PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Adinilson Marques Reis

UMA PROPOSTA DINÂMICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM A PARTIR DE ERROS DOS ALUNOS NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira.***

São Paulo
2011

Sequência didática ´- Parte I – Atividades e análises, com instruções ao professor do Ensino Médio (Fase diagnóstica)

Nosso objetivo no bloco de ATIVIDADE I, Figura 1, foi avaliar se o aluno entendeu o conceito de função, consolidando a ideia de interdependência entre duas grandezas. A seleção buscou localizar um problema que pudesse potencializar discussões, porém sem perder o foco principal: a construção do conceito de função afim e das ideias inerentes a ele. O principal critério de seleção foi o caráter significativo das situações. O fato de questões de cunho social estarem vinculadas à construção de conceitos matemáticos apresenta-se para os alunos como algo atrativo, o que torna ainda mais curiosa a procura por argumentações em torno da questão inicial. A curiosidade serve de estímulo para a incorporação do processo e para a motivação do aluno.

BLOCO ATIVIDADE I

1-) O preço da passagem de ônibus urbano comum na cidade de São José dos Campos é de R$ 2,50. Com base nesse dado, complete a tabela a seguir:

Número de Passagens (**x**)	1	2	5	8
Valor a ser pago (**P**)				

Agora, responda as seguintes questões:

a) É possível determinar quantas passagens foram pagas, se o valor total pago foi de R$ 57,50? Qual é esse valor?

b) O que é constante nesse problema?

c) O que é variável nesse problema?

d) Se representarmos por **P** o valor a ser pago e **x** o número de passagens pagas, estabeleça a relação Matemática que modele essa situação.

e) Baseado no conceito de função ("Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função: f A→B é uma relação que associa cada elemento de A a um único elemento de B"), poderemos afirmar que **P** é função de **x**? Reescreva a relação Matemática (em termos de função)

f) Construa o gráfico Valor a ser pago em função do Número de passagens.

Figura 1 – Bloco de ATIVIDADE I, sequência didática diagnóstica

Esperava-se que a familiarização das grandezas permitisse aos alunos identificarem, primeiramente, os processos de generalização e, consequentemente, a realização de conversões para o registro algébrico. Em seguida, a conversão para o registro gráfico.

Apesar de ser uma questão que possibilita resultados tanto certos, para alguns números de passagens ou valor a ser pago, como errados para outros, o que deveria prevalecer eram os *tratamentos* e *conversões* que esperávamos encontrar nas resoluções para a descoberta da solução e também para a verificação dos alunos que teriam sucesso ou não na mesma. Inicialmente, solicitamos aos alunos que completassem a tabela envolvendo duas grandezas, **P** e **x**. Uma única solução correta possível para todos os números de passagens é a que segue.

Número de Passagens (**x**)	**1**	**2**	**5**	**8**
Valor a ser pago em R$ (**P**)	*2,50*	*5,00*	*12,50*	*20,00*

Essa situação-problema introduz a questão a ser discutida através da ligação/correspondência entre elementos pertencentes à situação analisada. Nesse caso, os elementos supostamente associados, ou relacionados, são o número de passagens e o valor a ser pago em reais. A questão inicial é formulada a partir do fato de que o valor a ser pago é função (nossa variável didática) do número de passagens.

Alguns resultados, causas e soluções esperadas:

1º - Não completou a tabela. O aluno não entendeu a pergunta ou não conseguiu fazer a associação entre as duas grandezas.

2º - Preenchimento parcialmente correto. Alguns procedimentos possíveis para a resolução:

a) somar o valor unitário tantas vezes quantas parece ser solicitado.

$$
\begin{gathered}
2{,}5+2{,}5=5{,}00\\
5{,}00+2{,}5=7{,}50\\
7{,}50+2{,}5=10{,}00\\
10{,}00+2{,}5=12{,}5\\
\vdots\\
17{,}50+2{,}5=20{,}00
\end{gathered}
$$

Ou ainda,

$$
\begin{gathered}
2{,}5\times 2=5{,}00\\
2{,}5\times 3=7{,}50\\
2{,}5\times 5=12{,}50\\
2{,}5\times 8=20{,}00
\end{gathered}
$$

Esses métodos denunciariam a dificuldade de generalização dos estudantes ao resolverem tudo manualmente, sem criar uma função.

