Czechoslovak Mathematical Journal

František Machala

Angeordnete affine Klingenbergsche Ebenen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 30 (1980), No. 3, 341–356

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101685

CZECHOSLOVAK MATHEMATICAL JOURNAL
Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences
V. *30* (*105*), PRAHA 15. 9. 1980, No 3

ANGEORDNETE AFFINE KLINGENBERGSCHE EBENEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 24. April 1978)

M. KUNZE untersuchte in [2] geordnete über kommutativen lokalen Ringen konstruierte affine Klingenbergsche Ebenen durch Verallgemeinerung der in der geordneten affinen Ebenen angewandten Verfahren (siehe [4]). In der vorliegenden Arbeit studieren wir allgemeine geordnete affine Klingenbergsche Ebenen (kurz AK-Ebenen). Eine AK-Ebene nennen wir dabei geordnet, wenn eine Zwischenrelation auf jeder ihrer Geraden gegeben ist, die durch alle Parallelprojektionen reproduziert wird, wobei die Parallelprojektionen in etwas engerem Sinne als in [2] aufzufassen sind. In Definition 8 sind konvex geordnete AK-Ebenen eingeführt und im Satz 12 wird gezeigt, daß jede, zu einer konvex geordneten AK-Ebene zugeordnete, affine Ebene im Sinne von [4] geordnet ist.

Jeder AK-Ebene $\mathscr{A}$ läßt sich nach [3] ein affiner lokaler Ternärring $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ zuordnen. Ist $\mathscr{A}$ geordnet, so induziert die Anordnung in $\mathscr{A}$ kanonisch eine Anordnung der Menge R. Einige Eigenschaften von dieser Anordnung sind in Sätzen 13 bis 17 bewiesen.

In der weiteren Arbeit des Verfassers: „Angeordnete affine lokale Ternärringe und angeordnete affine Klingenbergsche Ebenen" werden angeordnete affine lokale Ternärringe definiert und Beziehungen zwischen den angeordneten AK-Ebenen und den angeordneten affinen lokalen Ternärringen untersucht.

1. GEORDNETE MENGEN UND ZWISCHENRELATIONEN

Definition 1. Es sei $\mathscr{M}$ eine nichtleere Menge und $\leqq$ eine binäre Relation auf $\mathscr{M}$. Das Paar $(\mathscr{M}, \leqq)$ heißt *geordnete Menge* und $\leqq$ die *Anordnung* von $\mathscr{M}$, wenn folgende Bedingungen für alle $A, B, C \in \mathscr{M}$ erfüllt sind:

(A1) $A \leqq A$,

(A2) $A \leqq B \wedge B \leqq A \Rightarrow A = B$,

(A3) $A \leqq B \wedge B \leqq C \Rightarrow A \leqq C$,

(A4) $A \leqq B \vee B \leqq A$.

Bemerkung 1. Ist $(\mathcal{M}, \leqq)$ eine geordnete Menge und definiert man auf $\mathcal{M}$ eine weitere binäre Relation $\leqq'$ durch $A \leqq' B :\Leftrightarrow B \leqq A$, dann ist $(\mathcal{M}, \leqq')$ wieder eine geordnete Mengen und $\leqq'$ wird als eine zu $\leqq$ *inverse Anordnung* genannt. Eine Abbildung σ der geordneten Menge $(\mathcal{M}, \leqq)$ auf die geordnete Menge $(\mathcal{N}, \leqq')$ heißt *monoton wachsend* (*fallend*), wenn $a \leqq b \Rightarrow a^\sigma \leqq' b^\sigma$ $(a \leqq b \Rightarrow b^\sigma \leqq' a^\sigma)$ ist. Ist σ monoton wachsend oder monoton fallend, dann sagen wir, daß σ monoton ist. Gilt $a \leqq b$ und zugleich $a \neq b$, so schreiben wir, wie üblich, $a < b$.

Definition 2. Eine ternäre Relation $(***)$ auf der Menge $\mathcal{M}$ heißt *Zwischenrelation*, wenn folgende Bedingungen für alle $A, B, C, X \in \mathcal{M}$ erfüllt sind:

(Z1) $(ABC) \Rightarrow (CBA)$,
(Z2) $(ABC) \vee (ACB) \vee (CAB)$,
(Z3) $(ABC) \wedge (ACB) \Rightarrow B = C$,
(Z4) $(ABC) \Rightarrow (ABX) \vee (XBC)$.

Gilt (ABC), dann liegt B zwischen A und C.

Aus Definition 2 folgt für beliebige Elemente $A, B \in \mathcal{M}$: $(AAB), (ABB), (ABA) \Rightarrow \Rightarrow A = B$ und
(Z5) $(ABC) \wedge (ACD) \Rightarrow (BCD)$.
(siehe [2]).

Bemerkung 2. Ferner setzen wir $(A \,.\, B \,.\, C) :\Leftrightarrow (ABC) \wedge A \neq B \neq C \neq A$.

Satz 1. *Ist $(\mathcal{M}, \leqq)$ eine geordnete Menge, so ist $(ABC) :\Leftrightarrow A \leqq B \leqq C \vee C \leqq \leqq B \leqq A$ für $A, B, C \in \mathcal{M}$ eine Zwischenrelation auf $\mathcal{M}$.*
Zum Beweis siehe [2], (2.2), S. 25.

Satz 2. *Sei $(***)$ eine Zwischenrelation auf der Menge $\mathcal{M}$ und seien $0, 1$ zwei verschiedene Elemente von $\mathcal{M}$. Durch $(***)$ soll eine binäre Relation $\leqq$ definiert werden, so daß $(\mathcal{M}, \leqq)$ eine geordnete Menge mit $0 \leqq 1$ ist.*
Zum Beweis (siehe [2], s. 26–29): Wir setzen

$$L: = \{X \in \mathcal{M} \mid (X01)\},$$
$$M: = \{X \in \mathcal{M} \mid (0X1)\},$$
$$R: = \{X \in \mathcal{M} \mid (01X)\}$$

und erklären eine Abbildung ψ der Menge $\mathcal{M}$ in die natürlichen Zahlen durch

$$\psi(A) = 1 \Leftrightarrow A \in L \setminus \{0\},$$
$$\psi(A) = 2 \Leftrightarrow A = 0,$$
$$\psi(A) = 3 \Leftrightarrow A \in M \setminus \{0, 1\},$$
$$\psi(A) = 4 \Leftrightarrow A = 1,$$
$$\psi(A) = 5 \Leftrightarrow A \in R \setminus \{1\}.$$

Definieren wir

$$\begin{aligned} A \leqq B \Leftrightarrow\ & \psi(A) < \psi(B), \\ & \psi(A) = \psi(B) \neq 5 \wedge (AB1), \\ & \psi(A) = \psi(B) = 5 \wedge (0AB), \end{aligned}$$

dann ist $(\mathcal{M}, \leqq)$ eine geordnete Menge mit $0 \leqq 1$.

Bemerkung 3. Ist $(***)$ eine Zwischenrelation auf einer Menge $\mathcal{M}$ mit mindestens zwei Elementen und definiert man nach Satz 2 für zwei verschiedene Elemente 0, 1 aus $\mathcal{M}$ die Anordnung $\leqq$ von $\mathcal{M}$, so gilt $(ABC) \Leftrightarrow A \leqq B \leqq C \vee C \leqq B \leqq A$ ([2], 2.3).

2. GEORDNETE AFFINE KLINGENBERGSCHE EBENEN

Definition 3. Es sei $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathrm{I})$ eine Inzidenzstruktur nach Dembowski [1] und sei auf $\mathcal{L}$ eine Äquivalenzrelation $\parallel$ (Parallelität) derart erklärt, daß zu beliebigen $P \in \mathcal{P}$, $p \in \mathcal{L}$ genau eine Gerade q mit $p \parallel q$ und $P \mathrm{I} q$ existiert. $\mathcal{A}$ heißt eine *affine Klingenbergsche Ebene* (kurz AK-Ebene), wenn es eine affine Ebene $\mathcal{A}' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathrm{I}')$ und ein Epimorphismus $\varkappa$ von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}'$ gibt und folgende Forderungen erfüllt sind:

(1) $P, Q \in \mathcal{P},\ P\varkappa \neq Q\varkappa \Rightarrow \exists!\, p \in \mathcal{L};\ P, Q \mathrm{I} p$,

(2) $p, q \in \mathcal{L},\ p\varkappa \nparallel q\varkappa \Rightarrow \exists!\, p \in \mathcal{P};\ P \mathrm{I} p, q$.

