

Pliages de papiers, fonctions thêta et méthode du cercle

par

MICHEL MENDÈS FRANCE

et

AHMED SEBBAR

*Université Bordeaux 1
Talence, France*

*Université Bordeaux 1
Talence, France*

Table des matières

Introduction

1. Sur certaines relations de récurrences
 2. Pliages de papiers
 3. Polynômes orthogonaux, étude des zéros
 4. Etude de la série $\chi(z)$, une équation différentielle d'ordre infini (ED)
 5. Liens avec les fonctions thêta
 6. Méthode du cercle
- Bibliographie

Introduction

On considère une feuille de papier, qu'on plie sur elle-même un grand nombre ou une infinité de fois, toujours dans le même sens. On déplie ensuite cette feuille de papier et on observe que les traces des plis se présentent sous forme d'angles tantôt rentrants \vee tantôt saillants \wedge , de la manière suivante :

$\vee\vee\wedge\vee\vee\wedge\wedge\vee\vee\wedge\wedge\vee\wedge\wedge\dots$

On code la suite binaire par $\vee=+1$, $\wedge=-1$, et on a ainsi une suite $s=(s_n)_{n\geq 1}$ qu'on peut caractériser par l'une ou l'autre des propriétés suivantes (voir [ALM] pour les détails) :

- (i) $s_{2n}=s_n$, $n\geq 1$; $s_{2n+1}=(-1)^n$, $n\geq 0$;
- (ii) $s_n=(-1)^b$ si $n=2^a(1+2b)$.

La suite (s_n) apparaît naturellement dans l'étude de la série entière $\tilde{\chi}(z)=\sum_{n\geq 0} z^{-2^n}$. Cette série représente une fonction analytique pour $|z|>1$, s'annulant à l'infini. Si on décompose cette fonction en fraction continue (J -fraction), on voit de suite que cette

décomposition commence comme suit [ALM], [Km], [Sh] :

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z-1 + \frac{1}{z+1}} = [0, z-1, z+1],$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} = [0, z-1, z+2, z, z-1],$$

et de manière générale, si $n=2^m$ et

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^{2^m}} = \frac{\tilde{p}_n}{\tilde{q}_n} = [0, a_1, \dots, a_n]$$

avec $\tilde{q}_n(z) = z^{2^m}$, alors

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^{2^{m+1}}} = \frac{\tilde{p}_n}{\tilde{q}_n} + \frac{1}{\tilde{q}_n^2} = [0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n+1, a_n-1, a_{n-1}, \dots, a_1].$$

En d'autres termes, si \vec{w} est le mot a_1, \dots, a_n (dans cet ordre), c'est-à-dire si $\tilde{p}_n/\tilde{q}_n = [0, \vec{w}]$, alors $\tilde{p}_n/\tilde{q}_n + 1/\tilde{q}_n^2 = [0, \vec{w} \vec{p} \vec{w}]$, où on a désigné par $\vec{w} \vec{p} \vec{w}$ le mot

$$\vec{w} \vec{p} \vec{w} = a_1, \dots, a_{n-1}, a_n+1, a_n-1, a_{n-1}, \dots, a_1, \quad n \geq 2,$$

et ainsi, on peut définir un opérateur $S: \vec{w} \rightarrow S\vec{w} = \vec{w} \vec{p} \vec{w}$, de sorte que par exemple :

$$\vec{w} \xrightarrow{S} \vec{w} \vec{p} \vec{w} \xrightarrow{S} \vec{w} \vec{p} \vec{w} \vec{p} \vec{w} \vec{p} \vec{w} \xrightarrow{S} \dots$$

et le développement en fraction continue de $\tilde{\chi}(z)$ s'écrit ([ALM], [Km], [Sh])

$$\tilde{\chi}(z) = [0, S^\infty(z-1, z+1)]$$

avec la notation évidente :

$$S^\infty(z-1, z+1) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S^N(z-1, z+1), \quad S^N = S \circ S \circ \dots \circ S.$$

La suite des flèches dans l'écriture de $S^N \vec{w}$, $\vec{w} = z-1, z+1$, est en bijection avec la suite des plis dans les pliages de papier définis auparavant, avec la correspondance suivante : à \vee , on associe la flèche \rightarrow et à \wedge , on associe la flèche \leftarrow . Si l'on écrit plus simplement $\alpha(z) = S^\infty(z-1, z+1)$, alors on a aussitôt :

$$\tilde{\chi}(z) = [0, \alpha(z)] = [0, \alpha_1(z), \alpha_2(z), \dots]$$

et comme cela a été remarqué dans [ALM] les $\alpha_n(z)$ sont dans $\mathbf{Z}[z]$, et de façon plus précise : $\alpha_n(z) = z + \alpha_n$, avec

$$\alpha_1 = -1 \quad \text{et} \quad \alpha_n = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} + (-1)^n s_{\lfloor n/2 \rfloor}, \quad n \geq 2,$$

où $[n/2]$ est la partie entière du réel $n/2$, et $s_{[n/2]}$ est le $[n/2]^{\text{e}}$ terme de la suite de pliages de papier (s_n) . On a clairement $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_n = 0, +2, -2$, ce qui suggère la définition $s_0 = 0$.

La théorie générale des fractions continues nous apprend que si $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont les numérateurs et les dénominateurs des réduites P_n/Q_n de la fraction continue $[0, S^\infty(z-1, z+1)]$, c'est-à-dire si

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = [0, \alpha_1(z), \dots, \alpha_n(z)],$$

alors P_n et Q_n satisfont à des relations à trois termes, et en particulier, on a :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) &= (z + \alpha_{n+1})Q_n(z) + Q_{n-1}(z), \\ Q_{-1}(z) &= 0, \quad Q_0(z) = 1. \end{aligned}$$

Dans [ALM], on montre que $Q_n(z)$ est un polynôme en z , de degré n et à coefficients dans l'ensemble $\{0, \pm 1\}$.

C'est cette relation de récurrence qui constitue l'objet du présent travail, plus particulièrement, nous nous intéressons à la question suivante : Y a-t-il une mesure (ou plus généralement une fonctionnelle à préciser) pour laquelle la suite (Q_n) est orthogonale. On verra très vite qu'il ne peut exister de mesure à support (compact) porté par l'axe réel répondant à cette question. Cela est dû à la nature des points singuliers des deux séries entières

$$\chi(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}, \quad \tilde{\chi}(z) = \sum_{n \geq 0} z^{-2^n},$$

situés sur le cercle unité, vu comme bord des domaines de convergence des séries $\chi(z)$ et $\tilde{\chi}(z)$. Le cercle unité est en fait une coupure analytique et même quasi-analytique des deux séries. Ceci est dû à la lacunarité des séries en question mais ce n'est pas suffisant pour déterminer une quelconque mesure — si on suppose son existence — qui soit à support dans le plan et qui répond à la question d'orthogonalité précédente. On verra dans les prochaines sections qu'en gros, notre problème peut se formuler comme suit : Soit $r > 1$ un nombre réel et soit

$$\tilde{\chi}_r(\theta) = \sum_{n \geq 0} r^{-2^n} e^{-i2^n \theta} = \tilde{\chi}(re^{i\theta}).$$

$\tilde{\chi}_r(\theta)$ est une fonction C^∞ , 2π -périodique. Elle définit une distribution sur le cercle unité. Quelle est la limite (et en quel sens) de $\tilde{\chi}_r(\theta)$, lorsque r tend vers 1 ? La même question vaut bien naturellement pour $\chi(re^{i\theta}) = \chi_r(\theta)$, $0 < r < 1$.

Il se trouve que les fonctions $\chi(z)$, $\tilde{\chi}(z)$ ont une certaine nature arithmétique et géométrique qui fait que les limites $\lim_{r \rightarrow 1^-} \chi_r(\theta)$, $\lim_{r \rightarrow 1^+} \tilde{\chi}_r(\theta)$ vont être déterminées par les limites radiales $\lim_{r \rightarrow 1^-} \chi(re^{2i\pi h/k})$, $\lim_{r \rightarrow 1^+} \tilde{\chi}(re^{2i\pi h/k})$ aux points rationnels du cercle unité.

L'origine des natures arithmétique et géométrique de la fonction $\chi(z)$ réside dans les rapports qu'a cette série avec le problème de Waring. On donnera plusieurs formules liant $\chi(z)$ aux puissances quatrièmes des fonctions thêta elliptiques. Les puissances quatrièmes des fonctions thêta sont très significatives comme on l'expliquera, elles sont liées aux aspects de presque-périodicité au sens de Besicovitch de la suite (α_n) ,

$$\alpha_n = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} + (-1)^n s_{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

La méthode du cercle de Ramanujan–Hardy–Littlewood–Rademacher appliquée aux puissances quatrièmes des fonctions thêta permettent finalement d'écrire pour la série entière $\chi(z)$ une représentation de la forme :

$$\chi(z) = \sum a_{h/k}^l (1 - ze^{-2i\pi h/k})^{-l}, \quad |z| < 1.$$

Comme dans [E], on appellera cette égalité représentation de Wigert de $\chi(z)$. Elle exprime $\chi(z)$ à l'aide de séries singulières. Ce type de représentation a été étudié en grand détail par Ramanujan, Hardy et Hardy–Littlewood [Ha1], qui considéraient les séries singulières seulement dans le disque unité. Rademacher, dans son étude sur la fonction de partition [Ra1] ou dans son étude sur la fonction modulaire J [Ra2] ajoutait aussi l'extérieur du disque unité. C'est cette prise en compte simultanée des deux disques unités, centrés en 0 et à l'infini qui constitue l'essence même de la représentation de Wigert. Elle permet des fois d'attribuer des valeurs naturelles à des séries entières hors de leurs coupures analytiques ([Ra1], [Ra2] pour des exemples). On fera la même chose pour notre série $\chi(z)$, au §6 du présent travail, en explicitant l'analogie du phénomène dit du « développement de zéro ».

Les auteurs tiennent à remercier M. I. Knopp pour des indications bibliographiques sur la méthode du cercle, M. Balazard, R. Gay et J. Y. Yao pour de nombreuses et fructueuses discussions et enfin L. Habsieger pour avoir posé la question de l'existence d'une mesure pour laquelle la famille $(Q_n(z))$ est une famille de polynômes orthogonaux. Et un grand merci à Nadia Méchalakh.

1. Sur certaines relations de récurrences

Dans cette section, nous étudions certaines relations de récurrences à trois termes naturellement associées aux fractions continues.

On introduit la famille \mathcal{L} des suites $c=(c_{n+1})_{n \geq 0}$ telles que :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \eta_{n+1} - \eta_n, & n \geq 0, \\ \eta_0 &= 0, & \eta_n = \pm 1, & n \geq 1. \end{aligned}$$

Alors $c_1 = \eta_1 = \pm 1$ et $c_n \in \{0, \pm 2\}$ pour $n \geq 2$. On va étudier l'équation :

$$x_{n+1} - c_{n+1}x_n - x_{n-1} = 0 \quad (1)$$

où x_{-1} et x_0 sont donnés.

De même, on considère la famille \mathcal{L}' des suites $v=(v_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$v_n = (-1)^n c_{n+1}, \quad c = (c_{n+1})_{n \geq 0} \in \mathcal{L}.$$

On peut remarquer que l'équation

$$y_{n+1} - v_n y_n + y_{n-1} = 0, \quad (2)$$

appelée équation de Schrödinger discrète de potentiel $v=(v_n)$, est reliée à l'équation (1). En effet, si on définit $\gamma=(\gamma_n)_{n \geq 0}$, $\gamma_n = (-1)^{[n/2]}$, alors $\gamma_n \gamma_{n+1} = (-1)^n$ et toute solution (x_n) de l'équation (1) donne une solution (y_n) , $x_n = \gamma_n y_n$, de l'équation (2) avec une suite (v_n) donnée par $v_n = (-1)^n c_{n+1}$. La réciproque est aussi vraie.

On peut donner une caractérisation de la famille \mathcal{L} de la façon suivante :

THÉORÈME 1. — *Les trois énoncés sont équivalents :*

- (i) $c \in \mathcal{L}$;
- (ii) *il existe une suite (q_n) , $q_0 = 1$, $q_{-1} = 0$, $q_n = \pm 1$ pour $n \geq 0$ telle que :*

$$c_{n+1} = q_n(q_{n+1} - q_{n-1}) ;$$

- (iii) *il existe une suite (q_n) , $q_{-1} = 0$, $q_n = \pm 1$ pour $n \geq 0$, telle que :*

$$q_{n+1} = c_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

Preuve. — Pour montrer que (i) \Rightarrow (ii), on écrit $c_{n+1} = \eta_{n+1} - \eta_n$, $c = (c_n) \in \mathcal{L}$ et $\eta_0 = 0$, $\eta_n = \pm 1$, $n \geq 1$. On définit ensuite (q_n) par $q_n = \eta_1 \dots \eta_n$. Alors $q_n q_{n+1} = \eta_{n+1}$, $q_{n-1} q_n = \eta_n$ et $c_{n+1} = \eta_{n+1} - \eta_n = q_n(q_{n+1} - q_n)$. Pour définir complètement la suite (q_n) , on prend $q_0 = 1$. Pour montrer (ii) \Rightarrow (i), on prend simplement $\eta_n = q_n q_{n-1}$, donc $c_{n+1} = q_n(q_{n+1} - q_{n-1}) = \eta_{n+1} - \eta_n$. L'implication (ii) \Rightarrow (iii) est claire : si $q_{n+1} = c_{n+1}q_n + q_{n-1}$, $q_n = \pm 1$ pour $n \geq 0$ et $q_{-1} = 0$, alors $c_{n+1} = q_{n+1}q_n - q_n q_{n-1}$ et réciproquement.

