А. Я. Силенко, Оператор Гамильтона и квазиклассический предел для скалярных частиц в электромагнитном поле, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 3, 398–411

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf6255

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 156, № 3
сентябрь, 2008**

 А. Я. Силенко*

ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

С помощью последовательно проведенных обобщенного преобразования Кейза–Фолди–Фешбаха–Вилларса и преобразования Фолди–Ваутхойзена выведен оператор Гамильтона для релятивистских скалярных частиц в электромагнитном поле. Обобщенное преобразование Кейза–Фолди–Фешбаха–Вилларса, в отличие от оригинального преобразования, содержит произвольный параметр и может быть произведено для безмассовых частиц, что позволяет решить проблему безмассовых частиц в электромагнитном поле. Показано, что вид оператора Гамильтона в представлении Фолди–Ваутхойзена не зависит от произвольно выбираемого параметра. По сравнению с классическим гамильтонианом для точечных частиц оператор Гамильтона содержит слагаемые квантовой природы, характеризующие квадрупольное взаимодействие движущихся частиц с электрическим полем, электрическую и смешанную поляризуемости. Получены квантово-механические и квазиклассические уравнения движения массивных и безмассовых частиц в электромагнитном поле.

Ключевые слова: уравнение Клейна–Гордона, преобразование Кейза–Фолди–Фешбаха–Вилларса, преобразование Фолди–Ваутхойзена, скалярные частицы, электромагнитное взаимодействие.

1. ВВЕДЕНИЕ

Скалярные (бесспиновые) частицы не имеют собственных мультипольных моментов. Поэтому исследование их взаимодействия с внешним полем дает прекрасную возможность сравнения выводов классической и квантовой теорий. Дополнительные слагаемые в квантово-механическом гамильтониане описывают взаимодействие, имеющее квантовую природу.

Для частиц с нулевым спином во внешнем поле исходным является уравнение второго порядка – уравнение Клейна–Гордона (КГ). Однако оно менее удобно для получения информации о наблюдаемых величинах, чем релятивистское волновое уравнение для оператора Гамильтона или уравнение первого порядка Даффина–Деммера–Петьо (ДКП) [1]–[3]. Уравнение ДКП успешно применяется для частиц со

*Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь. E-mail: silenko@inp.minsk.by

спинами 0 и 1. В настоящей работе оператор Гамильтона преобразуется к диагональному виду, характеризующему представление Фолди–Ваутхойзена (ФВ) [4]. Использование этого представления упрощает нахождение собственных и средних значений операторов и вывод квазиклассических уравнений движения (см. [5]).

Переход от уравнения второго порядка к уравнению первого порядка требует определенной осторожности. При этом часто извлекают квадратный корень из обеих частей операторного уравнения (см., например, [6]). Однако этот метод может приводить к неточностям [7]. Известными и хорошо обоснованными методами являются применение преобразования Кейза–Фолди–Фешбаха–Вилларса (КФФВ) к уравнению для оператора Гамильтона [8]–[10] и использование уравнения ДКП для частиц во внешнем поле [11]–[15].

Оператор Гамильтона для релятивистских скалярных точечных частиц может быть выведен с помощью метода, предложенного в [7] и использующего последовательно преобразования КФФВ и ФВ. Преобразование ФВ для нерелятивистских скалярных частиц в электромагнитном поле было проведено в [8], [10], [16]. В настоящей работе используется обобщенное преобразование КФФВ, которое можно применить и для безмассовых частиц. Выводится уравнение для оператора Гамильтона, описывающего взаимодействие массивных и безмассовых релятивистских скалярных частиц с электромагнитным полем.

Использована система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. В разделах 5, 6 мы явно вводим постоянную $\hbar$ в некоторые уравнения.

2. ПЕРЕХОД К УРАВНЕНИЮ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ

Исходное уравнение КГ для скалярных частиц в электромагнитном поле имеет вид

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2\right]\psi = 0, \tag{1}$$

где φ и $\mathbf{A}$ – скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, $\mathbf{p} = -i\nabla$, e и m – заряд и масса частицы, ψ – однокомпонентная волновая функция. Это уравнение второго порядка. Одним из основных методов исследования взаимодействия скалярных частиц с внешним полем является переход к уравнению первого порядка относительно производной по времени. Такой переход может быть произведен с помощью преобразования КФФВ, предложенного в [8]–[10]. Его результатом является представление волнового уравнения для скалярных частиц в гамильтоновой форме.

Отметим, что подобное преобразование к уравнению первого порядка производится и для частиц со спином 1. Хотя исходные релятивистские волновые уравнения второго порядка для частиц со спинами 0 и 1 существенно различаются между собой, их преобразование имеет некоторые общие черты и производится с помощью подобных методов. Для частиц со спином 1 такое преобразование было выполнено в работе [17]. Обобщенное преобразование Сакаты–Такетани для частиц, имеющих аномальный магнитный момент и электрический квадрупольный момент, было проведено в [18]. Во всех случаях результатом преобразований является уравнение для недиагонального гамильтониана, действующего на биспинорную волновую функцию. Волновые функции уравнения для оператора Гамильтона, получаемого в результате преобразования КФФВ, формально также можно рассматривать как биспиноры. Для бесспиновых частиц "спиноры" однокомпонентны, а "биспинорные" волновые функции двухкомпонентны.

