ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.988.3 Поступило в редакцию 20.06.2019
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-6-647-653 Received 20.06.2019

Член-корреспондент В. В. Гороховик[1], А. С. Тыкун[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ОПОРНЫЕ ТОЧКИ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СНИЗУ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА ЛИПШИЦЕВЫХ ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Для функций, определенных на нормированных пространствах, вводится понятие $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклости, которое обобщает понятие классически выпуклых функций. $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклыми названы такие функции, которые являются верхними огибающими некоторого множества липшицевых вогнутых функций. Доказывается, что функция является $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой в том и только том случае, когда она полунепрерывна снизу и, кроме того, ограничена снизу некоторой липшицевой функцией. Как обобщение понятия глобального субдифференциала классически выпуклой функции, вводятся множество опорных $\mathcal{L}\hat{C}$-минорант к функции в заданной точке и множество нижних $\mathcal{L}\hat{C}$-опорных точек функции, в терминах которых затем устанавливаются критерий для точек глобального минимума и необходимое условие для точек глобального максимума негладких функций. Важным результатом данного сообщения является доказательство того, что для $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклых функций множество нижних $\mathcal{L}\hat{C}$-опорных точек является плотным в ее эффективной области. Данное утверждение распространяет на более широкий класс полунепрерывных снизу функций известную теорему Брондстеда–Рокафеллара о существовании субдифференциала для классически выпуклых полунепрерывных снизу функций и восходят к одному из важнейших результатов классического выпуклого анализа – теореме Бишопа–Фелпса о плотности опорных точек в границе замкнутого выпуклого множества.

Ключевые слова: абстрактная выпуклость, полунепрерывные фунции, липшицевы функции, вогнутые функции, опорные миноранты, опорные точки, плотность опорных точек, глобальный экстремум

Для цитирования: Гороховик, В. В. Опорные точки полунепрерывных снизу функций относительно множества липшицевых вогнутых функций / В. В. Гороховик, А. С. Тыкун // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 6. – С. 647–653. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-6-647-653

Corresponding Member Valentin V. Gorokhovik[1], Alexander S. Tykoun[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

SUPPORT POINTS OF LOWER SEMICONTINUOUS FUNCTIONS WITH RESPECT TO THE SET OF LIPSCHITZ CONCAVE FUNCTIONS

Abstract. For the functions defined on normed vector spaces, we introduce a new notion of the $\mathcal{L}\hat{C}$-convexity that generalizes the classical notion of convex functions. A function is called to be $\mathcal{L}\hat{C}$-convex if it can be represented as the upper envelope of some subset of Lipschitz concave functions. It is proved that the function is $\mathcal{L}\hat{C}$-convex if and only if it is lower semicontinuous and, in addition, it is bounded from below by a Lipschitz function. As a generalization of a global subdifferential of a classically convex function, we introduce the set of $\mathcal{L}\hat{C}$-minorants supported to a function at a given point and the set of $\mathcal{L}\hat{C}$-support points of a function that are then used to derive a criterion for global minimum points and a necessary condition for global maximum points of nonsmooth functions. An important result of the article is to prove that for a $\mathcal{L}\hat{C}$-convex function, the set of $\mathcal{L}\hat{C}$-support points is dense in its effective domain. This result extends the well-known Brondsted–Rockafellar theorem on the existence of the sub-differential for classically convex lower semicontinuous functions to a wider class of lower semicontinuous functions and goes back to the one of the most important results of the classical convex analysis – the Bishop–Phelps theorem on the density of support points in the boundary of a closed convex set.

Keywords: abstract convexity, semicontinuous functions, Lipschitz functions, concave functions, support minorants, support points, density of support points, global extremum

For citation: Gorokhovik V. V., Tykoun A. S. Support points of lower semicontinuous functions with respect to the set of Lipschitz concave functions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 6, pp. 647–653 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-6-647-653