On va expliciter à présent un peu plus les liens entre les équations (1) et (2) avec les fractions continues. Considérons pour ce faire deux solutions $(p_n), (q_n)$ de l'équation (1), $p_{-1}=1, p_0=0$ et $q_{-1}=0, q_0=1$. Alors :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_{-1} \\ q_0 & q_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En prenant les déterminants des deux membres de cette dernière égalité, on voit que :

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} + \frac{p_n}{q_n}$$

et par suite

$$\frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k}. \quad (3)$$

Supposons à présent que $c=(c_n) \in \mathcal{L}$, c'est-à-dire que $c_{n+1}=\eta_{n+1}-\eta_n$. Alors par la propriété (iii) du théorème, on a, avec une suite (q_n) , $q_{-1}=0, q_0=1$ et $q_n=\pm 1, n \geq 1$, la relation $q_{n+1}=(\eta_{n+1}-\eta_n)q_n+q_{n-1}$. Il en résulte que la suite $(q_n q_{n-1} - \eta_n)$ est une suite constante et en prenant $n=0$, on trouve que cette constante est nulle et donc :

$$q_n = \eta_n q_{n-1} = \eta_1 \dots \eta_n, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

De plus $c_n = \pm 2$ si et seulement si $\eta_n \eta_{n-1} = -1$. On en déduit aisément que

$$q_n = c_1^n (-1)^{\delta(1)+\dots+\delta(n)}, \quad \eta_n = c_1 (-1)^{\delta(n)}, \quad (5)$$

où $\delta(n)$ est le nombre d'apparitions des ± 2 dans le mot $c_1 c_2 \dots c_n$. La relation (3) s'écrit aussi :

$$\frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} q_{k-1} q_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \eta_k$$

et par la relation (5) :

$$p_n = c_1 q_n \sum_{k=1}^n (-1)^{z(k)}$$

où cette fois $z(k)$ est le nombre d'apparitions des 0 dans le mot $c_1 \dots c_k$. On peut résumer tout ce qui précède dans le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — Soit $c=(c_{n+1})_{n \geq 0} \in \mathcal{L}$. Soient (p_n) et (q_n) deux solutions de l'équation (1) à trois termes $x_{n+1}-c_{n+1}x_n-x_{n-1}=0$ satisfaisant aux conditions initiales

$p_{-1}=1, p_0=0$ et $q_{-1}=0, q_0=1$. Si $[0, c_1, \dots, c_n]$ désigne la n^e réduite p_n/q_n de la fraction continue formelle

$$\frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \dots}}$$

alors on a pour tout $n \geq 0$:

$$[0, c_1, \dots, c_n] = c_1 \sum_{k=1}^n (-1)^{z(k)}.$$

2. Pliage de papiers

Il y a deux manières de plier une feuille de papier, soit dans le sens positif (+) soit dans le sens négatif (-), voir Figure 1.

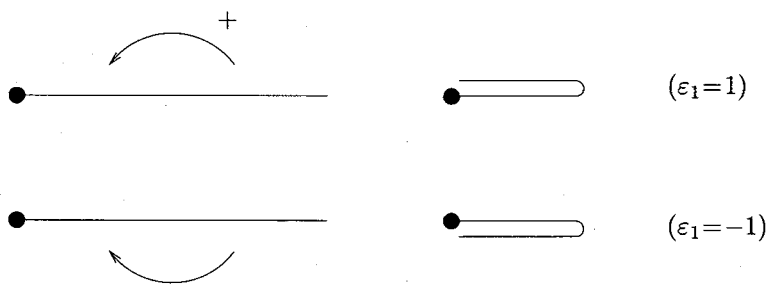


Fig. 1

On suppose qu'on se donne une suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$, $\varepsilon_i = \pm 1$ (ε_i est considéré alors comme une instruction), et on plie une feuille de papier en respectant les instructions $\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_1$. Alors lorsque le papier est déplié, on voit que les traces des plis se présentent sous les formes \wedge ou \vee . Si on fait tendre l'entier n (le nombre d'instructions) vers l'infini, on obtient une suite $(s_n^\varepsilon)_{n \geq 1}$ appelée suite de pliages, notée $s = s^\varepsilon$, à valeurs dans l'alphabet $\{\wedge, \vee\}$.

Il est assez aisé de voir qu'une suite $s = (s_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $\{\wedge, \vee\}$ est une suite de pliages de papier ou une suite P.P si et seulement si

- (i) $(s_{2n+1})_{n \geq 0}$ est la suite alternée $\wedge, \vee, \wedge, \vee, \dots$ ou la suite alternée $\vee, \wedge, \vee, \wedge, \dots$,
- (ii) $(s_{2n})_{n \geq 1}$ est une suite P.P.

Désormais, on note $\vee = +1$ et $\wedge = -1$ de sorte que nos suites P.P sont à valeurs dans $\{-1, +1\}$. On peut énoncer alors :

THÉORÈME 3. — Soit $s^\varepsilon = (s_k^\varepsilon)_{k \geq 1}$ une suite de + et de - correspondant à une suite de pliages de papier suivant les instructions $\dots \varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1$, et soit $\varepsilon_0 = 1$. Alors on a l'égalité formelle suivante, avec $c_1 = -\varepsilon_1$ et $c_n = -\varepsilon_1 (-1)^{[n/2]} + (-1)^n s_{[n/2]}^{T\varepsilon}$, $n \geq 2$, où $T\varepsilon = (\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots)$ est la décalée de la suite ε ,

$$\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n X^{-2^n} = [0, X + c_1, X + c_2, \dots, X + c_n, \dots].$$

Preuve. — On commence tout d'abord par étudier le développement en fraction continue, dû à Kmošek [Km] et Shallit [Sh], de la série formelle $\alpha^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n X^{-2^n}$, $\varepsilon_0 = 1$ et $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ est la suite d'instructions de l'énoncé du théorème. Comme on l'avait déjà observé dans l'introduction, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} + \frac{\varepsilon_1}{X^2} &= [0, X - \varepsilon_1, X + \varepsilon_1], \\ \frac{1}{X} + \frac{\varepsilon_1}{X^2} + \frac{\varepsilon_2}{X^2} &= [0, X - \varepsilon_1, X + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, X + \varepsilon_1 - \varepsilon_2, X - \varepsilon_1], \end{aligned}$$

et de façon générale, si n est un entier pair et si

$$\frac{A}{B} = [0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

alors

$$\frac{A}{B} \pm \frac{1}{B^2} = [0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \pm 1, a_n \mp 1, a_{n-1}, \dots, a_1],$$

de sorte si $\alpha^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n X^{-2^n}$, on a :

$$\alpha^\varepsilon = [0, X + c_1, \dots, X + c_n, \dots]$$

où on peut montrer [ALM] que :

$$c_n = \varepsilon_1 (-1)^{1+[n/2]} + (-1)^n s_{[n/2]}^{T\varepsilon}, \quad n \geq 2; \quad c_1 = -\varepsilon_1,$$

où $(s_n^{T\varepsilon})$ est la suite des traces des plis, considérée comme à valeurs dans $\{-1, 1\}$, associée au pliage suivant la suite $T\varepsilon = (\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots)$, décalée de ε . On remarque que $c_n \in \{0, \pm 2\}$ pour $n \geq 2$.

LEMME 4. — $c \in \mathcal{L}$.

En effet, posons

$$\eta_{2n} = s_n^{T\varepsilon} \quad \text{et} \quad \eta_{2n+1} = -\varepsilon_1 (-1)^n = -\varepsilon_1 s_{2n+1}^\varepsilon, \quad \eta_n \in \{\pm 1\}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \varepsilon_1 (-1)^{1+n} + s_n^{T\varepsilon} = \eta_{2n} - \eta_{2n-1}, \\ c_{2n+1} &= \varepsilon_1 (-1)^{1+n} - s_n^{T\varepsilon} = \eta_{2n+1} - \eta_{2n}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 5. — Soient $P_n(X)$ et $Q_n(X)$ le numérateur et le dénominateur de la n^{e} réduite de la fraction continue de $\alpha^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n X^{-2^n}$. Alors

$$P_n(0) = -Q_n(0) \sum_{k=1}^n s_k^\varepsilon,$$

$$Q_n(0) = (-1)^{[(n+1)/2]} s_1^\varepsilon \dots s_n^\varepsilon.$$

Autrement dit, on a formellement :

$$\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n 0^{-2^n} = - \sum_{k \geq 1} s_k^\varepsilon.$$

Remarque. — Dans cette dernière égalité complètement formelle les termes de la première série sont tous infinis, tandis que ceux de la seconde série valent ± 1 . Nous reviendrons sur ce point au §6 pour $\varepsilon_n = +1$, $n \geq 0$.

Preuve. — Dès lors qu'on sait que $c \in \mathcal{L}$, on peut reprendre la preuve du théorème 2. Mais plus simplement on peut se contenter de vérifier que les deux formules donnant $P_n(0)$ et $Q_n(0)$ satisfont à la relation de récurrence

$$x_{n+1} = c_{n+1}x_n + x_{n-1}$$

où

$$c_n = \varepsilon_1 (-1)^{1+[n/2]} + (-1)^n s_{[n/2]}^{\varepsilon}.$$

Remarque. — Il est montré dans [ALM] que les polynômes $Q_n(X)$ sont des polynômes de degré n , à coefficients nuls ou ± 1 .

3. Polynômes orthogonaux, étude des zéros

Dans cette section, on aborde la question de l'orthogonalité des polynômes $Q_n(z)$, satisfaisant à la relation de récurrence :

$$Q_{n+1}(z) = (z + \alpha_{n+1})Q_n(z) + Q_{n-1}(z),$$

$$Q_{-1}(z) = 0, \quad Q_0(z) = 1, \tag{1}$$

où (α_n) coïncide avec la suite (c_n) de la section précédente avec $\varepsilon_n = 1$. Elle est donc définie par :

$$\alpha_n = (-1)^{[n/2]+1} + (-1)^n s_{[n/2]}, \quad s_m = (-1)^b \text{ si } m = 2^a(1+2b).$$

On se propose de déterminer une fonctionnelle μ telle que $\mu(Q_n Q_m) = \lambda_n \delta_{m,n}$ où (λ_n) est une suite de nombres complexes à préciser. Tout d'abord, on rappelle que d'après un théorème bien connu ([Sz, p. 42]), trois éléments consécutifs d'une suite $(P_n(X))$ de polynômes orthogonaux satisfont toujours à une relation de la forme

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= (A_{n+1}X + B_{n+1})P_n(X) - C_{n+1}P_{n-1}(X), \quad n \geq 0, \\ A_n &\neq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

D'autre part, à toute relation de récurrence de cette forme, avec des coefficients réels tels que :

$$\frac{C_{n+1}}{A_n A_{n+1}} > 0, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

on peut associer au moins une fonction ψ , à variation bornée, vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x) P_m(x) d\psi(x) = \lambda_n \delta_{m,n}.$$

Le résultat, dû à Favard [F], dit essentiellement que la condition (3) est suffisante pour résoudre un certain problème de moments. Dans le cas de la relation (1), $A_n = 1$ et $C_n = -1$ pour $n \geq 1$, et on ne peut pas faire appel au théorème de Favard pour conclure quant à l'existence d'une mesure $d\psi(x)$ portée par l'axe réel pour laquelle les polynômes forment une famille orthogonale. On peut cependant partir de certaines observations générales et classiques concernant les systèmes orthogonaux de fonctions (comparer avec [Ge]). Supposons qu'une famille de polynômes $\{P_m : m \geq 0\}$ vérifie une relation à trois termes sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} , et pour laquelle il y a une mesure de la forme $p(x) dx$,

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_s(x) p(x) dx = \lambda_k \delta_{k,s}, \quad \lambda_k \in \mathbf{C}.$$

Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} P_k(z) P_s(z) q(z) dz = \lambda_k \delta_{k,s}$$

où \mathcal{C} est un contour simple entourant l'intervalle $[-1, 1]$, et ceci pourvu que la transformée de Cauchy :

$$q(z) = \int_{-1}^1 \frac{p(x)}{z-x} dx$$

existe. Ceci est le cas par exemple, avec une condition du genre :

$$\int_{-1}^1 \frac{|\log p(x)|}{(1-x^2)^{1/2}} dx < +\infty.$$

D'autre part, si $\chi_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{-n-1}$ est une fonction holomorphe en dehors d'un voisinage de l'origine, dont les dénominateurs des réduites de la fraction continue associée sont

orthogonaux par rapport à une mesure réelle $d\mu(x)$, alors χ_1 se prolonge analytiquement à tout $\mathbf{C} \setminus \text{supp}(\mu)$ et on a l'égalité

$$\chi_1(z) = \int_{\mathbf{R}} \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \notin \text{supp}(\mu).$$

Il est donc naturel de chercher à établir l'orthogonalité sur les cercles, de rayons assez grands, relativement à la mesure $\tilde{\chi}(z) dz$. On suit dans un premier temps la présentation de Pollaczek [Poll].

