэтому $V = \mathcal{L}R$ и базисный ранг $\mathcal{L}R$ равен 2.

Замечание. В [10] доказано, что базисный ранг l -многообразия \mathcal{L} всех l -групп равен 2. Автору остаётся неизвестным базисный ранг l -многообразия $\mathcal{L}W$ жёстко упорядоченных l -групп.

§ 5. l -МНОГООБРАЗИЕ БЕЗ НЕЗАВИСИМОГО БАЗИСА ТОЖДЕСТВ

В этом параграфе доказано существование многообразий решеточно упорядоченных групп, не имеющих независимого базиса тождеств.

Вопрос о существовании независимого базиса тождеств многообразий алгебраических систем неоднократно рассматривался ранее. Так, например, в [11] построен пример многообразия группоидов, не имеющего независимого базиса тождеств, аналогичное утверждение справедливо для подгрупп [12], для групп ответ на этот вопрос неизвестен [14] (проблема 4.64). В этой заметке доказано существование l -многообразий, не имеющих независимого базиса тождеств.

Хорошо известно, что класс \mathcal{L} всех решеточно упорядоченных групп (l -групп) является многообразием в сигнатуре $\langle \cdot, {}^{-1}, e, \vee, \wedge \rangle$ (l -многообразием). Пусть Σ – некоторое множество тождеств в этой сигнатуре. Через $V(\Sigma)$ обозначим l -многообразие определённое этой системой тождеств. Множество тождеств Σ называется независимым, если из $\Sigma_1 \subset \Sigma$ следует $V(\Sigma) \subset V(\Sigma_1)$ для любого собственного подмножества Σ_1 (см. [13]). Говорят, что l -многообразие $V(\Sigma^\wedge)$ обладает независимым базисом тождеств, если существует независимое множество тождеств Σ такое, что $V(\Sigma^\wedge) = V(\Sigma)$. Введём следующие обозначения

ния: L — решетка всех l -многообразий; LR — l -многообразие o -аппроксимруемых l -групп, определяемое тождеством $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$. Пусть \bar{V} , $V \in L$, тогда \bar{V} накрывает V , если $\bar{V} \supseteq V$ и из $\bar{V} \supseteq U \supseteq V$ следует $\bar{V} = U$ или $V = U$, где $U \in L$. На связь между существованием независимого базиса тождеств l -многообразия V и накрытиями V в решетке l -многообразий L указывает следующее, хорошо известное (см. [15]).

Предложение. Пусть $V \subset W \subseteq \mathcal{L}$ — l -многообразия и пусть W — конечнобазируемо. Если V имеет бесконечный базис тождеств, то существует бесконечное число l -многообразий U_i ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$), накрывающих V в решетке L , причём $U_i \subset W$.

Пусть $V = V(\Sigma)$ — l -многообразие, определяемое системой тождеств а), б) в § 1 (обозначим её через Σ).

Теорема. l -многообразия $V = V(\Sigma)$ не имеет независимого базиса тождеств.

Доказательство. В п. 2 доказано, что V не допускает конечной базы тождеств. Пусть, напротив, l -многообразие обладает независимым базисом тождеств. По определению, l -многообразие LR конечнобазируемо и $V \subset LR \subset L$. Тогда по предложению должно существовать бесконечное число l -многообразий U_i , накрывающих V в решетке L и $U_i \subset LR$. Но как доказано в § 2, таких l -многообразий нет. Значит предположение неверно и V не допускает независимого базиса тождеств.

Замечание. Отметим, что l -многообразия V_1, V_2, W_1, W_2 , определённые в [16] также не допускают независимого базиса тождеств. Доказательство этого факта, ввиду его громоздкости, мы не приводим.

Литература

- [1] J. Martinez: Varieties of lattice ordered groups. Math. Z., 137 (1974), 265—284.
- [2] Н. Я. Медведев: О решётках многообразий решёточно упорядоченных групп и алгебр Ли. Алгебра и Логика, 16, 1 (1977), 40—45.
- [3] В. М. Копытов, Н. Я. Медведев: О линейно упорядоченных группах, ситема выпуклых подгрупп которых центральна. Мат. заметки, 19, 1 (1976), 85—90.
- [4] А. И. Кокорин, В. М. Копытов: Линейно упорядоченные группы. Москва, 1972.
- [5] Л. Фуке: Частично упорядоченные алгебраические системы, Москва, 1965.
- [6] М. И. Капранов, Ю. И. Мерзляков: Основы теории групп, Москва, 1972.
- [7] А. Г. Курош: Теория групп. Москва, 1967.
- [8] А. И. Мальцев: Алгебраические системы. Москва, 1970.
- [9] Н. Я. Медведев: О решётке радикалов конечнопорождённых l -групп. Math. Slovaca 33, 1983, 185—188.
- [10] P. Conrad: Free lattice ordered groups. J. Algebra, 16 (1970), 191—203.
- [11] A. Tarski: Equational logic and equational theories of algebras, Contributions to Math. Logic, North Holland, Amsterdam—London, 1968, 275—288.

- [12] *А. Н. Трахтман*: Многообразия подгрупп без неприводимого базиса тождеств, Матем. заметки, 21, 6 (1977), 865—871.
- [13] *А. И. Мальцев*: Универсально аксиоматизируемые подклассы локально конечных классов моделей, Сиб. мат. журнал, 8, 5 (1967), 1005—1014.
- [14] Коуровская тетрадь нерешённые задачи теории групп, Новосибирск, 1968.
- [15] *В. А. Горбунов*: Покрытия в решётках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость, Алгебра и Логика, 16, 5 (1977), 507—548.
- [16] *Н. Я. Медведев*: К теории многообразий решёточно упорядоченных групп. Czech. Math. J., 32 (107), 1982 364—372.

Адрес автора: 040 01 Košice, Švermova 9, ČSSR (Vysoká škola technická, Strojnická fakulta, Katedra matematiky).

Постоянный адрес: СССР, 656 099, Барнаул-99 пр. Социалистический 68 (Алтайский Государственный университет, кафедра алгебры и математической логики).