3º - Preenchimento totalmente correto. Alguns procedimentos possíveis para a resolução:

a) Uso correto de calculadora ou celular, para os procedimentos citados anteriormente, estendendo até resultar no valor final de R$ 57,50;
b) Uso correto das operações envolvidas no item anterior, manualmente. (acreditamos que será o mais utilizado) e;
c) Uso correto da conversão do registro do enunciado, na linguagem natural, para o algébrico: **P** em função de **x**. E, com tratamentos, preenchê-la totalmente.

$$
\begin{aligned}
P(x)&=2{,}5x\\
P(1)&=2{,}5.1=2{,}50\\
P(2)&=2{,}5.2=5{,}00\\
P(3)&=2{,}5.3=7{,}50\\
P(5)&=2{,}5.5=12{,}50\\
P(8)&=2{,}5.8=20{,}00
\end{aligned}
\qquad\qquad 57{,}50=2{,}5x\Rightarrow x=23
$$

Para o item (a), o erro esperado, para o número de passagem cujo valor é R$ 57,50, seria o não preenchimento por desistência ao utilizar dos métodos extensos citados acima. Acreditamos, na elaboração da atividade, que o contrário, acertar o número de passagens para o valor de R$ 57,50 e errar para os demais não ocorreria.

Para o item (b), a identificação da constante do problema, por parte do aluno, forneceria subsídios para a compreensão das ideias ligadas à relação funcional analisada. Nesse contexto, identificar e diferenciar os elementos constantes e variáveis é fundamental às relações funcionais, ou seja, para o trato com o conceito de função, e, consequentemente, com o conceito de função afim. Esperava-se que os alunos reconhecessem, como constante, o valor de R$ 2,50 a ser pago por cada passagem.

Para o item (c), o propósito era aferir o significado do termo variável dependente, fortemente ligado e presente no conceito de função. A problematização desses termos, variável e função, aliás, devem ser encaminhadas de modo que o aluno consiga visualizar a equivalência existente entre eles, bem como as suas dimensões nessa ou em outras situações.

Almejamos também que, nessa questão, fosse exigida do aluno uma análise mais aprofundada na sua resolução ao compará-la com a resposta dada na anterior. Esperava-se que os alunos reconhecessem como variável dependente o valor a ser pago (**P**).

Para o item (d), a atividade é introduzida a partir da questão do item (a) que já abordou a relação de dependência e identificou constante e variável, itens b e c, exigindo a tomada de posições por parte dos alunos. A discussão em torno do significado desses conceitos deve ser estabelecida a partir do entendimento dos alunos, especialmente no primeiro contato em sala de aula, para que o significado destes não se torne algo imposto sem uma prévia discussão. Esperava-se que os alunos reconhecessem as relações de proporcionalidade entre as grandezas dadas e modelassem corretamente a relação Matemática $\mathbf{P} = 2{,}50.\mathbf{x}$.

Para o item (e), com a conceituação da função no registro algébrico no item anterior, esperava-se que o aluno fizesse uma associação com a expressão algébrica e, com seu conhecimento sobre função, reescrevesse como uma relação funcional. A associação é pautada pela premissa de que, em cada quantidade de passagens, o valor a ser pago é único. Ou seja, o número de passagens é função do valor a ser pago. Entretanto, havia a expectativa de que boa parte dos estudantes não conseguisse reescrever a equação algébrica anterior para a função linear $\mathbf{P = f(x) = 2{,}50x}$.