Les polynômes $Q_n(z)$ de la relation (1) sont de degrés n pour $n \geq 0$, et ils engendrent donc l'espace vectoriel $\mathbf{C}[z]$, des polynômes en z , à coefficients complexes. On peut vérifier par récurrence que :

(a) Chaque monôme s'exprime comme combinaison linéaire de $Q_0(z) \equiv 1$ et des polynômes :

$$Q_\nu(z)Q_{\nu+1}(z), \quad 0 \leq \nu \leq \left[\frac{1}{2}(n-1)\right], \quad \text{et} \quad Q_\nu(z)Q_{\nu+2}(z), \quad 0 \leq \nu \leq \left[\frac{1}{2}n\right]-1,$$

et par suite, on a avec des constantes a_n , $b_{n\nu}$ et $c_{n\nu}$:

$$z^n = a_n + \sum_{0 \leq \nu \leq \left[\frac{1}{2}(n-1)\right]} b_{n\nu} Q_\nu(z)Q_{\nu+1}(z) + \sum_{0 \leq \nu \leq \left[\frac{n}{2}\right]-1} c_{n\nu} Q_\nu(z)Q_{\nu+2}(z).$$

(b) Les produits $Q_m(z)Q_n(z)$, $m \neq n$, s'expriment linéairement à l'aide des seuls polynômes :

$$Q_\nu(z)Q_{\nu+1}(z), \quad 0 \leq \nu \leq \left[\frac{1}{2}(m+n-1)\right], \quad \text{et} \quad Q_\nu(z)Q_{\nu+2}(z), \quad 0 \leq \nu \leq \left[\frac{1}{2}(m+n)\right],$$

et par suite, on a avec des constantes b'_{m+n} , c'_{m+n} :

$$Q_m(z)Q_n(z) = \sum_{0 \leq \nu \leq \left[\frac{1}{2}(m+n-1)\right]} b'_{m+n,\nu} Q_\nu(z)Q_{\nu+1}(z) + \sum_{0 \leq \nu \leq \left[\frac{1}{2}(m+n)\right]} c'_{m+n,\nu} Q_\nu(z)Q_{\nu+2}(z).$$

Ceci étant, on définit sur l'espace $\mathbf{C}[z]$ la forme linéaire L par :

$$L(Q_0) = 1, \quad L(Q_\nu Q_{\nu+1}) = 0, \quad L(Q_\nu Q_{\nu+2}) = 0,$$

et grâce à la propriété (a) ci-dessus L est bien définie, lorsqu'elle est prolongée à $\mathbf{C}[z]$ par linéarité.

On peut résumer notre première approche à l'orthogonalité des polynômes $Q_n(z)$ définis par la relation (1) dans le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — Soit $\tilde{\chi}$ la fonction holomorphe pour $|z| > 1$ et s'annulant à l'infini, définie par $\tilde{\chi}(z) = \sum_{n \geq 0} z^{-2^n}$. La suite des dénominateurs $Q_n(z)$ des réduites de $\tilde{\chi}(z)$ vérifient pour tout $r > 1$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} Q_n(z) Q_m(z) \tilde{\chi}(z) dz = (-1)^n \delta_{n,m}.$$

De plus pour $|z| > 1$:

$$\tilde{\chi}(z) = \sum_{n \geq 0} L(z^n) z^{-n-1}.$$

En d'autres termes $L(z^{2^n-1}) = 1$ et $L(z^m) = 0$ si $m \neq 2^n - 1$.

Preuve. — Elle est simple mais nous la donnons pour voir comment la fonctionnelle L intervient. On remarque d'abord que si on suppose que la série

$$\tilde{\chi}_1(z) = \sum_{n \geq 0} L(z^n) z^{-n-1}$$

est holomorphe pour $|z| \geq r_0 \geq 2$, alors pour tout entier m :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} z^m \tilde{\chi}_1(z) dz = L(z^m),$$

et ceci pour tout $r > r_0$, où $\mathcal{C}(0, r)$ est le cercle orienté positivement. Par conséquent, pour tout polynôme $Q(z) \in \mathbf{C}[z]$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} Q(z) \tilde{\chi}_1(z) dz = L(Q), \quad (4)$$

et ainsi

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} Q_m(z) Q_n(z) \tilde{\chi}_1(z) dz = L(Q_m Q_n) = L(Q_n^2) \delta_{m,n}.$$

Calculons $L(Q_n^2)$ pour $n \in \mathbf{N}$. On a $L(Q_0^2) = 1$, et de la relation (1) on obtient:

$$L(Q_n^2) = L(z Q_n Q_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

$$L(z Q_n Q_{n-1}) = -L(Q_{n-1}^2), \quad n \geq 1,$$

et ainsi

$$L(Q_n^2) = -L(Q_{n-1}^2) = (-1)^n L(Q_0^2) = (-1)^n.$$

La relation (4) donne enfin

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} Q_m(z) Q_n(z) \tilde{\chi}_1(z) dz = (-1)^n \delta_{n,m}.$$

Il nous reste à montrer l'égalité $\tilde{\chi}(z) = \tilde{\chi}_1(z)$ pour $|z|$ assez grand. On utilise pour cela les résultats généraux sur les fractions continues. Soient P_n et Q_n le numérateur et le dénominateur de la n^{e} réduite de la fraction continue associée à $\tilde{\chi}(z)$. Alors

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1}{Q_n Q_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Afin d'étudier la série de fractions rationnelles de terme général $(-1)^{n-1}/Q_n Q_{n-1}$, on montre la:

PROPOSITION 7. — (i) Tous les polynômes Q_n ont leurs zéros situés dans la couronne $C = \{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$.

(ii) Pour tout entier n , la série de terme général $(-1)^{n+\nu}/Q_{n+\nu+1}(z)Q_{n+\nu}(z)$ converge uniformément pour $|z| \geq 2$.

Preuve. — Dans [ALM] il est montré que tous les Q_n sont à coefficients dans $\{0, \pm 1\}$ et le point (i) est une propriété générale pour de tels polynômes lorsque le terme constant est non nul. Pour montrer le point (ii), on note $Q_n(z) = q_n z^n + q_{n-1} z^{n-1} + \dots + q_0$, $q_i^3 = q_i$ et $l = l(n)$ le nombre de coefficients non nuls dans $Q_n(z)$. Alors si $|z| \geq 2$:

$$\begin{aligned} |Q_n(z)| &\geq |z|^n - |z|^{n-1} - \dots - |z|^{n-l+1} \\ &\geq |z|^n - |z|^{n-l+1}(1 + |z| + \dots + |z|^{l-2}) \\ &\geq \frac{|z|^{n-l+1}}{|z| - 1} \\ &\geq 2^{n-l}, \quad l = l(n). \end{aligned}$$

On écrit pour simplifier $U_n(z) = 1/|Q_n(z)Q_{n-1}(z)|$. Alors

$$U_n(z) \leq \frac{1}{2^{2n-l(n)-l(n-1)}}, \quad |z| \geq 2.$$

LEMME 8. — Si $l(n)$ est le nombre de coefficients non nuls dans $Q_n(z)$, alors

$$l(n) = o(n), \quad n \rightarrow +\infty.$$

En effet, il est montré dans [ALM] que la suite $(l(n))$ est liée à la suite de Stern-Brocot $v = (v(m))$ par la formule $l(n) = v(2n)$, où :

$$v(2n) = v(n) + v(n-1), \quad (5)$$

$$v(2n+1) = v(n). \quad (6)$$

Posons

$$\lambda' = \limsup \frac{v(2n)}{2n}, \quad \lambda'' = \limsup \frac{v(2n+1)}{2n+1}, \quad \lambda = \max(\lambda', \lambda'') = \limsup \frac{v(n)}{n}.$$

D'après la relation (6), $\lambda'' = \frac{1}{2}\lambda$, et d'après la relation (5) :

$$\frac{v(2n)}{2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{v(n)}{n} + \frac{v(n-1)}{n} \right), \quad \lambda' \leq \frac{1}{2}(\lambda' + \lambda''),$$

donc $\lambda' \leq \lambda''$ et $\lambda = \max(\lambda', \lambda'') = \lambda''$. Or on a vu que $\lambda'' = \frac{1}{2}\lambda$, donc $\lambda'' = \frac{1}{2}\lambda''$ et $\lambda'' = 0$, par suite $\lambda' = \lambda = 0$, donc $l(n) = o(n)$.

La série de terme général $U_n(z)$ converge pour $|z| \geq 2$, et ainsi on a l'égalité entre fonctions holomorphes, pour $|z| \geq 2$:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(z) &= \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} + \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{P_{n+\nu+1}(z)}{Q_{n+\nu+1}(z)} - \frac{P_{n+\nu}(z)}{Q_{n+\nu}(z)} \right) \\ &= \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} + \sum_{\nu \geq 0} \frac{(-1)^{n+\nu}}{Q_{n+\nu+1}(z)Q_{n+\nu}(z)}. \end{aligned} \quad (7)$$

On en déduit que si $m < n$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} Q_m(z)Q_n(z)\tilde{\chi}(z) dz = 0$$

pour $r \geq 2$ et aussi pour $r > 1$ à cause du théorème de Cauchy et à cause de la relation

$$\frac{Q_m(z)Q_n(z)}{Q_{n+\nu+1}(z)Q_{n+\nu}(z)} = o(|z|^{m-n-2\nu-1}) = O(|z|^{-2}), \quad |z| \rightarrow +\infty.$$

D'autre part si $m=n$, l'égalité (7) permet d'écrire pour $r > 1$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} Q_n^2(z)\tilde{\chi}(z) dz = \frac{(-1)^n}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} dz = (-1)^n = L(Q_n^2).$$

En résumé, les moments

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} z^n \tilde{\chi}(z) dz \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} z^n \tilde{\chi}_1(z) dz$$

sont égaux en vertu de la propriété (a) ci-dessus. La fonction $\tilde{\chi}_1(z)$ est ainsi convergente pour $|z| \geq r_0$ pour un $r_0 \geq 2$, et elle est égale à $\tilde{\chi}(z)$ pour $|z| > 1$.

Lorsqu'on prend une famille de polynômes, orthogonale par rapport à certaine mesure $d\mu$, portée par l'axe réel, il est connu que les zéros des polynômes en question sont contenus dans l'enveloppe convexe du support de la mesure $d\mu$. Nous avons observé ci-dessus que les polynômes Q_n admettent leurs zéros situés dans la couronne de petit rayon $\frac{1}{2}$ et de grand rayon 2, et on peut se demander comment se comportent les zéros lorsque n croît. On va répondre à cette question en utilisant les travaux de Polya-Bloch et Erdős-Turán sur des questions similaires.

Nous avons déjà dit que les polynômes $Q_n(z)$ sont de la forme :

$$Q_n(z) = q_n z^n + \dots + q_1 z + q_0, \quad q_j^3 = q_j, \quad q_0 q_n \neq 0.$$

Ils sont de plus lacunaires, avec un nombre $l(n) = o(n)$ de termes non nuls (lemme précédent). On introduit $\|Q_n\|$, la longueur de Q_n , c'est-à-dire :

$$\|Q_n\| = |q_0| + |q_1| + \dots + |q_n|;$$

par suite, $\|Q_n\|=l(n)=o(n)$. Le lemme 2 de [BP] assure que si $1 < q < 2$, le nombre de zéros de Q_n , se trouvant dans la couronne

$$C_q = \{1/q < |z| < q\},$$

ne dépasse pas $(B/(q-1)) \log(1/(q-1))$. En prenant $q=1+(\log a)/a$, avec $a=\log n$, on voit que le nombre de zéros de Q_n (comptés avec multiplicités) ne dépasse pas $B \log n$, avec une constante B , positive et indépendante de n et ce pour n assez grand. Ainsi, lorsque n augmente, les couronnes C_q , $q=1+(\log a)/a$, $a=\log n$, se rétrécissent de plus en plus autour du cercle unité, et seule une petite proportion ($\leq B \log n$) se trouve hors de C_q . On rappelle le résultat suivant qu'on énonce dans sa forme générale :

THÉORÈME (d'Erdős–Turán [ET]). — Soit $P(z)=a_n z^n + \dots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, $a_0 a_n \neq 0$. On note $\|P\|$ la longueur de P , $\|P\|=|a_0| + \dots + |a_n|$, et $z_j = |z_j| e^{i\varphi_j}$ les zéros de P , avec $0 \leq \varphi_j < 2\pi$, $1 \leq j \leq n$. Soient α, β deux réels vérifiant $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. Alors

$$\left| \sum_{\alpha \leq \varphi_k < \beta} 1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} n \right| \leq 16 \sqrt{n \log \frac{\|P\|}{\sqrt{|a_0 a_n|}}}.$$

Ce théorème, appliqué à nos polynômes Q_n , permet d'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\alpha \leq \varphi_k \leq \beta} 1 = \frac{\beta - \alpha}{2\pi}.$$

Cela signifie donc que les zéros des polynômes Q_n sont équidistribués (au sens de H. Weyl) dans les différents secteurs centrés à l'origine. En conclusion, on a obtenu le résultat suivant, concernant la famille (Q_n) .

