

František Machala

Angeordnete affine lokale Ternärringe und angeordnete affine Klingenberg'sche Ebenen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 30 (1980), No. 4, 556–568

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101704>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1980

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ANGEORDNETE AFFINE LOKALE TERNÄRRINGE
UND ANGEORDNETE AFFINE KLINGENBERGSCH E EBENEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 24. April 1978)

Jeder affinen Klingenbergischen Ebene (kurz AK-Ebene) \mathcal{A} läßt sich ein affiner lokaler Ternärring $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ zuordnen und zu jedem affinen lokalen Ternärring \mathcal{T} läßt sich eine AK-Ebene $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ konstruieren [5]. In der vorliegenden Arbeit sind geordnete affine lokale Ternärringe so definiert, daß der zu einer konvex geordneten AK-Ebene \mathcal{A} [6] gehörige affine lokale Ternärring $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ geordnet ist und die durch einen geordneten affinen lokalen Ternärring \mathcal{T} konstruierte AK-Ebene $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ konvex geordnet ist. Jedem affinen lokalen Ternärring \mathcal{T} läßt sich ein Restklassen-Ternärkörper T' kanonisch zuordnen [5]. Ist \mathcal{T} geordnet, so ist auch T' im Sinne von [1] geordnet. Jeder lokaler Ring [2] ist nach [5] ein Spezialfall eines affinen lokalen Ternärringes. (Die über lokalen Ringen konstruierten AK-Ebenen heißen desarguessch.) Ist ein lokaler Ring konvex fastgeordnet (Definition 3), so ist er als ein affiner lokaler Ternärring geordnet. Ist $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring und bildet $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ einen assoziativen Ring, wo $+$, \cdot in üblicher Weise durch t erklärt sind, dann ist \mathcal{R} ein konvex fastgeordneter lokaler Ring.

Definition 1. Ein Ring $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ heißt *geordnet*, wenn die Menge R geordnet ist ([6], Def. 1) und folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $v_1, v_2 \in R, v_1 \leq v_2 \Rightarrow v_1 + a \leq v_2 + a \quad \forall a \in R,$
- (2) $a, b \in R, 0 \leq a, 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab.$

Definition 2. Ein assoziativer (nicht notwendig kommutativer) Ring mit Einselement heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Rechtsideal enthält.

Bemerkung 1. Das maximale Rechtsideal R_0 eines lokalen Ringes $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ ist ein zweiseitiges Ideal und R_0 stellt dabei die Menge aller nichtinvertierbaren Elemente von \mathcal{R} dar. Der Restklassen-Ring $\mathcal{R}' = (R/R_0, +, \cdot)$ ist ein Körper ([2], § 3.7).

Definition 3. Ein lokaler Ring $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ mit maximalem Ideal R_0 heißt *fastgeordnet*, wenn die Menge R geordnet ist und folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(R1) \quad v_1, v_2 \in R, v_1 \leq v_2 \Rightarrow v_1 + a \leq v_2 + a \quad \forall a \in R,$$

$$(R2) \quad a, b \in R, 0 \leq a, 0 \leq b, b \notin R_0 \Rightarrow 0 \leq ab.$$

Ein fastgeordneter lokaler Ring heißt *konvex*, wenn

$$(R3) \quad a \leq 1 \quad \forall a \in R_0$$

gilt.

Folgerungen.

(1) Ist $a \leq 0$, dann gilt nach (R1) $a - a \leq -a$, also $0 \leq -a$. Speziell ergibt sich $a < 0 \Rightarrow 0 < -a$. Aus $0 \leq a, 0 < b$ folgt $0 \leq a < a + b$, also $0 < a + b$.

(2) $a \leq b, b - a \notin R_0, 0 \leq c \Rightarrow ca \leq cb$: Aus (R1) folgt $a \leq b \Rightarrow 0 \leq b - a$ und nach (R2) ist $0 \leq c(b - a)$, also $0 \leq cb - ca$. Gemäß (R1) erhält man daraus $ca \leq cb$.

(3) $b - a \notin R_0, a \leq b, 0 < c \Rightarrow ca < cb$: Gilt $ca = cb$, dann $c(b - a) = 0$. Wegen $b - a \notin R_0$ gibt es in R ein zu $b - a$ inverses Element und man erhält deswegen $c(b - a)(b - a)^{-1} = c = 0$, was zum Widerspruch führt. Nach (2) gilt also $ca < cb$.

(4) $b - a \notin R_0, a \leq b, ca \leq cb \Rightarrow 0 \leq c$: Es sei $c < 0$. Nach (1) gilt dann $0 < -c$ und wegen $a \leq b, b - a \notin R_0$ ergibt sich nach (3) $-ca < -cb$. Aus $ca \leq cb$ bzw. $-ca < -cb$ folgt $0 \leq c(b - a)$ bzw. $0 < c(a - b)$ und nach (1) ergibt sich $0 < c(b - a + a - b) = 0$, was ein Widerspruch ist.

Definition 4. Ein *Ternärring* T ist ein Paar (R, t) , wo R eine Menge und t eine Ternäroperation über R sind, wobei folgende Bedingungen gelten:

$$(K1) \quad \text{Es gibt Elemente } 0, 1 \in R \text{ mit } 0 \neq 1 \text{ und } t(0, a, b) = t(a, 0, b) = b, \\ t(1, a, 0) = t(a, 1, 0) = a \text{ für alle } a, b \in R.$$

$$(K2) \quad \text{Für beliebige } a, b, c \in R \text{ gibt es genau ein Element } x \in R \text{ (kurz } \exists! x \in R) \text{ mit } \\ c = t(a, b, x).$$

Definition 5. Ein Ternärring $T = (R, t)$ ist ein *Ternärkörper*, falls für beliebige $a, b, c, d \in R$ mit $a \neq c$ gilt:

$$(K3) \quad \exists! x \in R, t(x, a, b) = t(x, c, d).$$

$$(K4) \quad \exists! (x, y) \in R \times R, b = t(a, x, y), d = t(c, x, y).$$

Definition 6. Es seien $T = (R, t)$ ein Ternärtring und R_0 eine Teilmenge aus R mit $R_0 \neq R$. Wir setzen $a \oplus r = t(1, a, r) \forall a \in R \forall r \in R_0$. R_0 heißt ein *Ideal* des Ternärtringes T , wenn folgendes gilt:

- (i) $0 \in R_0$.
- (ii) Gilt $b = a \oplus r$ für $a, b \in R, r \in R_0$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $a = b \oplus r'$.
- (iii) Für alle $a, b, c \in R$ und $r_1, r_2, r_3 \in R_0$ existiert ein $r' \in R_0$ mit $t(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t(a, b, c) \oplus r'$.
- (iv) Gilt $t(a, b, x') = t(a, b, x) \oplus r$ für $a, b, x, x' \in R, r \in R_0$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $x' = x \oplus r'$.

Satz 1. Es sei R_0 ein Ideal des Ternärtringes $T = (R, t)$. Setzen wir $\bar{a} = \{t(1, a, r) \mid r \in R_0\}$ und $R/R_0 = \{\bar{a} \mid a \in R\}$, so ist R/R_0 eine Zerlegung der Menge R . Setzen wir weiter $t'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \overline{t(a, b, c)}$ für $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R/R_0$, so ist t' eine Ternäroperation über R/R_0 und $T' = (R/R_0, t')$ bildet einen Restklassen-Ternärtring.

Zum Beweis siehe Beweise von Sätzen 4 und 5 [4].