Хотя для частиц с целочисленным спином уравнения для недиагональных гамильтонианов формально подобны уравнению Дирака, вид оператора Гамильтона и нормировка волновой функции существенно иные, чем для частиц со спином 1/2. В то же время существует определенная аналогия между свойствами оператора Гамильтона и волновых функций для частиц со спинами 0 и 1. Волновые функции частиц со спинами 0, 1/2 и 1 (биспиноры) могут быть записаны в общем виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где ϕ и χ – верхний и нижний спиноры. Нормировка волновых функций для частиц со спинами 0 и 1 имеет вид [18], [19]

$$\int \Psi^\dagger \rho_3 \Psi \, dV = 1.$$

Здесь и ниже ρ_i, $i = 1, 2, 3$, – матрицы Паули, компоненты которых действуют на спиноры ϕ, χ:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_3 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Гамильтониан для частиц со спинами 0 и 1 является псевдоэрмитовым, или, точнее, β-псевдоэрмитовым (см. [20] и цитированную там литературу), и неэрмитовым в обычном смысле. Он удовлетворяет соотношению [20]

$$\mathcal{H}^\dagger = \beta \mathcal{H} \beta, \qquad \beta^{-1} = \beta,$$

которое эквивалентно [18], [19]

$$\mathcal{H}^\ddagger \equiv \rho_3 \mathcal{H}^\dagger \rho_3 = \mathcal{H}. \tag{4}$$

Определим [19] псевдоскалярное произведение двух волновых функций Ψ_1 и Ψ_2 как интеграл:

$$\langle \Psi_1 \mid \Psi_2 \rangle = \int \Psi_1^\dagger \rho_3 \Psi_2 \, dV. \tag{5}$$

Тогда независимо от исходного представления псевдоскалярное произведение не меняется при псевдоунитарном преобразовании вида $\Psi'_{1,2} = U\Psi_{1,2}$, оператор которого обладает следующим свойством [19]:

$$U^\ddagger \equiv \rho_3 U^\dagger \rho_3 = U^{-1}. \tag{6}$$

Для скалярных частиц недиагональный оператор Гамильтона, действующий на двухкомпонентную волновую функцию и полученный путем преобразования волнового уравнения второго порядка (уравнения КГ), был найден в работе Кейза [8].

Метод нахождения нужного преобразования был описан Фолди [9]. В настоящее время обычно используется вариант этого метода, предложенный Фешбахом и Вилларсом [10]. Поэтому мы будем называть представление, в котором задан указанный выше недиагональный оператор Гамильтона, представлением КФФВ.

С помощью псевдоунитарного преобразования, которым является преобразование ФВ, недиагональный оператор Гамильтона можно преобразовать из исходного представления КФФВ (представления Сакаты–Такетани для частиц со спином 1) к диагональному (для частиц со спином 1 – к блочно-диагональному, т.е. диагональному по двум спинорам) виду. Для релятивистских свободных скалярных частиц и в нерелятивистском пределе для скалярных частиц в электромагнитном поле такое преобразование было выполнено в [8], [10], [16].

Переход от уравнения второго порядка КГ к уравнению первого порядка, выполненный с помощью преобразования КФФВ, является точным. Результирующее уравнение определяет недиагональный оператор Гамильтона, действующий на двухкомпонентную “биспинорную” волновую функцию (2).

В работе [9] был указан метод преобразования к уравнению первого порядка для свободных частиц путем перехода к двухкомпонентной волновой функции Ψ. Для частиц во внешнем поле подобное преобразование, которое в настоящее время является общепринятым, было выполнено в работе Фешбаха и Вилларса [10] (см. также [19]). Оно заключается во введении волновых функций, удовлетворяющих условиям [10], [19]

$$\psi=\phi+\chi, \qquad i\frac{\partial\psi}{\partial t}-e\varphi\psi=m(\phi-\chi). \tag{7}$$

В этом случае двухкомпонентная волновая функция имеет вид

$$\Psi=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi+\dfrac{1}{m}\left[i\dfrac{\partial\psi}{\partial t}-e\varphi\psi\right]\\ \psi-\dfrac{1}{m}\left[i\dfrac{\partial\psi}{\partial t}-e\varphi\psi\right]\end{pmatrix}. \tag{8}$$

В работах [21] было показано, что в общем случае преобразование уравнения (1) в уравнение первого порядка производится по формулам вида (7), (8), в которых массу частицы m можно заменить любым ненулевым параметром. Поскольку преобразование КФФВ [8]–[10] применимо только для массивных частиц, представляет интерес рассмотрение обобщенного преобразования [21], которое можно использовать и для безмассовых частиц. Мы будем исследовать обобщенное преобразование КФФВ, для которого масса m заменена произвольной действительной ненулевой константой. Наличие произвольного параметра позволяет определенным образом менять вид обобщенного преобразования КФФВ. В результате форма промежуточного уравнения с недиагональным (по компонентам волновой функции) гамильтонианом в обобщенном представлении КФФВ также может варьироваться. Однако, как будет показано ниже, конечное выражение для оператора Гамильтона в представлении ФВ не зависит от вида указанного промежуточного уравнения.

Используемое в настоящей работе обобщенное преобразование применимо и для безмассовых частиц. Это обстоятельство является весьма важным, поскольку уравнения для безмассовых частиц не могут быть получены из уравнений для массивных частиц путем перехода к пределу $m \to 0$ (см. [22] и цитированную там литературу).

Таким образом, при подходе, который применяется в настоящей работе, волновые функции ϕ и χ определяются уравнениями

$$\psi = \phi + \chi, \qquad \left(i\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right)\psi = N(\phi - \chi), \tag{9}$$

где N – произвольный действительный ненулевой параметр.