THÉORÈME 9. — Soit $Q_n(z)$ la suite des polynômes définie à l'aide de la relation à trois termes :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) &= (z + \alpha_{n+1}) Q_n(z) + Q_{n-1}(z), \\ Q_{-1}(z) &= 0, \quad Q_0(z) = 1. \end{aligned}$$

Alors le cercle unité $\{|z|=1\}$ est contenue dans l'ensemble des valeurs d'adhérences des zéros des Q_n . De façon plus précise, pour n assez grand, les zéros de Q_n sont équidistribués dans les différents secteurs, et seule une proposition de l'ordre $B \log n$ est hors de la couronne

$$\left\{ 1 - \frac{\log a}{a} < |z| < 1 + \frac{\log a}{a} : a = \log n \right\}.$$

Remarque. — Les polynômes Q_n peuvent avoir des zéros entiers. On peut vérifier que $Q_{10}(1)=0$ et il serait intéressant de déterminer ceux des Q_n qui sont irréductibles dans $\mathbf{Z}[X]$, et de savoir, lorsque Q_n n'est pas premier dans $\mathbf{Z}[X]$, s'il admet un facteur irréductible de degré $\geq Cn$ où C est une constante indépendante de n pour n assez grand.

On conclut cette section par quelques remarques :

(1) Posons pour simplifier $d_{n+1}=L(z^n)$, $n \geq 0$. Alors

$$\tilde{\chi}(z) = \sum_{n \geq 0} d_{n+1} z^{-n-1}, \quad |z| > 1.$$

On définit la fonctionnelle analytique T par la formule

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \geq 0} \frac{d_{n+1}}{n!} \varphi^{(n)}(0),$$

c'est-à-dire que T est la fonctionnelle à support l'origine :

$$T = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} d_{n+1} \delta^{(n)}$$

où δ est la distribution de Dirac. Alors

$$\langle T, z^n \rangle = d_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

et la transformation de Fourier-Laplace de T est justement

$$\hat{T}(z) = \left\langle T_x, \frac{1}{z-x} \right\rangle = \tilde{\chi}(z), \quad |z| > 1.$$

On peut montrer que comme $\tilde{\chi}$, T a certaines propriétés d'orthogonalité pour la famille de polynômes (Q_n) . A cette fin, on adopte les notations de [JT, p. 249 et suivantes]. On écrit le développement en fraction continue de $\tilde{\chi}(z)$ de la manière suivante :

$$\frac{k_1}{z+l_1} - \frac{k_2}{z+l_2} - \frac{k_3}{z+l_3} \dots$$

avec $k_n = -1$, $n \geq 2$, $k_1 = 1$ et $l_n = \alpha_n$ où la suite (α_n) est la suite de plisages de papier définie au début du §3. On applique la formule 7.2.41 de [JT] pour écrire

$$Q_n(z) = \frac{1}{H_n^{(1)}} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n & d_{n+1} \\ d_2 & d_3 & \dots & d_{n+1} & d_{n+2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ d_n & d_{n+1} & \dots & d_{2n-1} & d_{2n} \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}$$

où $H_n^{(1)}$ est le déterminant de Hankel (d'ordre n) associé à $\tilde{\chi}(z)$. Il est non nul par le théorème 7.14 de [JT]. En outre, $Q_n(z) = z^n + b_{n,1}z^{n-1} + \dots + b_{n,n}$ avec des coefficients $b_{n,j}$, $1 \leq j \leq n$, donnés par les formules 7.2.20 de [JT]. Ceci dit, on peut vérifier à présent que $\langle T, Q_m Q_n \rangle = 0$ si $m \neq n$. Si $0 \leq j \leq m < n$,

$$\langle T, z^j Q_n(z) \rangle = \frac{1}{H_n^{(1)}} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n & d_{n+1} \\ d_2 & d_3 & \dots & d_{n+1} & d_{n+2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ d_n & d_{n+1} & \dots & d_{2n-1} & d_{2n} \\ d_{j+1} & d_{j+2} & \dots & d_{j+n} & d_{j+n+1} \end{vmatrix}.$$

Il en résulte les égalités $\langle T, z^j Q_n(z) \rangle = 0$, $0 \leq j \leq n-1$, et par suite $\langle T, Q_m Q_n \rangle = 0$, $m \neq n$. Par contre :

$$\langle T, Q_n^2 \rangle = \langle T, z^n Q_n \rangle = \frac{H_{n+1}^{(1)}}{H_n^{(1)}}.$$

Les formes linéaires T, L coïncident sur les polynômes ; les calculs précédents montrent par exemple que $H_{n+1}^{(1)} = (-1)^n H_n^{(1)}$.

(2) Notre seconde remarque est de nature plutôt fonctionnelle et ayant trait à la notion de dualité de Köthe. On se réfère à [BG] pour les détails sur cette notion. On note K le disque unité fermé et on désigne par $H(K)$ l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de K , muni de la topologie limite projective induite par l'égalité :

$$H(K) = \bigcap_{K \subset \Omega} H(\Omega)$$

où Ω est un ouvert quelconque contenant K et $H(\Omega)$ est l'espace des fonctions holomorphes dans Ω . La fonction $\tilde{\chi}(z)$ est une fonction holomorphe hors de K , s'annulant à l'infini. Elle définit une forme linéaire continue $S \in H'(K)$ sur l'espace $H(K)$ et ceci de la manière suivante. Si $f \in H(\Omega)$, $K \subset \Omega$, on pose

$$\langle S, f \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \tilde{\chi}(z) f(z) dz$$

où γ est un lacet contenu dans Ω , entourant K et d'indice 1 par rapport à K . On montre que S est bien un élément de $H'(K)$. Par suite, si $\varepsilon > 0$ et si $K_\varepsilon = \{|z| \leq 1 + \varepsilon\}$, alors par le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure μ_ε à support dans K_ε , telle que :

$$\int_{K_\varepsilon} Q_m Q_n d\mu_\varepsilon = (-1)^n \delta_{m,n},$$

et notre but consiste à étudier ce que devient cette égalité lorsque ε tend vers zéro.

4. Etude de la série $\chi(z)$, l'équation (ED)

Nous avons vu dans la section précédente qu'il y a trois approches à la réalisation de l'orthogonalité des polynômes $Q_n(z)$, $n \geq 0$. Le but de la présente section est de rendre possible une construction effective de cette orthogonalité. Nous allons étudier, sous plusieurs angles, la série entière $\chi(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$ et surtout son comportement au bord de son disque de convergence $|z| < 1$.

On trouve dans la littérature quelques résultats sur cette série en relation avec les questions de représentations conformes. Soient $D = \{|z| < 1\}$ et B l'espace de Bloch, c'est-à-dire l'espace des fonctions f analytiques dans le disque, telles que :

$$\sup_z (1 - |z|^2) |f'(z)| < +\infty.$$

De même, on désigne par H^2 et BMO les espaces habituels de Hardy et celui des fonctions à oscillation moyenne bornée sur le disque. Il est montré dans [Ga, p. 282] que :

- (i) $BMO \cap H^2 \subset B$,
- (ii) $\chi(z) \in B$, $\chi(z) \notin BMO \cap H^2$.

Le fait que χ soit un élément de B est un phénomène général : toutes les séries entières lacunaires

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} b_k z^{q^k}, \quad q \geq 2, |b_k| \leq 1,$$

ont cette propriété [Pom].

Notre approche ici est différente de celles qui viennent d'être rappelées. Elle va utiliser le fait que $\chi(z) = \sum_{k \geq 0} z^{2^k}$ vérifie une équation fonctionnelle et est solution d'une équation différentielle d'ordre infini. On a clairement :

$$\chi(z) - \chi(z^2) = z, \quad |z| < 1. \quad (\text{EF})$$

Pour déterminer l'équation différentielle d'ordre infini satisfaite par la fonction χ on rappelle tout d'abord quelques notions. Soit $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de nombres positifs telle que :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \Delta.$$

Le produit infini [Be, p. 267]

$$C(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right)$$

définit une fonction entière paire de la variable z , de type exponentiel Δ . En d'autres termes pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbf{C}$:

$$|C(z)| \leq C_\varepsilon e^{(\Delta + \varepsilon)|z|}.$$

Si $\lambda_n = 2^n$, alors $\Delta = 0$ et la fonction $C(z)$ est alors de type exponentiel nul. Dans ce cas, si on considère le développement en série entière de $C(z)$:

$$C(z) = \sum_{k \geq 0} a_{2k} z^{2k}, \quad z \in \mathbf{C},$$

alors pour toute fonction g holomorphe pour $|z - z_0| < h$, $h > 0$, la série

$$G(z) = \sum_{k \geq 0} a_{2k} g^{(2k)}(z)$$

est convergente et définit une fonction holomorphe dans le même disque $|z - z_0| < h$. On peut donc définir l'opérateur différentiel d'ordre infini

$$C(D) = \sum_{k \geq 0} a_{2k} \left(\frac{d}{dz} \right)^{2k},$$

qui envoie les fonctions holomorphes dans un disque en fonctions holomorphes dans le même disque. On peut obtenir la même fonction G par cet autre procédé :

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{1}{\lambda_m^2} \frac{d^2}{dz^2} \right) \right) g(z) \right].$$

A la fonction χ , on associe la fonction X , donnée par la série de Dirichlet suivante :

$$\begin{aligned} X(\xi) &= \chi(z) \quad (z = e^{-\xi}, \xi = \sigma + it, \sigma > 0) \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-2^n \xi} \quad (\operatorname{Re} \xi > 0). \end{aligned}$$

Alors l'équation différentielle d'ordre infini à coefficients constants est tout simplement :

$$C(D)X(\xi) = 0, \quad \operatorname{Re} \xi > 0. \quad (\text{ED})$$

Pour terminer ces remarques, ajoutons que d'après les théorèmes classiques de Fabry ($\lim_{k \rightarrow +\infty} k/2^k = 0$) ou seulement de Hadamard ($\lim_{k \rightarrow +\infty} 2^{k+1}/2^k = 2 > 1$), le cercle unité $\{|z|=1\}$ est une coupure analytique. Notre objectif est d'obtenir un résultat plus fort comme conséquence des équations (EF) et (ED) (voir la remarque à la fin de cette section).

THÉORÈME 10. — (i) *Toute fonction f , définie sur $[0, 1[$, continue en 0 et solution de l'équation (EF) coïncide nécessairement avec $\chi(x) + f(0)$, $0 \leq x < 1$.*

(ii) Toute solution f de l'équation (EF), holomorphe dans le disque unité et holomorphe au voisinage d'un point z_0 , $|z_0|=1$, est nécessairement holomorphe au voisinage du cercle unité $\{|z|=1\}$. Par suite le cercle unité est une coupure analytique pour la fonction $\chi(z)$.

(iii) Toute solution holomorphe f de l'équation (EF) dans $D^*=D\setminus\{0\}$ telle que la fonction F , $F(\xi)=f(z)$, $z=e^{-\xi}$, vérifie l'équation (ED) coïncide nécessairement avec la fonction $\chi(z)$ dans D .

(iv) Toute solution f de l'équation (ED), holomorphe dans un ouvert Ω , qui ne se prolonge pas analytiquement au voisinage d'un point z_0 situé sur le bord de Ω , ne se prolonge pas quasi-analytiquement au voisinage de z_0 .

Preuve. — (i) On écrit tout simplement que pour tout entier $m>0$ et $0\leq x<1$:

$$f(x) = x + x^2 + x^{2^2} + \dots + x^{2^{m-1}} + f(x^{2^m})$$

et on fait tendre m vers $+\infty$.

(ii) Supposons que f est holomorphe dans un petit disque ouvert D_0 centré en z_0 , $|z_0|=1$. Par la décomposition de (i), $f(z)=P_m(z)+g_m(z)$, P_m est un polynôme et g_m est holomorphe dans D_0 . Or $g_m(ze^{2i\pi k/2^m})=g_m(z)$, k étant un entier quelconque, donc g_m est holomorphe dans D_0, D_1, \dots, D_{m-1} où chaque D_j , $1\leq j\leq m-1$, est obtenu à partir du précédent par rotation. Si m est pris assez grand, $D_0\cup D_1\cup\dots\cup D_m$ est un ouvert sur lequel f est holomorphe et qui contient une couronne de la forme $\{\zeta<|z|<1/\zeta: 0<\zeta<1\}$. Si χ était holomorphe au voisinage d'un point z_0 , $|z_0|=1$, le rayon de convergence de la série représentant χ serait supérieur à 1, ce qui est impossible.