Введение. Одним из ключевых результатов классического выпуклого анализа является утверждение о том (напр., [1]), что любая полунепрерывная снизу выпуклая функция – верхняя огибающая ее непрерывных аффинных минорант. Это утверждение справедливо в достаточно общих пространствах, в частности, в вещественных нормированных и даже локально выпуклых пространствах. Наиболее важную роль при анализе выпуклых функций играют такие ее непрерывные аффинные миноранты, которые имеют с графиком функции общую точку. Их принято называть опорными, а точки, в которых опорные миноранты пересекаются с графиком, – опорными точками. Непрерывные линейные функции, соответствующие непрерывным аффинным минорантам, опорным к функции в заданной точке, называются субградиентами, а их совокупность – субдифференциалом выпуклой функции в этой точке. Субдифференциал является столь же эффективным средством анализа негладких выпуклых функций как и классический дифференциал в случае произвольных гладких функций, в связи с чем исследованиям свойств субдифференциала и его применениям в выпуклом анализе посвящены многочисленные работы (см. [1–3] и цитируемую там литературу). Начиная с 1970-х годов большие усилия исследователей были направлены также на распространение понятия субдифференциала на более широкие классы негладких (не обязательно выпуклых) функций. В основной массе таких работ аналогично как и в случае выпуклых функций в качестве элементарных функций рассматривались также непрерывные аффинные функции. Отличие от классически выпуклого случая состоит в локальном определении того, что аффинная функция является опорной к исследуемой негладкой функции и, следовательно, в локальном определении субградиента и субдифференциала. Различные подходы к локальному определению субградиента привели к возникновению целого ряда различных понятий субдифференциала, в частности, таких как субдифференциал Пено [4], субдифференциал Кларка [5], субдифференциал Мишеля–Пено [6], субдифференциал Фреше [7], предельные субдифференциалы Кругера–Мордуховича [8].

Другой подход к обобщению понятия субдифференциала для невыпуклых функций берет свое начало в исследованиях С. С. Кутателадзе и А. М. Рубинова [9], опубликованных еще в 1970-е годы, хотя окончательно он оформился лишь к концу прошлого века в рамках теории абстрактной выпуклости [10–12]. Суть этого подхода в следующем. Задается некоторый класс вещественнозначных функций, скажем класс $\mathcal{H}$, которые рассматриваются как элементарные. Абстрактно выпуклыми или $\mathcal{H}$-выпуклыми называются функции, представимые в виде верхних огибающих некоторого семейства функций, принадлежащих классу $\mathcal{H}$. Подобно классически выпуклым функциям, свойства которых характеризуются опорными аффинными функциями и соответствующими им субградиентами, для характеристики свойств $\mathcal{H}$-выпуклых функций используются опорные $\mathcal{H}$-миноранты, т. е. такие глобальные миноранты $\mathcal{H}$-выпуклой функции, которые имеют с ее графиком общую точку и принадлежат классу $\mathcal{H}$. Совокупность $\mathcal{H}$-минорант, опорных к $\mathcal{H}$-выпуклой функции в заданной точке ее графика, является аналогом субдифференциала классически выпуклой функции. Поскольку в качестве опорных в данном случае рассматриваются глобальные $\mathcal{H}$-миноранты, то такое обобщение субдифференциала также является глобальным. Используя в качестве элементарных функций различные семейства функций $\mathcal{H}$, в [11; 12] выделены и исследованы различные важные в приложениях классы абстрактно выпуклых функций.

Настоящая работа выполнена в рамках второго подхода. В качестве класса элементарных функций $\mathcal{H}$ мы рассматриваем множество $\mathcal{L}\hat{C}(X, \mathbb{R})$ липшицевых вогнутых функций, определенных на вещественном нормированном пространстве. Выбор данного класса мотивирован следующими причинами. Во-первых, множество $\mathcal{L}\hat{C}(X, \mathbb{R})$ содержит в себе пространство непрерывных аффинных функций, вследствие этого любая полунепрерывная снизу классически выпуклая функция будет также и $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой функцией. Таким образом, класс $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклых функций будет являться естественным расширением класса классически выпуклых функций. Во-вторых, множество $\mathcal{L}\hat{C}(X,\mathbb{R})$ содержит большое разнообразие как гладких, так и негладких функций, что позволяет надеяться на то, что $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклыми окажутся функции достаточно обширного класса негладких функций. В сообщении показано, что функция является $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой в том и только том случае, когда она является полунепрерывной снизу и, кроме того, является ограниченной снизу некоторой липшицевой функцией. Ввводятся множество $\mathcal{L}\hat{C}$-минорант функции, опорных в заданной точке, и множество нижних $\mathcal{L}\hat{C}$-опорных точек функции. Множество опорных $\mathcal{L}\hat{C}$-минорант обобщает понятие глобального субдифференциала классически выпуклой функции. Важный результат данного сообщения – доказательство того, что для $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклых функций множество нижних $\mathcal{L}\hat{C}$-опорных точек является плотным в ее эффективной области. Данное утверждение распространяет на более широкий класс полунепрерывных снизу функций известную теорему Брондстеда–Рокафеллара [13] о существовании субдифференциала для классически выпуклых полунепрерывных снизу функций и восходят к одному из важнейших результатов классического выпуклого анализа – теореме Бишопа–Фелпса [14] о плотности опорных точек в границе замкнутого выпуклого множества. Завершается сообщение выводом критерия глобального минимума и необходимого условия глобального максимума для негладких функций, сформулированным в терминах множества опорных $\mathcal{L}\hat{C}$-минорант функции.