Bemerkung 4. Als Folgerung der Definition 3 ergibt sich $a \parallel b \Rightarrow a\varkappa \parallel b\varkappa$. AK-Ebenen sind daher zugleich affine Ebenen mit Homomorphismus im Sinne der Definition 10, [3].

Bemerkung 5. Zur Vereinfachung schreiben wir weiter $\bar{P}$ bzw. $\bar{p}$ anstatt von $P\varkappa$ bzw. $p\varkappa$ für $P \in \mathcal{P}$ bzw. $p \in \mathcal{L}$. Gilt $\bar{P} = \bar{Q}$, dann heißen P, Q *benachbart*, anderenfalls sind P, Q *fern*. Die einzige nach (1) durch die Punkte P, Q bestimmte Gerade p wird mit $p = PQ$ bezeichnet. Mit $P = p \sqcap q$ bezeichnet man den nach (2) durch die Geraden p, q bestimmten Punkt P.

Bemerkung 6. Im folgenden bedeutet $L(A, a)$ die Parallele zur Geraden a durch den Punkt A. Die Menge $\Pi(a)$ aller zu a parallelen Geraden heißt eine *Richtung*. Mit $P(a)$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Geraden a, d.h. $P(a) = \{X \mid X \mathrm{I} a\}$. Mit $F(P, p)$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Geraden p, die zum Punkt P von $P(p)$ benachbart sind, d.h. $F(P, p) = \{X \mid X \mathrm{I} p,\ \bar{X} = \bar{P}\}$ für $P \mathrm{I} p$.

Definition 4. Es seien g, g' zwei Geraden der AK-Ebene $\mathcal{A}$ und $\Pi(h)$ eine Richtung mit $\bar{g} \nparallel \bar{h}$, $\bar{g}' \nparallel \bar{h}$. Die Abbildung φ: $P(g) \to P(g')$ mit $\varphi(A) = g' \sqcap L(A, h)$ für alle Punkte $A \in P(g)$ heißt eine *Parallelprojektion* der Geraden g auf die Gerade g' mit der Richtung $\Pi(h)$. Soeine Parallelprojektion wird mit $\varphi(g, g', \Pi(h))$ bezeichnet.

Definition 5. Eine AK-Ebene $\mathscr{A}$ heißt *geordnet*, wenn es auf jeder Geraden von $\mathscr{A}$ mindestens drei voneinander ferne Punkte gibt und für jede Gerade g eine Zwischenrelation auf $P(g)$ erklärt ist, welche bei dem Übergang zu einer anderen Geraden mittels einer Parallelprojektion stets erhalten bleibt.

Bemerkung 7. Unter der Bezeichnung $(ABC)_g$ versteht man, daß die Punkte A, B, C in der Geraden g enthalten sind und der Punkt B zwischen A und C in der auf $P(g)$ erklärten Zwischenrelation liegt. Ist $\varphi(g, g', \Pi(h))$ eine Parallelprojektion, dann ist $(ABC)_g \Rightarrow (\varphi(A)\,\varphi(B)\,\varphi(C))_{g'}$. Da φ eine bijektive Abbildung von $P(g)$ auf $P(g')$ ist, gilt sogar $(A\,.\,B\,.\,C)_g \Rightarrow (\varphi(A)\,.\,\varphi(B)\,.\,\varphi(C))_{g'}$.

Definition 6. Es sei $\Pi(h)$ eine Richtung und g eine Gerade mit $\bar{g} \nparallel \bar{h}$. Für beliebige $h_1, h_2, h_3 \in \Pi(h)$ setzen wir $(h_1h_2h_3)_{\Pi(h)} :\Leftrightarrow (A_1A_2A_3)_g$, wo $A_i \in h_i \sqcap g$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ ist.

Bemerkung 8. Nach Definition 6 ist in jeder Richtung $\Pi(h)$ eine Zwischenrelation $(***)_{\Pi(h)}$ eingeführt, die nach Definitionen 4 und 5 von der Wahl der Geraden g mit $\bar{g} \nparallel \bar{h}$ unabhängig ist.

Bemerkung 9. Nach Satz 2 wird für jede Gerade g von $\mathscr{A}$ auf die Menge $P(g)$ durch die Zwischenrelation $(***)_g$ das Paar zueinander inverser Anordnungen erklärt. Nach Definition 6 lassen sich dann auch in jeder Richtung $\Pi(h)$ zwei Anordnungen durch $(***)_{\Pi(h)}$ einführen.

Satz 3. *Sind die Punkte A, B, C in den Geraden g, g' enthalten, dann ist $(ABC)_g \Leftrightarrow \Leftrightarrow (ABC)_{g'}$.*

Beweis. Es sei $(ABC)_g$. Ist $\varphi(g, g', \Pi(h))$ eine Parallelprojektion, dann ist $\varphi(A) = = A$, $\varphi(B) = B$, $\varphi(C) = C$ und nach Definition 5 erhält man $(ABC)_g \Rightarrow (\varphi(A)\,\varphi(B)\,\varphi(C))_{g'} \Rightarrow (ABC)_{g'}$. Ganz ähnlich zeigt man, daß auch $(ABC)_{g'} \Rightarrow (ABC)_g$ gilt.

Bemerkung 10. Falls aus dem Text deutlich sein wird, daß es sich um die Zwischenrelation auf der Geraden g handelt, werden wir einfach (ABC) anstatt von $(ABC)_g$ schreiben.

Satz 4. *Es seien a, a' Geraden und $\leqq, \leqq'$ die durch die Zwischenrelationen $(***)_a, (***)_{a'}$ erklärten Anordnungen von $P(a)$ und $P(a')$. Jede Parallelprojektion $\varphi(a, a', \Pi(h))$ ist eine monotone Abbildung von $(P(a), \leqq)$ auf $(P(a'), \leqq')$.*

Beweis. Wir wählen zwei Punkte $0, 1 \in P(a)$ mit $0 < 1$. Nach Beweis von Satz 2 ist die Anordnung $\leqq$ durch die Zwischenrelation $(***)_a$ mittels der Teilmengen L, M, R von $P(a)$ erklärt. Da φ eine bijektive Abbildung von $P(a)$ auf $P(a')$ ist, gilt $\varphi(0) \neq \varphi(1)$. Die Anordnung $\leqq'$ von $P(a')$ ist wieder durch die Zwischenrelation $(***)_{a'}$ mittels der Teilmengen L', M', R' von $P(a')$ erklärt. Es sei $\varphi(0) <' \varphi(1)$. Da die Zwischenrelation $(***)_a$ in $(***)_{a'}$ durch φ übergeht, gilt $\varphi(L) = L'$, $\varphi(M) = M'$, $\varphi(R) = R'$ und $X \leqq Y \Rightarrow \varphi(X) \leqq' \varphi(Y)$. Die Abbildung φ ist also monoton wachsend. Im Falle $\varphi(1) <' \varphi(0)$ ergibt sich $\varphi(L) = M'$, $\varphi(R) = R'$, $\varphi(M) = L'$ und $X \leqq Y \Rightarrow \varphi(Y) \leqq' \varphi(X)$. φ ist daher monoton fallend.

Bemerkung 11. Satz 4 läßt sich noch einfacher formulieren: Jede Parallelprojektion ist eine monotone Abbildung.