Definition 7. Es sei R_0 ein Ideal des Ternärtringes $T = (R, t)$ und $T' = (R/R_0, t')$ der durch R_0 bestimmte Restklassen-Ternärtring. Das Ideal R_0 heißt *vollständig*, wenn für beliebige Elemente $a, b, c, d \in R$ mit $\bar{a} \neq \bar{c}$ gilt:

- (K'3) (a) $\exists! x \in R, t(x, a, b) = t(x, c, d)$.
 (b) $t'(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}) = t'(\bar{x}, \bar{c}, \bar{d}) \wedge t'(\bar{x}', \bar{a}, \bar{b}) = t'(\bar{x}', \bar{c}, \bar{d}) \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}'$.
- (K'4) (a) $\exists! (x, y) \in R \times R, b = t(a, x, y), d = t(c, x, y)$.
 (b) $\bar{b} = t'(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y}), \bar{d} = t'(\bar{c}, \bar{x}, \bar{y}) \wedge \bar{b} = t'(\bar{a}, \bar{x}', \bar{y}'), \bar{d} = t'(\bar{c}, \bar{x}', \bar{y}') \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}'$.

Definition 8. Ein Ternärtring, der ein vollständiges Ideal enthält, heißt *lokal*.

Bemerkung 2. Ist R_0 ein vollständiges Ideal eines lokalen Ternärtringes $T = (R, t)$, dann ist $T' = (R/R_0, t')$ ein Ternärkörper ([4], Satz 8).

Definition 9. Es sei $T = (R, t)$ ein lokaler Ternärtring mit vollständigem Ideal R_0 und $T' = (R/R_0, t')$ der zugehörige Restklassen-Ternärkörper. Zwei Elemente $a, b \in R$ heißen *fern* bzw. *benachbart*, falls $\bar{a} \neq \bar{b}$ bzw. $\bar{a} = \bar{b}$ gilt.

Definition 10. Es sei $T = (R, t)$ ein lokaler Ternärtring mit vollständigem Ideal R_0 und $T' = (R/R_0, t')$ der durch das Ideal R_0 bestimmte Restklassen-Ternärkörper. Unter einem *affinen lokalen Ternärtring* versteht man das Tripel $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$,

wo t_1 eine Abbildung der Menge $R \times R_0 \times R$ in R mit folgenden Eigenschaften ist:

$$(T1) \quad t_1(a, b, c) \in \bar{c} \quad \forall a, c \in R \quad \forall b \in R_0.$$

$$(T2) \quad \forall a, d \in R \quad \forall b \in R_0 \quad \exists! c \in R, \quad d = t_1(a, b, c).$$

(T3) Für alle $a, b, c, d \in R$ mit $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} \neq \bar{d}$ gibt es genau ein Paar $(x, y) \in R_0 \times R$ mit $a = t_1(b, x, y)$, $c = t_1(d, x, y)$.

$$(T4) \quad \forall a, b, d \in R \quad \forall c \in R_0 \quad \exists! (x, y) \in R \times R, \quad y = t(x, a, b), \quad x = t_1(y, c, d).$$

$$(T5) \quad t_1(0, a, b) = b \quad \forall (a, b) \in R_0 \times R.$$

Definition 11. Ein affiner lokaler Ternärring $\mathcal{F} = (R, t, t_1)$ heißt *geordnet*, falls die Menge R geordnet ist und folgende Forderungen gelten:

$$(A1) \quad v, v' \in R, \quad v \leq v' \Rightarrow t(a, u, v) \leq t(a, u, v') \quad \forall a, u \in R.$$

$$(A2) \quad v, v' \in R, \quad v \leq v' \Rightarrow t_1(a, u, v) \leq t_1(a, u, v') \quad \forall u \in R_0 \quad \forall a \in R.$$

(A3) Es sei $t(x_1, u, v_1) = t(x_1, u_0, v_0)$, $t(x_2, u, v_2) = t(x_2, u_0, v_0)$ und $\bar{u} \neq \bar{u}_0$. Aus $u \leq u_0$ bzw. $u_0 \leq u$ folgt $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow v_1 \leq v_2$ bzw. $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow v_2 \leq v_1$.

(A4) Gilt $y_1 = t(x_1, u_0, v_0)$, $y_2 = t(x_2, u_0, v_0)$ und $x_1 = t_1(y_1, u, v_1)$, $x_2 = t_1(y_2, u, v_2)$, dann $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow v_1 \leq v_2$.

(A5) Gilt $x_1 = t_1(y_1, u_0, v_0)$, $x_2 = t_1(y_2, u_0, v_0)$ und $y_1 = t(x_1, u, v_1)$, $y_2 = t(x_2, u, v_2)$, dann $y_1 \leq y_2 \Leftrightarrow v_1 \leq v_2$.

Folgerungen.

(1) Es seien $v, v' \in R$. Nach (K2) ist $v = v' \Leftrightarrow t(a, u, v) = t(a, u, v')$ für $a, u \in R$. Aus (A1) folgt daher $v < v' \Rightarrow t(a, u, v) < t(a, u, v')$. Es sei $t(a, u, v) \leq t(a, u, v')$. Gilt dabei $v' < v$, dann ist $t(a, u, v') < t(a, u, v)$, im Widerspruch zu $t(a, u, v) \leq t(a, u, v')$. So erhält man $t(a, u, v) \leq t(a, u, v') \Rightarrow v \leq v'$ und zugleich auch $t(a, u, v) < t(a, u, v') \Rightarrow v < v'$.

(2) Es seien $v, v' \in R$. Nach (T2) ist $v = v' \Leftrightarrow t_1(a, u, v) = t_1(a, u, v')$ für $u \in R_0$, $a \in R$. Somit ergibt sich $v < v' \Rightarrow t_1(a, u, v) < t_1(a, u, v')$. Analog zu (1) zeigt man auch $t_1(a, u, v) \leq t_1(a, u, v') \Rightarrow v \leq v'$ und $t_1(a, u, v) < t_1(a, u, v') \Rightarrow v < v'$.

(3) Es seien die Voraussetzungen von (A3) erfüllt.

a) Es sei $u \leq u_0$. Aus $x_1 = x_2$ folgt $t(x_1, u, v_1) = t(x_1, u_0, v_0) = t(x_1, u, v_2)$, woraus sich wegen (K2) $v_1 = v_2$ ergibt. Ist umgekehrt $v_1 = v_2$, dann ist $t(x_1, u, v_1) = t(x_1, u_0, v_0)$, $t(x_2, u, v_1) = t(x_2, u_0, v_0)$, woraus sich wegen $\bar{u} \neq \bar{u}_0$ nach (K'3) $x_1 = x_2$ ergibt. Es gilt also $x_1 < x_2 \Leftrightarrow v_1 < v_2$.

b) Ist $u_0 \leq u$, so wird ganz analog zu a) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow v_2 < v_1$ bewiesen.

(4) Es seien die Voraussetzungen von (A4) erfüllt. Ist $x_1 = x_2$, dann $y_1 = y_2$, $t_1(y_1, u, v_1) = t_1(y_1, u, v_2)$, woraus sich nach (T2) $v_1 = v_2$ ergibt. Ist $v_1 = v_2$,

dann gilt $x_1 = t_1(y_1, u, v_1)$, $y_1 = t(x_1, u_0, v_0)$, $x_2 = t_1(y_2, u, v_1)$, $y_2 = t(x_2, u_0, v_0)$,
woraus nach (T4) $x_1 = x_2$ folgt. So erhält man $x_1 < x_2 \Leftrightarrow v_1 < v_2$.

(5) Sind die Voraussetzungen von (A5) erfüllt, dann zeigen wir analog zu (4),
daß $y_1 < y_2 \Leftrightarrow v_1 < v_2$ gilt.