Абстрактно выпуклые функции относительно множества липшицевых вогнутых функций. Всюду далее $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ – расширенное множество вещественных чисел. Символом Z^X обозначается, как это принято, совокупность всех функций $f : X \mapsto Z$, определенных на множестве X и принимающих значения в множестве Z; ниже, как правило, рассматриваются случаи, когда Z равно либо $\mathbb{R}$, либо $\overline{\mathbb{R}}$. Совокупности функций $\mathbb{R}^X$ и $\overline{\mathbb{R}}^X$ предполагаются упорядоченными отношением поточечного сравнения $f \le g \Leftrightarrow f(x) \le g(x)\ \forall\ x \in X$. *Эффективным множеством* функции $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ называется множество $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid |f(x)| < +\infty\}$. Функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ называется *l-собственной* или просто *собственной*, если $f(x) > -\infty$ для всех $x \in X$ и $\operatorname{dom} f \ne \varnothing$ и *u-собственной*, если функция $-f$ является l-собственной, т. е. если $f(x) < +\infty$ для всех $x \in X$ и $\operatorname{dom} f \ne \varnothing$.

Ниже будем предполагать, что X является вещественным нормированным пространством.

Напомним, что функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ является полунепрерывной снизу на X в том и только том случае, когда ее надграфик $\operatorname{epi} f := \{(x, \gamma) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \le \gamma\}$ является замкнутым подмножеством в $X \times \mathbb{R}$.

Говорят (см., напр., [10]), что функция $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ удовлетворяет на множестве $Q \subseteq X$ *условию Липшица с константой Липшица* $k > 0$ или, что h является *k-липшицевой на множестве* $Q \subseteq X$, если $Q \subseteq \operatorname{dom} h$ и $|h(x') - h(x)| \le k\|x - x'\|\ \forall\ x, x' \in Q$.

Функция h называется *липшицевой на множестве Q* (*удовлетворяет условию Липшица на Q*), если она является k-липшицевой на Q при некотором $k > 0$.

Заметим, что k-липшицева на всем пространстве X функция h является вещественнозначной и, следовательно, для нее $\operatorname{dom} h = X$.

Множество всех функций $h \in \mathbb{R}^X$, удовлетворяющих на всем пространстве X условию Липшица с константой $k > 0$, будем обозначать символом $\mathcal{L}_k := \mathcal{L}_k(X, \mathbb{R})$, а множество всех липшицевых на X функций – символом $\mathcal{L} := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Непосредственно из определений следует, что $\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_k(X, \mathbb{R})$.

Ниже, если это не может вызвать недопонимание, вместо «функция h является k-липшицевой на X или липшицевой на X» будем говорить просто, что «h является k-липшицевой или липшицевой».

Будем говорить, что функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ является *$\mathcal{L}_k$-ограниченной снизу* (*$\mathcal{L}$-ограниченной снизу*), если она ограничена снизу некоторой k-липшицевой (липшицевой) функцией.

Функция $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ называется *вогнутой*, если ее подграфик $\operatorname{hypo} h := \{(x, \gamma) \in X \times \mathbb{R} \mid h(x) \ge \gamma\}$ является выпуклым подмножеством в $X \times \mathbb{R}$.

