Commun. Math. Phys. 91, 279–300 (1983)

Communications in
Mathematical
Physics
© Springer-Verlag 1983

Operateurs conjugués et propriétés de propagation

E. Mourre

Centre de Physique Théorique, C.N.R.S. Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France

Abstract. We use an algebraic criteria (based on local positivity of a commutator) which asserts the existence of a direction of propagation for the flow e^{-iHt} associated to a self-adjoint operator H.

This criteria is applied to the Hamiltonian of three body quantum systems interacting through long range two body potentials. We found the singular spectral support of the Green functions or equivalently the phase space support of the propagation in the one channel or the coulomb interaction cases. Elementary applications to asymptotic completeness of general three body systems is given in [11b].

Introduction

Etant donné un opérateur auto-adjoint H, nous poursuivons selon la méthode ennoncée dans [10] l'étude des propriétés de propagation du flot e^{-iHt} associé, au moyen de la notion d'opérateurs conjugués et des techniques exposées dans [8, 9].

H étant un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, un opérateur A est dit conjugué de H au voisinage du point E (voir [8]) si en particulier il existe $\alpha>0$, $\delta>0$ telles que

$$P_H(E,\delta)\, i[H,A]\, P_H(E,\delta) \geqq \alpha P_H(E,\delta)$$

où $P_H(E,\delta)$ désigne le projecteur spectral de H sur $(E-\delta, E+\delta)$ et $[H,A]$ la forme commutateur de H et $A: HA-AH$. A cette inégalité, les techniques développées dans [8] et [9] permettent d'associer trois types d'estimations a priori: quels que soient $[a,b]\subset(E-\delta,\ E+\delta)$ et $v>\frac{1}{2}$ il existe des constantes finies c_0, c_1, c_2 telles que:

$$\text{I)}\quad \sup_{\substack{\mathrm{Reel}\,Z\in[a,b]\\ \mathrm{Im}\,Z\neq 0}} \left\| |A+i|^{-v}(H-z)^{-1}|A+i|^{-v}\right\| \leqq c_0,$$

$$\text{II)}\quad \sup_{\substack{\mathrm{Reel}\,Z\in(a,b]\\ \pm\mathrm{Im}\,Z>0}} \left\| P_A^{\mp}(H-z)^{-1}|A+i|^{-2v}\right\| \leqq c_1,$$

$$\text{III)}\quad \sup_{\substack{\mathrm{Reel}\,Z\in[a,b]\\ \pm\mathrm{Im}\,Z>0}} \left\| P_A^{\mp}(H-z)^{-1}P_A^{\pm}\right\| \leqq c_2.$$

$P_A^{\pm}$ désignant respectivement les projecteurs spectraux de A sur les intervalles $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$.

Le premier type d'estimation a priori permet de conclure à l'absolue continuité du spectre de H dans $(E-\delta,\ E+\delta)$; c'est une version des estimations a priori démontrées par Lavine [7] et Agmon [1] dans le cas des opérateurs de Schrödinger des systèmes à deux corps. Les deux autres types d'estimations a priori, qui se démontrent exactement de la même façon, sont cependant physiquement plus intéressants puisqu'ils suggèrent et prouvent partiellement l'existence d'une direction de propagation pour l'évolution e^{-iHt} agissant sur les vecteurs $P_H(E,\delta)\Psi$ lorsqu'ils sont décrits dans la représentation $L^2(R; P_A(dx))$.

L'intérêt de la notion de direction de propagation en mécanique quantique a été mis en évidence en 1978 par Enss [2] qui démontra par des méthodes de phase stationnaire des estimations sur l'évolution libre e^{-iH_0t} légèrement plus fines que celles que l'on pourrait déduire ici; $H_0 = -\Delta$ sur $L^2(R^n; d^n x)$. Remarquons que la notion de direction de propagation associée à un opérateur conjugué A unique n'apporte que peu d'informations puisqu'elle distingue simplement deux sous-espaces orthogonaux de $\mathscr{H}$: $P_A^- \mathscr{H}$ et $P_A^+ \mathscr{H}$. Mais en général, pour un opérateur auto-adjoint H, il peut exister une classe $\mathscr{A}_E$ d'opérateurs conjugués au voisinage d'une énergie $E \in \sigma_c(H)$; chacun de ces opérateurs apportant alors sa propre information sur la dynamique des états $e^{-iHt} P_H(E,\delta)\Psi$ lorsque t tend vers plus ou moins l'infini.

Dans le cas des opérateurs de Schrödinger des systèmes à plusieurs corps auxquels on s'intéresse ici (mais aussi dans celui des perturbations compactes d'opérateurs pseudo différentiels généraux, ou encore dans le cas des perturbations de type «problème à N corps» d'opérateurs pseudo différentiels à surface d'énergie convexe), l'intérêt de la méthode provient de la mise en évidence d'une classe suffisemment grande d'opérateurs conjugués explicites.

De plus, grâce à l'existence d'une connection naturelle entre la localisation dans l'espace des phases et la localisation dans les parties positives ou négatives du spectre de chaque opérateurs conjugué, on pourra préciser les propriétés géométriques de l'évolution e^{-iHt} dans l'espace des phases.

Le plan suivi est le suivant:

1) opérateurs conjugués et estimations a priori;

2) classes d'opérateurs conjugués au voisinage des énergies positives pour les systèmes à N corps;

3) connection entre la localisation dans l'espace des phases et la localisation dans les parties positives ou négatives du spectre de chaque opérateur conjugué;

4) support spectral singulier des fonctions de Green et support de propagation – cas des systèmes à trois corps en interactions coulombiennes et cas des systèmes à une seule voie.

La méthode suivie pour étudier les valeurs aux bords de la résolvante des systèmes à plusieurs corps est nettement différente des approches usuellement suivies dans de nombreux et très intéressants travaux [3–6, 14, 15], approches qui consistent à utiliser des équations de type Faddeev pour étudier la résolvante des systèmes à plusieurs corps.

En particulier les types d'estimations que nous obtenons sont valables pour des systèmes à trois corps pouvant présenter des résonnances. De plus les estimations distinguent essentiellement les valeurs aux bords obtenues avec une partie imaginaire positive de celles obtenues avec une partie imaginaire négative.

Ceci suggérant que dans l'approche traditionnelle il semble intéressant d'obtenir des équations agissant dans des espaces différents selon le type de valeurs aux bords que l'on considère.

I. Opérateurs conjugués et estimations a priori

Notations

Soit H un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. On notera par $\mathscr{H}_n$ l'espace de Hilbert construit à partir de la représentation spectrale de H avec le produit scalaire:

$$(\Phi|\Psi)_n = \int_R (|\lambda|+1)^n (\Phi|P_H(d\lambda)\Psi).$$

Pour toute fonction $P \in L^\infty(R)$ on notera par P_H l'opérateur associé par le calcul fonctionnel.

Les symboles $P_X(E,\delta)$, P_X^-, P_X^+ représenteront les projecteurs spectraux associés à un opérateur auto-adjoint X respectivement sur les intervalles $(E-\delta, E+\delta)$, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

Opérateurs Conjugués

Définition. Soit H un opérateur auto-adjoint. On dira que A est un opérateur conjugué de H au voisinage d'un point $E \in R$, si A est un opérateur auto-adjoint qui vérifie les conditions suivantes:

a) $D(A) \cap D(H)$ est un coeur pour H.

b) Le groupe $e^{+iA\alpha}$ laisse $D(H)$ invariant et

$$\forall \Psi \in D(H) \sup_{|\alpha|<\alpha_0} \|He^{+iA\alpha}\Psi\| < \infty\,; \qquad (\alpha_0 > 0).$$

c) La forme commutateur $i[H,A]$ définie sur $D(A) \cap D(H)$ est inférieurement bornée et fermable; de plus l'opérateur auto-adjoint associé $i[H,A]^0$ a un domaine contenant $D(H)$.

d) La forme définie sur $D(A) \cap D(H)$ par $[A,[A,H]^0]$ est bornée comme opérateur de $\mathscr{H}_{+2}$ dans $\mathscr{H}_{-2}$.

e) Il existe des nombres strictement positifs α et δ et un opérateur compact K sur $\mathscr{H}$ tel que

$$P_H(E,\delta)\, i[H,A]^0\, P_H(E,\delta) \geqq \alpha P_H(E,\delta) + P_H(E,\delta)\, K P_H(E,\delta).$$

La définition donnée pour que A soit conjugué de H au voisinage d'un point E, n'est pas la plus générale qui puisse entraîner des propriétés de propagation. En particulier, on peut affaiblir la condition c); voir [12].

