

Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über die Optimierung eines zweiparametrischen Iterationsverfahrens

Aplikace matematiky, Vol. 20 (1975), No. 2, 126–142

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103575>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1975

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER DIE OPTIMIERUNG EINES ZWEIPARAMETRIGEN ITERATIONSVERFAHRENS

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen 12. mai 1974)

In der Arbeit wird die Konvergenzgeschwindigkeit eines in den Arbeiten [2], [3] untersuchten zweiparametrischen Iterationsverfahrens mit der Konvergenzgeschwindigkeit des Oberrelaxations-Verfahrens verglichen. Das Iterationsverfahren ist folgenderweise definiert: es sei das lineare Gleichungssystem mit n Unbekannten

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

gegeben, wobei \mathbf{B} im allgemeinen eine nichtsymmetrische $n \times n$ Blockmatrix ist, deren Diagonalblöcke Nullmatrizen sind. Es sei ferner

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$$

wo \mathbf{L} bzw. \mathbf{U} die untere bzw. obere verallgemeinerte Dreiecksmatrix ist. Das untersuchte Iterationsverfahren wird dann durch die Formel

$$(2) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_v + \mathbf{P}(\alpha, \beta) \mathbf{b}$$

definiert, wo α, β reelle von Null verschiedene Parameterwerte sind und wo

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}(\alpha, \beta) &= (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{L})^{-1} [(\alpha - 1) \mathbf{E} + (\beta + 1) \mathbf{L} + \mathbf{U}], \\ \mathbf{P}(\alpha, \beta) &= (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{L})^{-1} \end{aligned}$$

ist.

In der Arbeit [2] wurde bewiesen, dass günstig gewählten Parameterwerte α, β gewisse bekannte Iterationsverfahren entsprechen, wie z. B. das Jacobi-Verfahren, das Gauss-Seidelsche Verfahren, das Oberrelaxations-Verfahren u. a.

Ähnlicherweise wie in den Arbeiten [2], [3] werden wir voraussetzen, dass ein n -dimensionaler Vektorraum \mathbf{R} existiert, welcher durch die direkte Summe der Unterräume v_1, \dots, v_m ($m \leq n$) gebildet wird; dabei sollen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- a) die Matrix \mathbf{B} bildet den Vektorraum \mathbf{R} in \mathbf{R} ab;
 b) es existieren positive teilerfremde ganze Zahlen h, k mit $h + k = p \leq m$, wobei für die Matrizen \mathbf{L}, \mathbf{U} die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{L}v_i &\subset v_{i+h}, \\ \mathbf{U}v_i &\subset v_{i-k}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

gelten (dabei setzt man $v_i = 0$ für $i < 1$ und $i > m$).

Unter diesen Bedingungen wurde in der Arbeit [2] der folgende Satz bewiesen, der den Zusammenhang zwischen Eigenwerten der Matrizen \mathbf{B} und $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ für $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ausdrückt. (Man bemerke, dass dann das Iterationsverfahren (2) dem Jacobi-Verfahren (1) entspricht.)

Satz 1. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$. Falls $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ ist und falls die Zahl μ die Bedingung*

$$(4) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^p = \mu^p(1 + \beta - \lambda\beta)^k$$

erfüllt, ist μ der Eigenwert der Matrix \mathbf{B} . Falls dagegen μ ein Eigenwert der Matrix \mathbf{B} ist, dann ist jede der Beziehung (4) genügende Zahl λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$.

Man untersuche nun den Fall, wenn $\beta = -1$ ist. Die Formel (4) definiert dann (wie schon aus der Arbeit [2] bekannt ist) das gewöhnliche Oberrelaxations-Verfahren. In dem Speziellfall, wenn $p = 2, h = k = 1$ ist und die Eigenwerte μ_i^2 der Matrix \mathbf{B}^2 reell und nichtnegativ sind, gilt der folgende Satz:

Satz 2. *Es sei $\varrho(\mathbf{B}) = M < 1$, wo $\varrho(\mathbf{B})$ der Spektralradius der Matrix \mathbf{B} ist. Dann ist $\max_{i=1, \dots, n} \mu_i^2 = M^2$ und der Spektralradius $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, -1))$ der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, -1)$ nimmt seinen Minimalwert für $\alpha = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ an, wobei*

$$(5) \quad \min_{\alpha \neq 0} \varrho(\mathbf{T}(\alpha, -1)) = [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$$

gilt.

Dieser Satz folgt leicht aus (4) und ist auch z. B. in [1] bewiesen (hier setzt man $\alpha = 1/\omega$).

Ähnlicherweise wie in dem Satz 2 werden wir überall dieser Arbeit voraussetzen, dass $p = 2, h = k = 1$ ist, und dass die Ungleichungen $0 \leq \mu_i^2 < 1, i = 1, \dots, n$ gelten, wo μ_i die Eigenwerte der Matrix \mathbf{B} sind (die Eigenwerte der Matrix \mathbf{B}^2 sind also reell und nichtnegativ). Dabei wird mit M bzw. m eine solche positive bzw. nichtnegative Zahl bezeichnet, dass $M^2 = \max_i \mu_i^2$ bzw. $m^2 = \min_i \mu_i^2$ ist. Wir werden uns mit der Frage befassen, für welche Werte von α, β die Ungleichung

$\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ gilt, d. h. für welche Punkte $[\alpha, \beta]$ die durch die Formel (2) definierte Methode in Hinsicht auf den Satz 2 wenigstens so schnell wie das Oberrelaxations-Verfahren konvergiert.

Bevor wir den Hilfssatz 1 formulieren werden, führen wir zuerst einige Bezeichnungen und Definitionen ein.

