PELABELAN TOTAL *(a,d)-H*-ANTI AJAIB PADA GRAF RODA

Marwah Wulan Mulia[1], Mania Roswitha[2], dan Putranto Hadi Utomo[2]

[1]Mahasiswa Magister Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret
[2]Dosen Matematika Universitas Sebelas Maret
marwahwm@gmail.com

Abstrak: Suatu graf sederhana *G=(V(G), E(G))* memuat selimut-*H* jika setiap sisi dalamberada dalam satu subgraf *G* yang isomorfik dengan *H*. Pelabelan total selimut-*H-(a,d)* anti ajaib pada graf *G* adalah sebuah fungsi bijektif $\xi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,...,|V(G)+E(G)|\}$ sehingga semua subgraf pada *H'* isomorfik dengan *H*yang memiliki bobot $w(H') = \sum_{v \in V(H')} \xi(v) + \sum_{e \in E(H')} \xi(e)$ yang merupakan barisan aritmatika *a, a+d, a_2d,...,a+(t-1)d* dengan *a* dan *d* adalah bilangan bulat positif dan *t* adalah jumlah subgraf dari *G* yang isomorfik dengan *H*. Pelabelan ξ disebut sebuah pelabelan total *(a,d)-H*-super anti ajaib, jika $\xi(V(G)) = \{1,2,...,|V(G)|\}$. Hasil penelitian ini adalah pada graf roda W_n terdapat pelabelan total *(a,d)-H*-anti ajaib dengan $n \geq 3$ dan $d=[1,3]$ dan *H* adalah graf kipas F_n.
***Kata Kuncilol :** pelabelan total anti ajaib-(a,d)-H, graf roda, graf kipas*

PENDAHULUAN

Pelabelan graf adalah salah asatu topik menarik dari graf teori. Menurut Wallis (2001), pelabelan pada graf adalah pemetaan yang memetakan elemen graf (titik (*vertex*), sisi (*edge*), titik dan sisi) ke bilangan bulat positif atau non negatif. Pelabelan yang elemennya hanya terdiri dari himpunan titik disebut pelabelan titik. Sedangkan pelabelan yang elemennya merupakan himpunan sisi disebut pelabelan sisi. Pelabelan yang elemennya terdiri dari himpunan verteks dan sisi disebut sebagai pelabelan total).

Salah satu tipe dari pelabelan graf adalah pelabelan ajaib yang diuntukmulasikan oleh Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan total sisi ajaib didefinisikan sebagai pemetaan satu-satu $\lambda: V(G) \cup E(G) \rightarrow 1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|$, untuk setiap sisi xy pada graf *G*, sedemikian sehingga terdapat bilangan bulat positif *k* yang memenuhi $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$. Pada tahun 2005, Gutierrez dan Llado (2005) mengembangkan pelabelan total sisi ajaib dari Kotzig dan Rosa's (1970) menjadi pelabelan selimut-*H* sisi ajaib. Menurut Llado dan Moragas (2006), Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana. Sebuah selimut sisi graf *G* adalah dari keluarga subgraf yang berbeda H_1 ,H_2 , ...,H_k sedemikian sehingga untuk setiap sisi *E* termuat dalam sebuah subgraf dengan *H* untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap H_i isomorfik dengan *H* , maka dapat dikatakan bahwa graf *G* memuat selimut *H*.

Menurut Inayah, *et al.* (2009), pelabelan total selimut-*H-(a,d)* anti ajaib pada graf *G* adalah sebuah fungsi bijektif $\xi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,...,|V(G)+E(G)|\}$ sehingga semua subgraf pada H' isomorfik dengan Hyang memiliki bobot $w(H')= \sum_{v\in V(H')}\xi(v)+ \sum_{e\in E(H')}\xi(e)$ yang merupakan barisan aritmatika a, $a+d$, $a\_2d,...,a+(t-1)d$ dengan a dan d adalah bilangan bulat positif dan t adalah jumlah subgraf dari G yang isomorfik dengan H. Pelabelan ξ disebut sebuah pelabelan total *(a,d)-H*-super anti ajaib, jika $\xi(V(G))=\{1,2,...,|V(G)|\}$.

Inayah (2013) telah menemukan pelabelan selimut anti ajaib pada graf roda $(a,d)-C_n$. Selanjutnya, Karyanti [5] juga menemukan pelabelan selimut anti ajaib pada graf matahari $Sn\ \ (a,d)-K_{1,3}$ dengan n bilangan ganjil. Penelitian ini bertujuan untuk menemukan pelabelan selimut anti ajaib pada graf roda $(a,d)-F_n$. Pada pembahasan selanjutnya, kami akan menunjukkan teknik dari partisi multi himpunan yang akan digunakan untuk membuktikan teorema pada hasil kami.

$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\delta})$ −MULTIHIMPUNAN ANTI SEIMBANG

Misalkan $k\ \in\ N$dan X adalah multihimpunan bilangan bulat positif. X disebut (k,δ) −anti seimbang jika terdapat k himpunan bagian dari X, misalkan $X_1,X_2, ...,X_k$, seedemikian sehingga untuk setiap $i\ \in [1,\ k]$, $|Xi|\ =\frac{X}{k}$, $\uplus_{i=1}^{k}X\ =\ X_i$, dan untuk $i\ \in [1,\ k-1]$, berlaku $\sum X_{i+1} - X_i = \delta$ (Inayah, *et al.*: 2013).