«Estimations a priori»

Théorème I.1 [8]. *Si H admet un opérateur A satisfaisant les relations a, b, c et e, alors le spectre ponctuel de H est discret au voisinage de l'énergie E.*

Théorème I.2 (Estimations a priori). *Supposons qu'un opérateur auto-adjoint H admette un opérateur conjugué dans l'intervalle $(E-\delta,\ E+\delta)$, alors pour tout intervalle fermé $[a,b]\subset(E-\delta,\ E+\delta)/\sigma_P(H)$ il existe des constantes finies c_1, c_2, c_3 telles que:*

$$\text{I)}\quad \sup_{\substack{\operatorname{Reel} Z\in[a,b]\\ \operatorname{Im} Z\neq 0}} \left\| |A+i|^{-\nu}(H-Z)^{-1}|A+i|^{-\nu}\right\| \leqq c_1, \qquad \nu>\nu_0>\tfrac{1}{2},$$

$$\text{II)}\quad \sup_{\substack{\operatorname{Reel} Z\in[a,b]\\ \pm\operatorname{Im} Z> 0}} \left\| P_A^{\mp}(H-Z)^{-1}|A+i|^{-2\nu}\right\| \leqq c_2, \qquad \nu>\nu_0>\tfrac{1}{2},$$

$$\text{III)}\quad \sup_{\substack{\operatorname{Reel} Z\in[a,b]\\ \operatorname{Im} Z\neq 0}} \| f_1(A)(H-Z)^{-1} f_2(A)\| \leqq c_3 \|f_1\|_{2,2}\cdot\|f_2\|_{2,2}\,.$$

Pour toutes fonctions f_1, $f_2: R\to\mathbb{C}\in L^{2,2}(R)$ où

$$\|f\|_{2,2}^2=\int_R ds|f(s)|^2+\int_R ds\left|\frac{d}{ds}f(s)\right|^2.$$

La troisième estimation a priori est une généralisation de la première, principalement dans la mesure où les fonctions f_1 et f_2 peuvent admettre des supports arbitrairement éloignés; ce type d'estimations, important dans les premières approches du Problème à trois corps, nécessite l'introduction des projecteurs $P_A^{\mp}$ associés à certains opérateurs vérifiant $i[H,A]>0$.

Corollaire I.3 (Propriétés de propagations). *Si A est un opérateur conjugué de H sur $[E-\delta,\ E+\delta]$ alors pour toute fonction $\tilde{P}(a,b)$ suffisemment régulière de support $[a,b]$ inclu dans $(E-\delta,\ E+\delta)/\sigma_P(H)$, il existe des constantes finies c_1 et c_2 telles que:*

$$\text{I)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| |A+i|^{-\nu} e^{-iHt}\tilde{P}_H(a,b)\Psi\right\|^2 dt\leqq c_1\left\| |A|^{\nu}\Psi\right\|^2;\ \nu>\nu_0>\tfrac{1}{2},$$

$$\text{II)}\quad \pm\int_{0}^{\pm\infty} \| P_A^{\mp} e^{-iHt}\tilde{P}_H(a,b)\Psi\|^2 dt\leqq c_2\left\| |A|^{2\nu}\Psi\right\|^2;\ \nu>\nu_0>\tfrac{1}{2}.$$

Théorème I.4. *Si A est un opérateur conjugué de H sur $(E-\delta, E+\delta)$, et si en outre la forme $[A,[A,H]^0]$ est associée à un opérateur $D_A^{(2)}(H)$, H borné qui est tel que la forme $[A,D_A^{(2)}(H)]$ définie sur $D(A)\cap D(H)$ soit bornée de $\mathscr{H}_{+2}$ dans $\mathscr{H}_{-2}$, alors quel que soit $[a,b]\subset(E-\delta,\ E+\delta)/\sigma_P(H)$, il existe c_4 tel que:*

$$\sup_{\substack{\operatorname{Reel} Z\in[a,b]\\ \pm\operatorname{Im} Z> 0}} \|P_A^{\mp}(H-Z)^{-1}P_A^{\pm}\|\leqq c_4\,.$$

Nous donnons cette dernière estimation a priori parce qu'elle précise bien la notion de direction de propagation associé à l'opérateur conjugué A, bien qu'elle soit inutile pour démontrer la simple complétude asymptotique dans le Problème à trois corps; elle est utilisable pour démontrer d'autres familles d'estimations sur les fonctions de Green (voir [11a, chapitre 6]).

Démonstration du Théorème I.2. La première relation est démontrée dans [8] pour le cas $\nu \geqq 1$ et dans [12] pour le cas $\nu > \frac{1}{2}$.

Nous allons démontrer la relation II).

Par compacité de l'intervalle $[a,b] \subset (E-\delta, E+\delta)/\sigma_p(H)$, il suffit de démontrer que $\forall E' \in [a,b]$ il existe un voisinage $(E'-\delta', E'+\delta')$ sur lequel les estimations a priori sont valables. Tout d'abord, il est clair qu'il existe un voisinage Δ de E' et une fonction régulière $P(\Delta)(\lambda)$ valant 1 sur ce voisinage tel que:

$$B^*B = P_H(\Delta)\, i[H,A]^0\, P_H(\Delta) \geqq \frac{\alpha}{2} P_H^2(\Delta). \tag{I.1}$$

Proposition I.1. *L'opérateur fermé* $H - Z - i\varepsilon B^*B$ *admet un inverse* $G_Z(\varepsilon)$ *borné sur* $\mathscr{H}$ *si* $\operatorname{Im} Z$ *et* ε *sont de même signe*, $\operatorname{Im} Z \neq 0$, *vérifiant*

$$\|G_Z(\varepsilon)\| \leqq \frac{c}{\varepsilon} \quad \forall \operatorname{Im} Z \text{ et } \varepsilon \text{ de même signe, et } \operatorname{Reel} Z \in [E'-\delta', E'+\delta'] \subsetneqq \Delta\,.$$

(Voir [8, proposition II.5].)

Définition. Soit $F_Z(\varepsilon)$ la fonction de ε à valeur opératorielle, suivante:

$$F_Z(\varepsilon) = P_A^- e^{A\varepsilon} G_Z(\varepsilon)\, |A+i|^{-\nu}\,; \qquad \nu > \nu_0 > 1\,,$$

$F_Z(\varepsilon)$ est bien défini pour $\operatorname{Im} Z$ et $\varepsilon > 0$ et $\operatorname{Reel} Z \in (E'-\delta', E'+\delta')$ et vérifie $\|F_Z(\varepsilon)\| \leqq \frac{c}{\varepsilon}$.

De plus $F_Z(\varepsilon)$ est bien différentiable en ε;

$$\frac{d}{d\varepsilon} F_Z(\varepsilon) = P_A^- e^{A\varepsilon} \left\{ A G_Z(\varepsilon) + \frac{d}{d\varepsilon} G_Z(\varepsilon) \right\} |A+i|^{-\nu}\,. \tag{I.2}$$

Par construction, nous avons:

$$\frac{d}{d\varepsilon} G_Z(\varepsilon) = -\, G_Z(\varepsilon)\, P_H(\Delta)\, [H,A]^0\, P_H(\Delta)\, G_Z(\varepsilon)\,. \tag{I.3}$$

Dans la relation (I.2), la dérivée de $G_Z(\varepsilon)$ est évaluée au sens des valeurs moyennes sur le domaine de A; dans [8, Appendice II], nous avons vu que $G_Z(\varepsilon)$ envoie $D(A)$ dans $D(A) \cap D(H)$ et donc $P_H[H,A]^0 P_H$ peut être évalué au sens des formes sur $D(A) \cap D(H)$ sans dommage

$$-P_H[H,A]^0 P_H = -[H,A]^0 + P'_H[H,A]^0 P_H + P_H[H,A]^0 P'_H + P'_H[H,A]^0 P'_H \tag{I.4}$$

donc, au sens des valeurs moyennes sur $D(A) \times D(A)$, nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} G_Z(\varepsilon) = {} & -[A, G_Z(\varepsilon)] - G_Z(\varepsilon)\, i\varepsilon [B^*B, A]\, G_Z(\varepsilon) \\ & + G_Z(\varepsilon) \{ P'_H[H,A]^0 + P_H[H,A]^0 P'_H \}\, G_Z(\varepsilon)\,. \end{aligned} \tag{I.5}$$

Cette dernière formule exprime clairement que la partie la plus singulière de $\frac{d}{d\varepsilon} G_Z(\varepsilon)$ est contenue dans $-[A, G_Z(\varepsilon)]$, ce qui impliquera que le contrôle des valeurs aux bords de $G_Z(\varepsilon)$ va pouvoir être obtenu en contrôlant l'opérateur (non borné) A. [Intuitivement, la famille d'automorphisme $e^{+iA\alpha}(\cdot)e^{-iA\alpha}$ joue un rôle similaire à celui d'une translation dans le spectre de H, au voisinage de l'énergie $E\in\sigma_c(H)$.]

En utilisant les equations (I.2) et (I.5), nous obtenons:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}F_Z(\varepsilon) &= P_A^- e^{A\alpha}G_Z(\varepsilon)A|i+A|^{-\nu}\\ &\quad + P_A^- e^{A\alpha}G_Z(\varepsilon)\{P'_H[H,A]^0 + P_H[H,A]^0P'_H\}\,G_Z(\varepsilon)\,|i+A|^{-\nu}\\ &\quad + P_A^- e^{A\alpha}G_Z(\varepsilon)(-i\varepsilon)[B^*B,A]\,G_Z(\varepsilon)\,|i+A|^{-\nu}.\end{aligned} \tag{I.6}$$

En remarquant que $G_Z(\varepsilon)P'_H(\Delta)$, $(P'_H(\Delta)=1-P_H(\Delta))$ est un opérateur borné et que pour tout $\delta_0>0$, $\exists c(\delta_0)$, $\delta'_0>0$ tels que

$$\|G_Z(\varepsilon)\,|i+A|^{-\delta_0}\| \leqq c(\delta_0)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\delta'_0}, \tag{I.7}$$

il est clair que tous les termes intervenant dans (I.6) sont trivialement intégrables, à l'exception du terme qu'il nous reste à étudier:

$$P_A^- e^{A\alpha}G_Z(\varepsilon)\,P_H[H,A]^0\,P'_H G_Z(\varepsilon)\,|i+A|^{-\nu}. \tag{I.8}$$

Pour cela, il suffit de montrer que l'opérateur $P_H[H,A]^0\,P'_H G_Z(\varepsilon)\,|i+A|^{-\nu}$ est non seulement un opérateur borné de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$ mais aussi de $\mathscr{H}$ dans $D(|A|^{\delta_0})$ pour une certaine valeur $\delta_0>0$. En effet

$$\begin{aligned}P'_H G_Z(\varepsilon)\,|i+A|^{-\nu} &= P'_H G_Z(0)\,[1+i\varepsilon B^*BG_Z(\varepsilon)]\,|i+A|^{-\nu}\\ &= P'_H G_Z(0)\,|i+A|^{-\nu} + o(\varepsilon^{1/2}),\end{aligned}$$

si nous utilisons le fait (voir [8]) que $\|G_Z(\varepsilon)\,|i+A|^{-\nu}\| \leqq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ valable pour une valeur $\nu>\frac{1}{2}$.