Satz 5. *Sind X, Y zwei ferne Punkte einer Geraden g, dann existiert ein Punkt $P \mathrel{\mathrm{I}} g$ mit $(X \,.\, P \,.\, Y)$ und $\bar{P} \neq \bar{X}, \bar{Y}$.*

Beweis. Wir wählen eine Gerade h mit $h \parallel g$ und $\bar{h} \neq \bar{g}$. Unserer Voraussetzung nach gibt es auf h drei voneinander ferne Punkte A, B, C. Nach (Z2) liegt einer der Punkte A, B, C zwischen den anderen. Es sei z.B. $(A \,.\, B \,.\, C)$. Wir setzen $b = L(B, AX)$ (Abb. 1). Wegen $\bar{A} \neq \bar{C}$ ist $\overline{AX} \neq \overline{CX}$, $\bar{b} \nparallel \overline{CX}$ und die Geraden b, CX schneiden

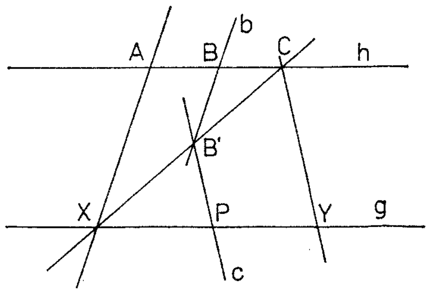

Abb. 1.

sich in genau einem Punkt B'. Ebenso schneiden sich auch g, $c = L(B', CY)$ in genau einem Punkt P. Wegen $\overline{AX} \nparallel \bar{h}$, $\overline{AX} \nparallel \overline{CX}$ ist $\varphi_1(h, CX, \Pi(AX))$ eine Parallelprojektion, wobei $\varphi_1(A) = X$, $\varphi_1(B) = B'$, $\varphi_1(C) = C$ und folglich gilt $(A \,.\, B \,.\, C) \Rightarrow (X \,.\, B' \,.\, C)$. Wegen $\bar{X} \neq \bar{Y}$ gilt $\overline{CX} \neq \overline{CY}$ und $\varphi_2(CX, g, \Pi(CY))$ ist eine Parallelprojektion. Aus $\varphi_2(X) = X$, $\varphi_2(B') = P$, $\varphi_2(C) = Y$ ergibt sich dann $(X \,.\, B' \,.\, C) \Rightarrow (X \,.\, P \,.\, Y)$. Offensichtlich ist $\bar{P} \neq \bar{X}, \bar{Y}$.

Satz 6. *Das Produkt der Parallelprojektionen $\varphi_1(a, b, \Pi(h))$ und $\varphi_2(b, a, \Pi(k))$ mit $a \parallel b$ ist eine monoton wachsende Abbildung von $(P(a), \leqq)$ auf sich.*

Beweis. Es sei $(P(a), \leqq)$ die durch die Zwischenrelation von a bestimmte geordnete Menge. Ferner seien $\varphi_1(a, b, \Pi(h))$, $\varphi_2(b, a, \Pi(k))$ Parallelprojektionen und φ ihr Produkt. Dann gilt $\bar{h} \nparallel \bar{a}$, $\bar{k} \nparallel \bar{a}$ und deswegen auch $\bar{h} \nparallel \bar{b}$, $\bar{k} \nparallel \bar{b}$. Nach Satz 4 sind φ_1, φ_2 monoton und folglich ist auch φ monoton. Es bleibt noch zu zeigen, daß für ein Paar $A, B \mathrel{\mathrm{I}} a$ aus $A < B$ auch $\varphi(A) < \varphi(B)$ folgt.

1. Es sei $\bar{h} \nparallel \bar{k}$. Setzen wir $h' = L(A, h)$, $A'' = b \sqcap h'$, $k' = L(A'', k)$, $A' = a \sqcap k'$ für einen Punkt $A \mathrel{\mathrm{I}} a$, dann ist $A'' = \varphi_1(A)$, $A' = \varphi(A)$. Im Falle $a = b$ gilt $A = A'$ und φ ist die identische, also auch monoton wachsende Abbildung von $P(a)$. Es sei $a \neq b$. Dann ist $A \neq A'$ und es läßt sich z.B. $A < A'$ voraussetzen. Auf a gibt es einen Punkt B mit $\bar{B} \neq \bar{A}$ und $\bar{B} \neq \bar{A}'$ und nach (Z2) ergibt sich

$(ABA') \vee (AA'B) \vee (BAA')$. Es sei (ABA') (Abb. 2). (In den übrigen Fällen geht man analog vor.) Unserer Voraussetzung $A < A'$ nach gilt dann $A < B < A'$. Wird $h'' = L(B, h)$, $B'' = h'' \sqcap b$, $k'' = L(B'', k)$ und $B' = k'' \sqcap a$ gesetzt, dann $B'' = \varphi_1(B)$, $B' = \varphi(B)$ und wegen $\bar{h} \nparallel \bar{k}$ gibt es einen einzigen Punkt C mit

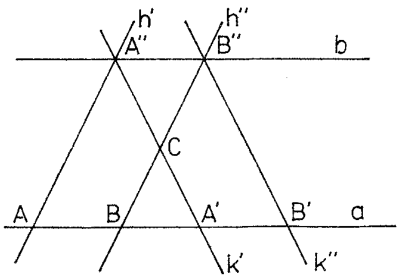

Abb. 2.

$C = k' \sqcap h''$. Durch die Parallelprojektionen $\psi_1(a, k', \Pi(h))$, $\psi_2(k', h'', \Pi(a))$, $\psi_3(h'', a, \Pi(k))$ erhalten wir $\psi_1(A) = A''$, $\psi_1(B) = C$, $\psi_1(A') = A'$ bzw. $\psi_2(A'') = B''$, $\psi_2(C) = C$, $\psi_2(A') = B$ bzw. $\psi_3(B'') = B'$, $\psi_3(C) = A'$, $\psi_3(B) = B$ und folglich $(A \,.\, B \,.\, A') \Rightarrow (A'' \,.\, C \,.\, A') \Rightarrow (B'' \,.\, C \,.\, B) \Rightarrow (B' \,.\, A' \,.\, B)$. Wegen $B < A'$ ergibt sich dann $B < A' < B'$, also $\varphi(A) < \varphi(B)$.

2. Gilt $\bar{h} \parallel \bar{k}$, dann wählen wir eine Richtung $\Pi(p)$ mit $\bar{p} \nparallel \bar{h}$, $\bar{p} \nparallel \bar{\bar{a}}$ und betrachten eine Parallelprojektion $\psi(b, a, \Pi(p))$. Sind A, B zwei Punkte von a mit $A < B$, dann erhält man nach Teil 1 $\psi\, \varphi_1(A) < \psi\, \varphi_2(B)$ und $\varphi_2\, \psi^{-1}(\psi\, \varphi_1(A)) < \varphi_2\, \psi^{-1}(\psi\, \varphi_1(B))$, woraus $\varphi_2\, \varphi_1(A) < \varphi_2\, \varphi_1(B)$, also $\varphi(A) < \varphi(B)$ folgt.

Satz 7. *Es sei $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine geordnete AK-Ebene. Für eine beliebige Gerade g von $\mathscr{A}$ gibt es zwei Teilmengen H_g^+, H_g^- von $\mathscr{P}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(H1) $H_g^+ \cup H_g^- = \mathscr{P} \setminus P(g)$.

(H2) *Ist $h \parallel g$, dann gilt $h = g \vee P(h) \subset H_g^+ \vee P(h) \subset H_g^-$.*

(H3) *Es sei h eine Gerade mit $\bar{h} \neq \bar{g}$ und seien X, Y, Z die Punkte von h mit $Y \mathrm{I}\, g$.*

a) $X \in H_g^+ \wedge Z \in H_g^- \Rightarrow (X \,.\, Y \,.\, Z)$.

b) $(X \,.\, Y \,.\, Z) \wedge X \in H_g^{\pm} \Rightarrow Z \in H_g^{\pm}$.

Beweis. Es sei g eine Gerade. Nach Definition 6 und Bemerkung 8 führen wir in der Richtung $\Pi(g)$ eine Zwischenrelation ein und durch diese erklären wir eine Anordnung $\leqq$ auf $\Pi(g)$. Dann gilt $(abc) \Leftrightarrow a \leqq b \leqq c \vee c \leqq b \leqq a$ für $a, b, c \in \Pi(g)$. Wir beweisen, daß die Mengen $H_g^+ = \{A \mid g < L(A, g)\}$, $H_g^- = \{A \mid L(A, g) < g\}$ die Forderungen (H1) bis (H3) erfüllen.

Ad (H1) Es sei $A \in \mathscr{P} \setminus P(g)$, also A non I g. Dann gilt $a = L(A, g) \neq g$ und mithin entweder $a < g$ oder $g < a$, also entweder $A \in H_g^+$ oder $A \in H_g^-$. Aus $A \in H_g^+ \cup H_g^-$ folgt umgekehrt $L(A, g) \neq g$ und A non I g.

Ad (H2) Für eine beliebige Gerade $h \in \Pi(g)$ gilt $h = g$ oder $g < h$ oder $h < g$, was aber $h = g$ oder $P(h) \subset H_g^+$ oder $P(h) \subset H_g^-$ bedeutet.