Lemma 2.6. Misal $x\geq 3$ adalah bilangan bulat positif. Himpunan $X=[2x+2,3x+1]$ dengan $|X|=x-1$. Maka X adalah $(x,1)$-anti seimbang.

Bukti. Untuk $j=[1,x]$ didefinisikan himpunan $A_j=\{x+1+j\}$ dan untuk setiap $i=[1,x]$ didefinisikan $X_i= A_j\backslash\{3x+1-i\}$. Selanjutnya $\sum X_i=\frac{1}{2}(5x^2-3x)-2+i$ untuk $i\in[1,x]$ dan $\sum X_{i+1}-\sum X_i\ =1$ untuk $i=[1,x-1]$. Maka X adalah $(x,1)$-anti seimbang.

Lemma 2.7. Misal $x\geq 3$ adalah bilangan bulat positif. Himpunan $X=[x+2i,3x+1]\backslash\{x+2i\}$ dengan $|X|=x-1$. Maka X adalah $(x,2)$-anti seimbang.

Bukti. Untuk $j=[1,x]$ didefinisikan himpunan $A_j=\{x+1+2j\}$ dan untuk every $i=[1,x]$ didefinisikan $A_j\backslash\{3x+1-2i\}$. Selanjutnya $\sum X_i= x^2-x-3+2i$ untuk $i\in[1,x]$ dan $\sum X_{i+1}-\sum X_i\ =2$ untuk $i=[1,x-1]$. Maka X adalah $(x,2)$-anti seimbang.

Lemma 2.8. Misal $x \geq 3$ adalah bilangan bulat positif. Himpunan $X=\{4,7,...,3x+1\}$ dengan $|X|=x-1$. Maka X adalah $(x,3)$-anti seimbang.

Bukti. Untuk $j=[1,x]$ didefinisikan $A_j=\{3x+4-3j\}$ dan untuk setiap $i=[1,x]$ didefinisikan $A_j\backslash\{3x+1-2i\}$. Selanjutnya $\sum X_i = \frac{1}{2}(3x^2-x)-4+3i$ untuk $i \in [1,x]$ dan $\sum X_{i+1} - \sum X_i = 3$ untuk $i=[1,x-1]$ Maka X adalah $(x,3)$-anti seimbang.

$(a,d)-F_n$ −ANTI MAGIC TOTAL LABELING of WHEEL GRAPH W_n

Sebuah graf roda W_n graf yang terbentuk dari menghubungkan n titik C_n dengan sebuah titik di pusatnya atau bisa ditulis $W_n = C_n \vee K_1$ (Wallis, *et al.*: 2000). Misal $v_1, v_2, ..., v_n$ verteks pada C_n dan c menjadi pusat dari graf roda. Sebuah graf roda mempunyai himpunan titik-titik $V(G) = \{c, v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan sisi-sisi $E(G) = \{(c, v_1), ..., (c, v_n), (v_1, v_2), ..., (v_n-1, v_n), (v_n, v_1)\}$ dan $|V(G)| = n + 1$ dan $|E(G)| = 2n$ dan H adalah graf kipas F_n.

Lemma 4.1. Jika graf G adalah (a, d)-H-antiajaib maka $d \leq \left\lfloor \frac{3n}{n-1} \right\rfloor$.

Proof. Misalkan $G \cong W_n$ dan $H \cong F_n$. Misalkan $|V(G)|=v_G$, $|E(G)|=e_G$, $|V(H)|= v_H$ dan $|E(H)|=e_H$. Bobot terbesar H adalah $v_G+(v_G-1)+(v_G-2)+...+(v_G-v_H+1)+(v_G+e_G)+(v_G\ e_G-1)+...+(v_G + e_G - e_H + 1)$ atau $a+(n-1)d \leq \frac{1}{2}(3n)(3n + 3)$. Dan bobot terkecil H adalah $1+2+...+(v_G+ e_H)$ atau $a \geq \frac{1}{2}(3n)(3n + 1)$. Sehingga diperoleh $d \leq \frac{3n}{n-1}$. Karena d bilangan bulat positif maka $d \leq \left\lfloor \frac{3n}{n-1} \right\rfloor$.

Theorem 4.2. Misalkan G adalah graf roda W_n. terdapat pelabelan total $(\frac{3}{2}(3n^2 + n), d)$-$F_n$-anti ajaib $d = [1, 3]$.

Bukti. Misalkan G adalah graf roda W_n dengan $n \geq 3$. Misal $C = 1$ dan $R = [2, 3n + 1]$.

(i) Partisikan R menjadi 3 himpunan yaitu $R=A\cup B\cup X$, dengan $A=[2,n+1]$, $B=[n+2,2n+1]$ dan $X = [2n + 2, 3n + 1]$. Selanjutnya, untuk $i = [1, x]$ dengan menggunakan Lema 2.6 dengan $x = n$ dan$|X| =n-1$, X adalah $(n, 1)$-anti ajaib dan $\sum X_i = \frac{1}{2}(5n^2 - 3n) - 2+i$. Kemudian didefinisikan pelabelan total ξ pada graf G sebagai berikut. Labeli titik pusat graf roda dengan $C=\{1\}$ dan titik-titik pada v_i dengan anggota dari A. Kemudian labeli sisi-sisi (c, v_i) dengan elemen B, sisi-sisi $\{(v_1, v_2), ..., (v_i, v_{i+1}), (v_n, v_1)\}$ dengan elemen X berlawanan arah jarum jam. Untuk i

$= [1, n]$, $\omega(F_n^i) = (3n^2 + n) - 1 + i$. Diperoleh, $d=\omega(F_n^{i+1}) - \omega(F_n^i) = 1$ dan $a = \omega(F_n^1) = \frac{3}{2}(3n^2 + n)$. Graf roda W_n memuat pelabelan total $(\frac{3}{2}(3n^2 + n), 1)$-$F_n$-super anti ajaib.