L'intégralité de (I.8) se réduit à montrer qu'il existe $\delta_0>0$ tel que

$$|A|^{\delta_0}\,P_H[H,A]^0\,P'_H G_Z(0)\,|i+A|^{-\nu}\in B(\mathscr{H}). \tag{I.9}$$

Pour cela, nous pourrons utiliser la première partie de la proposition suivante (que l'on peut vérifier facilement).

Proposition I.2. *Soit A un opérateur auto-adjoint et C un opérateur borné. Si la forme $[C,A]$ définie sur $D(A)$ s'étend en un opérateur borné de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$, alors pour tout $0\leqq\delta<1$:*

$$|A|^{\delta}\,C|i+A|^{-1}\in B(\mathscr{H}),$$

$$|A|^{\delta}P_A^- CP_A^+\in B(\mathscr{H}).$$

Vérifions que le commutateur

$$[P_H[H,A]^0\,P'_H(H-Z)^{-1},A]$$

évalué au sens des formes sur $D(A)$ définit un opérateur borné sur $\mathscr{H}$. D'après les formules de dérivation d'un produit et l'hypothèse d) faite sur $[A,[H,A]^0]$, il suffit de vérifier que les commutateurs de A avec $P_H(\Delta)$ et $P'_H(\Delta)(H-Z)^{-1}$ définissent des opérateurs bornés: Dans [8, relation (II.9)] nous avons montré la relation

$$\|[A,g(H)]\Psi\| \leqq C\|(H+i)\Psi\| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |t\hat{g}(t)|\,dt \quad \forall \Psi \in D(H),$$

où $\hat{g}(t)$ désigne la transformée de Fourier de g; puisque nous pouvons écrire: $[P_H, A] = \left[g^1(H)\dfrac{1}{H+i}, A\right]$, où g^1 est une fonction dont la transformée de Fourier décroît rapidement, $[P_H, A]$ définit bien un opérateur borné. De même nous avons:

$$P'_H \frac{1}{H-Z} = P'_H\left(\frac{1}{H+i} + \frac{i+Z}{(H+i)^2} + \ldots + \frac{(i+Z)^{N_0}}{(H+i)^{N_0+1}}\right) + g^{N_0}(H)\frac{1}{H+i},$$

où g^{N_0} a une transformée de Fourier suffisemment décroissante; ainsi $\left[P'_H \dfrac{1}{H-Z}, A\right]$ définit bien un opérateur borné si

$$\operatorname{Reel} Z \in [E'-\delta', E'+\delta'] \subsetneqq \Delta \quad P'_H = 1 - P_H(\Delta).$$

Puisque par exemple

$$\left[P'_H \frac{1}{H+i}, A\right] = -\left[P_H \frac{1}{H+i}, A\right] + \left[\frac{1}{H+i}, A\right].$$

Ceci finit de démontrer la deuxième estimation a priori du théorème I.2. Soit f_i ($i=1$ ou 2), deux fonctions dans l'espace de Sobolev $L^2_2(R)$

$$\|f_i\|_{2,2} = \left\{\int_R |f_i(s)|^2\,ds + \int_R \left|\frac{d}{ds} f_i(s)\right|^2 ds\right\}^{1/2}.$$

Alours pour tout intervalle de longueur 1 $[n, n+1)$, nous avons si f_n^+ et f_n^- désignent le sup et l'inf de $|f|$ sur $[n, n+1)$

$$f_n^+ - f_n^- \leqq \int_n^{n+1} \left|\frac{df}{ds}(s)\right| ds \leqq \left\{\int_n^{n+1} \left|\frac{d}{ds} f(s)\right|^2 ds\right\}^{1/2},$$

$$f_n^- \leqq \left\{\int_n^{n+1} f^2(s)\,ds\right\}^{1/2},$$

$$f_n^+ \leqq \left\{\int_n^{n+1} f^2(s)\,ds\right\}^{1/2} + \left\{\int_n^{n+1} \left|\frac{d}{ds} f(s)\right|^2 ds\right\}^{1/2},$$

$$\|f_1(A)(H-Z)^{-1} f_2(A)\| \leqq \sup_{\substack{\|\Phi\|=1 \\ \|\Psi\|=1}} \left\{\sum_{n,m} \|X_A(n,n+1)\Phi\|\, f_{1,n}^+ \cdot f_{2,m}^+ \|X_A(m,m+1)\Psi\| \right.$$

$$\left. \cdot \|X_A(n,n+1)(H-Z)^{-1} X_A(m,m+1)\|\right\},$$

et donc

$$\|f_1(A)(H-Z)^{-1} f_2(A)\| \leqq 4 \sup_{n,m} \|X_A(n,n+1)(H-Z)^{-1} X_A(m,m+1)\| \cdot \|f_1\|_{2,2} \cdot \|f_2\|_{2,2}.$$

Pour démontrer la troisième estimation a priori, il suffit donc de vérifier qu'il existe c_3 telle que:

$$\sup_{\substack{\mathrm{Reel}\, Z \in [a,b] \\ \mathrm{Im}\, Z \neq 0}} \|X_A(n,n+1)(H-Z)^{-1} X_A(m,m+1)\| \leqq c_3 \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

d'après les estimations a priori I nous avons

$$\|X_A(n,n+1)(H-Z)^{-1} X_A(n,n+1)\| \leqq c \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Reel}\, Z \in [a,b]\ \mathrm{Im}\, Z \neq 0.$$

On prend, pour chaque valeur n, pour opérateur conjugué $A-n$; c étant indépendant de n.

De plus, si $\mathrm{Im}\, Z$ est par exemple positif:

$$\begin{aligned} X_A(n,n+1)(H-Z)^{-1} X_A(m,m+1) = {} & X_A(n,n+1) P^+_{A-m}(H-Z^*)^{-1} X_A(m,m+1) \\ & + X_A(n,n+1) P^-_{A-m}(H-Z)^{-1} X_A(m,m+1) \\ & + X_A(n,n+1) P^+_{A-m}(H-Z^*)^{-1}(Z-Z^*) \\ & \cdot (H-Z)^{-1} X_A(m,m+1). \end{aligned} \tag{I.10}$$

Les deux premièrs opérateurs sont bornés par c_2 d'après la deuxième estimation a priori du théorème I.2 appliquée avec pour opérateur conjugué $A-m$. Le troisième opérateur a une norme majorée par

$$\|X_A(n,n+1)\{(H-Z)^{-1} - (H-Z^*)^{-1}\} X_A(n,n+1)\|^{1/2} \cdot \|X_A(m,m+1)\{(H-Z)^{-1} - (H-Z^*)^{-1}\} X_A(m,m+1)\|^{1/2},$$

ce qui est majoré uniformément en n, m et $\mathrm{Reel}\, Z \in [a,b]$.

Démontrons maintenant le théorème I.4: Soit

$$F_Z(\varepsilon) = P^-_A e^{A\varepsilon} G_Z(\varepsilon) e^{-A\varepsilon} P^+_A. \tag{I.11}$$

D'après la relation (I.5), nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} F_Z(\varepsilon) = {} & P^-_A e^{A\varepsilon} G_Z(\varepsilon)(-i\varepsilon)[B^*B, A]\, G_Z(\varepsilon) e^{-A\varepsilon} P^+_A \\ & + P^-_A e^{A\varepsilon} G_Z(\varepsilon)\{P'_H [H,A]^0 + P_H [H,A]^0 P'_H\}\, G_Z(\varepsilon) e^{-A\varepsilon} P^+_A \end{aligned} \tag{I.12}$$

Puisque $\|G_Z(\varepsilon)\| < \frac{c}{\varepsilon}$, $\|HP'_H G_Z(\varepsilon)\| \leqq c$ quel que soit $\mathrm{Im}\, Z$ et ε de même signe et $\mathrm{Reel}\, Z \in [E'-\delta', E'+\delta'] \subsetneqq \Delta$, nous avons tout d'abord:

$$\left\| \frac{d}{d\varepsilon} F_Z(\varepsilon) \right\| \leqq \frac{c}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0,1].$$

Si, au lieu de considérer $F_Z(\varepsilon)$ sur $]0,1]$, on avait considéré

$$\tilde{F}_Z(\varepsilon')=e^{-A\varepsilon}F_Z(\varepsilon')e^{A\varepsilon} \quad \text{sur} \quad \varepsilon'\in[\varepsilon,1],$$

la dérivée par rapport à ε' aurait aussi été bornée par $\frac{c}{\varepsilon'}$. De sorte que:

$$\|P_A^- G_Z(\varepsilon)P_A^+\| = \|\tilde{F}_Z(\varepsilon)\| \leqq c\{|\log\varepsilon|+1\}. \tag{I.13}$$

Ainsi l'intégrabilité du premier terme intervenant dans (I.12) est assurée si l'on vérifie l'intégrabilité sur $[0,1]$ de:

$$P_A^- e^{A\varepsilon}G_Z(\varepsilon)P_A^-\varepsilon[B^*B,A]P_A^+G_Z(\varepsilon)e^{-A\varepsilon}P_A^+. \tag{I.14}$$

La forme $[B^*B,A]$ est bien associée à un opérateur borné; il est facile de vérifier de plus que $[A,[B^*B,A]]$ définit un opérateur borné grâce à l'hypothèse du théorème I.4 faite sur $[A,D_A^{(2)}(H)]$.