Если умножить последнее уравнение на множитель $i\partial/\partial t - e\varphi$, то уравнения (9) могут быть представлены в матричной форме:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi, \qquad \mathcal{H} = \rho_3\frac{\boldsymbol{\pi}^2 + m^2 + N^2}{2N} + e\varphi + i\rho_2\frac{\boldsymbol{\pi}^2 + m^2 - N^2}{2N}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A} = -i\nabla - e\mathbf{A}$ – оператор кинетического импульса, ρ_i – матрицы Паули (3), компоненты которых действуют на соответствующие компоненты волновой функции Ψ.

Уравнение, эквивалентное (10), рассмотрено в [21]. В работе Фешбаха и Вилларса [10] рассмотрен частный вид этого уравнения при $N = m$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОЛДИ–ВАУТХОЙЗЕНА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Представление ФВ, описанное в классической работе [4], занимает особое место в релятивистской квантовой механике. В этом представлении соотношения между операторами полностью аналогичны соотношениям между соответствующими классическими величинами. Операторы в представлении ФВ имеют такой же вид, как в нерелятивистской квантовой механике. Весьма важно, что в данном представлении очень простой вид имеют операторы координат $\mathbf{r}$ и импульса $\mathbf{p} = -i\nabla$. Именно представление ФВ обеспечивает наилучшую возможность получения классического предела релятивистской квантовой механики [4], [5], [23].

Результатом преобразования волновой функции к данному представлению (преобразования ФВ) является переход к квазидиагональной (диагональной по двум спинорам) форме гамильтониана. При этом происходит разделение состояний с положительной и отрицательной полной энергией. В представлении ФВ не возникает проблемы "дрожания" (Zitterbewegung). Преобразование ФВ радикально упрощает переход к квазиклассическому пределу, для которого, в частности, не требуется такая процедура, как выделение четных частей операторов.

Мы используем преобразование ФВ в одночастичном приближении, когда радиационные поправки не рассчитываются с помощью теоретико-полевых методов, а учитываются феноменологически путем включения дополнительных слагаемых в релятивистские волновые уравнения (подобно аномальному магнитному моменту [24]). Одночастичное приближение, естественно, применимо и для релятивистских частиц, когда при заданной энергии взаимодействия вероятностью рождения пар и потерями на тормозное излучение можно пренебречь.

Гамильтониан $\mathcal{H}$ можно разложить на операторы, коммутирующие и антикоммутирующие с оператором ρ_3:

$$\mathcal{H} = \rho_3\mathcal{M} + \mathcal{E} + \mathcal{O}, \qquad \rho_3\mathcal{M} = \mathcal{M}\rho_3, \qquad \rho_3\mathcal{E} = \mathcal{E}\rho_3, \qquad \rho_3\mathcal{O} = -\mathcal{O}\rho_3. \tag{11}$$

В рассматриваемом случае

$$\mathcal{M} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2 + m^2 + N^2}{2N}, \qquad \mathcal{E} = e\varphi, \qquad \mathcal{O} = i\rho_2\frac{\boldsymbol{\pi}^2 + m^2 - N^2}{2N}. \tag{12}$$

Очень важно, что уравнения, определяющие оператор Гамильтона для частиц со спинами 0, 1/2 и 1, имеют один и тот же вид (11). Поэтому формально совпадают и соответствующие выражения для оператора U, приводящего оператор Гамильтона к блочно-диагональному виду. Это позволяет применять для скалярных частиц методы преобразования ФВ, разработанные для частиц со спинами 1/2 [4], [5], [25]–[29] и 1 [30], [31]. Однако следует учитывать, что, как было впервые показано в [32], не любая диагонализация гамильтониана приводит к представлению ФВ. Для примера можно взять преобразование Эриксена–Корлсруда [33], приводящее оператор Гамильтона к блочно-диагональному виду. В работе [34] было доказано, что даже для свободных частиц оно не приводит к представлению ФВ.

Существует ряд методов преобразования ФВ для нерелятивистских частиц со спином 1/2, позволяющих рассчитать релятивистские поправки [4], [25], [27]–[29]. Классический метод такого преобразования, предложенный в [4] (см. также [27]) для случая $\mathcal{M} = m$, заключается в применении оператора

$$U = e^{iS}, \qquad S = -\frac{i}{2m}\rho_3\mathcal{O}. \tag{13}$$

Преобразованный гамильтониан может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' = \mathcal{H} + i[S,\mathcal{H}] + \frac{i^2}{2!}[S,[S,\mathcal{H}]] + \frac{i^3}{3!}[S,[S,[S,\mathcal{H}]]] + \cdots - \\ - \dot{S} - \frac{i}{2!}[S,\dot{S}] - \frac{i^2}{3!}[S,[S,\dot{S}]] - \cdots,\end{aligned} \tag{14}$$

где $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ – коммутатор. В результате преобразования (14) гамильтониан определяется уравнением [4], [27]

$$\mathcal{H}' = \rho_3\epsilon + \mathcal{E}' + \mathcal{O}', \qquad \rho_3\mathcal{E}' = \mathcal{E}'\rho_3, \qquad \rho_3\mathcal{O}' = -\mathcal{O}'\rho_3, \tag{15}$$

в котором $\epsilon = \sqrt{m^2 + p^2}$, а нечетный оператор $\mathcal{O}'$ теперь имеет порядок $O(1/m)$. Для достижения требуемой точности это преобразование может повторяться многократно.