Множество липшицевых вогнутых функций будем обозначать символом $\mathcal{L}\hat{C} := \mathcal{L}\hat{C}(X, \mathbb{R})$ и рассматривать далее в качестве класса элементарных функций.

Функцию $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ будем называть *$\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой*, если для некоторого множества функций $\mathcal{F}$ из $\mathcal{L}\hat{C}(X, \mathbb{R})$ она удовлетворяет равенству

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in \mathcal{F}\} \text{ для всех } x \in X. \tag{1}$$

Отметим, что функции $f(x) \equiv -\infty$ и $f(x) \equiv +\infty$ являются $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклыми, поскольку они удовлетворяют равенству (1) при $\mathcal{F} = \varnothing$ и $\mathcal{F} = \mathcal{L}\hat{C}(X, \mathbb{R})$ соответственно.

Для произвольной функции $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ множество $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f) := \{h \in \mathcal{L}\hat{C} \mid h \le f\}$ будем называть *нижней $\mathcal{L}\hat{C}$-опорой функции f*, а функции h из $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)$ – *$\mathcal{L}\hat{C}$-минорантами функции f*. Непосредственно из определения следует, что, если $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f) \ne \varnothing$, то функция *f* является *l*-собственной и при этом

$$f(x) \ge \sup\{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)\} \text{ для всех } x \in X. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ является $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой в том и только том случае, когда для нее неравенство (2) выполняется для всех $x \in X$ как точное равенство, т. е. в том и только том случае, когда

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)\} \text{ для всех } x \in X. \tag{3}$$

Т е о р е м а 1. *Любая липшицева на X функция $f : X \mapsto \mathbb{R}$ является $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что функция $f : X \mapsto \mathbb{R}$ является липшицевой с константой $k > 0$ в том и только том случае, когда

$$f(x) = \sup_{y \in X}\{f(y) - k\|x - y\|\} \text{ для всех } x \in X. \tag{4}$$

Семейство $\{x \mapsto f(y) - k\|x - y\| \mid y \in X\}$ состоит из липшицевых вогнутых функций, которые в силу k-липшицевости *f* являются минорантами *f* и, следовательно, принадлежат $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)$. Поэтому равенство (4) влечет выполнение равенства (3) и, значит, функция *f* является $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой.

Т е о р е м а 2. *Собственная функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ является $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой в том и только том случае, когда она является полунепрерывной снизу и, кроме того, $\mathcal{L}$-ограниченной снизу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Поскольку для любой $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой собственной функции *f* множество $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)$ непусто (в противном случае в силу равенства (3) мы имели бы $f(x) \equiv -\infty$), то f является $\mathcal{L}$-ограниченной снизу. Кроме того, из равенства (3) следует, что каждая $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклая функция *f*, как верхняя огибающая семейства непрерывных функций, является полунепрерывной снизу.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Используя предложение 4.2 из [15] можно показать, что любая полунепрерывная снизу и $\mathcal{L}_{\bar{k}}$-ограниченная снизу функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ допускает представление в виде

$$f(x) = \sup_{k \ge \bar{k}} f_k(x) \ \forall\ x \in X, \tag{5}$$

где $f_k : X \mapsto \mathbb{R}$ – k-липшицева функция, причем последовательность функций $\{f_k\}$ является неубывающей. Поскольку в силу теоремы 1 каждая функция f_k является $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой, то для каждого $k \ge \bar{k}$ имеем

$$f_k(x) = \sup\{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f_k)\} \text{ для всех } x \in X. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in \textstyle\bigcup_{k \ge \bar{k}} S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f_k)\} \text{ для всех } x \in X.$$

Так как $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f_k) \subset S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)$ для всех $k \ge \bar{k}$, то из последнего равенства заключаем, что функция *f* является $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку (см., напр., [1, Предложение 3.1]) каждая полунепрерывная снизу выпуклая в классическом смысле функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является верхней огибающей ее непрерывных аффинных минорант, то из включения $\mathcal{A}(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}\hat{C}(X, \mathbb{R})$, где $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ – пространство непрерывных аффинных функций, определенных на нормированном пространстве X, следует, что любая полунепрерывная снизу выпуклая в классическом смысле функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклой. Таким образом, класс $\mathcal{L}\hat{C}$-выпуклых функций является нетривиальным расширением класса классически выпуклых функций.