Man definiere die Funktionen b_1, b_2, b_3, B_1, B_2 der Veränderlichen α wie folgt:

$$(6) \quad b_1(\mu_i, \alpha) = [(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) M^2(1 - \mu_i^2) + 4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - M^2) - 4\alpha M^2 \sqrt{(1 - M^2)}] / 2\mu_i^2 M^2 \sqrt{(1 - M^2)},$$

$$(7) \quad b_2(\mu_i, \alpha) = [(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) M^2(1 - \mu_i^2) + 4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) - 4\alpha M^2] / 2\mu_i^2 M^2,$$

$$(8) \quad b_3(\mu_i, \alpha) = [(1 - \alpha)^2 / \mu_i^2] - [\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})^2 / \mu_i^2(1 + \sqrt{(1 - M^2)})^2] - 1,$$

$$(9) \quad B_1(\mu_i, \alpha) = -2\alpha(1 - \sqrt{(1 - \mu_i^2)}) / \mu_i^2,$$

$$(10) \quad B_2(\mu_i, \alpha) = -2\alpha(1 + \sqrt{(1 - \mu_i^2)}) / \mu_i^2.$$

Man bezeichne ferner durch das Symbol $\Omega(\mu_i)$ die Menge von solchen Punkten $[\alpha, \beta]$, für die alle Wurzeln λ der Gleichung

$$(11) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^2 = \mu_i^2(1 + \beta - \lambda\beta)$$

(die einen Spezialfall der Gleichung (4) für $p = 2, h = k = 1$ darstellt) im Absolutbetrag kleiner als die Zahl $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ sind. Es gilt dann der folgende Hilfssatz:

Hilfsatz 1. *Es sei $\mu_i^2 > 0$. Dann gilt*

a) $[\alpha, \beta] \in \Omega(\mu_i)$ dann und nur dann, wenn

$$(12) \quad \beta \leq b_1(\mu_i, \alpha), \quad \beta \leq b_2(\mu_i, \alpha), \quad \beta \geq b_3(\mu_i, \alpha)$$

ist;

b) Die Menge $\Omega(\mu_i)$ ist die Vereinigung zweier disjunkter Bereiche $\Omega_1(\mu_i), \Omega_2(\mu_i)$, wobei für $[\alpha, \beta] \in \Omega_1(\mu_i)$ $\alpha < 0$ und für $[\alpha, \beta] \in \Omega_2(\mu_i)$ $\alpha > 0$ ist;

c) Die im Absolutbetrag maximale Wurzel der Gleichung (11) gleicht der Zahl $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ genau dann, wenn der Punkt $[\alpha, \beta]$ ein Grenzpunkt der Menge $\Omega(\mu_i)$ ist;

d) Der Bereich $\Omega_1(\mu_i)$ enthält genau die Punkte $[\alpha, \beta]$, für die

$$(13) \quad -[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)} / 2 \sqrt{(1 - M^2)} \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \cdot \sqrt{(1 - \mu_i^2)}$$

gilt, wobei für

$$(14) \quad \alpha \leq -[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)/2} \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

die Ungleichungen

$$(15) \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leq \beta \leq b_1(\mu_i, \alpha), \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leq B_2(\mu_i, \alpha) \leq b_1(\mu_i, \alpha)$$

(die Gleichheitszeichen gelten nur für den linken Randpunkt des Intervalls (13) und für

$$(16) \quad \alpha \geq -[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)/2} \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

die Ungleichungen

$$(17) \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leq \beta \leq b_2(\mu_i, \alpha), \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leq B_2(\mu_i, \alpha) \leq b_2(\mu_i, \alpha)$$

gelten (die Gleichheitszeichen gelten nur für den rechten Randpunkt des Intervalls (13)).

e) *Der Bereich $\Omega_2(\mu_i)$ enthält genau die Punkte $[\alpha, \beta]$, für die*

$$(18) \quad \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)} \leq \alpha \leq [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)/2} \sqrt{(1 - M^2)}$$

gilt, wobei für

$$(19) \quad \alpha \leq [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)/2} \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

die Ungleichungen

$$(20) \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leq \beta \leq b_2(\mu_i, \alpha), \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leq B_1(\mu_i, \alpha) \leq b_2(\mu_i, \alpha)$$

(die Gleichheitszeichen gelten nur für den linken Randpunkt des Intervalls (18) und für

$$(21) \quad \alpha \geq [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)/2} \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

die Ungleichungen

$$(22) \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leq \beta \leq b_1(\mu_i, \alpha), \quad b_3(\mu_i, \alpha) \leq B_1(\mu_i, \alpha) \leq b_1(\mu_i, \alpha)$$

gelten (die Gleichheitszeichen gelten nur für den rechten Randpunkt des Intervalls (18)).

Die Gestalt und Lage der Bereiche $\Omega_1(\mu_i)$ und $\Omega_2(\mu_i)$ ist aus der Abb. 1 ersichtlich.

Beweis. Es sei $\mu_i^2 > 0$. Man untersuche angesichts des Satzes 1 die Wurzeln der Gleichung (11). Die Gleichung (11) schreibt man in der Form

$$(23) \quad \lambda^2 \alpha^2 + \lambda[2(1 - \alpha)\alpha + \mu_i^2 \beta] + (1 - \alpha)^2 - \mu_i^2(1 + \beta) = 0.$$

Angesichts (9) und (10) gilt für die Diskriminante der Gleichung (23) die Beziehung

$$\mu_i^4 \beta^2 + 4\alpha \mu_i^2 \beta + 4\alpha^2 \mu_i^2 = \mu_i^2 (\beta - B_1(\mu_i, \alpha)) (\beta - B_2(\mu_i, \alpha)).$$

Hiervon folgt, dass die Gleichung (23) nur reelle Wurzeln besitzt, wenn die Ungleichungen

$$(24) \quad \beta \geq B_1(\mu_i, \alpha), \quad \beta \geq B_2(\mu_i, \alpha)$$