Ad (H3) a) Wegen $X \in H_g^+ \wedge Z \in H_g^-$ gilt $g < L(X, g)$, $L(Z, g) < g$ und $L(Z, g) < g < L(X, g)$, woraus sich $(L(Z, g) \,.\, g \,.\, L(X, g))$ ergibt. Wegen $\bar{h} \nparallel \bar{g}$ gilt dann nach Definition 6 $(X \,.\, Y \,.\, Z)$.

b) Aus $(X \,.\, Y \,.\, Z)$ ergibt sich $(L(X, g) \,.\, g \,.\, L(Z, g))$ und folglich ist entweder $L(X, g) < g < L(Z, g)$ oder $L(Z, g) < g < L(X, g)$. Ist $X \in H_g^+$, so gilt $g < L(X, g)$ und $L(Z, g) < g$, also $Z \in H_g^-$. Aus $X \in H_g^-$ folgt ähnlich $L(X, g) < g$, $g < L(Z, g)$, also $Z \in H_g^+$.

Definition 7. Die den Forderungen (H1)–(H3) genügende Mengen H_g^+, H_g^- heißen durch die Gerade g bestimmte *Halbebenen*.

Satz 8. *Sind a, b, c Geraden mit $b \parallel c$, $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, dann ist das Produkt $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$ der Parallelprojketionen $\varphi_1(a, b, \Pi(x))$, $\varphi_2(b, c, \Pi(h))$, $\varphi_3(c, a, \Pi(x))$ eine monoton wachsende Abbildung von $(P(a), \leqq)$ auf sich.*

Beweis. Es sei $(P(a), \leqq)$ die durch die Zwischenrelation von a bestimmte geordnete Menge. Die Abbildung φ, als das Produkt von drei monotonen Abbildungen, ist selbst monoton. Es genügt also $A \leqq B \Rightarrow \varphi(A) \leqq \varphi(B)$ für zwei verschiedene Punkte A, B von a zu beweisen.

Im Falle $\Pi(x) = \Pi(h)$ ist φ die identische Abbildung von $P(a)$. Ferner nehmen wir an, daß $\Pi(x) \neq \Pi(h)$, also $x \nparallel h$ gilt. Wegen $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ gibt es einen Punkt $O = a \sqcap b$ und für O erhalten wir $O = \varphi_1(O)$, $\varphi_2(O) = L(O, h) \sqcap c = O''$, $\varphi_3(O'') = L(O'', x) \sqcap$

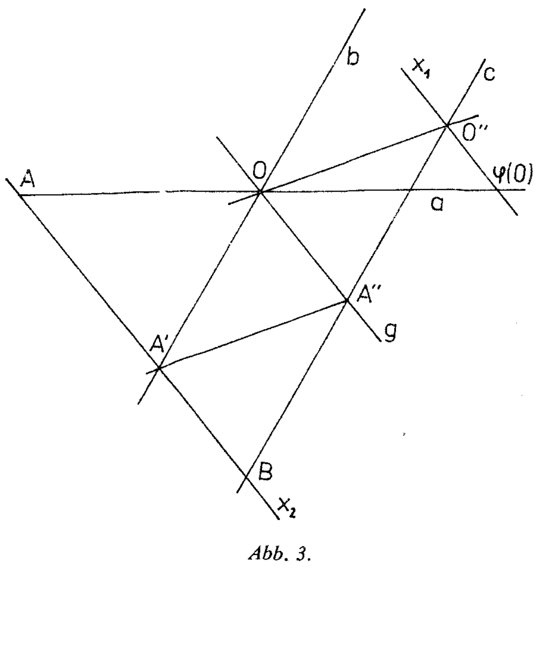

Abb. 3.

$\sqcap a = x_1 \sqcap a = \varphi(O)$ (Abb. 3). Erklären wir schrittweise die Punkte $A'' = L(O, x) \sqcap c = g \sqcap c$, $A' = L(A'', h) \sqcap b$, $A = L(A', x) \sqcap a = x_2 \sqcap a$, so $\varphi(A) = O$. Wir setzen $B = x_2 \sqcap c$ und betrachten die Parallelprojektionen $\psi_1(c, b, \Pi(x))$, $\psi_2(b, c, \Pi(h))$. Ist ψ das Produkt von ψ_1 und ψ_2, so gilt $\psi(B) = A''$, $\psi(A'') = O''$, wobei $B \neq A''$ und $A'' \neq O''$ erfüllt ist. Wählen wir eine Anordnung $\leqq'$ von $P(c)$ mit $B \leqq' A''$, dann ist $\psi(B) \leqq' \psi(A)$ und folglich $A'' \leqq O''$, denn ψ ist nach Satz 6 monoton wachsend. So gilt $B \leqq A'' \leqq O''$ und $(B \,.\, A'' \,.\, O'')$. Es seien H_g^+, H_g^- die durch die Gerade g bestimmten Halbebenen mit $B \in H_g^+$. Aus $\bar{c} \neq \bar{g}$; O'', A'', $B \mathrel{\mathrm{I}} c$; $A'' \mathrel{\mathrm{I}} g$; $(B \,.\, A'' \,.\, O'')$ folgt dann nach (H3) b) $O'' \in H_g^-$ und nach der Definition von H_g^+, H_g^- erhält man daraus $P(x_2) \subset H_g^+$, $P(x_1) \subset H_g^-$, also $A \in H_g^+$, $\varphi(O) \in H_g^-$. Wegen $\bar{a} \neq \bar{g}$ gilt daher nach (H3) a) $(A \,.\, O \,.\, \varphi(O))$. Aus $A \leqq O$ folgt dann $A \leqq O \leqq \varphi(O)$, also $\varphi(A) \leqq \varphi(O)$. Gilt $O \leqq A$, dann ist $\varphi(O) \leqq O \leqq A$ und $\varphi(O) \leqq \varphi(A)$. Die Abbildung φ ist also monoton wachsend.

Satz 9. *Es seien A_1, A_2, A_1', A_2' Punkte einer Geraden a derart, daß A_1, A_2 fern sind. Sei $\leqq$ eine Anordnung von $P(a)$. Ist p eine Gerade mit $p \parallel a$, $\bar{p} \neq \bar{a}$ und sind S, S' zwei Punkte von p mit $SA_1 \parallel S'A_1'$, $SA_2 \parallel S'A_2'$, so gilt $A_1 \leqq A_2 \Rightarrow A_1' \leqq A_2'$.*

Beweis. Es sei $A_1 \leqq A_2$. Wegen $\bar{A}_1 \neq \bar{A}_2$ ist $\overline{SA_1} \neq \overline{SA_2}$, $\overline{SA_1} \nparallel \overline{SA_2}$ und $\varphi_1(a, SA_1, \Pi(SA_2))$, $\varphi_2(SA_1, S'A_1', \Pi(a))$, $\varphi_3(S'A_1', a, \Pi(SA_2))$ sind daher Parallel-

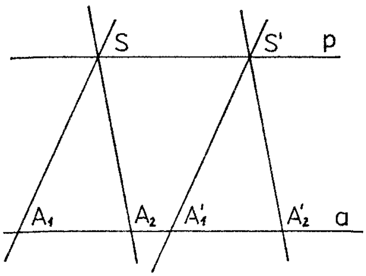

Abb. 4.

projektionen (Abb. 4). Wegen $SA_1 \parallel S'A_1'$, $\bar{a} \nparallel \overline{SA_1}$ sind die Voraussetzungen von Satz 8 für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ erfüllt und $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$ ist mithin monoton wachsend. Aus $\varphi(A_1) = A_1'$, $\varphi(A_2) = A_2'$, $A_1 \leqq A_2$ folgt also $A_1' \leqq A_2'$.

3. KONVEX GEORDNETE AFFINE KLINGENBERGSCHE EBENEN

Definition 8. Die Teilmenge $F(P, p)$ der geordneten AK-Ebene ist konvex, wenn aus $X, Z \in F(P, p)$, $Y \mathrel{\mathrm{I}} p$ und (XYZ) stets $Y \in F(P, p)$ folgt. Die geordnete AK-Ebene heißt *konvex*, wenn $F(P, p)$ für jedes Paar (P, p) mit $P \mathrel{\mathrm{I}} p$ konvex ist.

Satz 10. *Ist eine Teilmenge $F(P, p)$ der geordneten AK-Ebene $\mathscr{A}$ konvex für ein Paar (P, p) mit $P \mathrm{I} p$, dann ist $\mathscr{A}$ konvex.*

Beweis. Es sei $\mathscr{A}$ eine geordnete AK-Ebene und sei $F(P, p)$ konvex. Wir beweisen, daß $F(Q, q)$ für ein beliebiges Paar (Q, q) mit $Q \mathrm{I} q$ konvex ist.