Однако для релятивистских частиц во внешнем поле переход к представлению ФВ в общем случае достаточно сложен. Есть серьезные аргументы [32] в пользу того, что для дираковских частиц в произвольном внешнем поле точное решение этой задачи получено Эриксеном [25]. Однако найденное в [25] выражение содержит квадратные корни из матричных операторов, что, как правило, не позволяет получить явный вид оператора Гамильтона. Для релятивистских частиц его также весьма трудно представить в виде ряда по степеням энергии взаимодействия с внешним полем. Ввиду сложности указанное точное решение не использовалось при проведении преобразования ФВ для релятивистских частиц во внешнем поле. В настоящей работе такое преобразование выполнено при помощи метода, разработанного в работе [5] для частиц со спином 1/2. Этот метод позволяет найти релятивистский гамильтониан в виде ряда по степеням потенциалов внешнего поля и их производных. В некоторых частных случаях данный метод приводит к точному преобразованию ФВ [5].

Для нерелятивистских частиц со спином 1 в электромагнитном поле преобразование ФВ было выполнено в [18], а в релятивистском случае – в [30], [31]. Преобразование ФВ для нерелятивистских скалярных частиц в электромагнитном поле было использовано в [8], [10], [16], а для релятивистских – в [7]. В работе [16] также было выполнено нерелятивистское преобразование ФВ для системы двух частиц: бозона со спином 0 и фермиона со спином 1/2.

Хотя исходные релятивистские волновые уравнения для частиц со спинами 0 и 1 существенно различаются между собой, их преобразование к представлению ФВ имеет общие черты и производится с помощью подобных методов. Прежде всего общей чертой является необходимость проведения предварительного преобразования, приводящего исходные уравнения к гамильтоновой форме. Это преобразования КФФВ [8]–[10] для скалярных частиц и Сакаты–Такетани [17] для частиц со спином 1. Обобщенное преобразование Сакаты–Такетани для частиц, имеющих аномальный магнитный момент и электрический квадрупольный момент, было выполнено в [18]. Во всех случаях результатом является уравнение для недиагонального гамильтониана, действующего на биспинорную волновую функцию.

При выполнении условий коммутации

$$[\mathcal{M},\mathcal{O}]=0,\qquad [\mathcal{E},\mathcal{O}]=0 \tag{16}$$

и в стационарном внешнем поле может быть произведено точное преобразование ФВ. В этом случае гамильтониан $\mathcal{H}$ преобразуется к блочно-диагональному виду с помощью оператора [5], [31]:

$$U=\frac{\epsilon+\mathcal{M}+\rho_3\mathcal{O}}{\sqrt{2\epsilon(\epsilon+\mathcal{M})}},\qquad U^{-1}=\frac{\epsilon+\mathcal{M}-\rho_3\mathcal{O}}{\sqrt{2\epsilon(\epsilon+\mathcal{M})}},\qquad \epsilon=\sqrt{\mathcal{M}^2+\mathcal{O}^2}. \tag{17}$$

Трансформированный гамильтониан имеет вид [5], [31]

$$\mathcal{H}'=\rho_3\epsilon+\mathcal{E}. \tag{18}$$

В общем случае, определяемом формулами (11), (12), внешнее поле нестационарно, оператор $\mathcal{O}$ коммутирует с $\mathcal{M}$, но может не коммутировать с $\mathcal{E}$. Мы проводим расчеты в приближении слабого поля и полагаем, что энергия взаимодействия мала по сравнению с полной энергией, включающей энергию покоя mc^2 и приблизительно равной ϵ. При использовании приближения слабого поля малыми безразмерными параметрами, по которым производится разложение, являются отношения тех слагаемых в операторе взаимодействия частицы с внешним полем, которые пропорциональны первым степеням потенциалов поля и их пространственных и временных производных, к полной энергии частицы. Полное решение задачи дает выражение для оператора Гамильтона в представлении ФВ в виде ряда по степеням потенциалов внешнего поля и их производных.

Используемый нами метод, разработанный в [5], [31], заключается в следующем. Сначала производится псевдоунитарное преобразование с оператором (17) (см. [5], [31]). После этого преобразования гамильтониан $\mathcal{H}'$ еще содержит нечетные слагаемые, пропорциональные производным от потенциалов, и может быть записан в виде

$$\mathcal{H}' = \rho_3\epsilon + \mathcal{E}' + \mathcal{O}', \qquad \rho_3\mathcal{E}' = \mathcal{E}'\rho_3, \qquad \rho_3\mathcal{O}' = -\mathcal{O}'\rho_3, \tag{19}$$

где (см. [5])

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}' &= \mathcal{E} - \frac{1}{4}\left[\frac{\epsilon+\mathcal{M}}{\sqrt{\epsilon(\epsilon+\mathcal{M})}}, \left[\frac{\epsilon+\mathcal{M}}{\sqrt{\epsilon(\epsilon+\mathcal{M})}}, \mathcal{F}\right]\right] + \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[\frac{\beta\mathcal{O}}{\sqrt{\epsilon(\epsilon+\mathcal{M})}}, \left[\frac{\beta\mathcal{O}}{\sqrt{\epsilon(\epsilon+\mathcal{M})}}, \mathcal{F}\right]\right], \\
\mathcal{O}' &= \frac{\beta\mathcal{O}}{\sqrt{2\epsilon(\epsilon+\mathcal{M})}}\mathcal{F}\frac{\epsilon+\mathcal{M}}{\sqrt{2\epsilon(\epsilon+\mathcal{M})}} - \frac{\epsilon+\mathcal{M}}{\sqrt{2\epsilon(\epsilon+\mathcal{M})}}\mathcal{F}\frac{\beta\mathcal{O}}{\sqrt{2\epsilon(\epsilon+\mathcal{M})}}, \\
&\qquad \mathcal{F} = \mathcal{E} - i\frac{\partial}{\partial t},
\end{aligned} \tag{20}$$