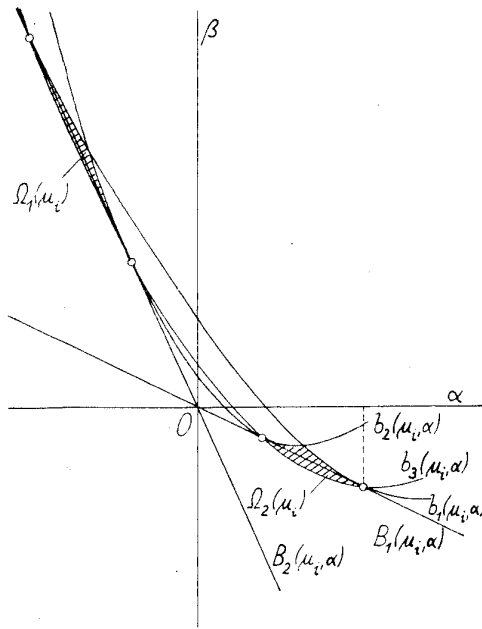


Abb. 1

oder die Ungleichungen

$$(25) \quad \beta \leq B_1(\mu_i, \alpha), \quad \beta \leq B_2(\mu_i, \alpha)$$

gleichzeitig gelten.

Die Graphen der Funktionen B_1, B_2 sind durch den Koordinatenursprung gehende Geraden, deren Anstieg negativ ist. Es gilt dabei, dass für $\alpha < 0$, $B_1(\mu_i, \alpha) < B_2(\mu_i, \alpha)$ und für $\alpha > 0$ $B_2(\mu_i, \alpha) < B_1(\mu_i, \alpha)$ ist. Aus (24) und (25) folgt sofort, dass die Gleichung (23) reelle Wurzeln dann und nur dann besitzt, wenn

$$(26) \quad \alpha < 0 \quad \text{und} \quad \beta \geq B_2(\mu_i, \alpha) \quad \text{oder} \quad \beta \leq B_1(\mu_i, \alpha)$$

gilt und wenn

$$(27) \quad \alpha > 0 \quad \text{und} \quad \beta \leq B_2(\mu_i, \alpha) \quad \text{oder} \quad \beta \geq B_1(\mu_i, \alpha)$$

gilt. In den übrigen Punkten der Ebene $[\alpha, \beta]$ (ausser den Achsen $\alpha = 0, \beta = 0$) hat die Gleichung (11) zwei komplex adjungierte Wurzeln.

Nun werden wir uns mit der Frage befassen, für welche Punkte $[\alpha, \beta]$ aus den Mengen (26) und (27) der Absolutbetrag der reellen Wurzeln der Gleichung (23) kleiner oder gleich der Zahl $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ ist, d. h. wenn gleichzeitig die Ungleichungen

$$(28) \quad [-2(1 - \alpha)\alpha - \mu_i^2\beta \pm \sqrt{(\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_i^2 + 4\alpha^2\mu_i^2)}]/2\alpha^2 \leq \\ \leq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}],$$

$$(29) \quad -[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leq \\ \leq [-2(1 - \alpha)\alpha - \mu_i^2\beta \pm \sqrt{(\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_i^2 + 4\alpha^2\mu_i^2)}]/2\alpha^2$$

gelten. Durch die Umformung der Ungleichung (28) bekommt man die Ungleichung

$$(30) \quad \pm M^2 \sqrt{(\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_i^2 + 4\alpha^2\mu_i^2)} \leq \\ \leq 2\alpha M^2 - 4\alpha^2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)} + \mu_i^2 M^2 \beta.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung nichtnegativ sein muss, folgt aus der Ungleichung

$$2\alpha M^2 - 4\alpha^2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)} + \mu_i^2 M^2 \beta \geq 0$$

die Ungleichung

$$(31) \quad \beta \geq [4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)} - 2\alpha M^2]/\mu_i^2 M^2.$$

Durch Potenzierung der Ungleichung (33) bekommt man nach Umformung angesichts (6) die Gleichung

$$(32) \quad \beta \leq b_i(\mu_i, \alpha).$$

Ähnlicherweise bekommt man aus der Ungleichung (29) die Ungleichung

$$(33) \quad 2\alpha M^2 - 4\alpha^2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] + \mu_i^2 M^2 \beta \leq \\ \leq \pm M^2 \sqrt{(\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_i^2 + 4\alpha^2\mu_i^2)}.$$

Aus der Bedingung

$$2\alpha M^2 - 4\alpha^2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] + \mu_i^2 M^2 \beta \leq 0$$

folgt sofort, dass

$$(34) \quad \beta \leq [4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) - 2\alpha M^2]/\mu_i^2 M^2$$

gilt, und durch Potenzierung der Ungleichung (33) bekommt man nach Umformung angesichts (7) die Ungleichung

$$(35) \quad \beta \leq b_2(\mu_i, \alpha).$$

Es sei nun $\alpha < 0$. Die Gleichung (23) hat nach (26) reelle Wurzeln für $\beta \geq B_2(\mu_i, \alpha)$ und für $\beta \leq B_1(\mu_i, \alpha)$. Man kann leicht feststellen, dass die Gerade $\beta = B_2(\mu_i, \alpha)$ die Tangente der Parabel $\beta = b_1(\mu_i, \alpha)$ mit dem Berührungspunkt

$$\alpha = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)} / \sqrt{(1 - M^2)}$$

(das ist der linke Randpunkt des Intervalls (13)) und die Tangente der Parabel $\beta = b_2(\mu_i, \alpha)$ mit dem Berührungspunkt

$$\alpha = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}$$

darstellt (das ist der rechte Randpunkt des Intervalls (13); es gilt dabei $B_2(\mu_i, \alpha) \leq b_1(\mu_i, \alpha)$ und $B_2(\mu_i, \alpha) \leq b_2(\mu_i, \alpha)$ für alle α . Angesichts (31) und der Ungleichung

$$[4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)} - 2\alpha M^2] / \mu_i^2 M^2 > B_1(\mu_i, \alpha),$$

die für alle $\alpha < 0$ gilt, muss $\beta > B_1(\mu_i, \alpha)$ gelten. Angesichts (26) kommen nur die Werte

$$(36) \quad \beta \geq B_2(\mu_i, \alpha)$$

in Betracht.