Es sei $\mathcal{F} = (R, t, t_1)$ ein affiner lokaler Ternärring und sei R geordnet. Mit (A*3)
bezeichnen wir die folgende Behauptung:

(A*3) Es sei $t(x_0, u_1, v_1) = t(x_0, u_2, v_2)$, $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$ und $u_1 \leq u_2$. Aus $x_0 \leq x$
bzw. $x \leq x_0$ folgt $t(x, u_1, v_1) \leq t(x, u_2, v_2)$ bzw. $t(x, u_2, v_2) \leq t(x, u_1, v_1)$.

Satz 2. Es sei $\mathcal{F} = (R, t, t_1)$ ein affiner lokaler Ternärring. Ist R geordnet und
gilt (A1), dann ist (A3) \Leftrightarrow (A*3).

Beweis. (A3) \Rightarrow (A*3). Wir nehmen an, daß (A3) gilt und die Voraussetzungen
von (A*3) erfüllt sind. Setzen wir $y = t(x, u_2, v_2)$, dann gibt es nach (K2) genau
ein Element $w \in R$ mit $y = t(x, u_1, w)$. Damit erhalten wir $t(x_0, u_1, v_1) = t(x_0, u_2, v_2)$,
 $t(x, u_1, w) = t(x, u_2, v_2)$. Wegen $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$, $u_1 \leq u_2$, $x_0 \leq x$ folgt aus (A3) $v_1 \leq v_2$.
Nach (A1) ergibt sich also $t(x, u_1, v_1) \leq t(x, u_1, w)$ und aus $t(x, u_1, w) = t(x, u_2, v_2)$
folgt schließlich $t(x, u_1, v_1) \leq t(x, u_2, v_2)$. Aus $x \leq x_0$ erhält man ähnlicherweise
 $t(x, u_2, v_2) \leq t(x, u_1, v_1)$.

(A*3) \Rightarrow (A3). Wir nehmen an, daß (A*3) gilt und die Voraussetzungen von (A3)
erfüllt sind.

1. Es sei $u \leq u_0$.

a) Wir nehmen $x_1 \leq x_2$ an. Wegen $t(x_1, u, v_1) = t(x_1, u_0, v_0)$, $\bar{u} \neq \bar{u}_0$, $u \leq u_0$
und $x_1 \leq x_2$ folgt aus (A*3) $t(x_2, u, v_1) \leq t(x_2, u_0, v_0)$. Wegen $t(x_2, u, v_2) =$
 $= t(x_2, u_0, v_0)$ ergibt sich also $t(x_2, u, v_1) \leq t(x_2, u, v_2)$ und aus der Folgerung (1)
folgt daraus $v_1 \leq v_2$.

b) Es sei $v_1 \leq v_2$. Nach (A1) gilt $t(x_1, u, v_1) \leq t(x_1, u, v_2)$, also $t(x_1, u_0, v_0) \leq$
 $\leq t(x_1, u, v_2)$. Es sei $x_2 < x_1$. Wegen $t(x_2, u, v_2) = t(x_2, u_0, v_0)$, $\bar{u} \neq \bar{u}_0$, $u \leq u_0$
erhalten wir dann nach (A*3) $t(x_1, u, v_2) \leq t(x_1, u_0, v_0)$. Da zugleich $t(x_1, u_0, v_0) \leq$
 $\leq t(x_1, u, v_2)$ ist, folgt daraus $t(x_1, u_0, v_0) = t(x_1, u, v_2)$. Wegen $t(x_2, u, v_2) =$
 $= t(x_2, u_0, v_0)$ und $t(x_1, u, v_2) = t(x_1, u_0, v_0)$ gilt nach (K'3) $x_1 = x_2$, was ein
Widerspruch ist. Somit erhalten wir $x_1 \leq x_2$.

2. Gilt $u_0 \leq u$, so verfahren wir genauso wie im Teil 1.

Bemerkung 3. Unter Anwendung der Folgerung (3) läßt sich zeigen, daß in (A*3)
 $x_0 < x \Rightarrow t(x, u_1, v_1) < t(x, u_2, v_2)$ bzw. $x < x_0 \Rightarrow t(x, u_2, v_2) < t(x, u_1, v_1)$ gilt.

Satz 3. Es sei $\mathcal{F} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring und
 $T' = (R/R_0, t')$ der zugehörige Restklassen-Ternärkörper. Sind x_1, x_2, x drei Ele-
mente von R mit $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und $x_1 \leq x \leq x_2$, dann $\bar{x}_1 = \bar{x}$.

Beweis. Wir nehmen an, daß $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $x_1 \leq x \leq x_2$ und zugleich $\bar{x}_1 \neq \bar{x}$ gilt. Nach (K2) gibt es genau ein $v_0 \in R$ mit $0 = t(x, 1, v_0)$. Gilt $\bar{y}_1 = \bar{0}$ für $y_1 = t(x_1, 1, v_0)$, dann ergibt sich nach Satz 1 $\bar{0} = t(x_1, \bar{1}, v_0) = t'(\bar{x}_1, \bar{1}, \bar{v}_0)$ und $0 = t(x, 1, v_0) \Rightarrow \bar{0} = t'(\bar{x}, \bar{1}, \bar{v}_0)$. Da $T' = (R/R_0, t')$ ein Ternärkörper ist, gilt nach (K1) zugleich auch $\bar{0} = t'(\bar{x}, \bar{0}, \bar{0}) = t'(\bar{x}_1, \bar{0}, \bar{0})$. Wegen $t'(\bar{x}_1, \bar{1}, \bar{v}_0) = t'(\bar{x}_1, \bar{0}, \bar{0})$ und $t'(\bar{x}, \bar{1}, \bar{v}_0) = t'(\bar{x}, \bar{0}, \bar{0})$ erhält man nach (K3) $\bar{x} = \bar{x}_1$, also einen Widerspruch. Mithin ist $\bar{y}_1 \neq \bar{0}$. Wegen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und $\bar{y}_1 \neq \bar{0}$ gibt es nach (T3) genau ein Paar $(u, v) \in R_0 \times R$ mit $x_1 = t_1(y_1, u, v)$ und $x_2 = t_1(0, u, v)$. Da aus $x_2 = t_1(0, u, v)$ nach (T5) $x_2 = v$ folgt, gilt $y_1 = t(x_1, 1, v_0)$, $0 = t(x, 1, v_0)$, $x_1 = t_1(y_1, u, x_2)$, $x = t_1(0, u, x)$. Unserer Voraussetzung $x_1 \leq x$ nach folgt also gemäß (A4) $x_2 \leq x$. Wegen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und $\bar{x}_1 \neq \bar{x}$ ist $\bar{x} \neq \bar{x}_2$ und $x_2 < x$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $x \leq x_2$. Damit erhalten wir $\bar{x}_1 = \bar{x}$.

Definition 12. Ein Ternärkörper $T = (R, t)$ heißt *geordnet*, wenn die Menge R so geordnet ist, daß (A1) und die folgende Bedingungen gelten:

(A'3) Es sei $t(x_0, u_1, v_1) = t(x_0, u_2, v_2)$, $u_1 < u_2$. Gilt $x_0 < x$ bzw. $x_0 < x$, dann ist $t(x, u_1, v_1) < t(x, u_2, v_2)$ bzw. $t(x, u_2, v_2) < t(x, u_1, v_1)$. (Siehe [1]).

Satz 4. Ist $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärtring und $T = (R, t)$ der zugehörige lokale Ternärtring mit vollständigem Ideal R_0 , dann ist $T' = (R/R_0, t')$ ein geordneter Ternärkörper.