1. Es sei $\bar{Q}$ non I $\bar{p}$. Dann ist $\bar{P} \ddagger \bar{Q}$ und $\bar{a} \ddagger \bar{p}$ mit $a = PQ$.

a) Sei $\bar{a} \ddagger \bar{q}$. Ferner seien X, Y, Z die Punkte von q mit $X, Z \in F(Q, q)$ und (XYZ) (Abb. 5). Setzen wir $a = PQ$, $x = L(X, a)$, $y = L(Y, a)$, $z = L(Z, a)$ und betrachten wir die Parallelprojektion $\varphi(q, p, \Pi(a))$, dann gilt $\varphi(X) = x \sqcap p = X'$,

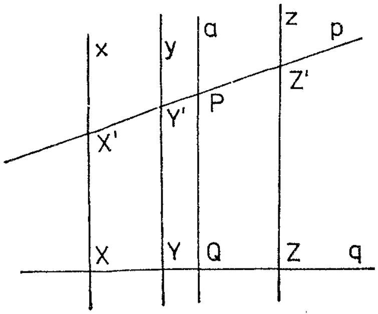

Abb. 5.

$\varphi(Y) = y \sqcap p = Y'$, $\varphi(Z) = z \sqcap p = Z'$ und folglich $(XYZ) \Rightarrow (X'Y'Z')$. Wegen $\bar{X} = \bar{Z} = \bar{Q}$ erhalten wir $\bar{X}' = \bar{Z}' = \bar{P}$, also $X', Z' \in F(P, p)$. Da $F(P, p)$ konvex ist, folgt wegen $Y' \mathrm{I} p$ nach Definition 8 $Y' \in F(P, p)$, woraus sich aber $\bar{y} = \bar{a}$, $\bar{Y} = \bar{Q}$ und $Y \in F(Q, q)$ ergibt. Die Menge $F(Q, q)$ ist konvex.

b) Es sei $\bar{a} = \bar{q}$. Es gibt einen Punkt R mit $\bar{R}$ non I $\bar{p}$, $\bar{R}$ non I $\bar{q}$. Dann ist $\bar{R} \ddagger \bar{P}$, $\bar{R} \ddagger \bar{Q}$ und $\overline{RP} \ddagger \bar{p}$, $\overline{RQ} \ddagger \bar{q}$. Durch R läßt sich eine Gerade r mit $\bar{r} \ddagger \overline{RP}$, $\bar{r} \ddagger \overline{RQ}$ führen, woraus wegen $\bar{R} \ddagger \bar{Q}$ auch $\bar{Q}$ non I $\bar{r}$ folgt. Wegen $\bar{R}$ non I $\bar{p}$, $\overline{RP} \ddagger \bar{r}$ erhält man nach Teil 1, daß $F(R, r)$ konvex ist. Aus $\bar{Q}$ non I $\bar{r}$, $\overline{RQ} \ddagger \bar{r}$ folgt ähnlicherweise daß $F(Q, q)$ konvex ist.

2. Es sei $\bar{Q} \mathrm{I} \bar{p}$. Wir wählen einen Punkt R mit $\bar{R}$ non I $\bar{p}$, $\bar{R}$ non I $\bar{q}$ und eine Gerade r durch R mit $\bar{r} \ddagger \overline{RP}$, $\bar{r} \ddagger \overline{RQ}$ und verfahren analog zu b).

Satz 11. *Es sei eine geordnete AK-Ebene $\mathscr{A}$ konvex. Sind A, B, C, A', B', C' solche Punkte der Geraden a von $\mathscr{A}$, daß A, B, C voneinander fern und A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' benachbart sind, dann gilt $(ABC) \Rightarrow (A'B'C')$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß die Punkte A, B, C und A', B', C' den Forderungen unseres Satzes genügen.

1. Zunächst beweisen wir, daß $(ABC) \Rightarrow (ABC')$ gilt. Es sei also (ABC). Nach (Z2) gilt $(AC'B) \vee (C'AB) \vee (ABC')$.

a) Sei $(AC'B)$. Nach (Z4) ergibt sich $(ABC) \Rightarrow (ABC') \vee (C'BC)$. Im Falle (ABC') gilt nach (Z3) $(AC'B) \wedge (ABC') \Rightarrow B = C'$ im Widerspruch zu $\bar{B} \neq \bar{C}'$. Wegen $\bar{C} = \bar{C}'$ folgt aus $(C'BC)$ auch $\bar{B} = \bar{C}$, weil $\mathscr{A}$ konvex ist. Dieses ist wieder ein Widerspruch zu $\bar{B} \neq \bar{C}$.

b) Sei $(C'AB)$. Analog zu a) läßt sich zeigen, daß weder (ABC') noch $(C'BC)$ gelten können, was (Z4) widerspricht.

Nach (Z2) gilt (ABC').

2. Wir beweisen die Inklusion $(ABC) \Rightarrow (AB'C)$.

a) Aus $(ABC) \wedge (ACB')$ folgt nach (Z5) (BCB'), woraus sich wegen $\bar{B} = \bar{B}'$ die Gleichheit $\bar{B} = \bar{C}$ ergibt, was ein Widerspruch ist.

b) Aus $(ABC) \wedge (CAB')$ folgt nach (Z1) und (Z5) die Gültigkeit von (BAB'), was wegen $\bar{B} \neq \bar{A}$ wieder ein Widerspruch ist.

Nach a), b) folgt wegen (Z2) $(AB'C)$.

Nach Bewiesenem erhält man $(ABC) \Rightarrow (ABC') \Rightarrow (AB'C') \Rightarrow (C'B'A) \Rightarrow (C'B'A') \Rightarrow (A'B'C')$, also unsere Behauptung.

Satz 12. *Ist eine geordnete AK-Ebene $\mathscr{A}$ konvex, dann ist die zu $\mathscr{A}$ gehörige affine Ebene $\mathscr{A}'$ im Sinne von [4] geordnet.*

Beweis. Es sei $\mathscr{A}$ konvex. Ist a eine Gerade von $\mathscr{A}$, dann definieren wir auf die Menge $P(\bar{a})$ eine Ternärrelation $(***)$ durch die folgende Vorschrift: Für die Punkte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ I' $\bar{a}$ gilt $(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ genau dann, wenn es Punkte P, Q, R I a mit $\bar{P} = \bar{A}$, $\bar{Q} = \bar{B}$, $\bar{R} = \bar{C}$ und (PQR) gibt. Dieser Definition nach gilt $(XYZ) \Rightarrow (\bar{X}\bar{Y}\bar{Z})$ für X, Y, Z I a. Sind $\bar{A}, \bar{B}$ zwei Punkte von $\bar{a}$, dann gibt es zwei Punkte P, Q I a mit $\bar{P} = \bar{A}$, $\bar{Q} = \bar{B}$. Wegen (PPQ) ergibt sich dann $(\bar{A}\bar{A}\bar{B})$. Ganz ähnlich zeigt man auch $(\bar{A}\bar{B}\bar{B})$. Gilt $(\bar{A}\bar{B}\bar{A})$, dann gibt es auf a drei Punkte P, Q, R mit $\bar{P} = \bar{A}$, $\bar{Q} = \bar{B}$, $\bar{R} = \bar{A}$ und (PQR). Da $\mathscr{A}$ konvex ist, folgt aus $\bar{P} = \bar{R}$ auch $\bar{P} = \bar{Q}$, also $\bar{A} = \bar{B}$.

Es seien $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ die Punkte von $\bar{a}$ mit $(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$. Dann gibt es Punkte P, Q, R I a mit $\bar{P} = \bar{A}$, $\bar{Q} = \bar{B}$, $\bar{R} = \bar{C}$ und (PQR). Wir zeigen, daß $(\bar{X}\bar{Y}\bar{Z})$ auch für alle $X \in F(P, a)$, $Y \in F(Q, a)$, $Z \in F(R, a)$ gilt. Sind P, Q, R voneinander fern, dann ergibt sich nach Satz 11 $(PQR) \Rightarrow (XYZ)$, also $(\bar{X}\bar{Y}\bar{Z})$. Sind P, Q benachbart, dann ist $\bar{X} = \bar{Y}$ und nach dem Vorhergehenden ergibt sich $(\bar{X}\bar{X}\bar{Z}) \Rightarrow (\bar{X}\bar{Y}\bar{Z})$. Sind P, R benachbart, dann sind wegen (PQR) auch P, Q benachbart und folglich $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z}$. Dieses hat aber $(\bar{X}\bar{X}\bar{X}) \Rightarrow (\bar{X}\bar{Y}\bar{Z})$ zur Folge. Unsere Definition von $(***)$ ist also von der Wahl der Punkte aus $F(P, a)$, $F(Q, a)$, $F(R, a)$ unabhängig. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß $(***)$ den Forderungen (Z1)–(Z4) genügt, d.h. $(***)$ eine Zwischenrelation auf $P(\bar{a})$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß die Zwischenrelationen auf den Geraden von $\mathscr{A}'$ durch Parallelprojektionen reproduziert werden. Ist $\bar{\varphi}(\bar{g}, \bar{g}', \Pi(\bar{h}))$ eine Parallelprojektion in $\mathscr{A}'$, dann gibt es Geraden p, p', k von $\mathscr{A}$ mit $\bar{p} = \bar{g}$, $\bar{p}' = \bar{g}'$, $\bar{k} = \bar{h}$ und $\varphi(p, p', \Pi(k))$ ist eine Parallelprojektion in $\mathscr{A}$. Da φ die Zwischenrelationen in $\mathscr{A}$ reproduziert und φ geht durch den Epimorphismus $\varkappa : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ in $\bar{\varphi}$ über, reproduziert $\bar{\varphi}$ die Zwischenrelationen in $\mathscr{A}'$.