Algumas resoluções erradas também eram esperadas, considerando acertos em termos de **P** no item anterior:

a) Troca de “letras”, como, por exemplo, **f** = 2,50.**P**

b) Confundir com conceitos de proporcionalidades diretas, por exemplo, f(x) = **P/x**

c) Confundir com os conceitos de proporcionalidades inversas, por exemplo, f(x) = **P**.**x**

Tal dificuldade no estabelecimento da representação da função caracterizaria a existência de uma dissociação entre a variável **P** e sua representação como função de **x.**

Para o item (f), esperava-se que, pela escolha da ordem das questões, os transitassem pelo registro de entrada (tabela), passando por um registro intermediário (simbólico) até o registro de saída (gráfico), proporcionando tratamentos nas respectivas representações.

No processo de construção do gráfico, observar-se-iam as escolhas das escalas, sua importância, o cuidado durante as escolhas, as adaptações, bem como os efeitos destas escolhas na estruturação do gráfico. Esperavam-se erros no registro gráfico, pois os estudantes, ao lidarem com as grandezas discretas pontos de semi-retas, poderiam transformá-las indevidamente em segmentos de semi-retas.

Seriam, assim, soluções esperadas:

- A partir do registro da tabela – o aluno identifica as variáveis **P** e **x** e, em seguida, constrói o gráfico;
- A partir do registro algébrico – o aluno faz um tratamento numérico da função e, em seguida, constrói o gráfico.

Para ambos os casos, citados acima, erros nas construções das escalas foram considerados como “Acertos parciais”. Em relação às conversões citadas, acreditávamos que a opção de escolha do registro de tabela pelos alunos para a construção do gráfico seria a mais utilizada. Isto se deve, provavelmente, ao fato de a maioria das abordagens do *Caderno do Aluno* (São Paulo, 2008b) utilizar este registro.

Para o bloco de ATIVIDADE II, o objetivo principal era o de identificar se o aluno transita dos registros gráfico $\leftrightarrow$ algébrico da função afim (Figura 2).

Para o item 1, algumas propostas podem ser classificadas como funções afim, como a que segue.

- $y = 2(x + 8)$

A identificação (a = 2 e b = 16) seria imediata caso o aluno saiba aplicar a propriedade distributiva, fazendo um tratamento.

$$y = 2.x + 2.8 \Rightarrow y = 2x + 16$$

BLOCO ATIVIDADE II

1) Dentre as leis abaixo, identifique as que são denominadas de função afim:

( ) $y = 2(x+8)$ ( ) $y = x^2 + 8$ ( ) $y = \frac{2+x}{8}$

( ) $y = 3^x$ ( ) $y = \frac{8}{x} + \frac{1}{2}$ ( ) $y = \frac{x-8}{3}$

2) Identifique o coeficiente angular (a) e o coeficiente linear (b) de cada uma das seguintes funções afins:

a) $y = 2x - 5 \quad \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

c) $y = \frac{-x+1}{2} \quad \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

b) $y = 2x \quad \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

d) $y = \frac{-x}{8} \quad \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

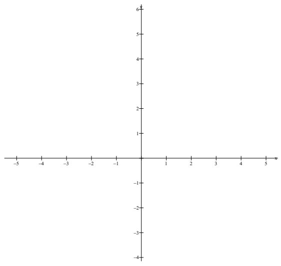
3) Associe as funções abaixo às suas respectivas classificações:

(a) $y = 3x + 2$ ( ) constante

(b) $y = 1 - 2x$ ( ) crescente

(c) $y = 2$ ( ) decrescente

4-) Represente o gráfico da função *f(x) = 2x – 4*.



5-) Escreva a função *f(x) = ax + b* cujo gráfico, num sistema cartesiano ortogonal, é dado por:

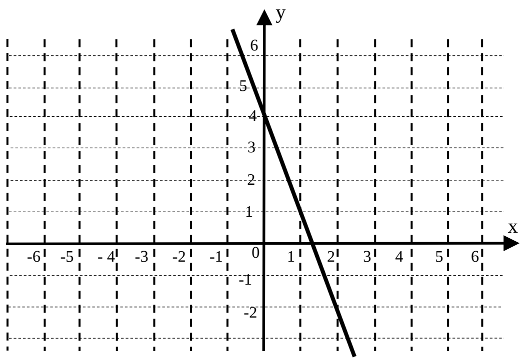


Figura 2 – Bloco de ATIVIDADE II, sequência didática diagnóstica

Consideramos, também, que tanto a escolha dessa alternativa como a comparação poderá ser mental, pois para esse nível escolar acreditamos que os alunos são capazes de abstrair.