D'après la proposition I.2 $|A|^\mu P_A^-[B^*B,A]P_A^+$ est un opérateur borné sur $\mathscr{H}$, ce qui implique l'intégrabilité de (I.14).

Il nous reste donc à vérifier de la même manière l'intégrabilité de:

$$P_A^- G_Z(\varepsilon)P_H[H,A]^0 P'_H G_z(\varepsilon)P_A^+.$$

Le fait que nous devons utiliser est que $P_H[H,A]^0 P'_H G_Z(\varepsilon)P_A^+$ est non seulement borné mais de la forme:

$$P_A^+B_1(\varepsilon)+|i+A|^{-\mu}B_2(\varepsilon)+O(\varepsilon\log\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \mu>0,$$

$B_1(\varepsilon)$ et $B_2(\varepsilon)$ uniformément bornés en $\varepsilon\in[0,1]$; en effet

$$\begin{aligned}P_H[H,A]^0 P'_H G_Z(\varepsilon)P_A^+ = P_H[H,A]^0 P'_H G_Z(0)\,[1+\varepsilon B^*BP_A^+G_Z(\varepsilon)\\ +\varepsilon B^*BP_A^-G_Z(\varepsilon)]\,P_A^+,\end{aligned}$$

le terme en $P_A^-G_Z(\varepsilon)P_A^+$ donne la contribution en $\varepsilon\log\varepsilon$; il suffit donc de vérifier que

$$P_A^-P_H[H,A]^0 P'_H G_Z(0)P_A^+ = |i+A|^{-\mu}B_1,$$

$$P_A^-P_H[H,A]^0 P'_H G_Z(0)B^*BP_A^+ = |i+A|^{-\mu}B_2,$$

ce qui est vrai d'après la proposition I.2, et le contrôle des commutateurs que nous avons déjà rencontrés.

II. Opérateurs conjugués dans le cas des opérateurs de Schrödinger des systèmes à N corps

Soit un système de N particules quantiques discernables. Après réduction du centre de masse du système, l'espace de Hilbert admet une représentation du type (voir [13]):

$$\mathscr{H}=L^2(R^{n(N-1)};d^{n(N-1)}u).$$

Les variables $x_i - x_j$ représentant la différence des coordonnées initiales des particules i et j s'expriment comme combinaisons linéaires des u_i; $i \in \{1, \ldots, n(N-1)\}$, et l'Hamiltonien H du système a la forme suivante:

$$H = H_0 + \sum_{i<j} v_{ij},$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^{n(N-1)} k_i^2 \beta_i \text{ avec } \beta_i > 0 \text{ quel que soit } i, \tag{II.1}$$

$$k_i = -i \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Chaque potentiel $v_{ij}(x_i - x_j)$ est défini par une fonction $v_{ij}: R^n \to R$; soit $\frac{1}{4}(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x)$ le générateur des dilatations sur $L^2(R^n; d^n x)$; nous supposerons que chaque fonction $v_{ij}(x)$ vérifie les conditions suivantes:

i) $v_{ij}(x)$ définit un opérateur $-\Delta$ compact sur $L^2(R^n)$,

ii) la forme $[x \cdot \nabla + \nabla \cdot x,\ v_{ij}] = 2x \cdot \nabla v_{ij}(x)$ est associée à un opérateur $-\Delta$ compact sur $L^2(R^n)$,

iii) la forme $[x \cdot \nabla + \nabla \cdot x,\ 2x \cdot \nabla v_{ij}(x)]$ est bornée de $D(-\Delta)$ dans $D^*(-\Delta)$.

Proposition II.1. *Soit $a \in R^{n(N-1)}$; les opérateurs suivants*

$$A_a = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^{n(N-1)} u_i(k_i + a_i) + (k_i + a_i) u_i \right\}$$

satisfont les conditions a)–d) *de la définition des opérateurs conjugués de H.*

En effet, chaque opérateur A_a est essentiellement auto-adjoint sur $\mathscr{S}$, l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide qui est aussi un coeur pour $H = H_0 + \sum_{i<j} v_{ij}$ puisque $V = \sum_{i<j} v_{ij}$ est un opérateur petit par rapport à H_0.

Le groupe $e^{+iA_a\theta}$, dont l'action sur H_0 est explicite $e^{+iA_a\theta} H_0 = H_0(\theta) e^{+iA_a\theta}$ laisse le domaine de H_0 invariant et donc celui de H. De plus, $\mathscr{S}$ est invariant par le groupe $e^{+iA_a\theta}$ et d'après la proposition II.1 de [8] pour évaluer la forme $i[H, A_a]$ sur $D(H) \cap D(A)$ il suffit de l'évaluer sur $\mathscr{S}$. En particulier:

$$i[H_0 + V, A_a] = \sum_i \beta_i k_i (k_i + a_i) + i[V, A_0]. \tag{II.2}$$

Puisque

$$A_a = A_0 + \frac{1}{2} a \cdot u,$$

$$A_0 = \frac{1}{4} \left\{ \sum_i u_i k_i + k_i u_i \right\}.$$

A_0 est le générateur des dilatations sur $L^2(R^{n(N-1)})$; par conséquent

$$i[V, A_a] = i \sum_{i<j} [v_{ij}, A_0]$$

est un opérateur H_0 petit et la forme $i[H, A_a]$ est associée à l'opérateur

$$i[H, A_a]^0 = \sum_{i=1}^{n(N-1)} \beta_i k_i(k_i + a_i) + i[V, A_0]$$

dont le domaine coïncide avec $D(H) = D(H_0)$. La condition c) est donc satisfaite; la condition d) est alors assurée par la condition iii) imposée à chaque potentiel v_{ij}.

Théorème II.2. *Soit H l'Hamiltonien d'un système à N corps dont les potentiels d'interactions v_{ij} satisfont les conditions* i), ii) *et* iii); *supposons de plus qu'aucun des sous systèmes ne présente d'états liés; alors les opérateurs*

$$A_a = \tfrac{1}{4}\left\{\sum_i u_i(k_i + a_i) + (k_i + a_i)u_i\right\}$$

sont des opérateurs conjugués de H sur un voisinage de l'énergie $E \in R^+$ si $|a|^2 = \sum_i \beta_i a_i^2 < E$.

Démonstration. D'après la relation (II.2)

$$\begin{aligned} i[H, A_a] &= \tfrac{1}{2}\sum_i \beta_i(k_i^2 - a_i^2 + (k_i + a_i)^2) + i[V, A_0] \\ &\geqq \tfrac{1}{2}(H - |a|^2) - \tfrac{1}{2}V + i[V, A_0]. \end{aligned} \tag{II.3}$$

Pour les systèmes à N corps, $-\frac{1}{2}V + i[V, A_0]$ est une petite perturbation de l'identité; en particulier il est facile de montrer pour les systèmes présentant un seul canal que pour tout $\delta_0 > 0$, il existe δ_1 et un opérateur compact K sur $L^2(R^{n(N-1)})$ tels que

$$P_H(E, \delta_1)(-\tfrac{1}{2}V + i[V, A_0])P_H(E, \delta_1) = O(\delta_0) + P_H(E, \delta_1)KP_H(E, \delta_1)$$

avec

$$\|O(\delta_0)\| \leqq \frac{\delta_0}{8}. \tag{II.4}$$

Donc quel que soit $\delta_0 > 0$, il existe $\delta_1 < \dfrac{\delta_0}{2}$ et un opérateur compact K tel que

$$P_H(E, \delta_1)\, i[H, A_a]\, P_H(E, \delta_1) \geqq \frac{\delta_0}{8} + P_H(E, \delta_1)KP_H(E, \delta_1)$$

pour tout $a \in R^{n(N-1)}$ vérifiant $\sum_i \beta_i a_i^2 \leqq E - \delta_0$. Nous donnerons la démonstration complète et les applications de l'existence de cette classe $\mathscr{A}_E = \{A_a \,|\, |a|^2 < E\}$ d'opérateurs conjugués de H au voisinage de l'énergie E dans le cas $N = 3$ au chapitre IV.

La validité du théorème II.2 ne se restreint certainement pas au système à N corps dont les sous systèmes ne présentent pas d'états liés, par exemple nous avons le théorème suivant valable pour les interactions coulombiennes.