(iii) La fonction $F(\xi)$ est holomorphe dans le demi-plan $\text{Re } \xi > 0$ et est solution de l'équation $C(D)F(\xi)=0$. D'après un théorème de Ritt [Ri], F admet un développement uniformément et absolument convergent sur les compacts de $\{\text{Re } \xi > 0\}$ de la forme :

$$F(\xi) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{-2^n \xi} + \sum_{n\geq 0} b_n e^{2^n \xi}$$

avec $a_n \in \mathbf{C}$, $b_n \in \mathbf{C}$ et $\text{Re } \xi > 0$. Par conséquent

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{2^n} + \sum_{n\geq 0} b_n z^{-2^n}, \quad 0 < |z| < 1.$$

L'égalité $f(z)=f(z^2)+z$ montre que $a_n=1$, $b_n=0$ pour $n\geq 0$.

(iv) Ce point exige certains développements et on se réfère à [Se] pour ce qui suit. Considérons la fonction entière π de type exponentiel nul définie par :

$$\pi(z) = \prod_{n\geq 0} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right).$$

Alors $C(z) = \pi(z^2)$. Soit $n(r)$ le nombre de zéros de la fonction π dans le disque de centre 0 et de rayon r . On a $n(r) \leq \log r / \log 2 + 1$ pour $r \geq 1$, et $n(r) = 0$ pour $0 \leq r < 1$. On peut donc écrire, grâce à l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} \log |\pi(z)| &\leq \int_1^r \frac{n(t)}{t} dt + r \int_r^{+\infty} \frac{n(t)}{t} dt \\ &\leq \int_1^r \frac{\log 2 + \log t}{t \log 2} dt + r \int_1^{+\infty} \frac{\log 2 + \log t}{t^2 \log 2} dt, \quad |z| = r, \end{aligned}$$

ce qui montre :

$$\begin{aligned} \log |\pi(z)| &= O((\log |z|)^2), \\ \log |C(z)| &= O((\log |z|)^2). \end{aligned}$$

La fonction $C(z)$ appartient donc à ce qui est appelé la "classe normale" de [Se]. Ceci étant, revenons à la preuve du point (iv). Le théorème du prolongement des solutions des opérateurs différentiels d'ordre infini de [Se] dit que si Ω est convexe, alors toutes les solutions u , holomorphes dans Ω , de l'équation $C(D)u = 0$ se prolongent holomorphiquement à un ouvert $\tilde{\Omega}$, maximal convexe, tout en restant solutions de la même équation. Ce théorème du prolongement dit aussi comment construire $\tilde{\Omega}$ à partir de l'ouvert Ω et de la fonction caractéristique de l'opérateur différentiel $C(D)$, c'est-à-dire la fonction $C(z)$. Il va avoir la forme d'une bande verticale :

$$\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbf{C} : a < \operatorname{Re} z < b\}, \quad \Omega \subset \tilde{\Omega}.$$

Maintenant, un théorème de Polya [Poly] dit que si u est une solution holomorphe de $C(D)u = 0$, alors son domaine d'existence est convexe, donc ce qui précède concernant le prolongement s'applique puisqu'on peut supposer l'ouvert Ω du point (iv) convexe sans diminuer la généralité. L'ouvert $\tilde{\Omega}$ ci-dessus a la propriété que toutes les solutions u , holomorphes dans Ω , de $C(D)u = 0$ se prolongent à $\tilde{\Omega}$. Mais si l'on considère une solution u_0 qui est holomorphe dans Ω , il se peut qu'elle se prolonge au-delà de $\tilde{\Omega}$! De toute façon, le point z_0 est sur la frontière de $\tilde{\Omega}$. Pour fixer les idées, supposons que $\operatorname{Re} z_0 = a$; alors la solution f évoquée dans le point (iv) ne va pas se prolonger analytiquement au voisinage d'aucun point de la droite $\operatorname{Re} z = a$. On va montrer qu'elle ne se prolonge pas quasi-analytiquement au voisinage de z_0 non plus, c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver un segment horizontal de la forme :

$$\Delta = \{\operatorname{Im} z = y_0 : -\infty < \alpha < \operatorname{Re} z < \beta < +\infty, \alpha < a < \beta\}$$

sur lequel existe une fonction $F(z)$, indéfiniment différentiable, appartenant à une classe quasi-analytique $C\{M_n\}$ telle que $f(z) = F(z)$, $z \in \Delta$ et $\operatorname{Re} z > a$. A cette fin, on introduit

selon [Be] l'indice de condensation de la suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$, $\lambda_n = 2^n$. Il est défini par :

$$\delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_n} \log \left| \frac{1}{C'(\lambda_n)} \right|.$$

Un calcul direct montre que pour la suite $\lambda_n = 2^n$, on a $\delta = 0$. On peut aussi faire appel au résultat général ([Be, note II]) selon lequel $\delta = 0$ dès que :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0.$$

Pour conclure on utilise un critère établi par Leont'ev dans [Le, théorème 1]. Ceci achève la preuve du théorème.

Afin d'étudier le comportement au bord du disque unité de notre fonction $\chi(q)$, on cherche une autre solution particulière de l'équation (EF). (La variable z sera désormais notée q pour respecter un certain usage.) Plusieurs démarches sont possibles. Une première méthode consiste à partir de la fonction $\chi(q)$ elle-même et y effectuer des transformations plus ou moins formelles, en procédant par (zêta)-régularisations, et c'est ainsi qu'on aboutit à cette solution remarquable de l'équation (EF) :

$$\chi_0(q) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n! (2^n - 1)} \left(\log \frac{1}{q} \right)^n - \frac{1}{\log 2} \log \left(\log \frac{1}{q} \right), \quad 0 < q < 1.$$

La fonction $\chi(q) - \chi_0(q)$ est solution de l'équation fonctionnelle homogène (EF₀) :

$$f(q^2) = f(q) \tag{EF_0}$$

dont toutes les solutions sont connues. Ce sont des fonctions périodiques de la variable $\log \log 1/q$, de période $\log 2$. Pour déterminer la fonction périodique $\chi - \chi_0$, on procède comme Hardy [Ha2], en observant cependant qu'il y a moyen de développer une formule sommatoire assez générale pouvant s'appliquer à des séries telles que :

$$\chi_\varepsilon(q) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n q^{2^n}, \quad \varepsilon_n \in \{-1, 1\}, \quad 0 < q < 1,$$

pour certains choix des ε_n . Dans la suite, on désigne par S un ensemble discret contenu dans l'axe imaginaire $i\mathbf{R}$.

THÉORÈME 11 (premier théorème de décomposition). — *Soit*

$$\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}^+ = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$$

une suite telle que pour $\varepsilon_n = \pm 1$, la série de Dirichlet

$$\zeta_\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n \varphi(n)^{-z}$$

converge pour $\operatorname{Re} z > 0$ vers une fonction holomorphe. On suppose que cette somme se prolonge analytiquement à tout $\mathbf{C} - S$, $0 \in S$, et que les points de S sont des pôles simples sauf éventuellement l'origine qui est un pôle d'ordre k . On suppose enfin, que ce prolongement noté encore ζ_φ vérifie l'estimation suivante : Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout

$$-\infty \leq a < \operatorname{Re} z < b < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < a < \operatorname{Re} z < b < +\infty$$

on peut trouver $C_\varepsilon > 0$ telle que :

$$|\zeta_\varphi(z)| \leq C_\varepsilon e^{(\pi/2 - \varepsilon)|z|}, \quad a \leq \operatorname{Re} z \leq b.$$

Alors avec $S^* = S \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n e^{-\varphi(n)} &= \sum_{m > 0} \frac{(-1)^m}{m!} \zeta_\varphi(-m) + \frac{1}{k!} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d^{(k)}}{du^{(k)}} (u^{k+1} \zeta_\varphi(u) \Gamma(u)) \\ &\quad + \sum_{z_k \in S^*} \Gamma(2ik\pi) \operatorname{Res}(\zeta_\varphi, z_k). \end{aligned}$$

Preuve. — Elle est standard. La formule d'inversion de Mellin :

$$e^{-u} = \frac{1}{2i\pi} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(z) u^{-z} dz, \quad k > 0, \operatorname{Re} u > 0,$$

donne grâce aux hypothèses faites :

$$\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n e^{-\varphi(n)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(z) \zeta_\varphi(z) dz.$$

Ensuite, on déplace le chemin d'intégration vers la gauche.

COROLLAIRE 12 (Hardy). — On a pour $0 < q < 1$:

(i)

$$\chi(q) = \chi_0(q) + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\log 2} + \frac{1}{\log 2} \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} \Gamma\left(-\frac{2ki\pi}{\log 2}\right) \left\{ \log \frac{1}{q} \right\}^{2ki\pi/\log 2}$$

où γ est la constante d'Euler ;

(ii)

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{2^n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{(\log 1/q)^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{\log 2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \Gamma\left(-\frac{(2k+1)i\pi}{\log 2}\right) \left\{ \log \frac{1}{q} \right\}^{(2k+1)i\pi/\log 2}$$

Remarque. — Dans le point (i) ci-dessus, les fonctions $\chi(q)$, $\chi_0(q)$ sont deux solutions de l'équation (EF). Leur différence

$$P(q) = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\log 2} + \frac{1}{\log 2} \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} \Gamma\left(\frac{-2ik\pi}{\log 2}\right) \left\{ \log \frac{1}{q} \right\}^{2ik\pi/\log 2}$$

est bien une fonction périodique de la variable $\log \log 1/q$, de période $\log 2$. On peut donner des représentations à l'aide d'intégrales de contours des fonctions $\chi(q)$, $\chi_0(q)$ et $P(q)$. Si $\varphi(n) = 2^n \log 1/q$, $n \geq 0$, alors :

$$S = \frac{2i\pi}{\log 2} \mathbf{Z}, \quad \zeta_\varphi(z) = \left(\log \frac{1}{q} \right)^{-z} \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n 2^{-nz}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

et on a avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ (Figure 2) :

$$\chi(q) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \Gamma(z) \zeta_\varphi(z) dz,$$

$$\chi_0(q) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}_0} \Gamma(z) \zeta_\varphi(z) dz,$$

$$P(q) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2} \Gamma(z) \zeta_\varphi(z) dz.$$

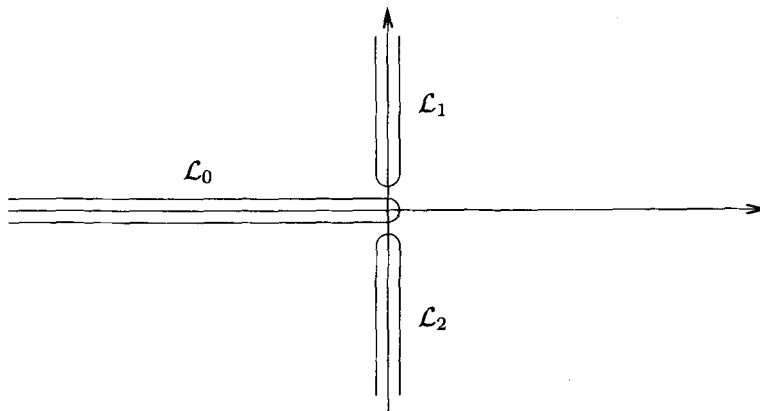


Fig. 2

Les exemples du corollaire 12 sont en fait un cas particulier de celui où l'on se donne une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$, à valeurs dans $\{\pm 1\}$, périodique de période $N > 0$, c'est-à-dire $\varepsilon_{n+N} = \varepsilon_n$, $n \geq 0$. Avant d'énoncer un résultat général, on fixe quelques notations. On pose :

$$U = \{\omega \in \mathbf{C} : \omega^N = 1\}, \quad Q(X) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 X + \dots + \varepsilon_{N-1} X^{N-1}, \quad \Sigma_Q = \{\omega \in U : Q(\omega) \neq 0\}.$$

On peut donc écrire, avec un polynôme $\tilde{Q}(X)$ qui divise $Q(X)$:

$$\frac{Q(X)}{X^N - 1} = \frac{\tilde{Q}(X)}{\prod_{\omega \in \Sigma_Q} (X - \omega)},$$

et par suite, si $1 \in \Sigma_Q$, alors 0 est pôle double de la fonction

$$\frac{\Gamma(z)(\log 1/q)^{-z} Q(2^{-z})}{1 - 2^{-Nz}} = - \frac{\Gamma(z)(\log 1/q)^{-z} \tilde{Q}(2^{-z})}{\prod_{\omega \in \Sigma_Q} (2^{-z} - \omega)},$$

et tous les autres pôles $\omega \in \Sigma_Q$, $\omega \neq 1$, sont simples. Et si $1 \notin \Sigma_Q$, alors 0 est un pôle simple de la fonction ci-dessus.