(ii) Partisikan R menjadi 2 himpunan yaitu $R=A\cup X$, dengan $A=[2,n+1]$ dan $X = [n+2,3n+1]$. Selanjutnya, untuk $i = [1, x]$ dengan menggunakan Lema 2.7 dengan $x = n$ diperoleh $|X|=n-1$, X is $(n, 2)$-anti ajaib dan $\sum X_i = \frac{1}{2}(5n^2 - 3n) - 2+2i$. Didefinisikan pelabelan total ξ pada graf G sebagai berikut. Labeli titik pusat graf roda dengan $C=\{1\}$ dan titik-titik pada v_i dengan anggota dari A. Untuk n is ganjil, labeli sisi-sisi (c, v_i) dengan bilangan ganjil pada elemen X dan sisi-sisi (v_i, v_{i+1}) dengan bilangan genap pada elemen X berlawanan arah jarum jam. Untuk n genap, labeli sisi-sisi (c, v_i) with dengan bilangan genap pada elemen of X. Labeli sisi-sisi $\{(v_1, v_2), ..., (v_i, v_{i+1}), (v_n, v_1)\}$ dengan bilangan ganjil X berlawanan arah jarum jam. Untuk $i = [1, n]$, $\omega(F_n^i)=(3n^2 + n)-2+2i$. Diperoleh, $d=\omega(F_n^{i+1}) - \omega(F_n^i) = 2$ dan $a=\omega(F_n^1)= \frac{3}{2}(3n^2 + n)$. Graf roda W_n memuat pelabelan total $(\frac{3}{2}(3n^2 + n), 2)$-$F_n$-super anti ajaib.

(iii) Partisikan R menjadi 3 himpunan yaitu $R=A\cup B\cup X$, dengan $A=\{2,5,...,3n-1]$, $B=\{3,6,...,3n\}$ dan $X = \{4,7,...,3n+1\}$. Kemudian, untuk $i = [1, x]$ by Lema 2.8 dengan $x = n$ diperoleh $|X|=n-1$, X is $(n, 3)$-anti ajaib dan $\sum X_i= \frac{1}{2}(3n^2-n)-4+3i$. Kemudian, didefinisikan pelabelan total ξ pada graf G sebagai berikut. Labeli titik pusat graf roda dengan $C=\{1\}$ dan titik-titik pada v_i dengan anggota dari A. Labeli sisi-sisi (c, v_i) dengan elemen B dan sisi-sisi$\{(v_1,v_2),...,(v_i,v_{i+1}),(v_n, v_1)\}$ dengan bilangan genap elemen X berlawanan arah jarum jam. Untuk $i = [1, n]$, $\omega(F_n^i) = (3n^2 + n) - 3 +3i$. Diperoleh, $d=\omega(F_n^{i+1}) - \omega(F_n^i) = 3$ dan $a = \omega(F_n^1) = \frac{3}{2}(3n^2 + n)$. Graf roda W_n memuat pelabelan total $(\frac{3}{2}(3n^2 + n),3)$-$F_n$-anti ajaib.

SIMPULAN

Penelitian ini mempunyai kesimpulan sebagai berikut. Terdapat pelabelan total (a,d)- F_n-antiajaib pada graf roda W_n untuk $d=[1,3]$. Selain itu, penelitian ini dapat dikembangkan untuk selimut yang lain atau nilai d yang lain utnuk semua graf.

DAFTAR PUSTAKA

Gutierrez, A dan A.Llado. (2005). *Magic Coverings*, J. Combin. Math. Combin. Comput 55, 43-46.

Inayah, N. (2013). *Pelabelan* ($a; d$)$-H-$*Anti Ajaib Super Pada Beberapa Kelas Graf*, Disertasi, ITB, Bdanung.

Inayah, N., A. N. M.Salman, dan R. Simanjuntak. (2009). *On* ($a; d$)$-h-$*antimagic coverings of graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput 71, 273-281.

Inayah, N., A.N.M. Salman, dan K.I.A Syuhada. (2013). *Super* ($a; d$)-*H-Antimagic Total Labeling untuk Shackles of a Connected Graph H*. Australasian Journal of Combinatorics 57, 127-138.

Karyanti. (2012). *Pelabelan Selimut* ($a; d$)$-h-$*Anti Ajaib Super Pada graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen*. Skripsi, UNS, Surakarta.

Kotzig, A dan A. Rosa. (1970). *Magic Valuation of Finite Graph*, Canada Math Bull 13, 451-461.

Llado, A. dan J. Moragas. (2006). *Cycle Magic Graphs*.

Wallis, W.D., E.T. Baskoro, M. Miller dan Slamin. (2000). *Edge Magic Total Labelings*, Australasian J. Combin 22, 177-190.