Théorème II.3 (Interactions coulombiennes). *Si* $H=H_0+\sum_{i<j} v_{ij}$ *est l'Hamiltonien d'un système à N corps agissant sur* $L^2(R^{3(N-1)})$ *avec des potentiels à deux corps* $v_{ij}(x_i-x_j)=c_{ij}|x_i-x_j|^{-1}$, $c_{ij}\in R$, *alors* $\mathscr{A}_E=\{A_a \,|\, |a|^2<E\}$ *est une famille d'opérateurs conjugués de H au voisinage de l'énergie E.*

Démonstration. Dans le cas des interactions coulombiennes nous avons

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}V+i[V,A_0]&=\sum_{i<j}\{-\tfrac{1}{2}c_{ij}|x_i-x_j|^{-1}\\&\quad+i[c_{ij}|x_i-x_j|^{-1},\tfrac{1}{2}(x_i-x_j)(-i)\nabla_{x_i-x_j}]\}\\&=0.\end{aligned}$$

III. Relation entre la localisation dans l'espace des phases et la localisation dans les spectres positifs ou négatifs des opérateurs $A_a=\sum_i x_i(k_i+a_i)+(k_i+a_i)x_i$

Soit $\mathscr{H}=L^2(R^m;d^m x)$. Soit x_0 et k_0, deux points de R^m. Définissons $J(x;x_0)$ un opérateur localisant dans un cône contenant la direction x_0, par l'opérateur multiplication par un fonction régulière de $x\in R^m$ telle que

$$J(x;x_0)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \dfrac{x}{|x|}\cdot\dfrac{x_0}{|x_0|}>1-\dfrac{\varepsilon_0}{2}; \quad |x|>1\\[2ex] 0 & \text{si} \quad \dfrac{x}{|x|}\cdot\dfrac{x_0}{|x_0|}<1-\varepsilon_0.\end{cases} \tag{III.1}$$

Soit $X(k;k_0)$ une fonction régulière de $k\in R^m$ telle que

$$X(k;k_0)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad |k-k_0|<\dfrac{\delta_0}{2}|k_0|\\[2ex] 0 & \text{si} \quad |k-k_0|>\delta_0|k_0|.\end{cases} \tag{III.2}$$

On notera par le même symbole l'opérateur

$$X(k;k_0) \quad \text{où} \quad k=\left(-i\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,-i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

qui agit en transformée de Fourier comme fonction multiplication:

$$\mathscr{F}(X(k;k_0)\Psi)(k)=X(k;k_0)\mathscr{F}(\Psi)(k).$$

Théorème III.1. *Soit A l'opérateur essentiellement auto-adjoint sur* $\mathscr{S}$ *défini par*

$$A=\sum_{i=1}^{m} x_i k_i+k_i x_i$$

si

$$\frac{x_0}{|x_0|}\cdot\frac{k_0}{|k_0|}<\beta<0$$

et si

$$\beta + 3\delta_0 + \sqrt{6}\,\varepsilon_0 < 0.$$

Alors $J(x;x_0)X(k;k_0)$ *est un opérateur qui localise essentiellement dans la partie négative de l'opérateur* A *dans le sens suivant:*

$$J(x;x_0)X(k;k_0)P_A^+|A|^n \in B(L^2(R^m)) \quad \forall n>0.$$

Démonstration. Soit $C = J(x;x_0)X(k;k_0)$ et $\tilde{C} = \tilde{J}(x;x_0)\tilde{X}(k;k_0)$ où $\tilde{J}(x;x_0)$ localise sur un voisinage conique de x_0 légèrement plus grans que le support de J; de même $\tilde{X}(k;k_0)$ localise sur un voisinage de k_0 légèrement plus grand que le support de X. Nous avons:

$\tilde{J}\cdot J = J$, $\tilde{X}\cdot X = X$. On peut supposer sans restriction que $\tilde{J}$ et $\tilde{X}$ satisfont une relation analogue à celle supposée pour J et X dans l'hypothèse du théorème III.1. De plus, nous avons:

$$\begin{aligned} C\tilde{C} &= J(x;x_0)X(k;k_0)\tilde{J}(x;x_0)\tilde{X}(k;k_0) \\ &= C + J(x;x_0)[X(k;k_0), \tilde{J}(x;x_0)]\tilde{X}(k;k_0) \\ &= C - J(x;x_0)X(k;k_0)(1-\tilde{J}(x;x_0))\tilde{X}(k;k_0). \end{aligned}$$

Il est clair que l'opérateur $J(x;x_0)X(k;k_0)(1-\tilde{J}(x;x_0))|x|^n$ est un opérateur borné sur $L^2(R^m)$ pour chaque valeur $n>0$. Nous avons donc:

$$C(1-\tilde{C}) = O_\infty\left(\frac{1}{i+A}\right), \tag{III.3}$$

où $O_\infty\left(\frac{1}{i+A}\right)$ désigne un opérateur tel que $O_\infty\left(\frac{1}{i+A}\right)|A|^n \in B(\mathscr{H})$ pour toute valeur $n>0$.

Proposition III.2. $A = \tilde{C}A + (1-\tilde{C})A$ *où* $\tilde{C}A$ *et* $(1-\tilde{C})A$ *sont des opérateur essentiellement définis sur* $\mathscr{S}$, *c'est-à-dire, leur parties symétriques sont essentiellement auto-adjointes sur* $\mathscr{S}$ *et leurs parties antisymétriques bornées. De plus* Reel $\tilde{C}A$ *est un opérateur supérieurement borné et* $(\tilde{C}A - Z)^{-1}$ *est analytique dans la région* Reel $Z > M_0$ *pour une valeur* M_0 *finie et*

$$\|(\tilde{C}A - Z)^{-1}\| \leqq \frac{c}{|Z|} \qquad \text{Reel}\, Z > M_0.$$

Démonstration. $\tilde{C}A = \tilde{J}(x;x_0)\tilde{X}(k;k_0)A$. Soit $N = x^2 + k^2 + 1$, la forme $\tilde{C}A$ est définie sur $D(N^{1/2})$, la forme $[\tilde{C}A, N]$ définit aussi un opérateur borné de $D(N^{1/2})$ dans $D(N^{-1/2})$. Il en est de même pour $A = x\cdot k + k\cdot x$ et pour $[N, A]$ et donc d'après le théorème du commutateur de Nelson [13, tome II, chapitre X] les opérateurs A, $\tilde{C}A$ et $(1-\tilde{C})A$ sont essentiellement définis sur $\mathscr{S}$, ainsi que leurs parties symétriques

$$\begin{aligned} \tilde{C}A &= \tilde{J}\cdot\tilde{X}(x\cdot k + k\cdot x) \\ &= \tilde{J}\tilde{X}^{1/2}(x\cdot k + k\cdot x)\tilde{X}^{1/2} + B_1 \\ &= \tilde{J}^{1/2}X^{1/2}(x\cdot k + k\cdot x)\tilde{X}^{1/2}\tilde{J}^{1/2} + B_2, \end{aligned} \tag{III.4}$$

où B_1 et B_2 sont des opérateurs bornés sur $\mathscr{H}$, et en particulier en écrivant

$$x\cdot k+k\cdot x=|\bar{x}|^{1/2}\left\{\frac{x}{|\bar{x}|}\cdot k+k\cdot\frac{x}{|\bar{x}|}\right\}|\bar{x}|^{1/2}+B_3,$$

où $|\bar{x}|$ est une fonction $\geqq 1$ régulière de x telle que $|\bar{x}|=|x|$ si $|x|>2$, et B_3 un opérateur borné. Il est facile de vérifier que $\tilde{J}^{1/2}\tilde{X}^{1/2}(x\cdot k+k\cdot x)\tilde{X}^{1/2}\tilde{J}^{1/2}$ est un opérateur supérieurement borné, ce qui démontre la proposition III.2.

On peut alors calculer $CP(A>M_0+1)$ de la façon suivante:

$$2i\pi CP(A>M_0+1)=C\int_\gamma dz\frac{1}{A-Z}P(A>M_0+1), \tag{III.5}$$

où γ est un contour convenablement choisi entourant le demi axe

$$[M_0+\tfrac{1}{2},\infty).$$

Par analycité, nous avons:

$$\begin{aligned}2i\pi CP(A>M_0+1)&=C\int_\gamma dz\left(-\frac{1}{\tilde{C}A-Z}+\frac{1}{A-Z}\right)P(A>M_0+1)\\&=C\int_\gamma dz\frac{1}{\tilde{C}A-Z}(\tilde{C}-1)A\frac{1}{A-Z}P(A>M_0+1)\\&=\int_\gamma dz\frac{1}{\tilde{C}A-Z}[C,\tilde{C}A]\frac{1}{\tilde{C}A-Z}(1-\tilde{C})A\frac{1}{A-Z}P(A>M_0+1)\\&\quad+\int_\gamma dz\frac{1}{\tilde{C}A-Z}O_\infty\left(\frac{1}{i+A}\right)\frac{1}{A-Z}P(A>M_0+1).\end{aligned} \tag{III.6}$$

Le dernier terme de (III.6) contribue par un opérateur de la forme

$$O_\infty\left(\frac{1}{i+A}\right).$$

D'autre part

$$[\tilde{C}A,C]=\tilde{C}[A,C]+[\tilde{C},C]A,$$

définit non seulement un opérateur borné mais un opérateur de la forme:

$$[\tilde{C}A,C]=O_\infty\left(\frac{1}{i+A}\right)+B_1C_1, \tag{III.7}$$

où C_1 est un opérateur de localisation $C_1=J_1(x;x_0)X_1(k;k_0)$ tel que

$$J_1\tilde{J}=J_1;\quad X_1\tilde{X}=X_1,$$

et donc

$$2i\pi CP(A>M_0+1)=O_\infty^2\left(\frac{1}{i+A}\right)+\int_\gamma dz\frac{1}{\tilde{C}A-Z}B_1C_1\frac{1}{\tilde{C}A-Z}(1-\tilde{C})A\frac{1}{A-Z}P$$
$$\cdot(A>M_0+1),$$

et par itération du procédé, nous obtenons :

$$2i\pi CP(A>M_0+1)=O_\infty^{n+1}\left(\frac{1}{i+A}\right)+\int_\gamma dz\frac{1}{\tilde{C}A-Z}B_1\frac{1}{\tilde{C}A-Z}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\tilde{C}A-Z}B_nC_n$$

$$\cdot\frac{1}{A-Z}P(A>M_0+1).$$

Si l'on évalue $CP(A>M_0+1)A^{n-2}$ en développant $A^{n-2}=(A-Z+Z)^{n-2}$, l'on trouve en utilisant l'analycité à l'intérieur de γ de $\frac{1}{\tilde{C}A-Z}$

$$CP(A>M_0+1)A^{n-2}=O_\infty^{n+1}\left(\frac{1}{i+A}\right)A^{n-2}+\int_\gamma dz\frac{z^{n-2}}{\tilde{C}A-Z}B_1\cdot\ldots\cdot B_nC_n\frac{1}{A-Z}P$$

$$\cdot(A>M_0+1),$$

qui est bien un opérateur borné.