Beweis. Auf der Menge $R' = R/R_0$ erklären wir eine binäre Relation \leq folgenderweise: Für $\bar{x}, \bar{y} \in R'$ setzen wir $\bar{x} \leq \bar{y}$ genau dann, wenn es Elemente $a \in \bar{x}$, $b \in \bar{y}$ mit $a \leq b$ gibt. Diese Definition ist von der Wahl der Elemente aus \bar{x} und \bar{y} unabhängig: Ist $\bar{x} = \bar{y}$, dann gilt $\bar{a} = \bar{b}$ für beliebige $a \in \bar{x}$, $b \in \bar{y}$. Es sei also $\bar{x} < \bar{y}$. Dann gibt es Elemente $a \in \bar{x}$, $b \in \bar{y}$ mit $a \leq b$. Ist b_1 ein Element von \bar{y} mit $b_1 \leq a$, dann gilt $b_1 \leq a \leq b$, was wegen $\bar{b}_1 = \bar{b}$ und $\bar{a} \neq \bar{b}_1$ im Widerspruch zum Satz 3 steht. Mithin ist $a \leq b_1$. Ähnlicherweise ergibt sich für ein beliebiges Element $a_1 \in \bar{x}$, daß $a_1 \leq b$ gilt. Es ist leicht nachzuprüfen, daß die auf der Menge R' eingeführte Relation \leq eine Anordnung ist ([6], Def. 1). Wir zeigen, daß diese Anordnung den Forderungen (A1) und (A'3) genügt.

Ad (A1). Es seien $\bar{v}, \bar{v}' \in R'$ mit $\bar{v} \leq \bar{v}'$. Dann gibt es Elemente $w, w' \in R$ mit $w \leq w'$ und $\bar{w} = \bar{v}$, $\bar{w}' = \bar{v}'$. Wegen $w \leq w'$ ergibt sich $t(a, u, w) \leq t(a, u, w')$ für alle $a, u \in R$. Wegen $\bar{t}(a, u, w) = t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{w})$ und $\bar{t}(a, u, w') = t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{w}')$ gilt nach der Definition der Anordnung auf R' : $t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{w}) \leq t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{w}')$, also $t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{v}) \leq t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{v}')$.

Ad (A'3). Es seien $t'(\bar{x}_0, \bar{u}_1, \bar{v}_1) = t'(\bar{x}_0, \bar{u}_2, \bar{v}_2)$, $\bar{u}_1 < \bar{u}_2$ und $\bar{x}_0 < \bar{x}$. Wir wählen Elemente $x'_0 \in \bar{x}_0$, $u'_1 \in \bar{u}_1$, $v'_1 \in \bar{v}_1$, $u'_2 \in \bar{u}_2$. Setzen wir $y = t(x'_0, u'_1, v'_1)$, dann gibt es nach (K2) genau ein $w \in R$ mit $y = t(x'_0, u'_2, w)$. Wegen $\bar{y} = t'(\bar{x}_0, \bar{u}_1, \bar{v}_1) = t'(\bar{x}_0, \bar{u}_2, \bar{v}_2) = t'(\bar{x}_0, \bar{u}_2, \bar{w})$ erhalten wir nach (K2) $\bar{w} = \bar{v}_2$ und mithin $w \in \bar{v}_2$.

Ist $x' \in \bar{x}$, dann gilt $t(x'_0, u'_1, v'_1) = t(x'_0, u'_2, w)$, $u'_1 < u'_2$, $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$ und $x'_0 < x'$. Nach Satz 2 ergibt sich dann $t(x'_0, u'_1, v'_1) \leq t'(x'_0, u'_2, w)$. Nach (K3) folgt aus $t'(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{v}_1) = t'(\bar{x}, \bar{u}_2, \bar{w}) = t'(\bar{x}, \bar{u}_2, \bar{v}_2)$ wegen $t'(\bar{x}_0, \bar{u}_1, \bar{v}_1) = t'(\bar{x}_0, \bar{u}_2, \bar{v}_2)$ die Gleichheit $\bar{x}_0 = \bar{x}$, was aber ein Widerspruch ist. Nach der Definition der Anordnung von R' gilt also $t'(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{v}_1) < t'(\bar{x}, \bar{u}_2, \bar{v}_2)$. Der Rest des Beweises wird analog geführt.

Satz 5. *Es sei $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärtring. Sind u, u_0 zwei Elemente von R mit $\bar{u} \neq \bar{u}_0$ und $u \leq u_0$, dann gilt $0 \leq x \Rightarrow t(x, u, v) \leq t(x, u_0, v)$ und $x \leq 0 \Rightarrow t(x, u_0, v) \leq t(x, u, v)$ für ein beliebiges $v \in R$.*

Beweis. a) Es seien $x, v \in R$ mit $0 \leq x$. Setzen wir $y = t(x, u, v)$, dann gibt es genau ein $v_0 \in R$ mit $y = t(x, u_0, v_0)$. Da zugleich $t(0, u, v_0) = t(0, u_0, v_0)$ gilt, ergibt sich nach (A3) $0 \leq x \Rightarrow v_0 \leq v$. Nach (A1) ist dann $v_0 \leq v \Rightarrow t(x, u_0, v_0) \leq t(x, u_0, v)$, also $t(x, u, v) \leq t(x, u_0, v)$.

b) Ganz ähnlich geht man im Falle $x \leq 0$ vor.

Bemerkung 4. Nach Folgerungen (1) und (3) der Definition 11 gilt $0 < x \Rightarrow t(x, u, v) < t(x, u_0, v)$ und $x < 0 \Rightarrow t(x, u_0, v) < t(x, u, v)$.

Satz 6. *Es sei $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärtring. Sind u, x_1, x_2 Elemente von R mit $\bar{u} \neq \bar{0}$ und $x_1 \leq x_2$, dann gilt $0 \leq u \Rightarrow t(x_1, u, v) \leq t(x_2, u, v)$ und $u \leq 0 \Rightarrow t(x_2, u, v) \leq t(x_1, u, v)$ für ein beliebiges $v \in R$.*

Beweis. a) Es seien $u, v \in R$ mit $0 \leq u$, $\bar{u} \neq \bar{0}$. Setzen wir $v_1 = t(x_1, u, v)$, $v_2 = t(x_2, u, v)$, dann gilt auch $v_1 = t(x_1, 0, v_1)$ und $v_2 = t(x_2, 0, v_2)$, woraus wir nach (A3) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow v_1 \leq v_2 \Rightarrow t(x_1, u, v) \leq t(x_2, u, v)$ erhalten.

b) Analog zu a) geht man im Falle $u \leq 0$ vor.

Bemerkung 5. Für $\bar{u} \neq \bar{0}$ und $x_1 < x_2$ gilt $0 < u \Rightarrow t(x_1, u, v) < t(x_2, u, v)$ und $u < 0 \Rightarrow t(x_2, u, v) < t(x_1, u, v)$.

Satz 7. *Im geordneten affinen lokalen Ternärtring $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ gilt $0 < 1$.*

Beweis. Es sei $1 \leq 0$. Nach Satz 5 und Bemerkung 4 erhalten wir wegen $\bar{0} \neq \bar{1}$, daß $t(x, 1, v) < t(x, 0, v)$ für beliebige $v, x \in R$ mit $0 < x$ gilt. Für $v = 0$ ergibt sich speziell $x < 0$, im Widerspruch zu $0 < x$.

Bemerkung 6. In der im Beweis von Satz 4 eingeführten Anordnung von $T' = (R', t')$ gilt nach Satz 7 $\bar{0} < \bar{1}$. Für die Elemente $a \in \bar{0}$, $b \in \bar{1}$ von R ergibt sich dann $a < b$.