WallisW. D. (2001). *Magic Graph*, Birkh *a*user Boston, New York.

APLIKASI KALKULUS OPTIMISASI DALAM ANALISA OPTIMUM VARIABEL KEPUTUSAN MODEL MATEMATIKA INVENTORI TERINTEGRASI DUA LEVEL DENGAN PRODUK TIDAK SEMPURNA, *LEAD FREE DEMAND* DAN KENDALA TINGKAT LAYANAN

[1)]Rubono Setiawan, [2)]Yemi Kuswardi, [3)]Ikrar Pramudya

[1),2),3)] **Dosen Program Studi Pendidikan Matematika**
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sebelas Maret

Abstrak: Dalam penelitian ini, utamanya adalah membentuk model matematika inventori yang menjelaskan hubungan antara pelaku dalam sistem inventori, yang dalam makalah ini yang digunakan sebagai tinjauan adalah sistem inventori dengan dua pelaku (dua level). Beberapa asumsi dasar digunakan sebagai batasan model sekaligus sebagai keadaan khusus yang ingin diteliti dalam sistem inventori tersebut. Asumsi utama tersebut yaitu adalah dengan memperhatikan adanya kualitas produk yang tidak 100 % sempurna, waktu tunggu permintaan bebas (*lead free demand*) serta adanya kendala tingkat layanan *(service level constraint*). Berdasarkan asumsi lead free demand, model inventori yang terbentuk merupakan model probabilistik karena adanya ketidakpastian dalam waktu tunggu pemesanan. Kemudian kendala tingkat layanan digunakan sebagai asumsi untuk mengantisipasi keadaan kehabisan produk dalam stok penyimpanan (*shortage condition*), karena dalam kenyataanya shortage lebih sulit untuk diprediksi nilainya secara matematik. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan solusi optimal secara analitik dari variabel keputusan model yang telah dibentuk yang nantinya akan dapat meminimumkan total biaya yang dibutuhkan oleh masing – masing pelaku. Analisa matematika tersebut memanfaatkan kriteria optimasi turunan parsial pertaama. Skema inventori yang digunakan adalah skema kerjasama secara integrasi (*integrated inventory*).

Kata Kunci: Inventori, *Lead Free Demand*, Produk Tidak Sempurna

PENDAHULUAN

Model inventori adalah model matematika untuk menjelaskan hubungan antara pelaku dalam dunia industri dalam hal pengelolaan dan pendistribusian produk. Model matematika tersebut berisi formula – formula matematika yang menjelaskan biaya – biaya yang dibutuhkan oleh masing – masing pihak dalam sistem inventori. Tujuan utama dari pemodelan inventori adalah untuk menentukan nilai optimal dari variabel keputusan yang ada dalam formula matematika model inventori tersebut. Nilai optimal dari variabel keputusan tersebut akan digunakan untuk menentukan total biaya minimal yang dibutuhkan oleh masing – masing pihak dalam sistem inventori.

Dalam perkembangannya, konsep integrasi dalam analisis matematika inventori, yang pertama kali diperkenalkan oleh Goyal, 1977, banyak digunakan dalam menentukan nilai optimal dari variabel keputusan yang akan diteliti. Konsep integrasi dianggap merupakan konsep kerjasama (kooperasi) jangka panjang antara pihak – pihak dalam sistem inventori dengan tujuan untuk meningkatkan keuntungan bersama. Kajian model inventori juga memperhatikan bahwa produk hasil produksi tidak selalu 100% baik sesuai dengan standar yang telah ditetapkan, karena pasti akan selalu ada produk dengan kualitas yang tidak sempurna (imperfect quality) dengan nilai persentase tertentu. Dalam hal ini kajian tentang *imperfect quality* dalam model inventori pertama kali diperkenalkan oleh Goyal, 1977 dan banyak penulis lainnya seperti Huang (1992), Hsu dan Hsu(2012), Hsu dan Hsu (2012), Lin(2013), Salameh(2000)

Dalam model inventori konvensional, model inventori diasumsikan bersifat deterministik dalam artian jumlah permintaan produk diasumsikan konstan sepanjang satuan waktu dan selain itu komponen – komponen yang mempengaruhi total biaya, dianggap mempunyai nilai yang pasti / jelas. Dalam beberapa hal, asumsi deterministik tidak lagi sesuai dengan kenyataan sebagai contoh permintaan produk yang tidak pasti, informasi tentang waktu tunggu permintaan (*lead time*) yang terbatas dan tidak pasti. Dalam hal waktu tunggu permintaan yang tidak pasti merupakan salah satu asumsi yang sering digunakan untuk membentuk model probabilistik, yang dikenal dengan istilah *lead free demand.* Kondisi *lead free demand* merupakan kondisi dimana terbatasnya info mengenai waktu tunggu permintaan produk, estimasi tentang waktu tunggu permintaan produk diasumsikan hanya diketahui pada permintaan pertama dan kedua. Contoh mengenai analisa model inventori probabilistik dengan lead free demand dapat dibaca pada paper yang ditulis oleh Lin (2013).