Опорные $\mathcal{L}\hat{C}$-миноранты и $\mathcal{L}\hat{C}$-опорные точки функций. Будем говорить, что $\mathcal{L}\hat{C}$-миноранта $h \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)$ функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является опорной в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, если $h(\overline{x}) = f(\overline{x})$. Множество всех $\mathcal{L}\hat{C}$-минорант функции *f*, *опорных в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, будем обозначать символом $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \overline{x})$.

Множество $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \overline{x})$ непусто тогда и только тогда, когда

$$f(\overline{x}) = \max\{h(\overline{x})\ h \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)\},$$

при этом максимум в последнем равенстве достигается именно на тех функциях h из $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)$, которые принадлежат $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \overline{x})$.

Если $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \overline{x}) \neq \varnothing$, то точку $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ будем называть *нижней $\mathcal{L}\hat{C}$-опорной точкой функции f*. Множество всех нижних $\mathcal{L}\hat{C}$-опорных точек функции f будем обозначать символом $Q^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ – расширенно-вещественнозначная функция, определенная на нормированном пространстве X, и пусть $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. Тогда $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \overline{x}) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда существует вещественное число $k > 0$ такое, что*

$$f(x) \geq f(\overline{x}) - k\|x - \overline{x}\| \ \ \forall x \in X. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \overline{x})$ непусто и пусть $h \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \overline{x})$. Так как h является липшицевой, то существует $k > 0$ такое, что $|h(x) - h(y)| \leq k\|x - y\|$ для всех $x, y \in X$. Полагая $y = \overline{x}$ и учитывая, что $h \leq f$ и $h(\overline{x}) = f(\overline{x})$, приходим из последнего неравенства к (7).

Предположим теперь, что при некотором $k > 0$ имеет место неравенство (7). Заметим, что функция $\tilde{h} : x \mapsto f(\overline{x}) - k\|x - \overline{x}\|$ является липшицевой и вогнутой минорантой f и $\tilde{h}(\overline{x}) = f(\overline{x})$. Следовательно, $\tilde{h} \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \overline{x})$ и, значит, $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \overline{x}) \neq \varnothing$.

Т е о р е м а 4. *Пусть X – полное нормированное пространство и пусть функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ – полунепрерывна снизу и, кроме того, $\mathcal{L}$-ограничена снизу. Тогда множество $Q^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)$ нижних $\mathcal{L}\hat{C}$-опорных точек функции f плотно в* dom *f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2 семейство $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)$, состоящее из $\mathcal{L}\hat{C}$-минорант функции *f*, непусто и

$$f(x) = \sup_{h \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)} h(x) \ \text{ для всех } x \in X. \tag{8}$$

Рассмотрим произвольную точку $a \in \operatorname{dom} f$. Из равенства (8) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, a, \varepsilon) := \{h \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f) \mid h(a) + \varepsilon \geq f(a)\}$ непусто. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем произвольную функцию $h \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, a, \varepsilon)$. Функция $g : x \mapsto f(x) - h(x)$ является полунепрерывной снизу и ограничена снизу, так как $g(x) \geq 0 \ \forall\, x \in X$. Кроме того, $g(a) \leq \inf_{x \in X} g(x) + \varepsilon$. В силу вариационного принципа Экланда [1; 3; 8] для любого $\delta > 0$ существует точка $x_\delta \in X$ такая, что

(i) $g(x_\delta) + \dfrac{\varepsilon}{\delta}\|x_\delta - a\| \leq g(a)$;

(ii) $\|x_\delta - a\| \leq \delta$;

(iii) $g(x_\delta) < g(x) + \dfrac{\varepsilon}{\delta}\|x - x_\delta\|$ для всех $x \in X, x \neq x_\delta$.