Remarques. Le théorème III.1 s'étend aux opérateurs $A_a=x(k+a)+(k+a)x$ de façon évidente en utilisant la transformation unitaire qui commute avec x et qui translate les moments. Mais plus généralement, on voit que la démonstration devrait se généraliser aux opérateurs de la forme $\sum_i x_i g_i(k)=A_g$ lorsque $(g_i(k))_i$ est un champ de vecteurs à support compact dans R^m.

L'intérêt des opérateurs $\sum_i x_i g_i(k)$ se manifeste dans l'étude des perturbations compactes d'opérateurs pseudo différentiels $h=h_0(k)+v(x)$ pour lesquels l'on peut alors associer un opérateur conjugué au voisinage de E, A_g à chaque champ de vecteur «sortant» pour la surface d'énergie $\sum_E=\{k|h_0(k)=E\}$. Ceci permettrait donc de définir le support singulier des fonctions de Green ou de façon équivalente les propriétés de propagation de e^{-iht}.

IV. Application à la détermination du support spectral singulier des fonctions de Green et des propriétés de propagation dans le cas des systèmes à trois corps (cas des systèmes à une seule voie ou des systèmes en interaction coulombienne)

Nous prendrons pour étudier l'évolution des systèmes à trois corps les notations suivantes : soit $\alpha=(i,j)$, un couple de particules $\{i,j,k\}$ de masse m_i et de coordonnées x_i. On désignera les coordonnées du système de Jaccobi associé au couple α par :

$$x_\alpha=x_i-x_j\,; \qquad y_\alpha=x_k-\frac{m_ix_i+m_jx_j}{m_i+m_j}$$

$$k_\alpha=-i\nabla_{x_\alpha}\,; \qquad p_\alpha=-i\nabla_{y_\alpha}.$$

x désignera le couple $(x_\alpha, y_\alpha) \in R^{2n}$; $|x| = (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)^{1/2}$. Après réduction du centre de masse, l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ du système peut être représenté par $L^2(R^{2n}; d^n x_\alpha\, d^n y_\alpha)$ et l'Hamiltonien par:

$$H = \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} + \sum_\alpha v_\alpha(x_\alpha). \tag{IV.1}$$

Nous noterons encore:

$$H_0 = \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}; \qquad H_\alpha = H_0 + v_\alpha(x_\alpha),$$

$$h_\alpha = \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + v_\alpha(x_\alpha), \quad \text{agissant sur} \quad L^2(R^n; d^n x_\alpha).$$

Pour tout couple $(a_\alpha, b_\alpha) \in R^{2n} \times R^{2n}$ soit

$$A_{a_\alpha, b_\alpha} = \tfrac{1}{4}\{x_\alpha(k_\alpha + a_\alpha) + y_\alpha(p_\alpha + b_\alpha) + \text{symétrique}\}. \tag{IV.2}$$

Nous supposerons que les potentiels v_α satisfont les hypothèses i), ii) et iii) du paragraphe II.

Théorème IV.1. *Supposons que les hamiltoniens h_α de chaque sous système ne présentent pas de valeur propres. Alors:*

1) *le spectre ponctuel de H ne peut s'accumuler qu'en 0;*

2) *soit $[a, b]$, un intervalle compact inclus dans $R^+/\sigma_p(H)$.*

Pour toute valeur δ_0, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$P_H(E, \delta_1)\, i[H, A_{a_\alpha, b_\alpha}]\, P_H(E, \delta_1) \geqq \frac{\delta_0}{8} P_H(E, \delta_1)$$

quel que soit $E \in [a, b]$ et quels que soient (a_α, b_α) vérifiant

$$\frac{a_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{b_\alpha^2}{2n_\alpha} < E - \delta_0.$$

Démonstration. D'après la relation (II.3), nous avons:

$$i[H, A_{a_\alpha, b_\alpha}] \geqq \tfrac{1}{2}\left(H - \frac{a_\alpha^2}{2m_\alpha} - \frac{b_\alpha^2}{2n_\alpha}\right) - \tfrac{1}{2} V + i[V, A_{a_\alpha, b_\alpha}]. \tag{IV.3}$$

Mais $i[V, A_{a_\alpha, b_\alpha}] = i[V, A_0]$, où A_0 est le générateur des dilatations sur $L^2(R^{2n}; d^n x_\alpha\, d^n y_\alpha)$; pour cette raison nous avons:

$$-\tfrac{1}{2} V + i[V, A_0] = \sum_\alpha B_\alpha$$

avec $B_\alpha = c_\alpha \otimes \mathbb{1}_{y_\alpha}$ où les opérateurs c_α sont h_α compacts sur $L_2(R^n; d^n x_\alpha)$; si $\frac{a_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{b_\alpha^2}{2n_\alpha} \leqq E - \delta_0$ pour tout $\delta_1 < \frac{\delta_0}{2}$, nous avons:

$$\begin{aligned} &P_H(E, \delta_1)\, i[H, A_{a_\alpha, b_\alpha}]\, P_H(E, \delta_1) \\ &\quad > \tfrac{1}{4}\delta_0 P_H(E, \delta_1) + P_H(E, \delta_1) \sum_\alpha B_\alpha P_H(E, \delta_1). \end{aligned} \tag{IV.4}$$

D'autre part, nous allons montrer que lorsque δ_1 tend vers zéro, $\|P_H(E,\delta_1)B_\alpha P_H(E,\delta_1)\|$ tend vers zéro.

Ce qui démontrera le théorème IV.1.

Pour tout $\delta_1>0$, $P_H(E,\delta_1)=P_H(E,\delta_1)\tilde{P}_H(E,2\delta_1)$, où $\tilde{P}(E,2\delta_1)(\lambda)$ est une fonction régulière de λ valant 1 sur $(E-\underline{\delta}_1, E+\underline{\delta}_1)$ et 0 à l'extérieur de l'intervalle $(E-2\underline{\delta}_1, E+2\underline{\delta}_1)$; $(\delta_1<\underline{\delta}_1)$,

$$\begin{aligned}P_H(E,\delta_1)B_\alpha &= P_H(E,\delta_1)(\tilde{P}_H(E,\underline{\delta}_1)-\tilde{P}_{H_\alpha}(E,\underline{\delta}_1))B_\alpha\\ &\quad + P_H(E,\delta_1)\tilde{P}_{H_\alpha}(E,\underline{\delta}_1)B_\alpha,\end{aligned}$$

$$\tilde{P}_{H_\alpha}(E,\underline{\delta}_1)B_\alpha = \int_{R^n} d^n p_\alpha \tilde{P}_{h_\alpha+\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}}(E,\underline{\delta}_1)c_\alpha. \tag{IV.5}$$

Puisque c_α est un opérateur h_α compact la norme sur $L^2(dx_\alpha)$ de la famille d'opérateur $\tilde{P}_{h_\alpha+\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}}(E,\underline{\delta}_1)c_\alpha$ tend vers zéro quand $\underline{\delta}_1$ tend vers zéro, ceci uniformément en $p_\alpha\in R^n$.

Et donc $\forall\varepsilon>0$, on peut trouver $\underline{\delta}_1>0$ tel que

$$\|P_H(E,\delta_1)\tilde{P}_{H_\alpha}(E,\underline{\delta}_1)B_\alpha\|\leqq\varepsilon. \tag{IV.6}$$

D'autre part, la famille $(\tilde{P}_H(E,\underline{\delta}_1)-\tilde{P}_{H_\alpha}(E,\underline{\delta}_1))B_\alpha$ est une famille d'opérateurs compacts sur $L^2(R^{2n})$ et ceci uniformément en $E\in[a,b]$; si $[a,b]\cap\sigma_P(H)=\emptyset$ on peut encore choisir δ_1 tel que:

$$\|P_H(E,\delta_1)(\tilde{P}_H(E,\underline{\delta}_1)-\tilde{P}_{H_\alpha}(E,\underline{\delta}_1))B_\alpha\|<\varepsilon\,;$$

ce qui permet de trouver $\delta_1>0$, $\left(\delta_1<\frac{\delta_0}{2}\right)$ tel que:

$$P_H(E,\delta_1)\,i[H,A_{a_\alpha,b_\alpha}]\,P_H(E,\delta_1)\geqq\frac{\delta_0}{4}P_H(E,\delta_1)+6\varepsilon,$$

ε étant arbitraire, ceci démontre le théorème IV.1.

Support spectral singulier des fonctions de Green – Description dans l'espace des phases du support de propagation pour les systèmes à trois corps. Soit S^+ et S^-, les sous ensembles de l'espace des phases suivants

$$S^\pm=\{(x,k)\in R^{2n}\times R^{2n}\,|\,x=\pm\lambda\nabla H_0(k);\lambda>1\}. \tag{IV.7}$$

Soit

$$I_\alpha=\{x\in R^{2n}\,|\,x_\alpha=0\}.$$

I_α est constitué par les directions qui supportent l'interaction v_α.