ϵ определяется формулой (17). При использовании приближения слабого поля нечетный оператор $\mathcal{O}'$ мал по сравнению как с ϵ, так и с исходным гамильтонианом $\mathcal{H}$. Это позволяет использовать на второй стадии обычную схему, характерную для нерелятивистского преобразования ФВ [4], [5], [27], [31]. Такое преобразование выполняется с помощью оператора

$$U' = e^{iS'}, \qquad S' = -\frac{i}{4}\rho_3\left\{\mathcal{O}', \frac{1}{\epsilon}\right\} = -\frac{i}{4}\left[\frac{\rho_3}{\epsilon}, \mathcal{O}'\right], \tag{21}$$

где $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ – антикоммутатор. Дальнейшие вычисления такие же, как в случае частиц со спинами 1/2 и 1 (см. [5], [27], [31]). В отличие от [27], в данном случае масса частицы должна быть заменена на оператор ϵ, не коммутирующий с операторами $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{O}'$. Если учитывать только основные поправки, которые пропорциональны $\mathcal{O}'^2$, т.е. вторым степеням потенциалов поля и их пространственных и временных производных, то преобразованный гамильтониан приобретает вид [5]

$$\mathcal{H}_{\mathrm{FW}} = \mathcal{H}'' = \rho_3\epsilon + \mathcal{E}' + \frac{\rho_3}{4}\left\{\frac{1}{\epsilon}, \mathcal{O}'^2\right\}. \tag{22}$$

Для достижения требуемой точности процедура преобразования с оператором (21) (S' заменяется на S'', S''' и т.д.) может повторяться многократно.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОЛДИ–ВАУТХОЙЗЕНА ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ

Проведем преобразование ФВ для релятивистских скалярных частиц в электромагнитном поле с помощью описанного выше метода. Мы полагаем, что энергия взаимодействия мала по сравнению с полной энергией, включающей энергию покоя. Для гамильтониана, определяемого формулами (11), (12),

$$\epsilon = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{\pi}^2}, \tag{23}$$

а псевдоунитарный оператор преобразования (17) в рассматриваемом случае может быть приведен к виду

$$U = \frac{\epsilon + N + \rho_1(\epsilon - N)}{2\sqrt{\epsilon N}}. \tag{24}$$

В результате преобразования исходного гамильтониана, определяемого формулами (11), (12), с помощью оператора (24) трансформированный гамильтониан $\mathcal{H}'$ еще содержит нечетные слагаемые и имеет вид (19), где

$$\mathcal{E}' = i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\epsilon}\mathcal{F}\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{F}\sqrt{\epsilon}\right), \qquad \mathcal{O}' = \frac{\rho_1}{2}\left(\sqrt{\epsilon}\mathcal{F}\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{F}\sqrt{\epsilon}\right), \tag{25}$$

а ϵ определяется формулой (23). Используя соотношения коммутации, формулы (25) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}\left[\sqrt{\epsilon}, [\sqrt{\epsilon}, \mathcal{F}]\right]\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, \qquad \mathcal{O}' = \rho_1\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}[\epsilon, \mathcal{F}]\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}. \tag{26}$$

Формулы (23), (25), (26) являются точными для произвольного оператора $\mathcal{E}$ и не зависят от N. Это означает, что оператор Гамильтона в представлении ФВ, получаемый в результате следующего этапа преобразований, также не зависит от N. Представление КФФВ таким свойством не обладает. Таким образом, последовательное проведение обобщенного преобразования КФФВ и преобразования ФВ еще раз демонстрирует особую роль представления ФВ в физике частиц, на этот раз на примере частиц со спином 0.

Приближенно (см. общие формулы для коммутаторов в [5])

$$[\epsilon, \mathcal{F}] = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\epsilon}, [\boldsymbol{\pi}^2, \mathcal{F}]\right\}, \qquad [\sqrt{\epsilon}, [\sqrt{\epsilon}, \mathcal{F}]] = \frac{1}{32}\left\{\frac{1}{\epsilon^3}, [\boldsymbol{\pi}^2, [\boldsymbol{\pi}^2, \mathcal{F}]]\right\}.$$

Оператор Гамильтона в представлении ФВ, который может быть найден по приближенной формуле (22), равен

$$\mathcal{H}_{\mathrm{FW}} = \rho_3\epsilon + \mathcal{E} + \frac{1}{64}\left\{\frac{1}{\epsilon^4}, [\boldsymbol{\pi}^2, [\boldsymbol{\pi}^2, \mathcal{F}]]\right\} + \frac{\rho_3}{64}\left\{\frac{1}{\epsilon^5}, ([\boldsymbol{\pi}^2, \mathcal{F}])^2\right\}. \tag{27}$$

Проведенные вычисления носят общий характер, и формулы (23)–(27) справедливы в случае взаимодействия скалярных частиц с любым внешним полем, гамильтониан которого определяется уравнениями (11), (12) с произвольными $\mathcal{E}$ и $\boldsymbol{\pi}$. Для электромагнитного взаимодействия, описываемого формулами (11), (12),

$$\begin{gathered}[\boldsymbol{\pi}^2, \mathcal{F}] = 2ie\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E}, \qquad [\boldsymbol{\pi}^2, [\boldsymbol{\pi}^2, \mathcal{F}]] = 4e(\boldsymbol{\pi}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E}) - 4e^2\boldsymbol{\pi}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}),\\ (\boldsymbol{\pi}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E}) \equiv \pi_i\pi_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i}.\end{gathered} \tag{28}$$

