

Fredi Tröltzscher

# **Optimale Steuerung partieller Differential- gleichungen**

Theorie, Verfahren und Anwendungen



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung und Beispiele</b>	<b>1</b>
1.1 Was ist optimale Steuerung? . . . . .	1
1.2 Beispiele konvexer Aufgaben . . . . .	2
1.2.1 Optimale stationäre Aufheizung . . . . .	2
1.2.2 Optimale instationäre Randtemperatur . . . . .	4
1.2.3 Optimales Schwingen . . . . .	5
1.3 Beispiele nichtkonvexer Probleme . . . . .	6
1.3.1 Aufgaben mit semilinearer elliptischer Gleichung . . . . .	6
1.3.2 Probleme mit semilinearer parabolischer Gleichung . . . . .	7
1.4 Grundkonzepte im endlichdimensionalen Fall . . . . .	8
1.4.1 Endlichdimensionale Aufgabe der optimalen Steuerung . . . . .	8
1.4.2 Existenz optimaler Steuerungen . . . . .	9
1.4.3 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung . . . . .	10
1.4.4 Adjungierter Zustand . . . . .	11
1.4.5 Lagrange-Funktion . . . . .	13
1.4.6 Diskussion der Variationsungleichung . . . . .	14
1.4.7 Formulierung als Karush-Kuhn-Tucker-System . . . . .	14
<b>2 Linear-quadratische elliptische Probleme</b>	<b>17</b>
2.1 Lineare normierte Räume . . . . .	17
2.2 Sobolevräume . . . . .	19
2.2.1 $L^p$ -Räume . . . . .	19
2.2.2 Reguläre Gebiete . . . . .	21
2.2.3 Schwache Ableitungen und Sobolevräume . . . . .	21
2.3 Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen . . . . .	24
2.3.1 Poissonsgleichung . . . . .	25
2.3.2 Randbedingung dritter Art . . . . .	27
2.3.3 Differentialoperator in Divergenzform . . . . .	30
2.4 Lineare Abbildungen . . . . .	32
2.4.1 Lineare stetige Operatoren und Funktionale . . . . .	32
2.4.2 Schwache Konvergenz . . . . .	35
2.5 Existenz optimaler Steuerungen . . . . .	37
2.5.1 Optimale stationäre Temperaturquelle . . . . .	38
2.5.2 Optimale stationäre Randtemperatur . . . . .	42
2.5.3 Allgemeinere elliptische Gleichungen und Zielfunktionale * . . . . .	43
2.6 Differenzierbarkeit in Banachräumen . . . . .	44
2.7 Adjungierte Operatoren . . . . .	47
2.8 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung . . . . .	49