Satz 8. *In jedem geordneten affinen lokalen Ternärtring existieren unendlich viele voneinander ferne Elemente.*

Beweis. Es sei $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärning. Setzen wir im Satz 6 $x_1 = 0, x_2 = u = v = 1$, so nach Bemerkung 5 gilt wegen $0 < 1$ die Ungleichheit $t(0, 1, 1) = 1 < t(1, 1, 1) = v_1$. Sind die Elemente $1, v_1$ benachbart, dann ist $t(\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}) = \bar{1} = t'(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$. Da zugleich $\bar{1} = t'(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}) = t'(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1})$ gilt, erhalten wir nach (K3) $\bar{0} = \bar{1}$, denn $T' = (R/R_0, t')$ ist ein Ternärkörper. Die Elemente $1, v_1$ sind also fern. Es seien $0, v_1$ benachbart. Nach Satz 3 folgt dann aus $0 < 1 < v_1$ die Gleichheit $\bar{1} = \bar{0}$, was ein Widerspruch ist. Die Elemente $0, 1, v_1$ sind also voneinander fern. Wegen $1 < v_1$ gilt nach Satz 6 $v_1 = t(1, 1, 1) < t(v_1, 1, 1) = v_2$ und das Element v_2 ist von den Elementen $0, 1, v_1$ fern. Wegen $v_1 < v_2$ gilt $v_2 = t(v_1, 1, 1) < t(v_2, 1, 1) = v_3$ mit $\bar{v}_2 \neq \bar{v}_3$ u.s.w.

Satz 9. Es sei $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ ein konvex fastgeordneter lokaler Ring mit maximalem Ideal R_0 . Setzt man $t(a, b, c) = ab + c \quad \forall a, b, c \in R$ und $t_1(a, b, c) = ab + c \quad \forall a, b, c \in R \quad \forall b \in R_0$, dann ist $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärning.

Beweis. Nach [5], Beispiel 2 und Satz 4 erfüllt \mathcal{T} die Forderungen (T1) bis (T4) der Definition 10. Es gilt dabei $t_1(0, a, b) = 0a + b = b$ und \mathcal{T} ist ein affiner lokaler Ternärning. Wir zeigen, daß \mathcal{T} geordnet ist (Elemente von R/R_0 bezeichnen wir mit \bar{a}, \bar{b}, \dots).

Ad (A1) Es seien $v, v' \in R$ mit $v \leq v'$. Nach (R1) gilt dann $v + au \leq v' + au$ und $au + v \leq au + v'$ für alle $a, u \in R$, also ist $t(a, u, v) \leq t(a, u, v')$.

Ad (A2) Wegen $t(a, u, v) = t_1(a, u, v) \quad \forall a, v \in R \quad \forall u \in R_0$ verfahren wir analog zu (A1).

Ad (A3) Es sei $t(x_1, u, v_1) = t(x_1, u_0, v_0), t(x_2, u, v_2) = t(x_2, u_0, v_0), \bar{u} \neq \bar{u}_0$, also $x_1u + v_1 = x_1u_0 + v_0$ und $x_2u + v_2 = x_2u_0 + v_0$. Die letzten Gleichheiten ergeben $(x_2 - x_1)u + v_2 - v_1 = (x_2 - x_1)u_0$, also $(x_2 - x_1)(u_0 - u) = v_2 - v_1$.

1. Es sei $u \leq u_0$. Wegen $\bar{u} \neq \bar{u}_0$ gilt $u_0 - u \notin R_0$.

a) Aus $x_1 \leq x_2$ ergibt sich nach (R1) $0 \leq x_2 - x_1$ und aus Folgerung (2) der Definition 3 folgt $(x_2 - x_1)u \leq (x_2 - x_1)u_0$, also $0 \leq (x_2 - x_1)(u_0 - u)$ und $0 \leq v_2 - v_1$. Somit ist $v_1 \leq v_2$.

b) Es sei $v_1 \leq v_2$. Wegen $0 \leq v_2 - v_1$ erhält man $0 \leq (x_2 - x_1)(u_0 - u)$ und $(x_2 - x_1)u \leq (x_2 - x_1)u_0$. Wegen $u_0 - u \notin R_0$ und $u \leq u_0$ gilt nach Folgerung (4) der Definition 3 $0 \leq x_2 - x_1$, also $x_1 \leq x_2$.

2. Im Falle $u_0 \leq u$ geht man ganz analog zu 1 vor.

Ad (A4) Es sei $y_1 = t(x_1, u_0, v_0), y_2 = t(x_2, u_0, v_0), x_1 = t_1(y_1, u, v_1), x_2 = t_1(y_2, u, v_2)$ mit $u \in R_0$, also $y_1 = x_1u_0 + v_0, y_2 = x_2u_0 + v_0, x_1 = y_1u + v_1, x_2 = y_2u + v_2$. Die letzten Gleichheiten ergeben $y_1 - y_2 = (x_1 - x_2)u_0, v_2 - v_1 = (x_2 - x_1) + (y_1 - y_2)u$, also $v_2 - v_1 = (x_2 - x_1) + (x_1 - x_2)u_0u = (x_2 - x_1)(1 - u_0u)$. Wegen $u \in R_0$ gilt dabei $u_0u \in R_0, 1 - u_0u \notin R_0$ und nach (R3) ist mithin $u_0u \leq 1$.

1. Es sei $x_1 \leq x_2$, also $0 \leq x_2 - x_1$. Wegen $u_0 u \leq 1$ und $1 - u_0 u \notin R_0$ ergibt sich nach Folgerung (2) der Definition 3 $(x_2 - x_1) u_0 u \leq x_2 - x_1$, also $0 \leq (x_2 - x_1)(1 - u_0 u)$, was $0 \leq v_2 - v_1$ und $v_1 \leq v_2$ bedeutet.

2. Aus $v_1 \leq v_2$ folgt $0 \leq (x_2 - x_1)(1 - u_0 u)$ und $(x_2 - x_1) u_0 u \leq x_2 - x_1$. Wegen $u_0 u \leq 1$ und $1 - u_0 u \notin R_0$ gilt nach Folgerung (4) der Definition 3 $0 \leq x_2 - x_1$, also $x_1 \leq x_2$.

Ad (A5) Es sei $x_1 = t_1(y_1, u_0, v_0)$, $x_2 = t_1(y_2, u_0, v_0)$, $y_1 = t(x_1, u, v_1)$, $y_2 = t(x_2, u, v_2)$ mit $u_0 \in R_0$, also $x_1 = y_1 u_0 + v_0$, $x_2 = y_2 u_0 + v_0$, $y_1 = x_1 u + v_1$, $y_2 = x_2 u + v_2$. Daraus folgt $x_1 - x_2 = (y_2 - y_1) u_0$, $v_2 - v_1 = (y_2 - y_1) + (x_1 - x_2) u$ und $v_2 - v_1 = (y_2 - y_1)(1 - u_0 u)$. Ferner geht man analog zu Ad (A4) vor.

Satz 10. Es sei $\mathcal{T} = (R, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärtring und $T = (R, t)$ der zu \mathcal{T} gehörige lokale Ternärtring. Auf der Menge R definieren wir binäre Operationen $+$, \cdot mit $t(1, a, b) = a + b$, $t(a, b, 0) = ab$ für alle $a, b \in R$ und nehmen wir dabei $t(a, b, c) = ab + c$ an. Ist $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ ein assoziativer Ring, dann ist \mathcal{R} ein konvex fastgeordneter lokaler Ring.