Bemerkung 12. Durch die im Beweis von Satz 12 eingeführten Zwischenrelationen in $\mathscr{A}'$ läßt sich für eine beliebige Gerade $\bar{a}$ von $\mathscr{A}'$ zwei inverse Anordnungen auf $P(\bar{a})$ erklären. Sind $\leqq$ und $\leqq'$ die durch die Zwischenrelationen auf a und $\bar{a}$ erklärten Anordnungen von $P(a)$ und $P(\bar{a})$, dann ist wegen $(ABC) \Rightarrow (\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ die Restriktion des Epimorphismus $\varkappa : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ auf $P(a)$ eine monotone Abbildung von $(P(a), \leqq)$ auf $(P(\bar{a}), \leqq')$.

4. KONVEX GEORDNETE KLINGENBERGSCHE EBENEN UND AFFINE LOKALE TERNÄRRINGE

Es sei $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine AK-Ebene. Ein Tripel (x, y, E), wo x, y die Geraden mit $\bar{x} \not\parallel \bar{y}$ und E ein Punkt mit $\bar{E} \operatorname{non} \mathrm{I}\, \bar{x}, \bar{y}$ sind, heißt ein *Koordinatensystem* von $\mathscr{A}$. Wir setzen $O = x \sqcap y$, $e = OE$, $R = P(e)$, $R_0 = \{X \in R \mid \bar{X} = \bar{O}\}$, $e' = L(E, y)$ und $e'' = L(E, x)$. Ferner definieren wir die Abbildungen $\xi : R \times R \to \mathscr{P}$, $\eta : R \times R \to L$, $\zeta : R_0 \times R \to \mathscr{L}$ durch

(K1) Ist $(X, Y) \in R \times R$, dann $(X, Y)^\xi = L(X, y) \sqcap L(Y, x)$.

(K2) Ist $(M, K) \in R \times R$, dann $N = L(M, x) \sqcap e'$, $Q = L(K, x) \sqcap y$, $p = L(Q, ON)$ und $p = (M, K)^\eta$.

(K3) Ist $(M, K) \in R_0 \times R$, dann $N = L(M, y) \sqcap e''$, $Q = L(K, y) \sqcap x$, $p = L(Q, ON)$ und $p = (M, K)^\zeta$.

ξ ist eine bijektive Abbildung der Menge $R \times R$ auf $\mathscr{P}$, η ist eine bijektive Abbildung der Menge $R \times R$ auf die Menge $\{p \in \mathscr{L} \mid \bar{p} \not\parallel \bar{y}\}$ und ζ ist eine bijektive Abbildung der Menge $R_0 \times R$ auf die Menge $\{p \in \mathscr{L} \mid \bar{p} \parallel \bar{y}\}$ [3]. Im folgenden setzen wir $(X, Y)^\xi = [X, Y]\ \forall (X, Y) \in R \times R$, $(M, K)^\eta = \langle M, K \rangle\ \forall (M, K) \in R \times R$ und $(M, K)^\zeta = \langle\!\langle M, K \rangle\!\rangle\ \forall (M, K) \in R_0 \times R$. Wir definieren auf der Menge R die Ternäroperationen t, t_1 durch

$$Y = t(X, M, K) \Leftrightarrow [X, Y]\ \mathrm{I}\ \langle M, K \rangle\,,$$

$$X = t_1(Y, M, K) \Leftrightarrow [X, Y]\ \mathrm{I}\ \langle\!\langle M, K \rangle\!\rangle\,.$$

(Das Tripel $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ bildet eine algebraische Ternärstruktur, die ein affiner lokaler Ternärring heißt [3].)

Nach (K3) und (K1) gilt die folgende Behauptung (K):

(K) $t_1(O, M, K) = K\ \forall (M, K) \in R_0 \times R$.

Ferner sei $\mathscr{A}$ geordnet. Nach Bemerkung 9 sind auf der Menge $R = P(e)$ zwei voneinander inverse Anordnungen bestimmt. Wir wählen die Anordnung $\leqq$ von R mit $O \leqq E$. Die Parallelprojektion $\psi(e, p, \Pi(y))$ ist nach Satz 4 monoton für jede Gerade p mit $\bar{p} \not\parallel \bar{y}$ und nach (K1), (K2) gilt dabei $\psi(X) = [X, Y]$ für jeden Punkt $[X, Y]\ \mathrm{I}\ p$. Ferner nehmen wir ψ stets als monoton wachsend an. Damit wählen wir auf jeder Menge $P(p)$ mit $\bar{p} \not\parallel \bar{y}$ eine Anordnung $\leqq$ mit $P_1 \leqq P_2 \Leftrightarrow X_1 \leqq X_2$ für beliebige $P_1, P_2\ \mathrm{I}\ p$ mit $P_1 = [X_1, Y_1]$, $P_2 = [X_2, Y_2]$ (Die Anordnungen von R

und $P(p)$ bezeichnen wir mit dem gleichen Symbol $\leqq$). Ähnlich wählen wir auf jeder Menge $P(q)$ mit $\bar{q} \parallel \bar{y}$ eine Anordnung $\leqq$ mit $Q_1 \leqq Q_2 \Leftrightarrow Y_1 \leqq Y_2$ für beliebige $Q_1, Q_2 \mathrel{I} q$, wo $Q_1 = [X_1, Y_1]$, $Q_2 = [X_2, Y_2]$.

In den Sätzen 13 bis 17 werden einige Eigenschaften der Ternäroperationen t, t_1 angeführt, die durch die Anordnung $\leqq$ von R induziert sind. Diese Eigenschaften werden zur Definition der angeordneten affinen lokalen Ternärringe benutzt.

Satz 13. *Sind V, V' aus R mit $V \leqq V'$, dann gilt $t(A, U, V) \leqq t(A, U, V')$ für alle $A, U \in R$.*

Beweis. Es seien $A, U \in R$. Wir bezeichnen $a = L(A, y)$, $N = L(U, x) \sqcap e'$ und $h = ON$ (Abb. 6). Wegen $\bar{a} \nparallel \bar{h}$, $\bar{h} \nparallel \bar{y}$ sind $\varphi_1(e, y, \Pi(x))$, $\varphi_2(y, a, \Pi(h))$ und $\varphi_3(a, e, \Pi(x))$ Parallelprojektionen und wegen $a \parallel y$, $\bar{e} \nparallel \bar{y}$ erfüllen sie die Forderungen von Satz 8. Mithin ist die Abbildung $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$ monoton wachsend. Da

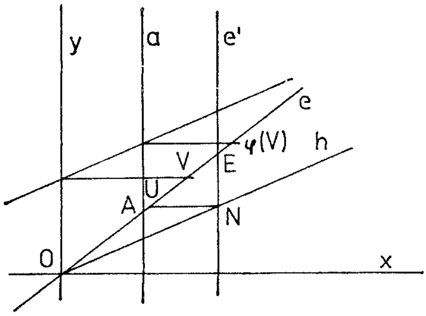

Abb. 6.

wegen (K1) und (K2) $\varphi(V) = t(A, U, V)$ für jeden Punkt V aus R gilt, erhalten wir $V \leqq V' \Rightarrow \varphi(V) \leqq \varphi(V') \Rightarrow t(A, U, V) \leqq t(A, U, V')$.