THÉORÈME 13. — Si $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ est une suite périodique de période N , $\varepsilon_n = \pm 1$, $0 \leq n < N$, la série de Dirichlet $\zeta_\varphi(z)$ vérifie les hypothèses du théorème 11, avec $\varphi(n) = 2^n \log 1/q$, et on a pour $0 < q < 1$:

(i) Si $1 \notin \Sigma_Q$:

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(q) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n q^{2^n} &= \sum_{m > 0} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \cdot \frac{\tilde{Q}(2^m)}{\prod_{\omega \in \Sigma_Q} (2^m - \omega)} \left(\log \frac{1}{q} \right)^m - \frac{\tilde{Q}(1)}{\prod_{\omega \in \Sigma_Q} (1 - \omega)} \\ &- \frac{1}{\log 2} \sum_{\omega \in \Sigma_Q} \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} \frac{\Gamma((2ik\pi + \log \omega) / -\log 2) (\log 1/q)^{-(2ik\pi + \log \omega) / -\log 2} \tilde{Q}(\omega)}{\omega \prod_{\substack{\omega' \in \Sigma_Q \\ \omega' \neq \omega}} (2^{-\omega} - \omega')}; \end{aligned}$$

(ii) Si $1 \in \Sigma_Q$:

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(q) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n q^{2^n} &= \sum_{m > 0} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \cdot \frac{\tilde{Q}(2^m)}{\prod_{\omega \in \Sigma_Q} (2^m - \omega)} \left(\log \frac{1}{q} \right)^m \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{\tilde{Q}(1)}{\prod_{\substack{\omega \in \Sigma_Q \\ \omega \neq 1}} (1 - \omega)} - \frac{1}{\log 2} \log \left(\log \frac{1}{q} \right) \frac{\tilde{Q}(1)}{\prod_{\substack{\omega \in \Sigma_Q \\ \omega \neq 1}} (1 - \omega)} \\ &+ \frac{\gamma}{\log 2} \cdot \frac{\tilde{Q}(1)}{\prod_{\substack{\omega \in \Sigma_Q \\ \omega \neq 1}} (1 - \omega)} - \frac{\tilde{Q}'(1)}{\prod_{\substack{\omega \in \Sigma_Q \\ \omega \neq 1}} (1 - \omega)} + \frac{\tilde{Q}(1)}{\prod_{\substack{\omega \in \Sigma_Q \\ \omega \neq 1}} (1 - \omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Sigma_Q \\ \omega \neq 1}} \frac{1}{1 - \omega} \\ &- \frac{1}{\log 2} \sum_{\omega \in \Sigma_Q} \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} \frac{\Gamma((2ik\pi + \log \omega) / -\log 2) (\log 1/q)^{-(2ik\pi + \log \omega) / -\log 2} \tilde{Q}(\omega)}{\omega \prod_{\substack{\omega' \in \Sigma_Q \\ \omega' \neq \omega}} (2^{-\omega} - \omega')}. \end{aligned}$$

On observe que le comportement de $\chi_\varepsilon(q)$, lorsque q tend vers 1, $0 < q < 1$, dépend de $Q(1) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{N-1}$. Si dans le pliage de papier, au cours du N premières opérations, il y a autant de plis dans un sens que dans l'autre, alors $1 \notin \Sigma_Q$, et comme l'expression

$$\sum_{m>0} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \cdot \frac{\tilde{Q}(2^m)}{\prod_{\omega \in \Sigma_Q} (2^m - \omega)} \left(\log \frac{1}{q} \right)^m$$

représente une fonction entière de $\log 1/q$ et tend vers 0 lorsque q tend vers 1, on voit que le comportement de $\chi_\varepsilon(q)$ est oscillant grâce à la présence du facteur

$$-\frac{1}{\log 2} \sum_{\omega \in \Sigma_Q} \tilde{Q}(\omega) \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} \frac{\Gamma((2ik\pi + \log \omega) / -\log 2) (\log 1/q)^{(2ik\pi + \log \omega) / \log 2}}{\omega \prod_{\substack{\omega' \in \Sigma_Q \\ \omega' \neq \omega}} (2^{-\omega} - \omega')}$$

Tandis que si $Q(1) \neq 1$, on a lorsque q tend vers 1, $0 < q < 1$:

$$\chi_\varepsilon(q) \sim -\frac{\tilde{Q}(1)}{\log 2 \prod_{\substack{\omega \in \Sigma_Q \\ \omega \neq 1}} (1 - \omega)} \log \left(\log \frac{1}{q} \right).$$

Enfin, on peut ajouter que si $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ est une suite quelconque à valeurs dans $\{\pm 1\}$, périodique ou non, on a pour $q \in \mathbf{C}$, $0 \leq |q| < 1$ et $|q|$ tend vers 1 :

$$|\chi_\varepsilon(q)| \leq \chi(|q|) \sim -\frac{1}{\log 2} \log \left(\log \frac{1}{|q|} \right) \sim -\frac{1}{\log 2} \log(1 - |q|).$$

Remarque. — Pour q tendant vers 1, $q < 1$, les comportements asymptotiques de $\chi(q)$ et de $\chi(qe^{-2ik\pi/2^s})$ sont évidemment les mêmes car les deux séries ne diffèrent que par un nombre fini de termes. Il s'ensuit que χ n'est bornée dans aucun secteur du disque unité centré à l'origine.

5. Liens avec les fonctions thêta

Dans cette section, on établit une relation entre la fonction $\chi(q)$ et les fonctions thêta elliptiques. Ceci révèle un certain caractère modulaire de la fonction χ et c'est l'ingrédient pour le développement de la méthode du cercle de la prochaine section. L'outil principal pour établir cette relation avec les fonctions thêta est un théorème de Jacobi. Pour clarifier l'exposition, on commence par un rappel des principales formules sur les fonctions elliptiques dont nous avons besoin. Nos principales références sur le sujet sont [Ra1], [Ha].

Pour $0 < k < 1$, on définit

$$K(k) = K = \int_0^1 \{(1-t^2)(1-k^2t^2)\}^{-1/2} dt = \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta,$$

$$K'(k) = \int_0^1 \{(1-t^2)(1-(k')^2t^2)\}^{-1/2} dt = \int_0^{\pi/2} (1-(k')^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta,$$

où $k^2 + (k')^2 = 1$. On a la relation

$$K = \frac{1}{2} \pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right)$$

où F est la fonction hypergéométrique. Ceci permet de définir ces expressions même pour un nombre complexe k , $|k| < 1$. On pose :

$$q = e^{-\pi K'/K} = e^{i\pi\tau}, \quad \tau = iK'/K, \quad \text{Im } \tau > 0.$$

La fonction modulaire λ est telle que $\lambda(\tau) = k^2$ et les quatre fonctions thêta sont définies comme dans [Ra1, p. 166], les sommations étant sur tous les entiers :

$$\begin{aligned} \Theta_1(v|\tau) &= -i \sum (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)\pi iv}, \\ \Theta_2(v|\tau) &= \sum q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)\pi iv}, \\ \Theta_3(v|\tau) &= \sum q^{n^2} e^{2\pi in v}, \\ \Theta_4(v|\tau) &= \sum (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi in v}. \end{aligned}$$

Ce sont des fonctions holomorphes de v , $\text{Im } v > 0$, de la fonction $\Theta_3(v|\tau)$ en translatant la variable v . On pose plus simplement :

$$\theta_2(q) = \Theta_2(0|\tau), \quad \theta_3(q) = \Theta_3(0|\tau), \quad \theta_4(q) = \Theta_4(0|\tau).$$

Les liens entre les fonctions thêta et les fonctions K, K', k, \dots sont par exemple donnés par :

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 = \theta_2^4(q), \quad \left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 = \theta_4^4(q), \quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = \theta_3^4(q) = \theta_2^4(q) + \theta_4^4(q).$$

Ceci termine notre formulaire sur les fonctions thêta. On peut énoncer à présent les relations de Jacobi. Elles relient la fonction $\chi(q)$ aux fonctions introduites ci-dessus. On les trouve dans Jacobi [J, p. 161, 162].

THÉORÈME (de Jacobi). — On a les cinq égalités suivantes :

$$(a) \log k = \log 4\sqrt{q} - 4 \sum' \frac{\sigma_1(n)}{n} \left\{ q^n - \frac{3}{2}q^{2n} - \frac{3}{4}q^{4n} - \frac{3}{8}q^{8n} - \frac{3}{16}q^{16n} - \dots \right\};$$

$$(b) \log \frac{2K}{\pi} = 4 \sum' \frac{\sigma_1(n)}{n} \{ q^n - q^{2n} - q^{4n} - q^{8n} - q^{16n} - \dots \};$$

$$(c) \frac{4K^2}{\pi^2} = 1 + 8 \sum' \sigma_1(n) \{ q^n + 3q^{2n} + 3q^{4n} + 3q^{8n} + 3q^{16n} + \dots \};$$

$$(d) \left(\frac{2k'K}{\pi} \right)^2 = 1 + 8 \sum' \sigma_1(n) \{ -q^n + 3q^{2n} + 3q^{4n} + 3q^{8n} + 3q^{16n} + \dots \};$$

$$(e) \frac{4k'K^2}{\pi^2} = 1 + 8 \sum' \sigma_1(n) \{ -q^{2n} + 3q^{4n} + 3q^{8n} + 3q^{16n} + 3q^{32n} + \dots \},$$

où \sum' désigne la sommation sur les nombres impairs n , et $\sigma_1(n)$ désigne la somme des diviseurs de n .

La preuve des égalités consiste à partir des développements en série de Lambert. On parlera dans la prochaine section de ces développements. Celui de $4K^2/\pi^2 = \theta_3^4(q)$ est donné par [Ra1, p. 198] :

$$\begin{aligned} \theta_3^4(q) &= 1 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1-q^{2m}} - 8 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}} \\ &= 1 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1+(-1)^m q^m}. \end{aligned} \quad (1)$$

La formule (c) s'obtient en développant en séries de puissances le développement en séries de Lambert. On peut écrire la formule (c) comme suit :

$$\frac{1}{24}(\theta_3^4(q) + 16F(q) - 1) = \sum' \sigma_1(n) \chi(q^n), \quad |q| < 1,$$

avec

$$F(q) = \sum' \sigma_1(n) q^n.$$

Or

$$\theta_2^4(q) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{(n+1/2)^2} \right)^4 = 16F(q),$$

et tenant compte de l'égalité

$$\theta_3^4(q) = \theta_2^4(q) + \theta_4^4(q)$$

il vient :

$$\sum' \sigma_1(n) \chi(q^n) = \frac{1}{24}(2\theta_3^4(q) - \theta_4^4(q) - 1),$$

et comme $\theta_4(-q) = \theta_3(q)$, on a finalement l'égalité fondamentale :

$$\sum' \sigma_1(n) \chi(q^n) = \frac{1}{24}(2\theta_3^4(q) - \theta_3^4(-q) - 1). \quad (2)$$

THÉORÈME 14 (second théorème de décomposition). — Soit g la fonction multiplicative définie par :

$$g(1) = 1, \quad g(2^\alpha) = 0, \quad \alpha \geq 1, \quad g(p) = -(1+p), \quad g(p^2) = p, \quad g(p^\alpha) = 0,$$

pour $\alpha \geq 3$ et $p \geq 3$ premier. Alors pour $|q| < 1$:

$$\chi(q) = \sum' g(n) \cdot \frac{1}{24} (2\theta_3^4(q^n) - \theta_3^4(-q^n) - 1) \quad (3)$$

où \sum' désigne la somme sur les entiers impairs. La somme dans (3) est absolument convergente.

Preuve. — La fonction ζ de Riemann vérifie les égalités pour $\text{Re } s > 2$:

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_1(n)}{n^s}, \quad \sigma_1(n) = \sum_{d|n} d, \quad \zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Comme

$$\sum' \frac{1}{n^s} = (1 - 2^{-s})\zeta(s)$$

on a pour $\text{Re } s > 2$:

$$(1 - 2^{-s})(1 - 2^{-s+1})\zeta(s)\zeta(s-1) = \left(\sum' \frac{1}{n^s}\right) \left(\sum' \frac{1}{n^{s-1}}\right) = \sum' \frac{\sigma_1(n)}{n^s}.$$

Cette dernière égalité, jointe à la formule du produit infini permet d'écrire :

$$\sum' \frac{\sigma_1(n)}{n^s} = \prod_{\substack{p \geq 3 \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^{s-1}}\right)^{-1} = \prod_{\substack{p \geq 3 \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1+p}{p^s} + \frac{p}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

La fonction g du théorème, prolongée à tous les entiers par l'égalité $g(mn) = g(m)g(n)$ si m et n sont premiers entre eux, satisfait donc à la relation :

$$\sum_{n \geq 1}' \frac{g(n)}{n^s} = \prod_{\substack{p \geq 3 \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1+p}{p^s} + \frac{p}{p^{2s}}\right).$$

De plus g est l'inverse de σ_1 pour la convolution des fonctions multiplicatives :

$$\sum_{d|m} \sigma_1(d)g(m/d) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1, \\ 0 & \text{si } m > 1, \text{ impair,} \end{cases}$$

et par suite si on a une relation de la forme

$$\sum' \sigma_1(n) f(q^n) = F(q),$$

alors

$$\sum' g(n) F(q^n) = f(q)$$

d'où le théorème.

On conclut cette section par quatre remarques :

(a) $|g(k)| \leq k^2$ pour tout entier.

(b) Si μ est la fonction de Möbius, on a l'égalité

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Par conséquent

$$\sum_{k \geq 1} \frac{g(k)}{k^2} = 0$$

et la relation (3) dit que la fonction $\chi(q)$ est une sorte de moyenne des valeurs prises en les différents q^n par des fonctions $\theta_3^4(q)$ et $\theta_3^4(-q)$ qui sont $\Gamma_0(4)$ -modulaires de poids 2.