Beweis. Es sei R_0 das vollständige Ideal von $T = (R, t)$. Dann ist $R_0 \neq R$. Zunächst beweisen wir, daß R_0 ein Rechtsideal von \mathcal{R} ist, d.h. $xa \in R_0$, $x + y \in R_0$, $-x \in R_0$ für beliebige $a \in R$ und $x, y \in R_0$ gilt. Dazu verwenden wir die Definition 6 eines Ideals von T , wo, unserer Definition von $+$ wegen, $a \oplus r = a + r$ für $a \in R$, $r \in R_0$ gilt.

1. Es seien $a \in R$, $x \in R_0$. Setzen wir $xa = (0 + x)(a + 0) + (0 + 0)$, dann ist $xa = t(0 + x, a + 0, 0 + 0)$ und nach (iii), Definition 6 gibt es ein Element $r' \in R_0$ mit $xa = t(0, a, 0) + r' = r'$. Mithin ist $xa \in R_0$.

2. Es sei $x \in R_0$. Setzen wir $b = a + x$ für ein Element $a \in R$, dann gilt $a = b - x$. Nach (ii), Definition 6 gibt es ein $r' \in R_0$ mit $a = b + r'$. Daraus ergibt sich $b - x = b + r'$ und $r' = -x \in R_0$.

3. Es seien $x, y \in R_0$. Setzen wir $x + y = (0 + x)(1 + 0) + (0 + y)$, dann ist $x + y = t(0 + x, 1 + 0, 0 + y)$ und nach (iii) gibt es ein $r' \in R_0$ mit $x + y = t(0, 1, 0) + r' = r'$.

Ferner beweisen wir, daß R_0 der einzige maximale Rechtsideal von \mathcal{R} ist. Es sei Q ein Ideal von \mathcal{R} , welches in R_0 nicht enthalten ist. Dann gibt es ein Element $m \in Q$ mit $m \notin R_0$, also $\bar{m} \neq \bar{0}$ in $T' = (R/R_0, t')$. Setzen wir $a = m$, $b = 1$, $c = d = 0$, so gibt es wegen $\bar{m} \neq \bar{0}$ nach (K'4) ein Paar $(x, y) \in R \times R$ mit $1 = t(m, x, y)$ und $0 = t(0, x, y)$, also mit $1 = mx + y$ und $0 = 0x + y$. Daraus ergibt sich $y = 0$ und $1 = mx \in Q$, weil $m \in Q$ und Q ein Rechtsideal von \mathcal{R} ist. Aus $1 \in Q$ folgt dann $Q = R$. Alle von R verschiedene Rechtsideale von \mathcal{R} sind in R_0 enthalten und daher ist R_0 der einzige maximale Rechtsideal von \mathcal{R} . Nach Definition 2 ist also \mathcal{R} ein lokaler Ring.

Wir beweisen, daß \mathcal{R} konvex fastgeordnet ist: Wegen $t(a, b, c) = ab + c$ gilt $t(1, a, b) = a + b = t(a, 1, b)$.

Ad (R1) Es seien $a, b, v \in R$ mit $a \leq b$. Setzen wir im Satz 6 $u = 1, x_1 = a, x_2 = b$, dann erhalten wir $0 \leq 1 \Rightarrow t(a, 1, v) \leq t(b, 1, v)$, also $a + v \leq b + v$.

Ad (R2) Es seien $a, b \in R$ mit $0 \leq a, 0 \leq b$ und $b \notin R_0$. Setzen wir im Satz 5 $u = 0, u_0 = b, x = a, v = 0$, dann erhalten wir wegen $\bar{b} \neq \bar{0}$ und $0 \leq b: 0 \leq a \Rightarrow t(a, 0, 0) \leq t(a, b, 0)$, also $0 \leq ab$.

Ad (R3) Ist $a \in R_0$, dann ist $a \in \bar{0}$ und $1 \in \bar{1}$, wo $\bar{0}, \bar{1} \in T'$. Nach Bemerkung 6 gilt dann $a \leq 1$.

Es sei $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ eine AK-Ebene ([6], Def. 3, [5], Def. 10). Durch ein Koordinatensystem (x, y, E) von \mathcal{A} ist ein affiner lokaler Ternärtring $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ zu erklären ([5] und [6], Behauptung (K)). Den Sätzen 13 bis 17 von [6] nach erhalten wir:

Satz 11. *Ist eine AK-Ebene \mathcal{A} konvex geordnet ([6], Definitionen 5 und 8), dann ist der zu \mathcal{A} gehörige affine lokale Ternärtring $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ geordnet.*

Es seien $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein affiner lokaler Ternärtring, $T = (R, t)$ der zu \mathcal{T} gehörige lokale Ternärtring mit maximalem Ideal R_0 und $T' = (R/R_0, t')$ der durch R_0 bestimmte Restklassen-Ternärkörper. Ferner seien $\mathcal{P}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ Mengen mit $\mathcal{P} \cap \mathcal{L}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$ und $\xi: R \times R \leftrightarrow \mathcal{P}, \eta: R \times R \leftrightarrow \mathcal{L}_1, \zeta: R_0 \times R \leftrightarrow \mathcal{L}_2$ bijektive Abbildungen. Setzen wir $(x, y)^\xi = [x, y], (m, k)^\eta = \langle m, k \rangle, (m, k)^\zeta = \langle\langle m, k \rangle\rangle, \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ und definieren wir eine Inzidenzrelation $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ durch $[x, y] I \langle m, k \rangle \Leftrightarrow y = t(x, m, k), [x, y] I \langle\langle m, k \rangle\rangle \Leftrightarrow x = t_1(y, m, k)$, dann ist das Tripel $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ eine AK-Ebene ([5], Satz 7). Die Elemente von \mathcal{P} bzw. \mathcal{L} heißen Punkte bzw. Geraden von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$. Die Geraden $\langle m_1, k_1 \rangle, \langle m_2, k_2 \rangle$ bzw. $\langle\langle m_1, k_1 \rangle\rangle, \langle\langle m_2, k_2 \rangle\rangle$ sind genau dann parallel, wenn $m_1 = m_2$ ist. Zum Ternärkörper T' läßt sich ähnlich wie oben eine affine Ebene $\mathcal{A}_{T'}$ erklären. Die Abbildung \varkappa mit $[x, y] \rightarrow [\bar{x}, \bar{y}], \langle m, k \rangle \rightarrow \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle, \langle\langle m, k \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle \bar{m}, \bar{k} \rangle\rangle$ ist ein Epimorphismus der AK-Ebene $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ auf die affine Ebene $\mathcal{A}_{T'}$. Ist A bzw. a ein Punkt bzw. eine Gerade von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, dann setzen wir $A\varkappa = \bar{A}$ bzw. $a\varkappa = \bar{a}$. Sind $A = [x_1, y_1], B = [x_2, y_2]$ zwei Punkte von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, dann gilt $\bar{A} = \bar{B}$ genau dann, wenn $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \wedge \bar{y}_1 = \bar{y}_2$ ist. Sind $p = \langle m_1, k_1 \rangle, q = \langle m_2, k_2 \rangle$ zwei Geraden von \mathcal{L}_1 , dann $\bar{p} = \bar{q} \Leftrightarrow \bar{m}_1 = \bar{m}_2 \wedge \bar{k}_1 = \bar{k}_2$. Für zwei Geraden $p = \langle\langle m_1, k_1 \rangle\rangle, q = \langle\langle m_2, k_2 \rangle\rangle$ gilt $\bar{p} = \bar{q}$ genau dann, wenn $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$. Zwei Punkte A, B mit $\bar{A} \neq \bar{B}$ heißen fern. Anderenfalls sind A, B benachbart.