Théorème IV.2. *Supposons que l'Hamiltonien H du système à trois corps admette pour chaque valeur $E\in R^+$ la famille $\mathscr{A}_E$ suivante d'opérateurs conjugués au voisinage de E:*

$$\mathscr{A}_E=\left\{x_\alpha(k_\alpha+a_\alpha)+y_\alpha(p_\alpha+b_\alpha)+\mathrm{sym}\,\middle|\,\frac{a_\alpha^2}{2m_\alpha}+\frac{b_\alpha^2}{2n_\alpha}<E\right\}.$$

C'est bien le cas pour les systèmes à une seule voie (théorème IV.1) ou pour les systèmes généraux interagissant avec des potentiels à deux corps coulombiens (théorème II.3). Supposons de plus que les interactions $v_\alpha(x_\alpha)$ décroissent plus vite que $|x_\alpha|^{-\nu}$ avec $\nu > \frac{1}{2}$.

Soit $[a,b] \subset R^+/\sigma_p(H)$ et soient C_1, un cône fermé de R^{2n} et C_2, un compact de R^{2n}, tels que:

$$C_1 \times C_2 \cap S^+ = \emptyset\,; \qquad C_1 \cap \Big\{\bigcup_\alpha I_\alpha\Big\} = \emptyset\,.$$

Alors, pour toute fonction $\tilde{P}(a,b)$ suffisamment régulière à support inclus dans $[a,b]$, pour toute fonction $J_1(x;C_1)\,J_2(k,C_2)$ suffisamment régulière à supports respectivement inclus dans C_1 et C_2, il existe une constante finie C_0 telle que:

a) $\sup\limits_{\operatorname{Im} Z>0} \|J_1(x;C_1)\,J_2(k;C_2)\,(H-Z)^{-1}\,\tilde{P}_H(a,b)\,(1+|x|)^{-2\nu}\| \leqq C_0$,

b) $\int_0^\infty dt\, \|J_1(x;C_1)\,J_2(k;C_2)\,e^{-iHt}\,\tilde{P}_H(a,b)\,\Psi\|^2 \leqq C_0 \|(1+|x|)^{2\nu}\,\Psi\|^2$, $(\nu > \frac{1}{2})$.

Théorème IV.3. *Supposons que l'Hamiltonien H du système à trois corps satisfasse les mêmes hypothèses que dans le théorème IV.2. Soit $[a,b] \subset R^+/\sigma_p(H)$ et $\varepsilon > 0$. Alors pour toutes fonctions suffisamment régulières $\tilde{P}(a,b)(\lambda)$ et $\tilde{P}(\varepsilon,\infty)(\lambda)$ à supports respect, inclus dans $[a,b]$ et $[\varepsilon,\infty]$, il existe C_0 finie, telle que:*

a) $\sup\limits_{\operatorname{Im} Z \neq 0} \|(1+|x_\alpha|)^{-\nu}\,P_{h_\alpha}(\varepsilon,\infty)\,(H-Z)^{-1}\,\tilde{P}_H(a,b)\,(1+|x|)^{-2\nu}\| \leqq C_0$,

b) $\int_0^\infty dt\, \|(1+|x_\alpha|)^{-\nu}\,P_{h_\alpha}(\varepsilon,\infty)\,e^{-iHt}\,\tilde{P}_H(a,b)\,\Psi\|^2 \leqq C_0 \|(1+|x|)^{2\nu}\,\Psi\|^2$, $(\nu > \frac{1}{2})$.

Remarque. La complétude assymptotique dans le spectre positif de H découle de façon naturelle des théorèmes IV.2 et IV.3 [11b].

Démonstration du théorème IV.2. Soit

$$C_1 \times C_2 \cap S^+ = \emptyset\,; \qquad C_1 \cap \Big\{\bigcup_\alpha I_\alpha\Big\} = \emptyset\,; \qquad [a,b] \subset R^+/\sigma_p(H)\,.$$

Nous allons montrer que pour toute localisation $J_1(x;x_0)$, $J_2(k;k_0)$, $(E-\delta,\,E+\delta)$, suffisamment étroite autour d'une direction $x_0 \in C_1$ d'un point $k_0 \in C_2$ et d'une énergie $E \in [a,b]$, alors:

$$\sup_{\substack{\operatorname{Reel} Z \in [E-\delta,\,E+\delta] \\ \operatorname{Im} Z > 0}} \|J_1(x;x_0)\,J_2(k;k_0)\,(H-Z)^{-1}\,(1+|x|)^{-2\nu}\| \leqq C\,. \tag{IV.8}$$

Par hypothèse $x_0 \notin \bigcup_\alpha I_\alpha$, donc pour toute localisation dans un cône suffisamment étroit autour d'un point x_0, nous avons pour toute fonction régulière $\tilde{P}(E,\delta)$, valant 1 sur $(E-\delta,\,E+\delta)$ et 0 sur $R/(E-2\delta,\,E+2\delta)$:

$$J_1(x;x_0)\,J_2(k;k_0)\,(\tilde{P}_H(E,\delta) - \tilde{P}_{H_0}(E,\delta)) = O\left(\frac{1}{1+|x|^\nu}\right)(\nu > \tfrac{1}{2}),$$

où $O\left(\frac{1}{1+|x|^\nu}\right)$ désigne un opérateur tel que $O\left(\frac{1}{1+|x|^\nu}\right)(1+|x|^\nu) \in B(\mathscr{H})$. On peut donc supposer sans restriction, pour vérifier (IV.8), que:

$$H_0(k_0)=\frac{k_\alpha^{0^2}}{2m_\alpha}+\frac{p_\alpha^{0^2}}{2n_\alpha}\in[E-2\delta,E+2\delta]\,;\quad k_0=(k_\alpha^0,p_\alpha^0)\,.$$

Pour démontrer (IV.8), nous allons mettre en évidence δ, $J_1(x;x_0)\ J_2(k;k_0)$ et un opérateur conjugué $A_{a_\alpha^0,b_\alpha^0}$ de H au voisinage de E tels que

$$J_1(x;x_0)\,J_2(k;k_0)\,P^+_{A_{a_\alpha^0,b_\alpha^0}}=O\left(\frac{1}{i+A_{a_\alpha^0,b_\alpha^0}}\right).$$

Mais $A_{a_\alpha^0,b_\alpha^0}$ est conjugué de H au voisinage de E sous la seule condition $\frac{a_\alpha^{0^2}}{2m_\alpha}$ $+\frac{b_\alpha^{0^2}}{2n_\alpha}<E.$

De plus, d'après les résultats du paragraphe III, il nous suffit donc de trouver $(a_\alpha^0,b_\alpha^0)\in R^{2n}\times R^{2n}$ tel que

$$\frac{a_\alpha^{0^2}}{2m_\alpha}+\frac{b_\alpha^{0^2}}{2n_\alpha}<E\quad\langle x_\alpha^0\,|\,k_\alpha^0+a_\alpha^0\rangle+\langle y_\alpha^0\,|\,p_\alpha^0+b_\alpha^0\rangle<0\,. \tag{IV.9}$$

Puisque $(k_\alpha^0,\,p_\alpha^0)$ vérifie aussi $\frac{k_\alpha^{0^2}}{2m_\alpha}+\frac{p_\alpha^{0^2}}{2n_\alpha}<E+2\delta$, ceci est donc toujours possible si la direction $(\sqrt{2m_\alpha}\,x_\alpha^0,\ \sqrt{2n_\alpha}\,y_\alpha^0)$ est strictement différente de la direction $\left(\frac{k_\alpha^0}{\sqrt{2m_\alpha}},\frac{p_\alpha^0}{\sqrt{2n_\alpha}}\right)$ ou de façon équivalente si

$$((x_\alpha^0,y_\alpha^0),(k_\alpha^0,p_\alpha^0))\notin S^+\,.$$

Il existe donc des localisations suffisamment étroites $J_1(x;x_0)$, $J_2(k;k_0)$, $\delta>0$ et des opérateurs conjugués A de H sur $(E-2\delta,\ E+2\delta)$ tels que:

$$J_1(x;x_0)\,J_2(k;k_0)=J_1(x;x_0)\,J_2(k;k_0)P_A^-+O\left(\frac{1}{i+A}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}&\|J_1(x;x_0)\,J_2(k;k_0)\,(H-Z)^{-1}(1+|x|)^{-2\nu}\|\\&\quad\leqq\|P_A^-(H-Z)^{-1}(1+|x|)^{-2\nu}\|+C\|\,|i+A|^{-1}(H-Z)^{-1}(1+|x|)^{-2\nu}\|\,.\end{aligned} \tag{IV.10}$$

Ceci est, d'après le théorème I.2, uniformément borné en $\operatorname{Im}Z>0$

$$\operatorname{Reel}Z\in[E-\delta,E+\delta]\subset R^+/\sigma_p(H)\quad\text{puisque de façon}$$

évidente l'opérateur $\frac{1}{H_0+1}(1+|x|)^{-2\nu}$ envoie dans le domaine de

$$|A_{a_\alpha^0,b_\alpha^0}|^{2\nu'},\qquad 1<2\nu'<2\nu<2\,.$$

La partie b) du théorème IV.2 s'obtient par transformation de Fourier sur la variable d'énergie E, en remarquant comme dans [9] que la seule contribution importante lorsque $t\to+\infty$ provient des valeurs aux bords de la résolvante obtenues avec une valeur imaginaire >0.