Условие (iii) может быть переписано в виде

$$f(x) > h(x) - \frac{\varepsilon}{\delta}\|x - x_\delta\| + (f(x_\delta) - h(x_\delta)) \ \ \forall x \in X, x \neq x_\delta.$$

Функция $\tilde{h} : x \mapsto h(x) - \frac{\varepsilon}{\delta}\|x - x_\delta\| + (f(x_\delta) - h(x_\delta))$ является вогнутой и липшицевой на X и, кроме того, $\tilde{h}(x_\delta) = f(x_\delta)$. Следовательно, функция $\tilde{h}$ является опорной $\mathcal{L}\hat{C}$-минорантой функции f в точке x_δ, причем в силу условий (i) и (ii) точка x_δ принадлежит $(\operatorname{dom} f) \cap B_\delta(a)$, где $B_\delta(a) := \{x \in X \mid \|x_\delta - a\| \leq \delta\}$. Следовательно, $x_\delta \in Q^-(\mathcal{L}\hat{C}, f)$.

Так как точка $a \in \operatorname{dom} f$ и число $\delta > 0$ были выбраны произвольными, то заключаем, что любая окрестность каждой точки из $\operatorname{dom} f$ содержит нижнюю $\mathcal{L}\hat{C}$-опорную точку функции f.

З а м е ч а н и е 2. Утверждение теоремы 4 распространяет на более широкий класс полунепрерывных снизу функций известную теорему Брондстеда–Рокафеллара [13] о существовании субдифференциала для выпуклых полунепрерывных снизу функций и восходит к одному из важнейших результатов классического выпуклого анализа – теореме Бишопа–Фелпса [14] о плотности опорных точек в границе замкнутого выпуклого множества.

Условия для точек глобального экстремума функций в терминах опорных $\mathcal{L}\hat{C}$-минорант. В заключение покажем, что множества опорных $\mathcal{L}\hat{C}$-минорант функции могут быть использованы для характеристики точек глобального минимума и максимума функции.

Т е о р е м а 5 (критерий глобального минимума функции). *Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ достигает глобального минимума в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ в том и только том случае, когда $c_{f(\bar{x})} \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \bar{x})$, где $c_{f(\bar{x})} : X \ni x \mapsto f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ – константная функция, равная $f(\bar{x})$ для всех $x \in X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данного критерия следует непосредственно из определений глобального минимума функции f и множества $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \bar{x})$, а также того, что любая константная, более того, аффинная функция является вогнутой.

Т е о р е м а 6 (необходимое условие глобального максимума). *Пусть для функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ и точки $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ множество $S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \bar{x})$ опорных $\mathcal{L}\hat{C}$-минорант функции f в точке $\bar{x}$ непусто. Тогда, если $\bar{x}$ является точкой глобального максимума функции f, то $0_X \in \partial^+ g(\bar{x})$ для любой функции $g \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \bar{x})$.*

Здесь $\partial^+ g(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \mid x^*(x - \bar{x}) \geq g(x) - g(\bar{x}) \ \forall\, x \in X\}$ – классический супер-дифференциал Моро–Рокафеллара вогнутой функции g в точке $\bar{x}$, а 0_X – нулевой линейный функционал, определенный на X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ является точкой глобального максимума функции f, то для любой функции $g \in S^-(\mathcal{L}\hat{C}, f, \bar{x})$ точка $\bar{x}$ также является точкой глобального максимума, а поскольку функции g являются вогнутыми, то это равносильно условию $0_X \in \partial^+ g(\bar{x})$.

Список использованных источников

1. Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М., 1979. – 200 с.

2. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М., 1973. – 469 с.

3. Половинкин, Е. С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. – М., 2004. – 416 с.

4. Penot, J.-P. Calcul Sous-Differential et Optimization / J.-P. Penot // Journal of Functional Analysis. – 1978. – Vol. 27, N 2. – P. 248–276. https://doi.org/10.1016/0022-1236(78)90030-7

5. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. – М., 1988. – 280 с.

6. Michel, P. Calcul sous-différential pour des fonctions lipschitzienness et non-lipschitziennes / P. Michel, J.-P. Penot // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1984. – Ser. I, Vol. 298, N 12. – P. 684–687.