2.8.1	Quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum . . . . .	49
2.8.2	Optimale stationäre Temperaturquelle . . . . .	51
2.8.3	Stationäre Temperaturquelle und Randbedingung dritter Art . . . . .	59
2.8.4	Optimale stationäre Randtemperatur . . . . .	60
2.8.5	Ein lineares Optimalsteuerungsproblem . . . . .	63
2.9	Konstruktion von Testaufgaben . . . . .	64
2.9.1	Bang-Bang-Steuerung . . . . .	64
2.9.2	Verteilte Steuerung und Neumann-Randbedingung . . . . .	65
2.10	Das formale Lagrange-Prinzip . . . . .	67
2.11	Weitere Beispiele *	71
2.11.1	Differentialoperator in Divergenzform . . . . .	71
2.11.2	Optimale stationäre Temperaturquelle mit vorgegebener Außen-temperatur . . . . .	72
2.12	Numerische Verfahren . . . . .	72
2.12.1	Bedingtes Gradientenverfahren . . . . .	73
2.12.2	Gradienten-Projektionsverfahren . . . . .	76
2.12.3	Überführung in ein endlichdimensionales quadratisches Optimierungsproblem . . . . .	76
2.12.4	Aktive-Mengen-Strategie . . . . .	81
2.13	Adjungierter Zustand als Multiplikator *	84
2.13.1	Elliptische Gleichungen mit Daten aus $V^*$ . . . . .	84
2.13.2	Anwendung beim Beweis von Optimalitätsbedingungen . . . . .	85
2.13.3	Adjungierter Zustand als Lagrangescher Multiplikator . . . . .	86
2.14	Höhere Regularität für elliptische Aufgaben *	87
2.14.1	Grenzen des Zustandsraums $H^1(\Omega)$ . . . . .	87
2.14.2	Sobolew-Slobodezki-Räume . . . . .	88
2.14.3	Höhere Regularität von Lösungen . . . . .	89
2.14.4	Einbettungssätze . . . . .	90
2.15	Regularität optimaler Steuerungen *	91
2.16	Übungsaufgaben . . . . .	92
<b>3</b>	<b>Linear-quadratische parabolische Probleme</b>	<b>95</b>
3.1	Vorbetrachtungen . . . . .	95
3.2	Der örtlich eindimensionale Fall . . . . .	98
3.2.1	Eindimensionale Modellprobleme . . . . .	98
3.2.2	Integraldarstellung von Lösungen – Greensche Funktion . . . . .	100
3.2.3	Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . . .	101
3.2.4	Bang-Bang-Prinzip . . . . .	106
3.3	Schwache Lösungen in $W_2^{1,0}(Q)$ . . . . .	109
3.4	Schwache Lösungen in $W(0, T)$ . . . . .	113
3.4.1	Abstrakte Funktionen . . . . .	113
3.4.2	Abstrakte Funktionen und parabolische Gleichungen . . . . .	115
3.4.3	Vektorwertige Distributionen . . . . .	116
3.4.4	Zugehörigkeit schwacher Lösungen aus $W_2^{1,0}(Q)$ zu $W(0, T)$ . . . . .	119
3.5	Parabolische Optimalsteuerungsprobleme . . . . .	123
3.5.1	Optimale instationäre Randtemperatur . . . . .	123
3.5.2	Optimale instationäre Temperaturquelle . . . . .	124
3.6	Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . . .	125

3.6.1	Hilfssatz für adjungierte Operatoren . . . . .	125
3.6.2	Optimale instationäre Randtemperatur . . . . .	127
3.6.3	Optimale instationäre Temperaturquelle . . . . .	130
3.6.4	Differentialoperator in Divergenzform * . . . . .	131
3.7	Numerische Lösungstechniken . . . . .	134
3.7.1	Gradienten-Projektionsverfahren . . . . .	134
3.7.2	Überführung in eine endlichdimensionale Aufgabe . . . . .	135
3.8	Parabolische Gleichungen in $L^2(0, T; V^*)$ * . . . . .	138
3.9	Übungsaufgaben . . . . .	139
<b>4</b>	<b>Steuerung semilinearer elliptischer Gleichungen</b>	<b>141</b>
4.1	Die semilineare elliptische Modellgleichung . . . . .	141
4.1.1	Motivation des weiteren Vorgehens . . . . .	141
4.1.2	Lösungen in $H^1(\Omega)$ . . . . .	142
4.1.3	Stetige Lösungen . . . . .	144
4.2	Nemyzki-Operatoren . . . . .	147
4.2.1	Stetigkeit von Nemyzki-Operatoren . . . . .	147
4.2.2	Differenzierbarkeit von Nemyzki-Operatoren . . . . .	149
4.2.3	Ableitungen in weiteren $L^p$ -Räumen * . . . . .	153
4.3	Existenz optimaler Steuerungen . . . . .	154
4.3.1	Grundvoraussetzung des Kapitels . . . . .	154
4.3.2	Verteilte Steuerung . . . . .	155
4.4	Der Steuerungs-Zustands-Operator . . . . .	158
4.4.1	Verteilte Steuerung . . . . .	159
4.4.2	Randsteuerung . . . . .	161
4.5	Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . . .	161
4.5.1	Verteilte Steuerung . . . . .	161
4.5.2	Randsteuerung . . . . .	164
4.6	Anwendung des formalen Lagrange-Prinzips . . . . .	166
4.7	Pontrjaginsches Maximumprinzip * . . . . .	169
4.7.1	Hamilton-Funktionen . . . . .	169
4.7.2	Maximumprinzip . . . . .	170
4.8	Ableitungen zweiter Ordnung . . . . .	171
4.9	Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung . . . . .	175
4.9.1	Einführung – Die Zwei-Norm-Diskrepanz . . . . .	175
4.9.2	Verteilte Steuerung . . . . .	179
4.9.3	Randsteuerung . . . . .	187
4.9.4	Berücksichtigung stark aktiver Restriktionen * . . . . .	188
4.9.5	Fälle ohne Zwei-Norm-Diskrepanz . . . . .	192
4.9.6	Lokale Optimalität in $L^r(\Omega)$ * . . . . .	193
4.10	Numerische Verfahren . . . . .	194
4.10.1	Gradienten-Projektionsverfahren . . . . .	194
4.10.2	Grundidee des SQP-Verfahrens . . . . .	195
4.10.3	SQP-Verfahren für elliptische Probleme . . . . .	197
4.11	Übungsaufgaben . . . . .	200