Man kann leicht beweisen, dass für $\alpha < -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)} : \sqrt{(1 - M^2)}$ die Ungleichungen

$$[4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)} - 2\alpha M^2] / \mu_i^2 M^2 > B_2(\mu_i, \alpha) > b_1(\mu_i, \alpha)$$

und für $\alpha \geq -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)} / (1 - M^2)$ die Ungleichungen

$$[4\alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)} - 2\alpha M^2] / \mu_i^2 M^2 \leq B_2(\mu_i, \alpha) \leq b_1(\mu_i, \alpha)$$

gelten (die Gleichheit tritt nur im Falle $\alpha = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)} : \sqrt{(1 - M^2)}$ ein).

Die Ungleichungen (31), (32) und (36) gelten also gleichzeitig nur für $\alpha \geq -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)} / \sqrt{(1 - M^2)}$. Für diese Zahlen α ist dann

$$(37) \quad B_2(\mu_i, \alpha) \leq \beta \leq b_1(\mu_i, \alpha).$$

Analogisch kann man beweisen, dass die Ungleichungen (34), (35) und (36) gleichzeitig nur für $\alpha \leq -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}$ gelten. Für diese α ist dann

$$(38) \quad B_2(\mu_i, \alpha) \leq \beta \leq b_2(\mu_i, \alpha).$$

Für die Zahl α gilt also (13).

Dadurch ist bewiesen, dass die Gleichung (23) nun für α aus dem Intervall (13) reelle Wurzeln besitzt, die im Absolutbetrag kleiner oder gleich der Zahl $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ sind, wobei für β gleichzeitig (37) und (38) gilt.

Es ist nun leicht festzustellen, dass sich die Parabeln $b_1(\mu_i, \alpha)$, $b_2(\mu_i, \alpha)$ im Punkte $\alpha = -[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - \mu_i^2)}/2 \sqrt{(1 - M^2)}$, der zu dem Intervall (13) angehört, schneiden (vgl. (14) und (16)), wobei für α aus dem Intervall (14) $b_1(\mu_i, \alpha) \leq b_2(\mu_i, \alpha)$ und für α aus dem Intervall (16) $b_2(\mu_i, \alpha) \leq b_1(\mu_i, \alpha)$ gilt. Es gilt also für α aus dem Intervall (15) die Ungleichung (37) und für α aus dem Intervall (16) die Ungleichung (38).

Man befasse sich ferner mit der Frage, für welche Parameterwerte α , β die Quadrate der Absolutbeträge der komplexen Wurzeln der Gleichung (13) kleiner oder gleich der Zahl $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ sind. Aus (23) folgt also die Bedingung

$$(39) \quad [(1 - \alpha)^2 - \mu_i^2(1 + \beta)]/\alpha^2 \leq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]^2 [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]^2.$$

Aus (39) folgt sofort angesichts (8) die Ungleichung

$$(40) \quad \beta \geq b_3(\mu_i, \alpha).$$

Der Graph der Funktion b_3 ist eine Parabel, die die Gerade $\beta = B_2(\mu_i, \alpha)$ in den Randpunkten des Intervalls (13) schneidet, wobei für alle α aus dem Intervall (13) die Ungleichungen

$$B_1(\mu_i, \alpha) < b_3(\mu_i, \alpha) \leq B_2(\mu_i, \alpha)$$

gelten.

Für $\alpha > 0$ verläuft der Beweis ganz analogisch. Dadurch ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Es sei $\mu_i = 0$. Dann ist $[\alpha, \beta] \in \Omega(\mu_i)$ dann und nur dann, wenn*

$$(41) \quad \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leq \alpha \leq \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] / \sqrt{(1 - M^2)},$$

$\beta \neq 0$ beliebig, gilt.

Beweis. Falls man in der Gleichung (11) $\mu_i = 0$ setzt, bekommt man sofort die Beziehung $(1 - \alpha + \lambda\alpha)^2 = 0$, sodass $\lambda = (\alpha - 1)/\alpha$ die zweifache reelle Wurzel der Gleichung (11) (d. h. (23)) ist. Man kann leicht beweisen, dass die Ungleichung

$$-[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leq \lambda \leq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$$

für (41) erfüllt ist, wodurch der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Satz 3. *Es sei $\mu_i^2 > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und es sei Ω die Menge der Punkte $[\alpha, \beta]$, für die $q(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ gilt. Dann gilt:*

a) $[\alpha, \beta] \in \Omega$ dann und nur dann, wenn die Ungleichungen

$$(42) \quad b_3(m, \alpha) \leq \beta, \quad \beta \leq b_1(M, \alpha), \quad \beta \leq b_2(M, \alpha)$$

gleichzeitig gelten.

b) Die Menge Ω ist die Vereinigung zweier disjunkten Bereiche Ω_1, Ω_2 , wobei für $[\alpha, \beta] \in \Omega_1, \alpha < 0$ und für $[\alpha, \beta] \in \Omega_2, \alpha > 0$ ist.

c) $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) = [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ dann und nur dann, wenn $[\alpha, \beta]$ ein Grenzpunkt der Menge Ω ist.