(c) La série de Dirichlet

$$\sum_{n \geq 1} g(n) n^{-s}$$

converge pour $\text{Re } s > \frac{3}{2}$ sous l'hypothèse de Riemann.

(d) Tout comme pour $\theta_3^4(q)$, on peut donner un développement en série de Lambert pour la fonction $\chi(q)$, $|q| < 1$. On sait en effet que pour $|q| < 1$:

$$\sum_{i \geq 0} \frac{q^{2^i}}{1 - q^{2^{i+1}}} = \frac{q}{1 - q}.$$

On en déduit que :

$$\chi(q) = \sum' \mu(n) \frac{q^n}{1 - q^n}.$$

6. Méthode du cercle

Comme il a été dit dans l'introduction, le problème est d'étudier les limites lorsque $r \rightarrow 1$ des fonctions définies pour $r < 1$ et $r > 1$ respectivement :

$$\begin{aligned} \chi_r(\theta) = \chi(re^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \tilde{\chi}_r(\theta) = \tilde{\chi}(re^{i\theta}), \\ \chi(re^{i\theta}) = \sum_{n \geq 0} r^{2^n} e^{i2^n \theta} \quad \text{et} \quad \tilde{\chi}(re^{i\theta}) = \sum_{n \geq 0} r^{-2^n} e^{-i2^n \theta}. \end{aligned}$$

Les fonctions $\chi_r, \tilde{\chi}_r$ définissent des distributions sur le cercle unité et nous allons déterminer l'hyperfonction limite ou même la distribution en précisant les espaces fonctionnels sur lesquels elle opère. Notre méthode est basée sur la relation entre la fonction $\chi(q)$ et la fonction θ_3 , donnée dans le théorème 14 de la section précédente. Elle utilise les idées de Hardy [Ha1] dans son étude sur les sommes de carrés et les idées de Rademacher dans son étude sur la fonction de partition. D'ailleurs, on peut exprimer la fonction des pliages de papier $\chi(q)$ à l'aide de la fonction de partition :

$$f(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} p(n) x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots}, \quad |x| < 1,$$

est ceci de la manière suivante :

La fonction êta de Dedekind est définie par :

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau/12} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2i\pi m\tau}), \quad \text{Im } \tau > 0.$$

Si $x = q^2 = e^{2i\pi\tau}$, alors :

$$\frac{x^{1/24}}{f(x)} = q^{1/12} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})$$

et grâce à la formule de triple produit de Jacobi pour θ_3 :

$$\theta_3(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2$$

on arrive à :

$$\theta_3(q) = \frac{f(q^2)}{f(-q)^2}, \quad 2\theta_3^4(q) - \theta_3^4(-q) = f(q^2)^4 \left\{ \frac{2}{f(-q)^8} - \frac{1}{f(q)^8} \right\},$$

ce qui permet d'exprimer la fonction $\chi(q)$ à l'aide de la fonction f .

Suivant Hardy, Hardy-Littlewood [Ha1], on pose $q = \zeta e^{2i\pi h/k}$ et on a :

$$\begin{aligned} \theta_3(q) &= 1 + 2 \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{\infty} \zeta^{(lk+j)^2} e^{2(lk+j)^2 i\pi h/k} \\ &= 1 + 2 \sum_{1 \leq j \leq k} e^{2i\pi j^2 h/k} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta^{(lk+j)^2}, \end{aligned}$$

et ainsi on a le comportement suivant asymptotique :

$$\theta_3(q) \sim \sqrt{\pi} \frac{S_{h,k}}{k} \left(\log \frac{1}{\zeta} \right)^{-1/2} \quad (\zeta \rightarrow 1)$$

où $S_{h,k}$ est la somme de Gauss :

$$S_{h,k} = \sum_{1 \leq j \leq k} e^{2i\pi j^2 h/k}.$$

Et si $s \in \mathbf{N}^*$ et $f_s(q) = \theta_3^s(q)$, alors :

$$f_s(q) \sim \pi^{s/2} \left(\frac{S_{h,k}}{k} \right)^s \left(\log \frac{1}{\zeta} \right)^{-s/2}$$

avec la convention suivante : Si $S_{h,k} = 0$ (par exemple si $h \equiv 2 \pmod{4}$), alors :

$$f_s(q) = o \left(\log \frac{1}{\zeta} \right)^{-s/2}.$$

La fonction $f_s(q)$ est reliée au problème de Waring par l'identité :

$$f_s(q) = \theta_3^s(q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_s(n) q^n$$

où $r_s(n)$ est le nombre de représentations de n en sommes de s carrés. On introduit la fonction polylogarithme :

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} z^n, \quad |z| < 1.$$

C'est une fonction élémentaire si s est un entier négatif.

D'après [Li, p. 139] on a :

$$\text{Li}_s(z) = \Gamma(1-s)(-\log z)^{s-1} + \sum_{n \geq 0} \zeta(s-n) \frac{(\log z)^n}{\Gamma(n+1)}, \quad |\log z| < 2\pi.$$

Par conséquent si on définit la nouvelle fonction

$$\text{li}_s(z) = \sum_{n \geq 1} n^{s/2-1} z^n, \quad |z| < 1,$$

la fonction $\text{li}_s(z) - \Gamma(\frac{1}{2}s)(\log 1/z)^{-s/2}$ est une fonction analytique et uniforme au voisinage de $z=1$. On considère l'approximation

$$f_{h,k}(q) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}s)} \left(\frac{S_{h,k}}{k} \right)^s \text{li}_s(\zeta) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}s)} \left(\frac{S_{h,k}}{k} \right)^s \text{li}_s(qe^{-2i\pi h/k})$$

qui a la propriété que lorsque q tend vers $e^{2i\pi h/k}$:

$$f_{h,k}(q) \sim f_s(q),$$

c'est-à-dire que $f_{h,k}(q)$ imite $f(q)$ au voisinage de $e^{2i\pi h/k}$. On introduit finalement la fonction :

$$\psi_s(q) = 1 + \sum_{h,k} f_{h,k}(q)$$

qui s'écrit pour $|q| < 1$:

$$\psi_s(q) = 1 + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}s)} \sum_{h,k} \left(\frac{S_{h,k}}{k}\right)^s \sum_{n=1}^{+\infty} n^{s/2-1} e^{-2i\pi n h/k} q^n. \quad (4)$$

Dans l'oeuvre de Hardy, l'hypothèse $5 \leq s \leq 8$ est cruciale pour montrer que $\psi_s(q) = \theta_3^s(q)$, $|q| < 1$. L'hypothèse $5 \leq s$ assure l'absolue convergence de la série (4), afin de permuter les sommations et d'aboutir à une certaine expression disant que $\psi(q)$ est une forme modulaire de poids 2 pour le groupe $\Gamma_0(4)$, tout comme $\theta_3^s(q)$. L'hypothèse $s \leq 8$ montre enfin que le quotient $\psi_s(q)/\theta_3^s(q)$ est égal à 1.

Si $s=4$, la démarche précédente nécessite d'autres justifications pour prouver que $\psi_4(q) = \theta_3^4(q)$, $|q| < 1$. On combine les résultats de Mordell [Mo], Bateman [Ba] relatif au cas $s=4$ dans l'énoncé suivant :

THÉOREME 15. — On a les identités suivantes, $q = e^{i\pi\tau}$, $\text{Im } \tau > 0$:

- (i) $\theta_3^4(q) = \psi_4(q)$;
- (ii) $\theta_3^4(q) = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} r_4(n) q^n = \psi_4(q)$;
- (iii) $r_4(n) = \pi^2 n \sum_{k \geq 1} \sum_{(h,k)=1} (S_{h,k}/k)^4 e^{-2i\pi n h/k}$;
- (iv) $r_4(n) = 8 \sum_{d|n, 4 \nmid d} d$;
- (v) $\frac{1}{8} \pi^2 \psi_4(q) = \frac{1}{8} \pi^2 \theta_3^4(q) = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \sum_{h=k+1 \pmod{2}} (-1)^k / (h-k\tau)^2$.

On commence par quelques remarques afin d'éclairer ce qui va suivre.

(1) Si on était seulement intéressé par la distribution des singularités de la fonction $\theta_3^4(q)$ sur le cercle unité, on pourrait utiliser les développements en série de Lambert (relation (1), §5) :

$$\theta_3^4(q) = 1 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1 + (-1)^m q^m}.$$

Elle explique pourquoi le cercle unité est une coupure analytique pour $\theta_3^4(q)$, et elle entraîne la relation (iv) du théorème ci-dessus. Elle n'est par contre pas très commode pour donner la partie singulière de $\theta_3^4(q)$ en un point $e^{2i\pi h/k}$.

(2) Dans sa lettre à Poincaré, Mittag-Leffler [Mi] expose la méthode de Fredholm utilisant le théorème de Cauchy-Kowalevski, pour montrer que les séries thêta

$$\varphi(t, u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu^2 t + \nu u}, \quad \text{Re } u < 0,$$

sont continues, ainsi que leurs dérivées sur l'axe imaginaire, mais que cet axe imaginaire est une coupure analytique (voir plus loin, théorème 16).

(3) Dans [Ka], M. Kac interprète de manière absolument remarquable les résultats de Hardy ($5 \leq s \leq 8$) à l'aide de la presque-périodicité de Bohr et obtient déjà l'égalité (iii) du théorème ci-dessus dans le sens suivant :

Soit $\gamma(n)$ l'entier défini par $2^{\gamma(n)} |n$, $2^{\gamma(n)+1} \nmid n$, c'est-à-dire que $\gamma(n)$ est le nombre a qui intervient dans la suite des pliages de papier (s_n) (voir Introduction). M. Kac interprète le point (iv), dû à Jacobi, du théorème 15 sous la forme :

$$\frac{r_4(n)}{n} = 8 \frac{1+2\omega_2(n)}{2^{\gamma(n)+1}-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_j(n)}{j}$$

où $\omega_j(n)$ est 1 ou 0 suivant que j divise n ou non. M. Kac montre que $(r_4(n)/n)_{n \geq 1}$ est une suite presque-périodique B^2 (au sens de Besicovitch), et que l'égalité (iii) du théorème précédent est à prendre au sens B^2 . De cette façon, θ_3^4 et χ sont déterminées par les limites radiales aux points rationnels sur le cercle.

On reprend l'égalité :

$$\psi_s(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(h,k)=1} \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}s)} \left(\frac{S_{hk}}{k} \right)^s \text{li}_s(qe^{-2i\pi h/k}).$$

Pour $s=4$, la fonction li_s est élémentaire mais on lui applique un principe général dû à Wigert [W] : Si P est un polynôme, la série entière $\sum_{n \geq 0} P(n)z^n$ se prolonge analytiquement à $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ en polynôme de $1/(1-z)$, et inversement. Le prolongement est donné successivement par :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} P(n)z^n, \quad |z| < 1, \\ & Q\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad z \neq 1, Q(X) \in \mathbf{C}[X], \\ & - \sum_{n \geq 1} P(-n)z^{-n}, \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction $\text{li}_4(z)$ est donnée dans $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ par :

$$\begin{aligned} \text{li}_4(z) &= \sum_{n \geq 1} nz^n, \quad |z| < 1, P(X) = X, \\ \text{li}_4(z) &= \frac{z}{(1-z)^2} = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1-z)^2}, \quad z \neq 1, \\ \text{li}_4(z) &= \sum_{n \geq 1} nz^{-n} = \text{li}_4(1/z), \quad |z| > 1, \end{aligned}$$

et ainsi $Q(X) = -X + X^2$. Par suite si f est une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé K , et si γ est un lacet d'indice 1 par rapport à K , on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) \operatorname{li}_4(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-1} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(1-z)^2} dz = f(1) + f'(1).$$

En d'autres termes li_s , agissant sur les fonctions holomorphes au voisinage de K , représente l'hyperfonction $\delta_1 - \delta'_1$ sur le cercle. On a ainsi les résultats suivants :

THÉORÈME 16. — On a la décomposition en « éléments simples » de $\theta_3^4(q)$:

$$\theta_3^4(q) = 1 + \pi^2 \sum_{k \geq 1} \sum_{(h,k)=1} \left(\frac{S_{h,k}}{k} \right)^4 \operatorname{li}_4(qe^{-2i\pi h/k}).$$

Cette décomposition n'est pas du type Mittag-Leffler, les points $e^{2i\pi h/k}$, $k \geq 1$, $(h,k)=1$, étant denses sur le cercle unité. Chaque point rationnel sur le cercle $e^{2i\pi h/k}$ est un pôle double de $\operatorname{li}_4(qe^{-2i\pi h/k})$ (mais pas $\theta_3^4(q)$). La fonction $\theta_3^4(q)$ est ainsi analytique dans $\{|q| < 1\} \cup \{|q| > 1\}$ et comme fonction de la variable τ ($q = e^{i\pi\tau}$), la fonction $\psi_4(q)$ est holomorphe dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ et y représente une fonction modulaire de poids 2 pour le groupe $\Gamma_0(4)$.