- $\mathbf{y = \frac{2+x}{8}}$ **e** $\mathbf{\frac{x-8}{3}}$

A identificação, mental ou com registros, pelo aluno passa por um tratamento para comparar a proposta anterior com o registro algébrico f(x) = ax + b. Para resolução, exige-se do aprendiz, no segundo membro da equação, conhecimento das operações fundamentais com frações. Assim, temos:

$$y = \frac{2+x}{8} \Rightarrow y = \frac{2}{8} + \frac{x}{8} \Rightarrow y = \frac{x}{8} + \frac{1}{4} \text{ e } y = \frac{x-8}{3} \Rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{8}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

Utilizando o registro algébrico na comparação dos elementos, temos, respectivamente:

$$y = f(x); \frac{1}{8}x = ax \text{ e } \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = b$$

Para as demais alternativas, que não podem ser denominadas de funções afins, entendemos que a não escolha dessas equações pelo aluno seria imediata, por compará-las com o registro formal da função afim.

Dentre os erros esperados, podemos citar:

a) Não entender a questão;
b) Não lembrar e/ou não saber das propriedades necessárias para fazer o tratamento e compará-las com o registro algébrico formal f(x) = ax + b;
c) Recordar apenas algumas das propriedades, o que levaria a acertos parciais nas alternativas.

Para o item (2), solicitamos que identificassem os coeficientes angular e linear das funções afins representadas no registro algébrico. Esta caracterização possuia o objetivo de verificar junto aos alunos possíveis dificuldades em distinguir o coeficiente da variável independente x. Nessa ordem de ideias, poderíamos comparar e construir conexões entre os conhecimentos abordados nesta e nas demais atividades, como a seguinte, que aborda o crescimento e decrescimento de uma função afim.

Para esta questão, elegemos os coeficientes angular (a) e linear (b) da função f(x) =ax+b como as variáveis didáticas, potencializando a caracterização da variável independente envolvida na relação funcional.

Temos as seguintes soluções:

$$\textbf{a)}\ \mathbf{y = 2x - 5} \quad \begin{cases} \mathbf{a = 2} \\ \mathbf{b = -5} \end{cases}$$

A identificação é direta, basta uma simples comparação com o registro simbólico da função afim.

Esperávamos que uma das causas para os possíveis erros cometidos pelos aprendizes, neste item e nos demais, estivesse relacionado com as dúvidas em distinguir o coeficiente **a** da variável independente **x.**

Consideramos também, outra causa: a inversão dos valores dos coeficientes por confusão de conceitos.

$$\textbf{b)}\ \mathbf{y = 2x} \quad \begin{cases} \mathbf{a = 2} \\ \mathbf{b = 0} \end{cases}$$

A identificação aqui não é direta: necessita do conceito da função linear como caso particular para a comparação com o registro simbólico da função afim.

Análoga ao definido anteriormente, esta questão apenas adicionou um caso particular da função f(x)= ax + b, quando b = 0. A resposta, em branco, para o parâmetro b, era esperada.

$$\textbf{c)}\ \mathbf{y = \frac{-x+1}{2}} \quad \begin{cases} \mathbf{a = -\frac{1}{2}} \\ \mathbf{b = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Neste item, a identificação dos coeficientes exige um tratamento. Além disso, o sinal negativo para o coeficiente angular poderia tornar esta questão mais difícil para maioria dos estudantes. Nesse sentido, esperávamos muitos resultados incorretos.

$$\textbf{d)}\ \mathbf{y = \frac{-x}{8}} \quad \begin{cases} \mathbf{a = -\frac{1}{8}} \\ \mathbf{b = 0} \end{cases}$$

Semelhante ao item (b), temos oculto o coeficiente linear e, ao acrescentar o valor do coeficiente angular na forma decimal, possíveis resultados errados poderiam ocorrer, dentre eles: a = -1, a = 8, a = x ou $a = \frac{1}{8}$.