d) Man bezeichne

$$(43) \quad \alpha_1^{(1)} = \frac{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}{2\sqrt{(1 - M^2)}} \cdot \frac{-(M^2 - m^2) + [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] [m^2 - (1 - \sqrt{(1 - M^2)})]}{m^2 - 2[1 - \sqrt{(1 - M^2)})}$$

$$(44) \quad \alpha_2^{(1)} = \frac{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}{2},$$

$$(45) \quad \alpha_1^{(2)} = \frac{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}{2\{m^2 - 2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)}\}} \cdot \{- (M^2 - m^2) - [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{[(1 - \sqrt{(1 - M^2)})^2 - m^4 + 2m^2 \sqrt{(1 - M^2)}(1 - \sqrt{(1 - M^2))}]}\},$$

$$(46) \quad \alpha_2^{(2)} = \frac{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}{2\{m^2 - 2[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)}\}} \cdot \{- (M^2 - m^2) + [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{[(1 - \sqrt{(1 - M^2)})^2 - m^4 + 2m^2 \sqrt{(1 - M^2)}(1 - \sqrt{(1 - M^2))}]}\}.$$

Die Mengen Ω_1 und Ω_2 sind dann folgenderweise definiert:

I. Es sei $m^2 \leq 1 - \sqrt{(1 - M^2)}$. Dann ist $\Omega_1 = \Phi$ und $\Omega_2 = \{[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})], -1\}$.

II. Es sei $1 - \sqrt{(1 - M^2)} < m^2 < 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}) : [2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}]$. Dann ist $\Omega_1 = \Phi$ und Ω_2 ist die Menge der Punkte $[\alpha, \beta]$, für die

$$(47) \quad \alpha_2^{(2)} \leq \alpha \leq \alpha_2^{(1)}$$

und

$$(48) \quad b_3(m, \alpha) \leq \beta \leq b_1(M, \alpha)$$

gilt.

III. Es sei $m^2 = 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}) / [2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}]$. Dann ist $\Omega_1 = \Phi$ und Ω_2 ist die Menge der Punkte $[\alpha, \beta]$, für die

$$(49) \quad \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)} \leq \alpha \leq \alpha_2^{(1)}$$

und (48) gilt. (Die Zahl $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)}$ gleicht dabei für die betrachtete Zahl m^2 der Zahl $\alpha_2^{(2)}$.)

IV. Es sei

$$\begin{aligned} & \frac{2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})}{2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}} < m^2 < \\ & < \frac{2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})}{2 - \sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}}. \end{aligned}$$

Dann ist $\Omega_1 = \Phi$ und Ω_2 ist durch die Ungleichungen

$$(50) \quad a \leq \alpha \leq \alpha_2^{(1)}$$

definiert, wo a jene von der Zahlen $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}$ ist, die im Intervall $(\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \cdot \sqrt{(1 - M^2)}, \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)})$ liegt, wobei für

$$(51) \quad a \leq \alpha \leq \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

die Ungleichungen

$$(52) \quad b_3(m, \alpha) \leq \beta \leq b_2(M, \alpha)$$

gelten und für

$$(53) \quad \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)} \leq \alpha \leq \alpha_2^{(1)}$$

(48) gilt.

V. Es sei $m^2 = 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})/[2 - \sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}]$. Dann ist $\Omega_1 = \{[-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt[4]{(1 - M^2)}, \frac{1}{2}[\sqrt{(1 - M^2)}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) + 2\sqrt[4]{(1 - M^2)}]/(1 - \sqrt{(1 - M^2)})]\}$ und Ω_2 ist durch die Ungleichungen (50), (51), (52), (53), (48) definiert.

VI. Es sei $2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})/[2 - \sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}] < m^2 < M^2$. Dann ist Ω_1 durch die Ungleichungen

$$(54) \quad \alpha_1^{(1)} \leq \alpha \leq \alpha_1^{(2)}$$

definiert, wobei für

$$(55) \quad \alpha_1^{(1)} \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

(48) gilt und für

$$(56) \quad -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)} \leq \alpha \leq \alpha_1^{(2)}$$

(52) gilt.

Die Menge Ω_2 ist ferner durch die Ungleichungen

$$(57) \quad \alpha_2^{(2)} \leq \alpha \leq \alpha_2^{(1)}$$

definiert, wobei für

$$(58) \quad \alpha_2^{(2)} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

(52) gilt und für

$$(59) \quad \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)} \leq \alpha < \alpha_2^{(1)}$$

(48) gilt.

VII. Es sei $m^2 = M^2$. Dann ist Ω_1 durch die Ungleichungen

$$(60) \quad -\frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leq \alpha < -\frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)}$$

definiert, wobei für

$$(61) \quad -\frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

(48) ist und für

(62)

$$-\frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)} \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)} = \alpha_1^{(2)}$$

(52) ist. (Die Zahl $-\frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$, bzw. $-\frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)}$ gleicht dabei der Zahl $\alpha_1^{(1)}$, bzw. $\alpha_1^{(2)}$ für $m^2 = M^2$.)

Die Menge Ω_2 ist ferner durch die Ungleichungen

$$(63) \quad \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

definiert, wobei für

$$(64) \quad \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leq \alpha \leq \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)}$$

(52) gilt und für

$$(65) \quad \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \leq \alpha \leq \alpha_2^{(1)}$$

(48) gilt. (Die Zahl $\frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)}$ gleicht dabei der Zahl $\alpha_2^{(2)}$ für $m^2 = M^2$.)

Die Gestalt der Menge Ω ist für den fall VI aus der Abb. 2 sichtbar.

Beweis. Aus dem Hilfssatz 1 folgt, dass

$$(66) \quad \Omega = \bigcap_{i=1}^n \Omega(\mu_i) = \bigcap_{i=1}^n [\Omega(\mu_1) \cup \Omega(\mu_2)] = \left[\bigcap_{i=1}^n \Omega_1(\mu_i) \right] \cup \left[\bigcap_{i=1}^n \Omega_2(\mu_i) \right]$$

gilt. Es sei $[\alpha, \beta]$ ein beliebiger Punkt, für den $\alpha > \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ ist. Dann folgt aus (18), dass $[\alpha, \beta] \notin \Omega_2(M)$ und umso mehr $[\alpha, \beta] \notin \Omega_1(M)$ ist. Es ist also nach (66) $[\alpha, \beta] \notin \Omega$ für $\alpha > \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$. Im folgenden wir werden also voraussetzen, dass $\alpha \leq \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ ist.