В результате находим окончательное приближенное выражение для оператора Гамильтона в представлении ФВ, характеризующего взаимодействие точечных скалярных частиц с электромагнитным полем:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{F}W} = \rho_3\epsilon + e\varphi + \frac{e}{8\epsilon^4}(\boldsymbol{\pi}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E}) - \frac{e^2}{8\epsilon^4}\boldsymbol{\pi}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \rho_3\frac{e^2}{8\epsilon^5}(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E})^2. \tag{29}$$

Отметим, что последовательное проведение обобщенного преобразования КФФВ и преобразования ФВ позволило вывести оператор Гамильтона, который описывает как массивные, так и безмассовые частицы, и, таким образом, решить проблему безмассовых частиц в электромагнитном поле. Оригинальное преобразование [8]–[10], как следует из уравнений (7), (8), не может проводиться при $m = 0$. При использовании оригинального метода [8]–[10] случай безмассовых частиц не может быть рассмотрен как предельный при $m \to 0$ для случая массивных частиц, поскольку при таком подходе масса является множителем, что делает нахождение предела при $m \to 0$ бесполезным. Точно такая же ситуация имеет место при попытке использования данного предела для описания безмассовых частиц с помощью уравнения ДКП (см. [22]).

В формулах (28), (29) мы не учитываем порядок операторов, имея в виду последующий переход к квазиклассическому приближению. Такой переход требует соблюдения условия малости средних значений коммутаторов операторов динамических переменных (координат и импульса) по сравнению со средними значениями произведений этих операторов. В этом случае можно переставлять соответствующие некоммутирующие операторы в квантово-механических выражениях.

5. СРАВНЕНИЕ СВОЙСТВ ЧАСТИЦ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Квазиклассический переход может быть выполнен аналогично работе [5]. Указанное выше условие малости средних значений коммутаторов операторов координат и импульса по сравнению со средними значениями произведений этих операторов автоматически выполняется в том случае, когда характерный размер области неоднородности внешнего поля значительно больше, чем длина волны де Бройля частицы: $l \gg \hbar/p$. В этом случае квазиклассический переход производится путем тривиальной замены операторов в квантово-механических уравнениях для верхнего спинора соответствующими классическими величинами.

Полученный квазиклассический гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}} = \epsilon + e\varphi + \frac{e}{8\epsilon^4}(\boldsymbol{\pi}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E}) - \frac{e^2}{8\epsilon^4}\boldsymbol{\pi}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \frac{e^2}{8\epsilon^5}(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E})^2. \tag{30}$$

Соответствующий классический гамильтониан содержит только два первых слагаемых:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{c}} = \epsilon + e\varphi. \tag{31}$$

Хотя частицы предполагаются точечными, три последних слагаемых в квазиклассическом гамильтониане (29) описывают свойства, характерные для составных классических частиц. Однако гамильтониан не содержит слагаемого, характеризующего контактное (дарвиновское) взаимодействие покоящихся частиц. Более того, для покоящихся частиц все квантовые поправки обращаются в нуль. Это свойство согласуется с результатами, полученными в работе [35]. Приведенные в этой работе вывод оператора Гамильтона для частиц произвольного спина и последующее преобразование ФВ для нерелятивистских частиц показывают, что появление статического контактного (дарвиновского) взаимодействия связано с наличием у частиц спина. Отсутствие такого взаимодействия для частиц с нулевым спином проявляется в том, что слагаемое, характеризующее контактное взаимодействие [35], обращается в бесконечность при $S = 0$.

Включение постоянной $\hbar$ в уравнение (29) показывает, что три последних слагаемых пропорциональны $\hbar^2$:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}} = \epsilon + e\varphi + \frac{e\hbar^2}{8\epsilon^4}(\boldsymbol{\pi}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E}) - \frac{e^2\hbar^2}{8\epsilon^4}\boldsymbol{\pi}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \frac{e^2\hbar^2}{8\epsilon^5}(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E})^2. \tag{32}$$

Движущиеся частицы имеют ряд неклассических свойств. Третье слагаемое в (29) описывает квадрупольное взаимодействие с электрическим полем. Аналогичное слагаемое входит в гамильтониан для частиц со спином 1/2 [5], [26]. Последнее слагаемое характеризует электрическую поляризуемость движущихся частиц, которая также не равна нулю для точечных частиц со спином 1/2 [26], а предыдущее слагаемое – смешанную поляризуемость. Индуцированный электрический дипольный момент равен

$$\mathbf{d} = \frac{\partial\mathcal{H}_{\mathrm{s}}}{\partial\mathbf{E}} = \frac{e^2\hbar^2}{8\epsilon^4}\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{H} - \frac{e^2\hbar^2}{4\epsilon^5}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E}). \tag{33}$$

Индуцированный магнитный дипольный момент определяется формулой

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\partial\mathcal{H}_{\mathrm{s}}}{\partial\mathbf{H}} = -\frac{e^2\hbar^2}{8\epsilon^4}\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{E}. \tag{34}$$

Таким образом, индуцированный электрический дипольный момент пропорционален напряженности магнитного поля, а индуцированный магнитный дипольный момент пропорционален напряженности электрического поля. Эти свойства имеют квантовую природу.