Démonstration du théorème IV.3. Soit $B_\alpha(x_\alpha)=(1+x_\alpha^2)^{-\nu/2}$ une fonction équivalente à $(1+|x_\alpha|)^{-\nu}$. Remarquons que $B_\alpha \tilde{P}_{H_\alpha}(\varepsilon,\infty)\{\tilde{P}_H(a,b)-\tilde{P}_{H_\alpha}(a,b)\}$ est un opérateur de la forme $O\left(\frac{1}{|x|^\nu}\right)$ et que le problème se ramène à montrer que:

$$\sup_{\substack{\mathrm{Reel}\,Z\in[a,b]\\ \mathrm{Im}\,Z\neq 0}} \|B_\alpha \tilde{P}_{H_\alpha}(a,b)\,\tilde{P}_{h_\alpha}(\varepsilon,\infty)\,(H-Z)^{-1}\,(1+|x|)^{-2\nu}\| \leqq C\,. \tag{IV.11}$$

Pour se ramener à une discussion qui utilisera des théorèmes déjà rencontrés, nous aurons besoin de la proposition suivante qui nous permet de limiter les impulsions k_α à une région compacte.

Proposition IV.1. *Il existe un intervalle borné* $[0,M]$, *tel que*

$$B_\alpha \tilde{P}_{H_\alpha}(a,b)=B_0 B_\alpha \tilde{P}_{H_0}(0,M)\,\tilde{P}_{H_\alpha}(a,b),$$

où B_0 *est un opérateur borné et* $\tilde{P}(0,M)(\lambda)$ *une fonction régulière valant* 1 *sur* $[0,M]$ *et* 0 *sur* $[M+1,\infty[$

$$B_\alpha \tilde{P}_{H_\alpha}(a,b)=B_\alpha \tilde{P}_{H_0}(0,M)\,\tilde{P}_{H_\alpha}(a,b)+B_\alpha \tilde{P}'_{H_0}(0,M)\,\tilde{P}_{H_\alpha}(a,b)\,;\ \tilde{P}'=1-\tilde{P}\,.$$

Soit Λ, un contour complexe entourant strictement le support de $\tilde{P}(a,b)(\lambda)$, nous obtenons:

$$B_\alpha \tilde{P}'_{H_0}(0,M)\,\tilde{P}_{H_\alpha}(a,b)=\left\{\int_\Lambda dz\, B_\alpha \tilde{P}'_{H_0}(0,M)\frac{1}{H_0-Z}v_\alpha \tilde{\tilde{P}}_{H_\alpha}(a,b)\frac{1}{H_\alpha-Z}\tilde{\tilde{P}}_{H_\alpha}(a,b)B_\alpha^{-1}\right\}B_\alpha \cdot \tilde{P}_{H_\alpha}(a,b)\,,$$

où $\tilde{\tilde{P}}^2(a,b)(\lambda)$ est une fonction à support strictement contenu dans Λ tel que

$$\tilde{\tilde{P}}^2(a,b)(\lambda)\,\tilde{P}(a,b)(\lambda)=\tilde{P}(a,b)(\lambda)\,.$$

Il est évident que le facteur entre parenthèses tend vers zéro en norme quand M devient grand, de sorte que:

$$\left(1-O\left(\frac{1}{M}\right)\right)B_\alpha \tilde{P}_{H_\alpha}(a,b)=B_\alpha \tilde{P}_{H_0}(0,M)\,\tilde{P}_{H_\alpha}(a,b)$$

avec $\left\|O\left(\frac{1}{M}\right)\right\|$ tendant vers zéro quand M tend vers l'infini; ce qui démontre la proposition.

On est donc ramené à étudier

$$\sup_{\substack{\mathrm{Reel}\,Z\in[a,b]\\ \mathrm{Im}\,Z\neq 0}} \|B_\alpha \tilde{P}_{H_0}(0,M)\,P_{h_\alpha}(\varepsilon,\infty)\,(H-Z)^{-1}\,(1+|x|)^{-2\nu}\| \tag{IV.12}$$

tout d'abord pour une localisation sur un voisinage conique des directions $x_\alpha=0$ de la forme $J\left(|x_\alpha|<\frac{\varepsilon}{16\cdot M}|y_\alpha|\right)$.

Nous avons:

$$B_\alpha\left(1-J\left(|x_\alpha|<\frac{\varepsilon}{16\cdot M}|y_\alpha|\right)\right)|x|^{\nu'}\in B(\mathscr{H})\quad \text{pour une valeur}\quad \nu'>\tfrac{1}{2}\,.$$

Le théorème IV.3 est donc valable dans cette région grâce aux estimations a priori du type 1 (théorème I.2) obtenu avec A_0 pour opérateur conjugué.

D'autre part, dans la région $J\left(|x_\alpha|<\frac{\varepsilon}{16\cdot M}|y_\alpha|\right)$, les opérateurs conjugués $x_\alpha(k_\alpha+a_\alpha)+y_\alpha(p_\alpha+b_\alpha)$ vont être dominés par les opérateurs $y_\alpha(p_\alpha+b_\alpha)$, lorsque $\operatorname{Reel} Z$ appartient à un voisinage de la forme $(E-\delta,\ E+\delta)$, la singularité est supportée par les opérateurs de la forme:

$$B_\alpha J\left(|x_\alpha|<\frac{\varepsilon}{16\cdot M}|y_\alpha|\right) P_{H_0}(0,M)\, P_{h_\alpha}(\varepsilon,b)\, P_{H_\alpha}(E,2\delta)\ (H-Z)^{-1}\ (1+|x|)^{-2\nu},$$

$$\operatorname{Reel} Z\in(E-\delta, E+\delta),$$

et donc

$$h_\alpha+\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}\in[E-2\delta, E+2\delta].$$

D'autre part, le projecteur $P_{h_\alpha}(\varepsilon,b)$ limite les valeurs de $\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}$ dans la région $(0, E+2\delta-\varepsilon)$.

Si l'on choisit $\delta\leqq\frac{\varepsilon}{16}$, alors $\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}<E-\frac{7\varepsilon}{8}$.

Si on suppose par exemple $\operatorname{Im} Z>0$, ceci nous permet pour toute localisation conique $J_1(y_\alpha; y_\alpha^i)$, $J_2(p_\alpha; p_\alpha^j)$ suffisamment étroite autour d'une direction (y_α^i, p_α^j) arbitraire de construire un opérateur

$$A_{ij}=A_{0,b_\alpha^{ij}}\quad\text{avec}\quad\frac{(b_\alpha^{ij})^2}{2n_\alpha}<E-\frac{\varepsilon}{4}$$

tel que

$$J\left(|x_\alpha|<\frac{\varepsilon}{16\cdot M}|y_\alpha|\right) P_{H_0}(0,M)\, J_1(y_\alpha; y_\alpha^i)\, J_2(p_\alpha, p_\alpha^j)\, P_{A_{ij}}^+=O\left(\frac{1}{i+A_{ij}}\right).$$

Les A_{ij} étant des opérateurs conjugués de H sur $\left(E-\frac{\varepsilon}{4}, E+\frac{\varepsilon}{4}\right)$ et en particulier sur $(E-\delta,\ E+\delta)$; $\delta\leqq\frac{\varepsilon}{16}$.

On est donc ramené à démontrer que pour un nombre fini d'apérateur conjugués A_{ij} la quantité suivante

$$\sup_{\substack{\operatorname{Reel} Z\in(E-\delta, E+\delta)\\ \operatorname{Im} Z>0}}\left\|\left(P_{A_{ij}}^-+O\left(\frac{1}{i+A_{ij}}\right)\right)\tilde{P}_{h_\alpha}(\varepsilon,b)(H-Z)^{-1}(1+|x|)^{-2\nu}\right\|$$

est bornée. Ceci est une conséquence du théorème I.2, puisque d'après la proposition I.2 l'opérateur $\tilde{P}_{h_\alpha}(\varepsilon,b)$ ne pose pas de problème si le commutateur avec A_{ij} est borné, ce qui est clair.

Remerciements. Je remercie J. M. Combes pour de fructueuses discussions, en particulier sur la condition de radiation. Je remercie également I. Sigal, P. Perry et A. Jensen pour de nombreuses discussions.

Bibliographie

1. Agmon, S.: Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. 4, **2**, 151–218 (1975)
2. Enss, V.: Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering. I. Short range potentials. Commun. Math. Phys. **61**, 285 (1978)
3. Faddeev, L.: Mathematical aspects of the three body problem in quantum scattering. Steklov Institute (1963)
4. Ginibre, J., Moulin, M.: Hilbert space approach to the quantum mechanical three-body problem. Ann. Inst. Henri Poincaré A **21**, 97–145 (1974)
5. Hagedorn, G.: Trans. Am. Math. Soc. **358**, 1–75 (1980)
6. Jafaev, D.R.: Math. Sb. **106**, 622 (1978)
7. Lavíne, R.: J. F. A. **12** (1973)
8. Mourre, E.: Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators. Commun. Math. Phys. **78**, 391 (1981)
9. Mourre, E.: Link between the geometrical and the spectral transformation approaches in scattering theory. Commun. Math. Phys. **68**, 91 (1979)
10. Mourre, E.: Algebraic approach to some propagation properties of the Schrödinger equation. VIth Conference on Mathematical Physics, Berlin, August 1981
11. a) Mourre, E.: Opérateurs conjugués. I. Preprint Marseille, Nov. 1981
    b) Mourre, E.: Opérateurs conjugués. II. Preprint Marseille, Mars 1982
12. Perry, P., Sigal, I., Simon, B.: Ann. Math. **114** (1981)
13. Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics, Vols. II–IV. New York: Academic Press 1972–1979
14. Sigal, I.: Memoirs of the A.M.S. No. 209 (1979); Scattering theory for multiparticle systems I and II. Preprint E.T.H. (1977–1978)
15. Thomas, L.: Asymptotic completeness in two- and three-particle quantum mechanical scattering. Ann. Phys. **90**, 127–165 (1975)

Communicated by B. Simon

Reçu le 18 decembre 1981; revisé le 23 juin 1983