Satz 14. *Sind V, V' aus R mit $V \leqq V'$, dann gilt $t_1(A, U, V) \leqq t_1(A, U, V')$ für alle $A \in R$, $U \in R_0$.*

Beweis. Es seien $A \in R$, $U \in R_0$. Wir bezeichnen $a = L(A, x)$, $N = L(U, y) \sqcap e''$, $h = ON$ (Abb. 7). Wegen $a \parallel x$, $\bar{e} \nparallel \bar{x}$ erfüllen die Parallelprojektionen $\varphi_1(e, x, \Pi(y))$, $\varphi_2(x, a, \Pi(h))$, $\varphi_3(a, e, \Pi(y))$ die Forderungen von Satz 8 und deshalb ist $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$ monoton wachsend. Da wegen (K1) und (K3) $\varphi(V) = t_1(A, U, V)$ für jeden Punkt V aus R gilt, erhalten wir $V \leqq V' \Rightarrow \varphi(V) \leqq \varphi(V') \Rightarrow t_1(A, U, V) \leqq t_1(A, U, V')$.

Satz 15. *Es seien $U, U_0, V_1, V_2, V_0, X_1, X_2$ aus R mit $\bar{U} \neq \bar{U}_0$ und $t(X_1, U, V_1) = t(X_1, U_0, V_0)$, $t(X_2, U, V_2) = t(X_2, U_0, V_0)$. Aus $U \leqq U_0$ bzw. $U_0 \leqq U$ folgt $X_1 \leqq X_2 \Leftrightarrow V_1 \leqq V_2$ bzw. $X_1 \leqq X_2 \Leftrightarrow V_2 \leqq V_1$.*

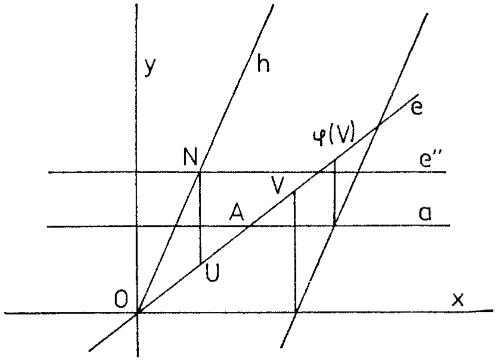

Abb. 7.

Beweis. 1. Es sei $U \leqq U_0$. Wir setzen $N = L(U, x) \sqcap e'$, $N_0 = L(U_0, x) \sqcap e'$, $h = ON$ und betrachten die Parallelprojektionen $\varphi_1(e, e', \Pi(x))$, $\varphi_2(e', y, \Pi(h))$, $\varphi_3(y, e, \Pi(x))$, wo $y \parallel e', \bar{e}' \nparallel \bar{e}$ ist (Abb. 8). Nach Satz 8 ist $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$ monoton wachsend. Setzen wir $A = L(N_0, h) \sqcap y$, $A_1 = L(A, x) \sqcap e$, dann ist $A_1 = \varphi(U_0)$.

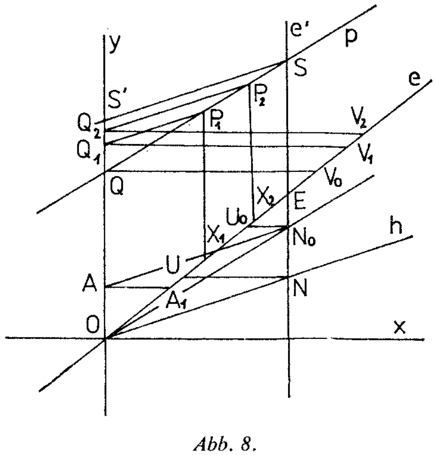

Abb. 8.

Wegen $\varphi(U) = O$ erhalten wir also $U \leqq U_0 \Rightarrow \varphi(U) \leqq \varphi(U_0) \Rightarrow O \leqq A_1$. Unserer Verabredung von der Anordnung der Menge $P(y)$ nach gilt wegen $O = [O, O]$, $A = [O, A_1]$ und $O \leqq A_1$ die Ungleichheit $O \leqq A$. Aus $\bar{U} \neq \bar{U}_0$ folgt dabei $\bar{N} \neq \bar{N}_0$, $\bar{h} \neq \overline{ON}_0$, $\overline{ON}_0 \neq \overline{AN}_0$ und $\bar{O} \neq \bar{A}$. Wir setzen $Q = L(V_0, x) \sqcap y$, $p = L(Q, ON_0)$, $S = p \sqcap e'$, $S' = L(S, h) \sqcap y$. Wegen $y \parallel e'$, $\bar{y} \neq \bar{e}'$, $\bar{O} \neq \bar{A}$, $ON_0 \parallel QS$, $AN_0 \parallel SS'$ erhält man aus Satz 9 $O \leqq A \Rightarrow Q \leqq S'$ und wegen $\bar{p} \nparallel \bar{h}$ ist $\psi(p, y, \Pi(h))$ eine Parallelprojektion mit $\psi(Q) = Q$, $\psi(S) = S'$. Da $Q = [O, Y_1]$ und $S = [E, Y_2]$ ist, gilt wegen $O \leqq E$ die Ungleichheit $Q \leqq S$ in der Anordnung $\leqq$ von $P(p)$. Wegen $Q \leqq S'$ ergibt sich dann $\psi(Q) \leqq \psi(S')$ und daher ist ψ monoton wachsend. Wir setzen weiter $P_1 = L(X_1, y) \sqcap p$, $P_2 = L(X_2, y) \sqcap p$, $Q_1 = L(V_1, x) \sqcap y$, $Q_2 = L(V_2, x) \sqcap y$. Nach (K1), (K2) und wegen $t(X_1, U, V_1) = t(X_1, U_0, V_0)$, $t(X_2, U, V_2) = t(X_2, U_0, V_0)$ liegen die Punkte Q_1, P_1 bzw. Q_2, P_2 auf einer zu h parallelen Geraden. Ist $X_1 \leqq X_2$, dann ist $P_1 \leqq P_2$ in der Anordnung von $P(p)$ und wegen $Q_1 = \psi(P_1)$, $Q_2 = \psi(P_2)$ gilt $Q_1 \leqq Q_2$ in der Anordnung von $P(y)$. Wegen $Q_1 = [O, V_1]$, $Q_2 = [O, V_2]$ ergibt sich dann $V_1 \leqq V_2$. In der umgekehrten Richtung gilt $V_1 \leqq V_2 \Rightarrow Q_1 \leqq Q_2 \Rightarrow P_1 \leqq P_2 \Rightarrow X_1 \leqq X_2$.

2. Es sei $U_0 \leqq U$. Nach dem Verfahren von Teil 1 erhält man $U_0 \leqq U \Rightarrow A \leqq O \Rightarrow S' \leqq Q$ und die Abbildung $\psi(p, y, \Pi(h))$ ist monoton fallend. Daraus folgt $X_1 \leqq X_2 \Leftrightarrow P_1 \leqq P_2 \Leftrightarrow Q_2 \leqq Q_1 \Leftrightarrow V_2 \leqq V_1$.

Satz 16. *Es seien $U_0, V_0, V_1, V_2, X_1, X_2, Y_1, Y_2$ aus R und U aus R_0 mit $Y_1 = t(X_1, U_0, V_0)$, $Y_2 = t(X_2, U_0, V_0)$, $X_1 = t_1(Y_1, U, V_1)$, $X_2 = t_1(Y_2, U, V_2)$. Ist $\mathscr{A}$ konvex, dann gilt $X_1 \leqq X_2 \Leftrightarrow V_1 \leqq V_2$.*

Beweis. Setzen wir $p = \langle U_0, V_0 \rangle$, $q_1 = \langle\langle U, V_1 \rangle\rangle$, $q_2 = \langle\langle U, V_2 \rangle\rangle$, $P_1 = [X_1, Y_1]$, $P_2 = [X_2, Y_2]$, dann gilt nach unseren Voraussetzungen $P_1, P_2 \mathrm{I}\, p$, $P_1 \mathrm{I}\, q_1$ und $P_2 \mathrm{I}\, q_2$ (Abb. 9). Nach (K2) und (K3) ist dabei $\bar{q}_1 \parallel \bar{y}$, $\bar{q}_2 \parallel \bar{y}$, $\bar{p} \nparallel \bar{y}$. Die Schnitt-