<b>5 Steuerung semilinearer parabolischer Gleichungen</b>	<b>201</b>
5.1 Die semilineare parabolische Modellgleichung . . . . .	201
5.2 Grundvoraussetzung des Kapitels . . . . .	204
5.3 Existenz optimaler Steuerungen . . . . .	205
5.4 Steuerungs-Zustands-Operator . . . . .	207
5.5 Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . . .	211
5.5.1 Verteilte Steuerung . . . . .	211
5.5.2 Randsteuerung . . . . .	214
5.6 Pontrjaginsches Maximumprinzip *	216
5.7 Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung . . . . .	217
5.7.1 Ableitungen zweiter Ordnung . . . . .	217
5.7.2 Verteilte Steuerung . . . . .	219
5.7.3 Randsteuerung . . . . .	224
5.7.4 Ein Fall ohne Zwei-Norm-Diskrepanz . . . . .	225
5.8 Testaufgaben . . . . .	226
5.8.1 Aufgabe mit Steuerungsrestriktionen . . . . .	226
5.8.2 Aufgabe mit integraler Zustandsrestriktion *	228
5.9 Numerische Verfahren . . . . .	233
5.9.1 Gradientenverfahren . . . . .	233
5.9.2 SQP-Verfahren . . . . .	234
5.10 Weitere parabolische Probleme *	237
5.10.1 Phasenfeldmodell . . . . .	237
5.10.2 Instationäre Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	239
5.11 Übungsaufgaben . . . . .	243
<b>6 Optimierungsaufgaben im Banachraum</b>	<b>244</b>
6.1 Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen . . . . .	244
6.1.1 Konvexe Aufgaben . . . . .	244
6.1.2 Nichtkonvexe differenzierbare Aufgaben . . . . .	249
6.1.3 Eine semilineare elliptische Aufgabe *	253
6.2 Steuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen . . . . .	255
6.2.1 Konvexe Aufgaben . . . . .	256
6.2.2 Eine nichtkonvexe Aufgabe . . . . .	264
6.3 Übungsaufgaben . . . . .	267
<b>7 Ergänzungen zu partiellen Differentialgleichungen</b>	<b>268</b>
7.1 Elliptische Gleichungen . . . . .	268
7.1.1 Beweis des Existenzsatzes . . . . .	268
7.1.2 Methode von Stampacchia . . . . .	271
7.1.3 Elliptische Gleichungen mit Maßen . . . . .	274
7.2 Parabolische Gleichungen . . . . .	276
7.2.1 Lösungen in $W(0, T)$ . . . . .	276
7.2.2 Stetige Lösungen . . . . .	284