7. Kruger, A. Y. On Fréchet subdifferentials / A. Y. Kruger // J. Math. Sci. – 2003. – Vol. 116, N 3. – P. 3325–3358. https://doi.org/10.1023/a:1023673105317

8. Mordukhovich, B. S. Variational Analysis and Generalized Differentiation. I: Basic Theory / B. S. Mordukhovich. – Berlin, 2006. – 579 p. https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1

9. Кутателадзе, С. С. Двойственность Минковского и ее приложения / С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов. – Новосибирск, 1976. – 254 с.

10. Pallaschke, D. Foundations of Mathematical Optimization (Convex analysis without linearity) / D. Pallaschke, S. Rolewicz. – Dordrecht, 1997. – 585 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1588-1

11. Singer, I. Abstract Convex Analysis / I. Singer. – New York, 1997. – 491 p.

12. Rubinov, A. M. Abstract convexity and global optimization / A. M. Rubinov. – Dordrecht, 2000. – 493 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3200-9

13. Brøndsted, A. On the subdifferentiability of convex functions / A. Brøndsted, R. T. Rockafellar // Proc. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 16, N 4. – P. 605–611. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1965-0178103-8

14. Bishop, E. The support functionals of convex sets / E. Bishop, R. R. Phelps // Proc. Sympos. Pure Math. – 1963. – Vol. VII. – P. 27–35. https://doi.org/10.1090/pspum/007/0154092

15. Gorokhovik, V. V. Minimal convex majorants of functions and Demyanov–Rubinov exhaustive super(sub)differentials / V. V. Gorokhovik // Optimization. – 2019. – Vol. 68, N 10. – P. 1933–1961. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1518446

References

1. Ekeland I., Temam R. *Convex Analysis and Variational Problems*. Amsterdam, 1976. 402 p. https://doi.org/10.1016/c2009-0-19672-1

2. Rockafellar R. T. *Convex analysis*. Princeton, 1970. 451 p.

3. Polovinkin E. S., Balashov M. V. *Elements of convex and strongly convex analysis*. Moscow, 2004. 416 p. (in Russian).

4. Penot J.-P. Calcul Sous-Differential et Optimization. *Journal of Functional Analysis*, 1978, vol. 27, no. 2, pp. 248–276. https://doi.org/10.1016/0022-1236(78)90030-7

5. Clarke F. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York, 1983. 306 p. https://doi.org/10.1137/1.9781611971309

6. Michel P., Penot J.-P. *Calcul sous-différential pour des fonctions lipschitzienness et non-lipschitziennes*. Comptes Reudas de l'Académie des Sciences de Paris, 1984, ser. I, vol. 298, no. 12, pp. 684–687.

7. Kruger A. Y. On Fréchet subdifferentials. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 116, no. 3, pp. 3325–3358. https://doi.org/10.1023/a:1023673105317

8. Mordukhovich B. S. *Variational Analysis and Generalized Differentiation. I: Basic Theory.* Berlin, 2006. 579 p. https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1

9. Kutateladze S. S., Rubinov A. M. *Minkowski duality and its applications*. Novosibirsk, 1976. 254 p. (in Russian).

10. Pallaschke D., Rolewicz S. *Foundations of Mathematical Optimization (Convex analysis without linearity)*. Dordrecht, 1997. 585 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1588-1

11. Singer I. *Abstract Convex Analysis*. New York, 1997. 491 p.

12. Rubinov A. M. *Abstract convexity and global optimization*. Dordrecht, 2000. 493 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3200-9

13. Brøndsted A., Rockafellar R. T. On the subdifferentiability of convex functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1965, vol. 16, no. 4, pp. 605–611. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1965-0178103-8

14. Bishop E., Phelps R. R. The support functionals of convex sets. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 1963, vol. VII, pp. 27–35. https://doi.org/10.1090/pspum/007/0154092

15. Gorokhovik V. V. Minimal convex majorants of functions and Demyanov–Rubinov exhaustive super(sub)differentials. *Optimization*, 2019, vol. 68, no. 10, pp. 1933–1961. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1518446

Информация об авторах

Гороховик Валентин Викентьевич – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: gorokh@im.bas-net.by.

Тыкун Александр Станиславович – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tykoun@bsu.by.

Information about the authors

Gorokhovik Valentin Vikent'evich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gorokh@im.bas-net.by.

Tykoun Alexander Stanislavovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tykoun@bsu.by.