Ce théorème est donc analogue à ceux de Rademacher ([Ra1], [Ra2]) et il va nous préciser les fonctionnelles T et L dont il a été question au §3. D'après la remarque (2) précédente, les fonctions $\varphi(i\tau, u)$, $\operatorname{Re} u < 0$, induisent des mesures sur le cercle, mais ce n'est pas le cas de la fonction $\theta_3(q) = \varphi(i\tau, 0)$, $q = e^{i\pi\tau}$, ou de la fonction $\chi(q)$. En effet les coefficients de Taylor sont formés seulement de 0 et 1, et ne sont pas ultimement périodiques, d'où le résultat grâce au théorème de Helson ([Ru, théorème 3.1.6, p. 61]). Les fonctions $\theta_3(q)$, $\chi(q)$ induisent cependant des distributions sur le cercle car les coefficients de Taylor sont à croissance lente, et il en est de même pour $\theta_3^4(q)$ car

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{r_4(n)}{n \log \log n} = 6e^\gamma$$

où γ est la constante d'Euler [Ba]. De façon plus précise, on a vu que

$$|\chi(q)| \leq C \log((1-|q|)^{-1}), \quad |q| < 1.$$

Alors pour tout $m \in \mathbf{N}^*$:

$$|\tilde{\chi}(q)| = |\chi(1/q)| = O(|q|-1)^{-m}, \quad |q| \rightarrow 1, \quad |q| > 1.$$

Donc la fonction $\tilde{\chi}$ peut être identifiée à un élément $\tilde{\chi}$ de l'espace B' de [TW], des distributions sur le cercle dont les coefficients de Fourier d'indice positif sont nuls. L'espace

B' est le dual de l'espace $A^\infty(D)$ des fonctions C^∞ sur le disque unité fermé K et holomorphes dans le disque unité ouvert D . La distribution $\tilde{\chi}$ agit donc sur les fonctions $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in A^\infty(D)$ par :

$$\langle \tilde{\chi}, f \rangle = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r > 1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \tilde{\chi}(r e^{i\theta}) d\theta = \sum_{n \geq 0} a_{2n}.$$

La dernière série est convergente car $f \in C^\infty(\partial D)$ et par suite $|a_k| = O(k^{-m})$ pour tout entier positif m . La fonction $\chi(q)$ induit une distribution χ sur le cercle appartenant au sous-espace B'' de $\mathcal{D}'(\partial D)$ des distributions sur le cercle ayant les coefficients de Fourier d'indices négatifs tous nuls. De plus $\mathcal{D}'(\partial D) = B' \oplus B''$ ([TW]). On a la représentation

$$\chi(q) = \left\langle \chi_\zeta, \frac{1}{1-\zeta q} \right\rangle, \quad |q| < 1.$$

THÉORÈME 17. — *La série $\theta_3^A(q)$, $|q| < 1$, induit sur le cercle la distribution, élément de l'espace B'' , donnée par :*

$$T_3 = \pi^2 \sum_{k \geq 1} \sum_{(h,k)=1} \left(\frac{S_{h,k}}{k} \right)^4 (e^{2i\pi h/k} \delta_{e^{2i\pi h/k}} + e^{4i\pi h/k} \delta'_{e^{2i\pi h/k}})$$

et la série $\theta_2^A(q)$ induit sur le cercle la distribution, élément de B'' , donnée par :

$$T_2 = \pi^2 \sum_{k \geq 1} \sum_{(h,k)=1} \left(\frac{S_{h,k}}{k} \right)^4 (-e^{2i\pi h/k} \delta_{-e^{2i\pi h/k}} + e^{4i\pi h/k} \delta'_{-e^{2i\pi h/k}})$$

et enfin la fonction $\chi(q)$ induit la distribution, élément de l'espace B'' :

$$T'' = \frac{1}{24} \pi^2 \sum'_{p \geq 1} \sum_{k \geq 1} \sum_{(h,k)=1} g(p) \left(\frac{S_{h,k}}{k} \right)^4 T''_{ph,h}$$

où

$$T''_{h,k} = 2(e^{2i\pi h/k} \delta_{e^{2i\pi h/k}} + e^{4i\pi h/k} \delta'_{e^{2i\pi h/k}}) + e^{2i\pi h/k} \delta_{-e^{2i\pi h/k}} - e^{4i\pi h/k} \delta'_{-e^{2i\pi h/k}} - 1.$$

En conséquence, le théorème du §3 s'énonce comme suit :

THÉORÈME 18. — *Soit $(Q_n(z))$ la suite de polynômes vérifiant :*

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) &= (z + \alpha_{n+1}) Q_n(z) + Q_{n-1}(z), \\ Q_{-1}(z) &= 0, \quad Q_0(z) = 1, \\ \alpha_n &= (-1)^{[n/2]+1} + (-1)^n s_{[n/2]}, \end{aligned}$$

où (s_n) est la suite de pliages (réguliers) du papier. Alors :

$$\langle T', Q_n Q_m \rangle = (-1)^n \delta_{n,m}$$

où

$$T' = \frac{1}{24} \pi^2 \sum'_{p \geq 1} \sum_{k \geq 1} \sum_{(h,k)=1} g(p) \left(\frac{S_{h,k}}{k} \right)^4 T'_{ph,k}$$

avec

$$T'_{h,k} = 2(e^{2i\pi h/k} \delta_{e^{-2i\pi h/k}} + e^{4i\pi h/k} \delta'_{e^{-2i\pi h/k}}) + e^{2i\pi h/k} \delta_{-e^{-2i\pi h/k}} - e^{4i\pi h/k} \delta'_{-e^{-2i\pi h/k}} - 1.$$

Ce théorème constitue la réponse au problème de départ. La relation (v) du théorème 15 permet d'écrire :

$$\psi_4(q) = \frac{4}{\pi^2} \sum_k \sum_{h \equiv (k+1) \pmod{2}} \frac{(-1)^k}{(h-k\tau)^2}, \quad q = e^{i\pi\tau}.$$

Cette série n'est pas absolument convergente, mais elle le devient si on groupe ensemble les deux termes avec $h=2\mu-1, k=2\nu$ et $h=2\mu, k=2\nu-1$, respectivement. Cela montre que $\psi_4(q) = \theta_3^4(q)$ vue comme une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{\text{Im } \tau > 0\}$ induit sur la droite l'hyperfonction

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{m,n \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{(2m)^2} \delta'_{(2n+1)/2m} - \frac{1}{(2m+1)^2} \delta'_{2n/(2m+1)} \right\}.$$

Nous aimerions conclure sur deux remarques.

Remarque 1. — Dans un article précédent [MS] nous essayions de donner un sens à $\tilde{\chi}(0)$ en faisant appel à des méthodes arithmétiques. Ici nous réexaminons le problème du point de vue de l'analyse : donner une valeur en 0 à la fonction $\tilde{\chi}$ initialement définie pour $|z| > 1$, ayant la circonférence unité pour coupure. Or on peut interpréter $\tilde{\chi}(0)$ de la façon suivante : la méthode du cercle développée ici permet de « prolonger » $\tilde{\chi}$ au disque unité $|z| < 1$ par la fonction χ . Ainsi $\tilde{\chi}(0)$ aurait pour valeur $\chi(0)$, c'est-à-dire 0.

A la fin de notre §2 (voir aussi [MS]), $\tilde{\chi}(0)$ était identifié à la série divergente $-\sum_1^\infty s_n$ dont la somme serait donc nulle.

Remarque 2. — On aimerait développer une étude analogue pour les fonctions

$$\theta_3^s(z) = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} r_s(n) z^n, \quad |z| < 1,$$

et

$$\tilde{\theta}_3^s(z) = \theta_3^s(1/z), \quad |z| > 1.$$

Est-il possible de préciser la J -fraction continue de $\tilde{\theta}_3^s(z)$? D'étudier les convergents et en particulier de localiser les zéros des dénominateurs ? Dans le cas $s=4$, ces polynômes satisfont à une relation récurrente à trois termes qui sont orthogonaux par rapport à la fonctionnelle T_3 . Cette remarque devrait aider à analyser de plus près ces dénominateurs.

Bibliographie

- [ALM] ALLOUCHE, J.-P., LUBIW, A., MENDÈS FRANCE, M., POORTEN, A. J. VAN DER & SHALLIT, J., Convergents of folded continued fractions. *Acta Arith.*, 77 (1996), 77–96.
- [Ba] BATEMAN, P. T., On the representations of a number as the sum of three squares. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 (1951), 70–101.
- [Be] BERNSTEIN, V., *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*. Gauthier-Villars, Paris, 1933.
- [BG] BERENSTEIN, C. A. & GAY, R., *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [BP] BLOCH, A. & POLYA, G., On the roots of certain algebraic equations. *Proc. London Math. Soc.*, 33 (1932), 102–114.
- [E] EHRENPREIS, L., Singularities, functional equations and the circle method. *Contemp. Math.*, 166 (1994), 35–80.
- [ET] ERDÖS, P. & TURÁN, P., On the distribution of roots of polynomials. *Ann. of Math.*, 51 (1950), 105–119.
- [F] FAVARD, J., Sur les polynômes de Tchebicheff. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 200 (1935), 2052–2053.
- [Ga] GARNETT, J. B., *Bounded Analytic Functions*. Pure Appl. Math., 96. Academic Press, New York–London, 1981.
- [Ge] GERONIMUS, YA. L., On orthogonal polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33 (1931), 322–328.
- [Ha] HANCOCK, H., *Lectures on the Theory of Elliptic Functions: Analysis*. Dover, New York, 1958.
- [Ha1] HARDY, G. H., *Ramanujan*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1940.
- [Ha2] — On certain oscillating series. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 38 (1907), 269–288.
- [J] JACOBI, C. G. J., *Gesammelte Werke, Band I*. Chelsea, New York, 1969.
- [JT] JONES, W. B. & THRON, W. J., *Continued Fractions. Analytic Theory and Applications*. Encyclopedia Math. Appl., 11. Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.
- [Ka] KAC, M., Almost periodicity and the representation of integers as sums of squares. *Amer. J. Math.*, 62 (1940), 122–126.
- [Km] KMOŠEK, M., Rozwinięcie niektórych liczb niewymiernych na ułamki Kańczuchowe. Master's thesis, Uniwersytet Warszawski, 1979.
- [Le] LEONT'EV A. F., On a complement to Hadamard's theorems. *Soviet Math. Dokl.*, 13 (1972), 1368–1371.
- [Li] LINDELÖF, E. L., *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*. Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- [Mi] MITTAG-LEFFLER, G., Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm. *Acta Math.*, 15 (1891), 279–280.
- [Mo] MORDELL, L. J., On the representation of numbers as a sum of $2r$ squares. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 48 (1917), 93–104.
- [MP] MENDÈS FRANCE, M. & POORTEN, A. J. VAN DER, Arithmetic and analytic properties of paperfolding sequences. *Bull. Austr. Math. Soc.*, 24 (1981), 123–131.
- [MS] MENDÈS FRANCE, M. & SEBBAR, A., The ultra-divergent series $\sum_{n \geq 0} 0^{-2^n}$, dans *Number Theory in Progress, Vol. 1* (Zakopane, 1997), p. 327–335. de Gruyter, Berlin, 1999.
- [Poll] POLLACZEK, F., *Sur une généralisation des polynômes de Jacobi*. Mémor. Sci. Math., 131. Gauthier-Villars, Paris, 1956.
- [Poly] POLYA, G., Eine Verallgemeinerung des Fabry'schen Lückensatzes. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* (1927), 187–195.

- [Pom] POMMERENKE, CH., On Bloch functions. *J. London Math. Soc. (2)*, 2 (1970), 689–695.
- [Ra1] RADEMACHER, H., *Topics in Analytic Number Theory*. Grundlehren Math. Wiss., 169. Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.
- [Ra2] — Fourier expansions of modular forms and problems of partitions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46 (1940), 59–73.
- [Ri] RITT, J. F., On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18 (1917), 27–49.
- [Ru] RUDIN, W., *Fourier Analysis on Groups*. Intersci. Pure Appl. Math., 12. Interscience Publishers, New York–London, 1962.
- [Se] SEBBAR, A., Prolongement des solutions holomorphes de certains opérateurs différentiels d'ordre infini à coefficients constants, dans *Séminaire Pierre Lelong–Henri Skoda (analyse), années 1978/79*, p. 199–220. Lecture Notes in Math., 822. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [Sh] SHALLIT, J., Simple continued fractions for some irrational numbers. *J. Number Theory*, 11 (1979), 209–217.
- [Sz] SZEGÖ, G., *Orthogonal Polynomials*. Colloquium Publications, 23. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [TW] TAYLOR, B. A. & WILLIAMS, D. L., Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values. *Canad. J. Math.*, 22 (1970), 1266–1283.
- [W] WIGERT, S., Sur un théorème concernant les fonctions entières. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 11:21 (1916), 1–5.

MICHEL MENDÈS FRANCE
Département de Mathématiques
Université Bordeaux 1
FR-33405 Talence Cedex
France
mmf@math.u-bordeaux.fr

AHMED SEBBAR
Département de Mathématiques
Université Bordeaux 1
FR-33405 Talence Cedex
France
sebbar@math.u-bordeaux.fr

Reçu le 13 mars 1998