Kondisi kehabisan produk (*shortage*) merupakan kondisi yang selalu ingin diantisipasi oleh pelaku dalam sistem rantai pasokan produk, karena kondisi tersebut akan mengakibatkan biaya tambahan yang harus diperhitungkan sampai adanya proses pemesanan produk (*reorder point*). Namun dalam prakteknya, estimasi terhadap biaya *shortage* sangat sulit, sehingga salah satu hal yang bisa dilalukan adalah mengganti formula biaya shortage dengan formula kendala tingkat layanan untuk mengantisipasi adanya biaya *shortage*. Asumsi kendala tingkat layanan sesuai dengan asumsi probabilistik dalam model inventori.

Sepanjang pengetahuan peneliti belum terdapat analisa tentang model inventori probabilistik dengan *lead free demand* saat diterapkan adanya kendala tingkat layanan. Oleh karena itu dalam makalah ini akan diulas mengenai penggunaan konsep optimasi menggunakan turunan parsial pertama dan kriteria Karush – Kuhn – Tucker untuk menentukan nilai optimal dari variabel keputusan yang telah ditentukan untuk meminimumkan total biaya yang dibutuhkan dalam sistem inventori yang dimodelkan ke dalam model inventori vendor – buyer dengan memperhatikan produk dengan kualitas yang tidak sempurna (*imperfect quality*), *lead free demand* dan mempertimbangkan kendala tingkat layanan (*service level constraint*) serta dianalisa dengan menggunakan konsep integrasi (*integrated inventory*). Susunan penulisan dalam makalah ini adalah sebagai berikut : Bab I. Pendahuluan, Bab.II Metodologi Penelitian, Bab.III. Hasil dan Pembahasan, yang berisi tentang penjelasan formula matematika dari model inventori yang dibahas beserta dengan analisis matematis tentang nilai optimalnya, dan Bab.IV. Penutup.

METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis matematis dengan mengaplikasikan konsep kalkulus optimisasi dalam menentukan nilai optimum dari variabel keputusan model matematika inventori terintegrasi dengan *lead free demand* dan kendala tingkat layanan, serta mempertimbangkan adanya kondisi produk yang tidak sempurna. Model inventori dibentuk berdasarkan asumsi – asumsi yang telah ditentukan, dan kemudian setelah model terbentuk akan ditentukan nilai optimal dari tiap variabel keputusan. Nilai optimal dari tiap variabel keputusan tersebut sebagai dasar untuk menentukan total biaya minimum yang dibutuhkan oleh sistem inventori tersebut. Metode matematika yang digunakan adalah menggunakan konsep kalkulus optimisasi. Kalkulus optimisasi menggunakan konsep turunan parsial kedua sebagai kriteria optimum untuk menentukan nilai optimum dari variabel keputusan dari model yang telah terbentuk.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam pemodelan matematika, pembangunan asumsi model merupakan hal yang paling pertama dilakukan untuk mengidentifikasi hal – hal apa saja yang menjadi topik analisis terhadap permasalahan yang akan dimodelkan dengan formulasi matematika. Model dasar inventori yang digunakan dalam tulisan ini adalah model inventori dua level yang sering disebut sebagai model inventori Vendor-Buyer. *Vendor* dalam hal ini berfungsi sebagai pihak yang memproduksi produk yang ada dalam sistem rantai inventori, sedangkan *Buyer* sebagai pihak pemesan/pembeli produk yang nantinya akan didistribusikan kembali kepada pengecer atau dijual langsung kepada konsumen. Dalam tulisan ini diasumsikan terdapat satu jenis produk dalam sistem tersebut. Sifat model inventori yang dianalisa adalah bersifat probabilistik karena waktu tunggu pemesanan produk dianggap tidak pasti dan informasinya hanya terbatas pada pemesanan pertama dan kedua, dengan demikian fungsi distribusi untuk waktu tunggu pemesanan juga tidak diketahui. Dengan demikian waktu tunggu pemesanan produk oleh *Buyer* kepada *Vendor* mengikuti konsep *lead free demand*. Dalam proses produksi diasumsikan tidak selalu menghasilkan produk dengan kualitas 100 % baik sesuai dengan yang diinginkan, pasti akan terdapat produk dengan kualitas tidak sempurna. Dalam hal ini akan selalu terdapat produk dengan kualitas yang tidak sempurna (cacat) yang direpresentasikan dengan suatu nilai probabilitas produk dengan kualitas tidak sempurna dari sekian produk yang diproduksi. Dalam hal ini keadaan kehabisan produk / stok di Buyer tidak diperkenankan dan keadaan tersebut diantisipasi dengan memberlakukan kendala tingkat layanan (*service level constraint*). Kemudian proses pemenuhan/pemesanan kembali produk dari Buyer oleh Vendor dilakukan dengan secara bagian – bagian (*partial backordering*).

Berdasarka asumsi – asumsi dasar tersebut di atas, akan disusun formula matematika yang menjelaskan total biaya yang dibutuhkan baik oleh Vendor, Buyer maupun keseluruhan sistem dengan menggunakan konsep integrasi. Sebelumny, perlu ditetapkan terlebih dahulu notasi – notasi yang digunakan dalam formulasi matematika tersebut, notasi – notasi simbol tersebut adalah sebagai berikut :

Q : Banyak produk dari sekali *shipments* produk yang dipesan *Buyer* ke *Vendor*

n : Jumlah *shipments* produk dalam satu siklus produksi berjalan.

D : Permintaan (*Demand*) per tahun.

P : Angka laju produksi pihak *Vendor*.