Satz 12. *Ist $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärtring, dann ist die AK-Ebene $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ konvex geordnet.*

Beweis. I. Auf der Punktmenge beliebiger Geraden $\langle u, v \rangle \in \mathcal{L}_1$ erklären wir eine binäre Relation \leq durch die Anordnung der Menge R wie folgt: Ist $[x_1, y_1], [x_2, y_2] I \langle u, v \rangle$, dann $[x_1, y_1] \leq [x_2, y_2] \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$. Es ist leicht nachzuprüfen, daß diese binäre Relation eine Anordnung ist. (Die Anordnungen auf R und auf der

Punktmenge von $\langle u, v \rangle$ bezeichnen wir mit gleichem Symbol \leq). Auf der Punktmenge einer beliebigen Geraden $\langle u, v \rangle \in \mathcal{L}_2$ definieren wir eine Anordnung ähnlicherweise: Gilt $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in \langle u, v \rangle$, dann $[x_1, y_1] \leq [x_2, y_2] \Leftrightarrow y_1 \leq y_2$. Auf jeder Geraden $\langle u, v \rangle \in \mathcal{L}_1$ erklären wir durch die oben definierte Anordnung \leq eine Zwischenrelation (***) wie folgt: Ist $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3] \in \langle u, v \rangle$, dann gilt $([x_1, y_1] [x_2, y_2] [x_3, y_3]) \Leftrightarrow [x_1, y_1] \leq [x_2, y_2] \leq [x_3, y_3] \vee [x_3, y_3] \leq [x_2, y_2] \leq [x_1, y_1] \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \leq x_3 \vee x_3 \leq x_2 \leq x_1$. Analog wird auch eine Zwischenrelation auf jeder Geraden von \mathcal{L}_2 definiert.

II Wir beweisen, daß auf jeder Geraden von $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ mindestens drei voneinander ferne Punkte liegen. Es sei $\langle u, v \rangle$ eine Gerade von \mathcal{L}_1 . Ein Punkt $[x, y]$ liegt genau dann auf $\langle u, v \rangle$, wenn $y = t(x, u, v)$ ist. Für ein beliebiges $x \in R$ gibt es also genau einen Punkt $[x, y]$, der auf $\langle u, v \rangle$ liegt. Sind die Elemente $x_1, x_2 \in R$ fern, dann gilt $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ und die zugehörigen Punkte $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ von $\langle u, v \rangle$ sind auch fern. Nach Satz 8 enthält die Menge R unendlich viele voneinander ferne Elemente. Mithin gibt es auch auf der Geraden $\langle u, v \rangle$ unendlich viele voneinander ferne Punkte. Ähnliche Betrachtungen kann man auch für eine beliebige Gerade von \mathcal{L}_2 durchführen.

III. Wir beweisen, daß die auf der Geraden von $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ definierten Zwischenrelationen durch die Parallelprojektionen ([6], Def. 4) reproduziert sind. Es sei also φ eine Parallelprojektion der Geraden g auf die Gerade g' mit der Richtung $\Pi(h)$. Dann gilt $\bar{h} \not\parallel \bar{g}, \bar{h} \not\parallel \bar{g}'$. Es seien ferner $A_i = [x_i, y_i], A'_i = [x'_i, y'_i]$ die Punkte mit $A_i \in g, A'_i \in g', A_i, A'_i \in h_i$, wo $h_i \in \Pi(h)$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Wir sollen $(A_1 A_2 A_3) \Rightarrow (A'_1 A'_2 A'_3)$ beweisen. Dazu werden wir einzelne Fälle untersuchen.

1. Es seien $g, g', h \in \mathcal{L}_1$. Dann läßt sich $g = \langle u_1, v_1 \rangle, g' = \langle u_2, v_2 \rangle, h = \langle u, v \rangle$ setzen. Wegen $\bar{h} \not\parallel \bar{g}, \bar{h} \not\parallel \bar{g}'$ gilt dabei $\bar{u} \neq \bar{u}_1$ und $\bar{u} \neq \bar{u}_2$. Ferner sei $h_i = \langle u, w_i \rangle$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Wegen $A_i \in g$ bzw. $A'_i \in g'$ gilt $y_i = t(x_i, u_1, v_1)$ bzw. $y'_i = t(x'_i, u_2, v_2)$ und wegen $A_i, A'_i \in h_i$ dann $y_i = t(x_i, u, w_i), y'_i = t(x'_i, u, w_i)$. Daraus erhält man

$$(*) \quad t(x_i, u_1, v_1) = t(x_i, u, w_i),$$

$$(**) \quad t(x'_i, u_2, v_2) = t(x'_i, u, w_i).$$

Es sei $(A_1 A_2 A_3)$. Dann gilt entweder $A_1 \leq A_2 \leq A_3$ oder $A_3 \leq A_2 \leq A_1$. Wir nehmen an, daß $A_1 \leq A_2 \leq A_3$, also $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ist.

a) Es sei $u \leq u_1$ und $u \leq u_2$. Wegen $\bar{u} \neq \bar{u}_1, u \leq u_1$ und $x_1 \leq x_2$ ergibt sich nach (A3) und (*) für $i \in \{1, 2\}$ die Ungleichheit $w_1 \leq w_2$. Dann wegen $\bar{u} \neq \bar{u}_2, u \leq u_2$ und $w_1 \leq w_2$ folgt aus (**) nach (A3) $x'_1 \leq x'_2$. Ähnlich ergibt sich für $i \in \{2, 3\}$ $x_2 \leq x_3 \Rightarrow w_2 \leq w_3$ und $w_2 \leq w_3 \Rightarrow x'_2 \leq x'_3$. So gilt $x'_1 \leq x'_2 \leq x'_3$, also $(A'_1 A'_2 A'_3)$.

b) Ist $u \leq u_1$ und $u_2 \leq u$, dann erhalten wir nach (A3) unter Anwendung von (*) und (**) schrittweise $x_1 \leq x_2 \Rightarrow w_1 \leq w_2 \Rightarrow x'_2 \leq x'_1$ und $x_2 \leq x_3 \Rightarrow w_2 \leq w_3 \Rightarrow x'_3 \leq x'_2$. Daraus folgt $x'_3 \leq x'_2 \leq x'_1$, also $(A'_1 A'_2 A'_3)$.

Alle weitere Fälle $u_1 \leq u, u \leq u_2$ und $u_1 \leq u, u_2 \leq u$ prüfen wir analog nach.

2. Es seien $g, h \in \mathcal{L}_1$, $g' \in \mathcal{L}_2$. Dann läßt sich $g = \langle u_1, v_1 \rangle$, $h = \langle u, v \rangle$ und $g' = \langle u_2, v_2 \rangle$ schreiben. Da stets $\bar{h} \not\parallel \bar{g}'$ gilt, sollen wir nur $\bar{h} \parallel \bar{g}$, also $\bar{u} \neq \bar{u}_1$ voraussetzen. Setzen wir $h_i = \langle u, w_i \rangle$, dann gilt $y_i = t(x_i, u_1, v_1)$, $x'_i = t_1(y'_i, u_2, v_2)$, $y_i = t(x_i, u, w_i)$ und $y'_i = t(x'_i, u, w_i)$. Daraus erhalten wir

$$(*) \quad t(x_i, u_1, v_1) = t(x_i, u, w_i),$$

$$(**) \quad x'_i = t_1(y'_i, u_2, v_2), \quad y'_i = t(x'_i, u, w_i).$$

Es sei wieder $(A_1 A_2 A_3)$ und $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

a) Es sei $u \leq u_1$. Für $i \in \{1, 2\}$ erhalten wir nach $(*)$ und $(A3)$ $x_1 \leq x_2 \Rightarrow w_1 \leq w_2$. Nach $(A5)$ folgt dann aus $(**)$ $w_1 \leq w_2 \Rightarrow y'_1 \leq y'_2$. Für $i \in \{2, 3\}$ gilt ähnlich $x_2 \leq x_3 \Rightarrow w_2 \leq w_3 \Rightarrow y'_2 \leq y'_3$. Daher erhalten wir $y'_1 \leq y'_2 \leq y'_3$, also $(A'_1 A'_2 A'_3)$.

b) Gilt $u_1 \leq u$, so erhalten wir analog zu a) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow w_2 \leq w_1 \Rightarrow y'_2 \leq y'_1$ und $x_2 \leq x_3 \Rightarrow w_3 \leq w_2 \Rightarrow y'_3 \leq y'_2$, also $y'_3 \leq y'_2 \leq y'_1$ und $(A'_1 A'_2 A'_3)$.