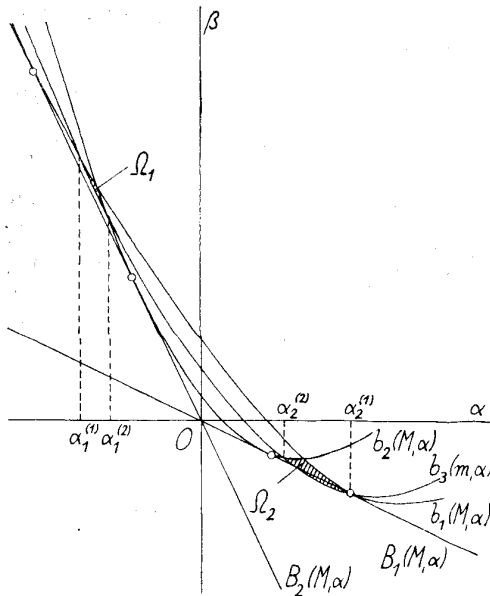


Abb. 2

Für diese Zahlen α kann man leicht beweisen, dass für $\mu_i^2 < \mu_j^2$ die Ungleichungen

$$b_1(\mu_j, \alpha) < b_1(\mu_i, \alpha),$$

$$b_2(\mu_j, \alpha) < b_2(\mu_i, \alpha),$$

$$b_3(\mu_j, \alpha) \leq b_3(\mu_i, \alpha)$$

gelten, wobei die Gleichheit in der letzten Ungleichung nur für $\alpha = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ gilt.

Mit Hinsicht auf die letzten drei Ungleichungen und die Ungleichungen (12) aus dem Hilfssatz 1 folgt sofort, dass die Menge $\Omega = \bigcap_{i=1}^n \Omega(\mu_i)$ genau die Punkte $[\alpha, \beta]$ enthält, für die

$$(67) \quad \beta \leq b_1(M, \alpha), \quad \beta \leq b_2(M, \alpha), \quad \beta \geq b_3(m, \alpha)$$

gilt.

Man untersuche nun den Verlauf der Funktionen $b_1(M, \alpha)$, $b_2(M, \alpha)$. Man weiss aus dem Beweis des Hilfssatzes 1, dass b_1 und b_2 konvexe Parabeln sind. Es sei nun $\alpha < 0$. Die Gerade $\beta = B_2(M, \alpha)$ ist dann die Tangente der Parabel $b_1(M, \alpha)$ im Punkte $\alpha = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ und die Tangente der Parabel $b_2(M, \alpha)$ im Punkte $\alpha = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)}$, wobei für alle $\alpha < 0$ $B_2(M, \alpha) \leq b_1(M, \alpha)$ und $B_2(M, \alpha) \leq b_2(M, \alpha)$ gilt. Die Parabeln $b_1(M, \alpha)$ und $b_2(M, \alpha)$ schneiden sich dabei im Punkte $\alpha = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)}$ und es gelten dabei die Ungleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] &< -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)} < \\ &< -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)}. \end{aligned}$$

Es sei jetzt $\alpha > 0$. Die Gerade $\beta = B_1(M, \alpha)$ ist dann die Tangente der Parabel $b_1(M, \alpha)$ im Punkte $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ und der Parabel $b_2(M, \alpha)$ im Punkte $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)}$, wobei sich beide Parabeln im Punkte $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)}$ schneiden. Es gelten dabei die Ungleichungen $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt{(1 - M^2)} < \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)} < \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ und $b_1(M, \alpha) \geq B_1(M, \alpha)$, $b_2(M, \alpha) \geq B_1(M, \alpha)$.

Man kann nach einfachen Berechnungen feststellen, dass sich die Graphen der Funktionen $b_1(M, \alpha)$ und $b_3(m, \alpha)$ im allgemeinen in Punkten schneiden, die die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} 4x^2 \sqrt{(1 - M^2)} [m^2 - 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})] + 4\alpha(1 + \sqrt{(1 - M^2)})(M^2 - m^2) + \\ + (1 + \sqrt{(1 - M^2)})^2 [m^2 \sqrt{(1 - M^2)} - 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - m^2)] = 0 \end{aligned}$$

darstellen. Das sind aber die durch die Formeln (43) und (44) definierten Zahlen $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$.

Man kann ferner leicht feststellen, dass sich die Graphen der Funktionen $b_2(M, \alpha)$ und $b_3(m, \alpha)$ im allgemeinen in Punkten schneiden, die die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(68) \quad \begin{aligned} 4\alpha^2 [m^2 - 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)}] + 4\alpha(1 + \sqrt{(1 - M^2)})(M^2 - m^2) + \\ + (1 + \sqrt{(1 - M^2)})^2 [m^2(1 - M^2) - 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - m^2)] = 0 \end{aligned}$$

darstellen. Das sind aber die durch die Formeln (45) und (46) definierten Zahlen $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}$.

Wir werden jetzt verschiedene Fälle unterscheiden.

A. Es sei $m^2 \leq 1 - \sqrt{(1 - M^2)}$. Dann ist $\alpha_2^{(1)} = \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] < \alpha_1^{(1)}$ und in Hinsicht auf die Konvexität der Funktionen b_1, b_3 gilt für $\alpha \leq \alpha_2^{(1)}$ die Ungleichung $b_3(m, \alpha) \geq b_1(M, \alpha)$, wobei die Gleichheit nur für $\alpha = \alpha_2^{(1)}$ eintritt. Angesichts (67) gilt dann die Feststellung I des Satzes 3.