F : Biaya transportasi pengiriman produk dari pihak *Vendor* ke pihak *Buyer*.

γ : Probabilitas produk dengan kualitas tidak sempurna dari hasil produksi.

h_{B_1} : Biaya simpan per unit produk dengan kualitas baik untuk pihak *Buyer*.

h_{B_2} : Biaya simpan per unit produk dengan kualitas tidak sempurnna pada pihak *Buyer*

h_v : Biaya simpan per unit produk untuk pihak *Vendor*.

S_v : Biaya proses produksi bagi pihak *Vendor*.

S_B : Biaya proses produksi bagi pihak *Buyer*.

w_v : Biaya garansi / ganti rugi dari pihak *Vendor* untuk produk yang rusak.

s_c : Biaya proses penyortiran produk di tempat *Buyer*.

π : *Buyer's shortage cost per unit short*

π_0 : *Buyer's marginal profit (cost of lost of demand) per unit.*

$*$: *subscript* tanda nilai optimal

Model Matematika

Dalam prakteknya, karena cukup sulit untuk memperkirakan biaya kehabisan produk (*shortage cost*), jadi kendala tingkat layanan (*service level constraint*) adalah cara umum yang mudah untuk diinterpretasikan dalam fungsi tujuan (objective function) dari pada formula matematis yang menjelaskan biaya habis produk (shortage cost term)

$$\frac{Expected\ demand\ shortages\ at\ the\ end\ of\ cycle\ for\ given\ safety\ factor}{Quantity\ available\ for\ satisfying\ the\ demand\ per\ cycle} \leq \alpha$$

Karena $r = DL + k\sigma\sqrt{L}$ dan berdasarkan Preposisi tentang service level constraint pada hasil riset oleh Gallego dan Mon (1993) dalam Lin(2013) , serta pemilihan *safety factor k* sebagai variabel keputusan menggantikan waktu pemesanan kembali (*reorder point*) r , maka untuk nilai suatu nilai L tertentu didapat pertidaksamaan berikut :

$$\frac{E[(X-r)^*]}{Q} \leq \frac{\sigma\sqrt{L}}{2Q}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right), \qquad L \in [L_i, L_{i-1}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\sqrt{L}}{Q}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right) \leq \alpha$$

Fungsi Harapan Rata – Rata Total Biaya Vendor per Siklus Produksi per Satuan Waktu

Berdasarkan asumsi model yang telah ditentukan, maka komponen – komponen biaya yang dibutuhkan oleh Buyer dalam pengelolaan produk adalah meliputi biaya yang muncul dalam mendatangkan produk dari Vendor (biaya pemesanan), biaya transportasi, biaya sorting produk (*screening)*, biaya penyimpanan, biaya harapan shortage dan biaya *lead time crashing* . Formula matematika untuk fungsi harapan rata – rata total biaya yang dibutuhkan vendor per siklus produksi per satuan waktu adalah :

$$TC_b(Q,k,n,L) = S_b + nF + c_{ib}Q + [\pi + \pi_0(1-\beta)]E[(X-r)^*] + C(L) + \frac{h_{b_1}Q(1-\gamma)(1-\theta)\left[\frac{Q\gamma\theta}{2x(1-\gamma)(1-\theta)} + \frac{Q(1-\gamma)(1-\theta)}{2} + k\sigma\sqrt{L} + (1-\beta)E[(X-r)^*]\right]}{D} + h_{b_2}\left[\frac{Q^2(1-\gamma)(1-\theta)\gamma\theta}{D} - \frac{Q^2\gamma\theta}{2x}\right] \qquad (3.1)$$

Menggunakan teorema *renewal – reward*, nilai harapan rata – rata biaya total per unit waktu untuk *Buyer* adalah

$$ETC_b(Q,k,n,L) \equiv E[ETC_b(Q,k,L)] = \frac{ETC_b(Q,k,L)}{E(T)} = \frac{ETC_b(Q,k,L)D}{Q(1-\gamma)(1-\theta)}$$

$$\Leftrightarrow ETC_b(Q,k,L) = \frac{D\big(S_b + nF + c_{ib}Q + \bar{\pi}E[(X-r)^*] + C(L)\big)}{Q(1-\gamma)(1-\theta)}$$

$$+h_{b_1}\left[\frac{Q\gamma\theta}{2x(1-\gamma)(1-\theta)} + \frac{Q(1-\gamma)(1-\theta)}{2} + k\sigma\sqrt{L} + (1-\beta)E[(X-r)^*]\right] + h_{b_2}Q\gamma\theta$$

$$-\frac{h_{b_2}QD\gamma\theta}{2x(1-\gamma)(1-\theta)} \qquad (3.2)$$

atau ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} ETC_b(Q,k,n,L) &= \frac{D\big(S_b + nF + c_{ib}Q + \bar{\pi}E[(X-r)^*] + C(L)\big)}{Q(1-\gamma)(1-\theta)} \\ &+ h_{b_1}\left[\frac{Q(1-\gamma)(1-\theta)}{2} + k\sigma\sqrt{L} + (1-\beta)E[(X-r)^*]\right] + h_{b_2}Q\gamma\theta \\ &+ \frac{\big(h_{b_1}D - h_{b_2}\big)QD\gamma\theta}{2x(1-\gamma)(1-\theta)} \end{aligned} \qquad (3.3)$$