Квантово-механическое уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}_{FW},\boldsymbol{\pi}] - e\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \tag{35}$$

В рассматриваемом случае его квазиклассический предел определяется формулой

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} &= e\mathbf{E} + \frac{e}{\epsilon}(\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{H}) + \frac{e^2\hbar^2}{8\epsilon^4}[(\boldsymbol{\pi}\cdot\nabla)(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - (\mathbf{H}\times\nabla)(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E})] + \\ &+ \frac{e^3\hbar^2}{8\epsilon^4}[H^2\mathbf{E} - \mathbf{H}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})] - \frac{e^3\hbar^2}{4\epsilon^5}(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E})(\mathbf{E}\times\mathbf{H}).\end{aligned} \tag{36}$$

Квантовые поправки к классическому выражению, определяющему силу Лоренца, очень малы.

6. УРАВНЕНИЕ ДАФФИНА–КЕММЕРА–ПЕТЬО ДЛЯ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ И ПРОБЛЕМА БЕЗМАССОВЫХ ЧАСТИЦ

Уравнение ДКП [1]–[3] для частиц со спинами 0 и 1 является аналогом уравнения Дирака. Для свободных скалярных частиц оно имеет вид

$$(\beta^\mu \partial_\mu - m)\Phi = 0, \tag{37}$$

где

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Ковариантное обобщение этого уравнения для частиц со спином 0 в электромагнитном поле принимает вид [11]–[13]

$$(\beta^\mu D_\mu - m)\Phi = 0, \qquad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \tag{39}$$

где $A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A})$ – четырехмерный потенциал электромагнитного поля. Запишем уравнение (39) в явном виде:

$$\begin{gathered} -D_0\Phi_5 = m\Phi_1, \qquad D_1\Phi_5 = m\Phi_2, \qquad D_2\Phi_5 = m\Phi_3, \qquad D_3\Phi_5 = m\Phi_4, \\ D_0\Phi_1 + D_1\Phi_2 + D_2\Phi_3 + D_3\Phi_4 = m\Phi_5. \end{gathered} \tag{40}$$

Эквивалентность уравнений ДКП и КГ доказана не только для электромагнитного [11]–[13], но и для других взаимодействий [12], [13], [15]. Исключение компонент Φ_2, Φ_3, Φ_4 из уравнения (40) приводит к соотношениям

$$-D_0\Phi_5 = m\Phi_1, \qquad D_0\Phi_1 = \left(m - \frac{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}{m}\right)\Phi_5. \tag{41}$$

Преобразование $\Phi_1 = \phi - \chi$, $\Phi_5 = -i(\phi + \chi)$ позволяет получить уравнение

$$iD_0\Psi = \left[\rho_3\left(m - \frac{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}{2m}\right) - i\rho_2 \frac{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}{2m}\right]\Psi, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{42}$$

которое эквивалентно уравнению (10) при условии, что $N = m$. Исключение Φ_1 из уравнения (41) дает исходное уравнение (1).

Однако уравнение ДКП (39) неприменимо к безмассовым частицам даже при переходе к пределу $m \to 0$ [22], в то время как предложенный в настоящей работе метод, базирующийся на обобщенном преобразовании КФФВ, работает и в этом случае. Модификация уравнения ДКП, позволяющая описать свободные безмассовые частицы, была найдена в [22]. Релятивистское волновое уравнение для оператора Гамильтона в представлении ФВ дает исчерпывающее квантово-механическое описание взаимодействия безмассовых частиц с электромагнитным полем. Естественно, оно не учитывает квантово-полевых эффектов. Для безмассовых частиц данное уравнение в соответствии с формулой (29) для гамильтониана имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_{\rm FW}}{\partial t}=\left[\rho_3\epsilon+e\varphi+\frac{e\hbar^2}{8c^2\epsilon^2}\frac{\partial E_x}{\partial x}-\frac{e^2\hbar^2}{8c\epsilon^3}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_x-\rho_3\frac{e^2\hbar^2}{8c^2\epsilon^3}E_x^2\right]\Psi_{\rm FW}, \tag{43}$$

где $\epsilon=c\sqrt{\boldsymbol{\pi}^2}$, а направление движения частицы $\mathbf{l}=c\boldsymbol{\pi}/\epsilon$ выбрано в качестве оси x. В представлении ФВ можно использовать только верхний спинор, поскольку нижний спинор, характеризующий состояния с отрицательной полной энергией, для реальных частиц равен нулю. В этом случае релятивистское волновое уравнение приобретает вид

$$i\hbar\frac{\partial\phi_{\rm FW}}{\partial t}=\left[\epsilon+e\varphi+\frac{e\hbar^2}{8c^2\epsilon^2}\frac{\partial E_x}{\partial x}-\frac{e^2\hbar^2}{8c\epsilon^3}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_x-\frac{e^2\hbar^2}{8c^2\epsilon^3}E_x^2\right]\phi_{\rm FW}. \tag{44}$$

Уравнения (29), (43), (44) (как и исходное уравнение КГ) эквивалентны уравнению ДКП, но их отличительной чертой является то обстоятельство, что квантовые поправки к классическому гамильтониану представлены в явном виде. Эти поправки имеют релятивистский характер и обращаются в нуль в статическом пределе. Подобные поправки появляются и в квантово-механическом гамильтониане для частиц со спином 1/2 [5], [26].