B. Es sei $1 - \sqrt{(1 - M^2)} < m^2 \leq 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})$:
 $: [2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}]$. Dann ist $\frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)} \leq \alpha_1^{(1)} < \alpha_2^{(1)}$. Für $\alpha < \alpha_1^{(1)}$ gilt dann in Hinsicht auf die Konvexität der Funktionen b_1, b_3 die Ungleichung $b_3(m, \alpha) > b_1(M, \alpha)$, sodass angesichts (67) $\Omega_1 = \Phi$ ist.

In dem Intervalle $\alpha_1^{(1)} \leq \alpha \leq \alpha_2^{(1)}$, d. h. (47), gilt dann $b_3(m, \alpha) \leq b_1(M, \alpha) \leq b_2(M, \alpha)$ und aus (67) folgt (48), wodurch die Feststellung II des Satzes 3 bewiesen ist. Der Fall III ist ein Spezialfall dieses Falles. Für $m^2 = 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \cdot (1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}) / [2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}]$ ist nämlich $\alpha_1^{(1)} = \frac{1}{2} [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \sqrt[4]{(1 - M^2)}$.

C. Es sei

$$\frac{2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})}{2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}} < m^2 < \frac{2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})}{2 - \sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}}.$$

Aus der Gleichung (68) kann man nach der Einsetzung für α beweisen, dass eine von ihren Wurzeln $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}$ immer im Intervalle $(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)}, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt[4]{(1 - M^2)})$ liegt (wir haben diese Wurzel mit a bezeichnet) und die andere Wurzel (man bezeichne sie b) im Intervalle $(-\infty, -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt[4]{(1 - M^2)})$ oder im Intervalle $(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), \infty)$ liegt. Falls $b \in (\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), \infty)$ ist, gilt dann für alle $\alpha < 0$ die Ungleichung $b_3(m, \alpha) > b_2(M, \alpha)$, sodass nach (67) $\Omega_1 = \Phi$ ist. Falls $b \in (-\infty, -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt[4]{(1 - M^2)})$ ist, dann gilt für $\alpha \in (-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt[4]{(1 - M^2)}, -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)})$ die Ungleichung $b_3(m, \alpha) > b_2(M, \alpha)$ und für $\alpha \in (-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt[4]{(1 - M^2)}, -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt[4]{(1 - M^2)})$ die Ungleichung $b_3(m, \alpha) > b_1(M, \alpha)$, da $\alpha_1^{(1)} > -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt[4]{(1 - M^2)}$ ist. In beiden Fällen gilt nach (67) $\Omega_1 = \Phi$.

Falls ferner $\alpha > 0$ ist, gelten offensichtlich für α aus dem Intervalle (50) die Ungleichungen (51), (52), (53) und (48), wodurch die Feststellung IV des Satzes 3 bewiesen ist.

D. Es sei

$$\frac{2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})}{2 - \sqrt{(1 - M^2)} + \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}} \leq m^2 \leq M^2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(1)} &\in \langle -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})^4/(1 - M^2) \rangle, \\ \alpha_2^{(1)} &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), \\ \alpha_1^{(2)} &\in \langle -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})^4/(1 - M^2), -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)} \rangle, \\ \alpha_2^{(2)} &\in \langle \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)}, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})^4/(1 - M^2) \rangle\end{aligned}$$

und es gelten also die folgenden Ungleichungen:

$$\text{für } \alpha \text{ aus dem Intervall (55) ist } b_3(m, \alpha) \leq b_1(M, \alpha) \leq b_2(M, \alpha),$$

$$\text{für } \alpha \text{ aus dem Intervall (56) ist } b_3(m, \alpha) \leq b_2(M, \alpha) \leq b_1(M, \alpha),$$

$$\text{für } \alpha \text{ aus dem Intervall (58) ist } b_3(m, \alpha) \leq b_2(M, \alpha) \leq b_1(M, \alpha),$$

$$\text{für } \alpha \text{ aus dem Intervall (59) ist } b_3(m, \alpha) \leq b_1(M, \alpha) \leq b_2(M, \alpha).$$

Daraus folgt angesichts (64) die Feststellung VI des Satzes 3. Die Feststellungen V und VII folgen aus dem obigen Beweis als Spezialfälle.

Satz 4. *Es sei \mathbf{B} eine singuläre Matrix. Dann nimmt der Spektralradius $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta))$ seinen Minimalwert, der der Zahl $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + (1 - M^2)]$ gleich ist, für $\alpha = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$, $\beta = -1$.*

Bemerkung 1. In diesem Falle ist in Hinsicht auf den Satz 2 das Oberrelaxations-Verfahren optimal.

Beweis. In Hinsicht auf die Voraussetzung des Satzes hat die Matrix \mathbf{B} mindestens einen Eingewert, der der Zahl 0 gleich ist. Es sei m eine solche positive Zahl, dass $m^2 = \min \mu_i^2$ für alle positive Eigenwerte der Matrix \mathbf{B}^2 ist, und es sei ferner M eine solche positive Zahl, dass $M^2 = \max \mu_i^2$ ist. Die Menge Ω (d. h. die Menge der Punkte $[\alpha, \beta]$, für die die Ungleichung $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] : [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ gilt) ist die Durchschnittsmenge der Mengen $\Omega(\mu_i)$, $i = 1, \dots, n$. Es gilt ferner, dass

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^n \Omega(\mu_i) = \left[\bigcap_{\mu_i \neq 0}^n \Omega(\mu_i) \right] \cap \Omega(0)$$

ist. Die Menge $\bigcap_{\mu_i \neq 0} \Omega(\mu_i)$ ist nun durch den Satz 3 gegeben und die Menge $\Omega(0)$ ist im Hilfssatz 2 definiert. Es ist klar, dass die Durchschnittsmenge dieser Mengen einen einzigen Punkt $\alpha = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$, $\beta = -1$ (von m unabhängig) enthält. Da dieser Punkt gleichzeitig einen Grenzpunkt der Menge Ω darstellt, gilt $\varrho(\mathbf{T}(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), -1)) = [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$, wodurch der Satz 4 bewiesen ist.