3. Es seien $g \in \mathcal{L}_2$, $g', h \in \mathcal{L}_1$. Dann läßt sich $g = \langle u_1, v_1 \rangle$, $g' = \langle u_2, v_2 \rangle$, $h = \langle u, v \rangle$, $h_i = \langle u, w_i \rangle$ mit $\bar{u}_2 \neq \bar{u}$ schreiben. Analog zu 1 und 2 erhalten wir

$$(*) \quad x_i = t_1(y_i, u_1, v_1), \quad y_i = t(x_i, u, w_i),$$

$$(**) \quad t(x'_i, u_2, v_2) = t(x'_i, u, w_i).$$

Es sei $y_1 \leq y_2 \leq y_3$. Nach $(A5)$ folgt aus $(*)$ $y_1 \leq y_2 \Rightarrow w_1 \leq w_2$ und $y_2 \leq y_3 \Rightarrow w_2 \leq w_3$. Gilt $u \leq u_2$, dann folgt aus $(**)$ und $(A3)$ $w_1 \leq w_2 \Rightarrow x'_1 \leq x'_2$ und $w_2 \leq w_3 \Rightarrow x'_2 \leq x'_3$, also $x'_1 \leq x'_2 \leq x'_3$. Gilt $u_2 \leq u$, dann erhalten wir $w_1 \leq w_2 \Rightarrow x'_2 \leq x'_1$ und $w_2 \leq w_3 \Rightarrow x'_3 \leq x'_2$, also $x'_3 \leq x'_2 \leq x'_1$.

4. Es seien $g, g' \in \mathcal{L}_2$, $h \in \mathcal{L}_1$. Dann ist $g = \langle u_1, v_1 \rangle$, $g' = \langle u_2, v_2 \rangle$, $h = \langle u, v \rangle$ und $h_i = \langle u, w_i \rangle$. Daraus ergibt sich

$$(*) \quad x_i = t_1(y_i, u_1, v_1), \quad y_i = t(x_i, u, w_i),$$

$$(**) \quad x'_i = t_1(y_i, u_2, v_2), \quad y'_i = t(x'_i, u, w_i).$$

Es sei $y_1 \leq y_2 \leq y_3$. Nach $(*)$ und $(A5)$ erhalten wir $y_1 \leq y_2 \Rightarrow w_1 \leq w_2$, $y_2 \leq y_3 \Rightarrow w_2 \leq w_3$. Nach $(**)$ und $(A5)$ erhalten wir weiter $w_1 \leq w_2 \Rightarrow y'_1 \leq y'_2$, $w_2 \leq w_3 \Rightarrow y'_2 \leq y'_3$, also $y'_1 \leq y'_2 \leq y'_3$.

5. Es seien $g, g' \in \mathcal{L}_1$, $h \in \mathcal{L}_2$, also $g = \langle u_1, v_1 \rangle$, $g' = \langle u_2, v_2 \rangle$, $h = \langle u, v \rangle$ und $h_i = \langle u, w_i \rangle$. Daraus ergibt sich

$$(*) \quad y_i = t(x_i, u_1, v_1), \quad x_i = t_1(y_i, u, w_i),$$

$$(**) \quad y'_i = t(x'_i, u_2, v_2), \quad x'_i = t_1(y'_i, u, w_i).$$

Es sei $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Aus $(*)$ und $(A4)$ folgt $x_1 \leq x_2 \Rightarrow w_1 \leq w_2$, $x_2 \leq x_3 \Rightarrow w_2 \leq w_3$ und aus $(**)$, $(A4)$ folgt $w_1 \leq w_2 \Rightarrow x'_1 \leq x'_2$, $w_2 \leq w_3 \Rightarrow x'_2 \leq x'_3$, also $x'_1 \leq x'_2 \leq x'_3$.

III. Wir beweisen, daß $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ konvex geordnet ist. Es seien $A_i \in [x_i, y_i]$ drei Punkte der Geraden $\langle u, v \rangle$ und seien A_1, A_3 benachbart, also $\bar{x}_1 \approx \bar{x}_3$, $\bar{y}_1 = \bar{y}_3$.

Nehmen wir dabei $A_1 \cong A_2 \cong A_3$, also $x_1 \cong x_2 \cong x_3$ an, dann gilt nach Satz 3 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Wegen $A_1, A_2 \perp \langle u, v \rangle$ ergibt sich $y_1 = t(x_1, u, v)$, $y_2 = t(x_2, u, v)$ und folglich $\bar{y}_1 = t'(\bar{x}_1, \bar{u}, \bar{v}) = t'(\bar{x}_2, \bar{u}, \bar{v}) = \bar{y}_2$. Wegen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ sind daher die Punkte A_1, A_2 benachbart. Sind die Punkte A_i in einer Geraden von \mathcal{L}_2 enthalten, dann gehen wir ganz analog vor.

Bemerkung 7. V. Kunze studiert in [3] geordnete über kommutativen lokalen Ringen konstruierte AK-Ebenen. Die Parallelprojektionen $\varphi(a, b, \Pi(h))$ werden dabei einigermaßen allgemeiner als in der Definition 4, [6] eingeführt. Es wird dort nämlich die Gültigkeit von $\bar{a} \not\parallel \bar{h}$ nicht gefordert. Die mit dieser Definition der Parallelprojektionen erklärten geordneten AK-Ebenen führen zu den üblichen geordneten Ringen (Definition 1). In den so definierten geordneten AK-Ebenen gilt z.B. der folgende Satz: Haben zwei Geraden zwei Punkte P, Q gemeinsam, dann haben auch alle Punkte zwischen P, Q gemeinsam ([3], S. 66). Daraus folgt: Haben zwei Geraden zwei verschiedene Punkte gemeinsam, dann haben sie unendlich viele Punkte gemeinsam. Damit ist die Inzidenz von Punkten und Geraden beeinflusst und die Klasse der untersuchten AK-Ebenen eingeschränkt.

Literatur

- [1] *Crampe, S.*: Angeordnete projektive Ebenen. Math. Z. 69, 1958, 435—462.
- [2] *Lambek, J.*: Lectures on rings and modules. Toronto, London 1966.
- [3] *Kunze, M.*: Angeordnete Hjelmslevsche Geometrie. Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1975.
- [4] *Machala, F.*: Erweiterte lokale Ternärringe. Czech. Math. Journal 27 (102), 1977, 560—572.
- [5] *Machala, F.*: Koordinatisation affiner Ebenen mit Homomorphismus. Math. Slovaca 27, 1977, No. 2, 181—193.
- [6] *Machala, F.*: Angeordnete affine Klingenberg'sche Ebenen. (Im Druck).

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UP).