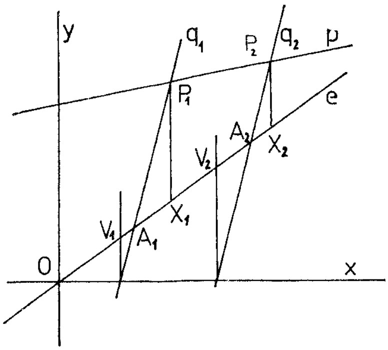

Abb. 9.

punkte von q_1, e und q_2, e bezeichnen wir mit A_1 und A_2. Zunächst zeigen wir, daß das Produkt φ der Parallelprojektionen $\varphi_1(e, p, \Pi(y))$ und $\varphi_2(p, e, \Pi(q_1))$ monoton wachsend ist: Wegen $\bar{y} \parallel \bar{q}_1$ gilt $\overline{\varphi(O)} = \bar{O}$, $\overline{\varphi(E)} = \bar{E}$. Da $\mathscr{A}$ konvex ist, können nach Bemerkung 12 auf der Geraden $\bar{e}$ von $\mathscr{A}'$ zwei inverse Anordnungen erklärt werden und die Restriktion $\varkappa'$ von $\varkappa : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ auf $P(e)$ ist eine monotone Abbildung von $(P(a), \leqq)$ auf $(P(\bar{a}), \leqq)$. Wählen wir eine Anordnung $\leqq$ von $P(\bar{a})$ mit $\bar{O} < \bar{E}$, dann ist $\varkappa'$ wegen $O \leqq E$ eine monoton wachsende Abbildung. Nehmen wir $\varphi(E) \leqq \varphi(O)$ an, dann ist $\overline{\varphi(E)} \leqq \overline{\varphi(O)}$ und $\bar{E} \leqq \bar{O}$, was ein Widerspruch zu $\bar{O} \leqq \bar{E}$ ist. Somit gilt $\varphi(O) \leqq \varphi(E)$ und wegen $O \leqq E$ ist φ monoton wachsend.

Ganz analog ist das Produkt ψ der Parallelprojektionen $\psi_1(e, x, \Pi(q_1)), \psi_2(x, e, \Pi(y))$ monoton wachsend. Gilt $X_1 \leqq X_2$, so ergibt sich sich $\varphi(X_1) = A_1 \leqq \varphi(X_2) = A_2$ und $\psi(A_1) \leqq \psi(A_2)$. Da nach (K3) $V_1 = \psi(A_1)$ und $V_2 = \psi(A_2)$ gilt, erhalten wir $X_1 \leqq X_2 \Rightarrow A_1 \leqq A_2 \Rightarrow V_1 \leqq V_2$. Unter Anwendung von ψ^{-1} und φ^{-1} erhält man umgekerht $V_1 \leqq V_2 \Rightarrow A_1 \leqq A_2 \Rightarrow X_1 \leqq X_2$.

Satz 17. *Es seien* $X_1, X_2, Y_1, Y_2, U, V_1, V_2, V_0$ *aus* R *und* U_0 *aus* R_0 *mit* $X_1 = t_1(Y_1, U_0, V_0)$, $X_2 = t_1(Y_2, U_0, V_0)$, $Y_1 = t(X_1, U, V_1)$, $Y_2 = t(X_2, U, V_2)$. *Ist* $\mathscr{A}$ *konvex, dann gilt* $Y_1 \leqq Y_2 \Leftrightarrow V_1 \leqq V_2$.

Beweis. Setzen wir $p = \langle\!\langle U_0, V_0 \rangle\!\rangle$, $q_1 = \langle U, V_1 \rangle$, $q_2 = \langle U, V_2 \rangle$, $P_1 = [X_1, Y_1]$, $P_2 = [X_2, Y_2]$, dann $P_1, P_2 \mathrm{I}\, p$; $P_1 \mathrm{I}\, q_1$; $P_2 \mathrm{I}\, q_2$ (Abb. 10). Nach (K2) und (K3) gilt dabei $\bar{p} \parallel \bar{y}, \bar{q}_1 \nparallel \bar{y}, \bar{q}_2 \nparallel \bar{y}$. Das Produkt φ der Parallelprojektionen $\varphi_1(e, p, \Pi(x))$,

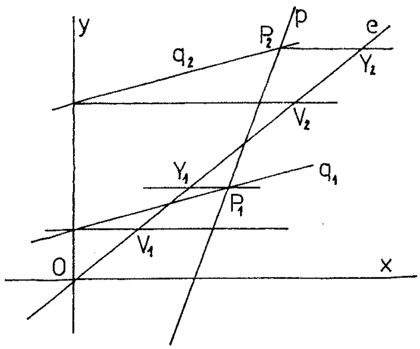

Abb. 10.

$\varphi_2(p, y, \Pi(q_1))$, $\varphi_3(y, e, \Pi(x))$ ist monoton. Wir beweisen, daß φ monoton wachsend ist: Dazu genügt es zu zeigen, daß $\varphi(O) \leqq \varphi(E)$ gilt. Nach Satz 12 ist die zu $\mathscr{A}$ gehörige affine Ebene $\mathscr{A}'$ geordnet. Betrachten wir die Parallelprojektionen $\bar{\varphi}_1(\bar{e}, \bar{p}, \Pi(\bar{x}))$, $\bar{\varphi}_2(\bar{p}, \bar{y}, \Pi(\bar{q}_1))$ und $\bar{\varphi}_3(\bar{y}, \bar{e}, \Pi(\bar{x}))$ in $\mathscr{A}'$, dann ist nach Satz 8 $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_3\bar{\varphi}_2\bar{\varphi}_1$ monoton wachsend, denn $\bar{p} \parallel \bar{y}$, $\bar{e} \nparallel \bar{p}$. Dabei gilt $\overline{\varphi(O)} = \bar{\varphi}(\bar{O})$, $\overline{\varphi(E)} = \bar{\varphi}(\bar{E})$ und $\bar{\varphi}(\bar{O}) \neq \bar{\varphi}(\bar{E})$. Nach Bemerkung 12 ist die Restriktion $\varkappa'$ des Epimorphismus $\varkappa : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ auf $P(e)$ eine monotone Abbildung. Zuerst nehmen wir an, daß in der Anordnung $\leqq$ von $P(\bar{e})$ $\bar{O} \leqq \bar{E}$ gilt. Wegen $O \leqq E$ ist dann $\varkappa'$ monoton wachsend. Da auch $\bar{\varphi}$ monoton wachsend ist, gilt $\bar{O} \leqq \bar{E} \Rightarrow \bar{\varphi}(\bar{O}) \leqq \bar{\varphi}(\bar{E})$. Ist $\varphi(E) \leqq \varphi(O)$, dann ist $\overline{\varphi(E)} \leqq \overline{\varphi(O)}$ und $\bar{\varphi}(\bar{E}) \leqq \bar{\varphi}(\bar{O})$, was ein Widerspruch zu $\bar{\varphi}(\bar{O}) \leqq \bar{\varphi}(\bar{E})$ und $\bar{\varphi}(\bar{O}) \neq \bar{\varphi}(\bar{E})$ ist. Es gilt also $\varphi(O) \leqq \varphi(E)$. Es sei $\bar{E} \leqq \bar{O}$. Dann ist $\varkappa'$ monoton fallend. Da φ monoton wachsend ist, gilt $\bar{E} \leqq \bar{O} \Rightarrow \bar{\varphi}(\bar{E}) \leqq \bar{\varphi}(\bar{O})$. Ist $\varphi(E) \leqq \varphi(O)$, dann gilt $\overline{\varphi(O)} \leqq \overline{\varphi(E)}$ und $\bar{\varphi}(\bar{O}) \leqq \bar{\varphi}(\bar{E})$, was ein Widerspruch zu $\bar{\varphi}(\bar{E}) \leqq \bar{\varphi}(\bar{O})$ ist. Es gilt also wieder $\varphi(O) \leqq \varphi(E)$ und φ ist monoton wachsend. Da nach (K1), (K2), (K3) sich $V_1 = \varphi(Y_1)$, $V_2 = \varphi(Y_2)$ ergibt und φ monoton wachsend ist, gilt $Y_1 \leqq Y_2 \Leftrightarrow V_1 \leqq V_2$.

Literatur

[1] *Dembowski, P.:* Finite Geometrie, New York 1968.
[2] *Kunze, M.:* Angeordnete Hjelmslevsche Geometrie. Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1975.
[3] *Machala, F.:* Koordinatisation affiner Ebenen mit Homomorphismus. Math. Slovaca, *27,* 1977, No. 2, 181—193.
[4] *Pickert, G.:* Projektive Ebenen. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York 1975.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).