dengan

$$\pi + \pi_0(1-\beta) = \bar{\pi}$$

Berdasarkan Persamaan (3.2) kita dapatkan fungsi total biaya dalam bentuk *the worst distribution* dari $ETC_{b,W}(Q,k,L)$

$$\begin{aligned} ETC_{b,W}(Q,k,n,L) &= \frac{D\left(S_b + nF + c_{ib}Q + \frac{\bar{\pi}\sigma\sqrt{L}}{2}\left(\sqrt{1+k^2} - k\right) + C(L)\right)}{Q(1-\gamma)(1-\theta)} \\ &+ h_{b_1}\left[\frac{Q(1-\gamma)(1-\theta)}{2} + k\sigma\sqrt{L} + (1-\beta)\frac{\bar{\pi}\sigma\sqrt{L}}{2}\left(\sqrt{1+k^2} - k\right)\right] \\ &+ h_{b_2}Q\gamma\theta \\ &+ \frac{\big(h_{b_1}D - h_{b_2}\big)QD\gamma\theta}{2x(1-\gamma)(1-\theta)} \end{aligned} \qquad (3.4)$$

atau ekuivalen dengan

$$ETC_{b,W}(Q,k,n,L)$$
$$= \frac{D\left(S_b + nF + c_{ib}Q + \frac{\bar{\pi}\sigma\sqrt{L}}{2}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right) + C(L)\right)}{Q(1-\gamma)(1-\theta)}$$
$$+ h_{b_1}\sigma\sqrt{L}\left(k + \frac{(1-\beta)\bar{\pi}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)}{2}\right) + h_{b_2}Q\gamma\theta + \frac{\left(h_{b_1}D - h_{b_2}\right)QD\gamma\theta}{2x(1-\gamma)(1-\theta)}$$
$$+ \frac{h_{b_1}Q(1-\gamma)(1-\theta)}{2} \quad (3.5)$$

Fungsi Harapan Rata – Rata Total Biaya Vendor per Siklus Produksi

Karena berdasarkan Lin [6], rata – rata inventori level per siklus produksi untuk *Vendor* dapat diperoleh dari akumulasi inventori level *Vendor* dikurangi akumulasi inventori *Buyer*, maka biaya simpan per siklus produksi bagi pihak *Vendor* adalah :

$$h_v\left(\frac{nQ}{2}\left\{\left[(n-1)T + \frac{Q}{P}\right] + \left[(n-1)T + \frac{Q}{P} - \frac{nQ}{P}\right]\right\} - [1+2+\cdots+(n-1)]QT\right)$$
$$= h_v\left(\left[nQ\left(\frac{Q}{P} + (n-1)T\right) - \frac{nQ\,(nQ\,/P)}{2}\right] - T[Q+2Q+\cdots+(n-1)Q]\right)$$
$$= h_v\left(\frac{nQ^2}{P} - \frac{n^2Q^2}{2P} + \frac{n(n-1)Q^2(1-\gamma)(1-\theta)}{2D}\right) \quad (3.6)$$

Setelah menambah dengan biaya produksi dan biaya garansi / ganti rugi, maka total biaya yang dibutuhkan pihak *Vendor* per siklus produksi adalah :

$$TC_v(n,Q) = S_v + w_v nQ\gamma + h_v\left\{\frac{nQ^2}{P} - \frac{n^2Q^2}{2P} + \frac{n(n-1)Q^2(1-\gamma)(1-\theta)}{2D}\right\} \quad (3.7)$$

Seperti pada pihak *Buyer*, maka maka nilai harapan rata – rata (*expected total cost*) total biaya untuk Vendor adalah

$$ETC_v(n,Q\,) = \frac{E[TC_b(n,Q)]}{E[nT]} = \frac{E[TC_b(n,Q)]D}{nQ\,(1-\gamma)(1-\theta)}$$
$$= \frac{D}{(1-\gamma)(1-\theta)}\left(\frac{S_v}{nQ} + w_v\gamma + h_vQ\left(\frac{1}{P} - \frac{n}{2P} + \frac{n-1}{2D}\right)\right) \quad (3.8)$$

EOQ Secara Integrasi dengan Menerapakan Kendala Tingkat Layanan

Berdasarkan Persamaan (3.5) dan Persamaaan (3.8), didapat fungsi harapan rata – rata biaya total sistem inventori tersebut (skema inventori) per siklus produksi per satuan waktu yaitu

$$JETC_W^U(Q,k,L,n) = ETC_{b,W}(Q,k,n,L) + ETC_v(n,Q\,)$$

$$JETC_W^U(Q,k,L,n) = \frac{D\left(S_b + nF + c_{ib}Q + \frac{\bar{\pi}\sigma\sqrt{L}}{2}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right) + C(L)\right)}{Q(1-\gamma)(1-\theta)} + h_{b_1}\sigma\sqrt{L}\left(k + \frac{(1-\beta)\bar{\pi}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)}{2}\right) + h_{b_2}Q\gamma\theta + \frac{\left(h_{b_1}D - h_{b_2}\right)QD\gamma\theta}{2x(1-\gamma)(1-\theta)} + \frac{h_{b_1}Q(1-\gamma)(1-\theta)}{2} + \frac{D}{(1-\gamma)(1-\theta)}\left(\frac{S_v}{nQ} + w_v\gamma + h_vQ\left(\frac{1}{P} - \frac{n}{2P} + \frac{n-1}{2D}\right)\right) \quad (3.9)$$