Satz 5. Es sei \mathbf{B} eine nichtsinguläre Matrix und $m = M < 1$ (d. h. alle Eigenwerte der Matrix \mathbf{B} liegen auf der Kreislinie mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung). Dann ist $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ für $[\alpha, \beta] \in \Omega = \Omega_1(M) \cup \Omega_2(M)$. (Dabei ist $\Omega_1(M) = \Omega_1$ und $\Omega_2(M) = \Omega_2$, wo die Mengen Ω_1, Ω_2 durch die Ungleichungen (60), (61), (48), (62), (52) aus dem Satze 3 definiert sind.) Man definierte nun die Punkte $[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2]$ folgenderweise:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\sqrt{(1 - M^2)}, & \beta_1 &= 2\sqrt{(1 - M^2)} / [1 - \sqrt{(1 - M^2)}], \\ \alpha_2 &= \sqrt{(1 - M^2)}, & \beta_2 &= -2\sqrt{(1 - M^2)} / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}].\end{aligned}$$

Dann ist $[\alpha_1, \beta_1] \in \Omega_1(M), [\alpha_2, \beta_2] \in \Omega_2(M)$ und

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha_1, \beta_1)) = \varrho(\mathbf{T}(\alpha_2, \beta_2)) = 0.$$

Beweis. Die Bereiche $\Omega_1(M), \Omega_2(M)$ stimmen mit den Bereichen Ω_1, Ω_2 aus dem Satz 3 für $m = M$ (der Fall VII) überein. Wir beweisen, dass der Punkt $[\alpha_1, \beta_1]$ im Bereich Ω_1 liegt. Die Zahl α_1 liegt offensichtlich im Intervall (60) und der Punkt $[\alpha_1, \beta_1]$ liegt auf der Geraden $\beta = B_2(M, \alpha)$. Da nach dem Hilfssatz 1 $B_2(M, \alpha) \leq b_1(M, \alpha), B_2(M, \alpha) \leq b_2(M, \alpha)$ und $b_3(M, \alpha) \leq B_2(M, \alpha)$ im Intervall (60) gilt, ist die Feststellung bewiesen. Ähnlicherweise beweist man, dass der Punkt $[\alpha_2, \beta_2]$ im Bereiche Ω_2 liegt (der Punkt $[\alpha_2, \beta_2]$ liegt nämlich auf der Geraden $B_1(M, \alpha)$).

Wenn man in der Gleichung (11) $\mu_i^2 = M^2, [\alpha, \beta] = [\alpha_1, \beta_1]$ setzt, bekommt man die Gleichung

$$\begin{aligned}& (1 + \sqrt{(1 - M^2)} - \lambda \sqrt{(1 - M^2)})^2 = \\ & = M^2 [1 + 2\sqrt{(1 - M^2)} / (1 - \sqrt{(1 - M^2)}) - 2\lambda \sqrt{(1 - M^2)} / (1 - \sqrt{(1 - M^2)})]\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}& (1 + \sqrt{(1 - M^2)} - \lambda \sqrt{(1 - M^2)})^2 = \\ & = (1 + \sqrt{(1 - M^2)})(1 + \sqrt{(1 - M^2)} - 2\lambda \sqrt{(1 - M^2)}),\end{aligned}$$

die eine zweifache Wurzel $\lambda = 0$ besitzt. Eine ähnliche Situation tritt für $[\alpha, \beta] = [\alpha_2, \beta_2]$ ein. Dadurch ist der Satz 5 bewiesen.

Bemerkung 2. Die Gestalt der Menge Ω aus dem Satz 5 ist aus der Abb. 2 klar (solange allerdings $\mu_i^2 = M^2$ ist).

Die Menge Ω aus dem Satz 3, wo $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ gilt, ist durch verhältnismässig komplizierte Ungleichungen definiert, die von der Zahl m abhängen. Deshalb wird im folgenden Satz eine einfacher definierte Menge gesucht, die die Menge Ω enthält.

Satz 6. Es sei I_1 das zweidimensionale Intervall

$$-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)},$$

$$(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)}/(1 - \sqrt{(1 - M^2)}) \leq \beta \leq (1 + \sqrt{(1 - M^2)}) : \\ : (1 - \sqrt{(1 - M^2)})$$

und I_2 das zweidimensionale Intervall

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\sqrt{(1 - M^2)} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), \\ -1 \leq \beta \leq -\sqrt{(1 - M^2)}.$$

Es sei \mathbf{B} eine nichtsinguläre Matrix und es gelte im Punkte $[\alpha, \beta]$ die Ungleichung $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$. Dann ist $[\alpha, \beta] \in I_1 \cup I_2$.

Der Beweis des Satzes 6 folgt sofort aus dem Satz 3.

Literaturverzeichnis

- [1] Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, INC, 1962.
- [2] Šisler, M.: Über ein zweiparametriges Iterationsverfahren. Aplikace matematiky, 18, 1973, 325–332.
- [3] Šisler, M.: Über die Konvergenz eines zweiparametriges Iterationsverfahrens. Aplikace matematiky, 18, 1973, 452–461.

Souhrn

O OPTIMALISACI JEDNÉ DVOUPARAMETRICKÉ ITERAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

V práci se porovnává rychlost konvergence jisté iterační metody, definované v práci [2] téhož autora, závislé na volitelných reálných parametrech α, β a superrelaxační metody, která je speciálním případem zmíněné dvouparametrické metody. V rovině parametrů $[\alpha, \beta]$ jsou nalezeny oblasti, pro které zkoumaná dvouparametrická metoda konverguje rychleji, než metoda superrelaxační.

Anschrift des Verfassers: Dr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.