7. ВЫВОДЫ

В настоящей работе исходное уравнение КГ для скалярных частиц в электромагнитном поле приведено к гамильтоновой форме с помощью последовательно проведенных обобщенного преобразования КФФВ и преобразования ФВ. Выведены релятивистские формулы для оператора Гамильтона и квазиклассического гамильтониана. Обобщенное преобразование КФФВ, в отличие от оригинального преобразования, содержит произвольный параметр, что позволяет использовать его для безмассовых частиц. Показано, что вид оператора Гамильтона в представлении ФВ не зависит от произвольно выбираемого параметра. Решена проблема безмассовых частиц в электромагнитном поле. По сравнению с классическим гамильтонианом для точечных частиц оператор Гамильтона и квазиклассический гамильтониан содержат слагаемые квантовой природы, характеризующие квадрупольное взаимодействие движущихся частиц с электрическим полем, электрическую и смешанную поляризуемости. Эти слагаемые имеют релятивистский характер и обращаются в нуль в статическом пределе. Подобные квантовые поправки к классическому гамильтониану появляются и для частиц со спином 1/2. Получены квантово-механические и квазиклассические уравнения движения массивных и безмассовых частиц в электромагнитном поле. Произведено сравнение найденных уравнений с уравнением ДКП.

Благодарности. Работа поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

[1] R. J. Duffin, *Phys. Rev.* (2), **54**:12 (1938), 1114–1114.
[2] N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **173**:952 (1939), 91–116.
[3] G. Petiau, *Contribution a la theorie des equations d'ondes corpusculaires*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect. 8° (3), **16**, 1936.
[4] L. L. Foldy, S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* (2), **78**:1 (1950), 29–36.
[5] A. J. Silenko, *J. Math. Phys.*, **44**:7 (2003), 2952–2966.
[6] A. Accioly, H. Blas, *Phys. Rev. D*, **66**:6 (2002), 067501; *Modern Phys. Lett. A*, **18**:12 (2003), 867–873.
[7] А. Я. Силенко, *ЯФ*, **64**:5 (2001), 1048–1053.
[8] K. M. Case, *Phys. Rev.* (2), **95**:5 (1954), 1323–1328.
[9] L. L. Foldy, *Phys. Rev.* (2), **102**:2 (1956), 568–581.
[10] H. Feshbach, F. Villars, *Rev. Modern Phys.*, **30**:1 (1958), 24–45.
[11] M. Nowakowski, *Phys. Lett. A*, **244**:5 (1998), 329–337.
[12] Б. М. Пиментел, В. Я. Файнберг, *ТМФ*, **124**:3 (2000), 445–462.
[13] V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, *Phys. Lett. A*, **271**:1–2 (2000), 16–25.
[14] I. V. Kanatchikov, *Rept. Math. Phys.*, **46**:1–2 (2000), 107–112.
[15] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, "Duffin–Kemmer–Petiau equation in Riemannian space-times", *Geometrical Aspects of Quantum Fields* (Londrina, 2000), eds. A. A. Bytsenko, A. E. Golcalves, B. M. Pimentel, World Scientific, Singapore, 2000, 111–127.
[16] T. Tanaka, A. Suzuki, M. Kimura, *Z. Phys. A*, **353**:1 (1995), 79–85.
[17] M. Taketani, S. Sakata, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, **22** (1940), 757–770; *Progr. Theoret. Phys.*, **1**:Suppl. 1 (1955), 84–97.
[18] J. A. Young, S. A. Bludman, *Phys. Rev.*, **131**:5 (1963), 2326–2334.
[19] А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Физматгиз, М., 1963.
[20] A. Mostafazadeh, *Czechoslovak J. Phys.*, **53**:11 (2003), 1079–1084.
[21] A. Mostafazadeh, *J. Phys. A*, **31**:38 (1998), 7829–7845; *Ann. Phys.*, **309**:1 (2004), 1–48.
[22] R. Casana, M. Pazetti, B. M. Pimentel, J. S. Valverde, *Pseudoclassical mechanics for the spin* 0 *and* 1 *particles*, `arXiv: hep-th/0506193`, 2005.
[23] J. P. Costella, B. H. J. McKellar, *Amer. J. Phys.*, **63**:12 (1995), 1119–1121.
[24] W. Pauli, *Rev. Modern Phys.*, **13**:3 (1941), 203–232.
[25] E. Eriksen, *Phys. Rev.* (2), **111**:3 (1958), 1011–1016.
[26] E. I. Blount, *Phys. Rev.* (2), **128**:5 (1962), 2454–2458.
[27] Дж. Д. Бьёркен, С. Д. Дрелл, *Релятивистская квантовая теория*. Т. 1. *Релятивистская квантовая механика*, Наука, М., 1978.
[28] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, 3-е изд., Наука, М., 1969.
[29] J. G. Körner, G. Thompson, *Phys. Lett. B*, **264**:1–2 (1991), 185–192.
[30] А. Я. Силенко, *ЖЭТФ*, **123**:5 (2003), 883–890.
[31] A. J. Silenko, *Analysis of wave equations for spin-*1 *particles interacting with an electromagnetic field*, `arXiv: hep-th/0404074`, 2004.
[32] E. de Vries, J. E. Jonker, *Nucl. Phys. B*, **6**:3 (1968), 213–225.
[33] E. Eriksen, M. Korlsrud, *Nuovo Cimento* (10), **18**:Suppl. 1 (1960), 1–39.
[34] A. J. Silenko, O. V. Teryaev, *Phys. Rev. D*, **71**:6 (2005), 064016.
[35] А. Г. Никитин, В. И. Фущич, *ТМФ*, **34**:3 (1978), 319–333.

Поступила в редакцию 12.10.2005,
после доработки 1.12.2007