Dengan mengganggap bahwa buyer memberlakukan strategi kendala tingkat layanan maka analisa keoptimalan untuk menentukan total biaya minimum yang dibutuhkan sistem, yang pada awalnya berdasarkan Persamaan (3.9), berubah menjadi analisa keoptimalan yang berdasarkan pada fungsi Lagrange berikut :

$$LF(Q,k,L,n,\lambda) = JETC_W^U(Q,k,L,n) + \lambda\left[Q\alpha - \sigma\sqrt{L}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)\right] \qquad (3.10)$$

Dengan λ adalah pengali Lagrange yang bersesuaian. Dengan menggunakan kriteria turunan parsial pertama dan mengambil syarat Karush – Kuhn Tucker Persamaan (3.10) untuk kriteria keoptimalan, maka akan didapat nilai optimal untuk tiap variabel keputusan . Untuk suatu nilai $L \in \left[L_{i-1,}L_i\right], i = 1,2,3,\ldots,N$ maka didapat nilai optimal untuk tiap – tiap variabel keputusan sebagai berikut :

$$Q^* = \sqrt{\frac{h_{b_2}\gamma\theta(1-\gamma)(1-\theta) + \frac{\left(h_{b_1}D - h_{b_2}\right)D\gamma\theta}{2x} + \frac{h_{b_1}(1-\gamma)^2(1-\theta)^2}{2}}{D\left(S_b + n^*F + \frac{\bar{\pi}\sigma\sqrt{L}}{2}\left(\sqrt{1+{k^*}^2} - k^*\right) + C(L) + \frac{S_v}{n^*}\right)}}$$

$$\lambda^* = 0, \qquad n^* = \sqrt{\frac{2S_v}{h_v\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P}\right)}}, \qquad k^* = \sqrt{\frac{B^2}{(1-B^2)}}$$

$$\text{dengan} \quad B = 1 - \frac{h_{b_1}}{\frac{\bar{\pi}}{2}\left(\frac{D}{Q^*(1-\gamma)(1-\theta)} + (1-\beta)h_{b_1}\right)}$$

$$(3.11)$$

Apabila hasil variabel keputusan optimal yang didapat pada (3.11) dimasukkan ke dalam fungsi total biaya (3.10) akan didapat total biaya minimum yang dibutuhkan oleh sistem.

SIMPULAN DAN SARAN

Dalam makalah ini dianalisa keoptimalan dari model inventori probabilistik dengan lead free demand, mempertimbangkan adanya produk dengan kualitas tidak sempurna. Kendala tingkat layanan digunakan oleh pihak Buyer untuk menggantikan formula kehabisan produk yang ada pada fungsi tujuan dari sistem inventori yang akan ditentukan nilai optimalnya. Berdasarkan analisa model inventori probabilistik pada bab pembahasan, telah dapat dibentuk model matematika berdasarkan asumsi – asumsi yang telah ditentukan. Hasil optimal dari variabel keputusan (EOQ) pada (3.11) telah dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria keoptimalan Karush – Kuhn – Tucker dan sebagai dasar untuk menentukan total biaya minimum yang diperlukan oleh sistem inventori tersebut. Sebagai saran dalam penelitian selanjutnya adalah pengembangan algoritma pencarian solusi optimal dan ditambah penggunaan solusi numerik dengan menggunakan data simulasi.

DAFTAR PUSTAKA

Banerjee, A.(1986). A joint economic – lot – size model for purchaser and vendor. *Decision Sciences,17, 291-311.*

Gallego, G.& Moon, I.(1993). The distribution free newsboy problem : Review and extensions. *Journal of the Operational Research Society*, 44, 825 – 834

Goyal, S.K. (1977). An Integrated inventory model for a single supplier – single customer problem, *International Journal of Production Research*, 15, 107-111.

Goyal, S.K. & Gupta,Y.P. (1989). Integrated Inventory models : the buyer – vendor Coordination. *European Journal of Operational Research*, 41, 261 – 269.

Goyal, S.K. (1995). A one – vendor multi – buyer integrated production inventory model : A comment. *European Journal of Operational Research*, 82, 209 – 210.

Goyal, S.K. (1988). A joint economic lot – size model for purchaser and vendor : a comment. *Decision Sciences*,19, 236 – 241.

Huang, C.K. (2002). An integrated vendor – buyer cooperative model for items with imperfect quality. *Production Planning and Control*, 13, 355 – 361.

Hsu, J.-T.& Hsu, L.-F.(2012). An integrated single – vendor single – buyer production inventory model for items with imperfect quality and inspection errors. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 3, 703 – 720.

Hsu, J.-T.& Hsu, L.-F.(2012). An Integrated Vendor – Buyer Cooperative Inventory Model for Items with Imperfect Quality and Shortage Backordering, Advances in *Decision Sciences.*

Lin, H.-J. (2013). An Integrated Supply Chain Inventory Model with Imperfect – Qualtiy Items, Controllable Lead Time and Distribution – Free Demand, *Yugoslav Journal of Operations Research*, 23, 87 – 109.

Salameh, M.K. & Jaber, M.Y. (2000). Economic production quantity model for items with imperfect quality, *International Journal of Production Economics*, 64(1), 59 – 64.