Para o item (3), o objetivo era o de verificar se o aluno conseguiria relacionar as funções, apresentadas no registro algébrico, com a inclinação das mesmas, expressa em linguagem corrente. Para a resolução, esperava-se que os alunos relacionassem o aspecto de crescimento ou decrescimento da funçãodecrescente pelo sinal do coeficiente angular. A função constante, quando a = 0, foi inserida para diminuir o acerto pelo critério "chute" – ainda que este não seja um método infalível.

Nesse contexto, os erros podem ser caracterizados pela noção de função crescente e decrescente ainda não se encontrar bem formalizada. Assim, por exemplo, ao lembrar-se de seus respectivos gráficos, os alunos poderiam entrar em confronto com os seus conhecimentos a respeito das intersecções da reta com os eixos:

a) Para $y = 3x + 2$, o aluno poderia dizer que é uma função decrescente, pois a intersecção da reta com o eixo horizontal x tinha como abscissa um número negativo, $x = -2/3$;
b) Para $y = 1 - 2x$, o aluno poderia dizer que é uma função crescente, pois a intersecção da reta com o eixo horizontal tem como abscissa um número positivo, $x = ½$.

Para o item (4), esperamos constatar que todos os alunos conseguissem fazer uma conversão da representação enunciada nos registros de linguagem corrente e algébrica para o registro gráfico ao construir a reta. Para tal objetivo, consideramos como variável didática, a função afim f(x) = 2x – 4.

Para atingirmos esse objetivo, julgamos necessário oferecer uma função evidenciando os coeficientes linear e angular, o que facilita o tratamento. Outra providência foi a de fornecer o plano cartesiano para auxiliar os estudantes no esboço.

Para o item (5), utilizamos o registro gráfico para representar a função afim. Considerada como variável didática o gráfico da função, o objetivo foi de verificar se o aluno realizaria a conversão para o registro algébrico.

Com a variável “visual” dada - intersecção com os eixos - esperava-se que a maioria dos alunos fizessem a conversão, pois bastaria uma “leitura” do coeficiente linear para, em seguida, substituir em uma das coordenadas cartesianas dos pontos pertencentes à reta, (0,4), (2,-2) ou (1,1) e o tratamento numérico da equação. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
&y = ax + b \\
&y = ax + 4 \\
&-2 = a.2 + 4 \\
&a = -3 \\
&\text{assim,} \quad y = -3x + 4
\end{aligned}$$

Esperava-se poucas resoluções utilizando uma leitura das coordenadas cartesianas dos pontos pertencentes à reta, (0,4), (2,-2) ou (1,1) e o tratamento numérico do sistema de equações pelo método da soma. Por exemplo:

$$\begin{cases} -2 = 2x + b \\ \quad 1 = x + b \end{cases}$$

Consideramos como “acertos parciais” no caso de o aluno chegar até o registro do sistema de equação, cometendo erros no tratamento numérico, porém com substituição correta das coordenadas. Os erros esperados poderiam ser de uma leitura ou substituição invertida das coordenadas cartesianas, como por exemplo, (4,0) nas equações da forma y=ax + b.

Para o bloco de ATIVIDADAE III, tínhamos como objetivo principal o de identificar se o aluno converteria do registro algébrico para o gráfico (Figura 3).

Essa atividade é uma representante, bastante típica, de uma situação na qual a ideia da proporcionalidade direta com o uso do valor do coeficiente linear é rompida, dando lugar à análise de comportamentos através da taxa de variação.

BLOCO ATIVIDADE III
Escreva a função $f(x) = ax + b$ cujo gráfico, num sistema cartesiano ortogonal, é dado por:

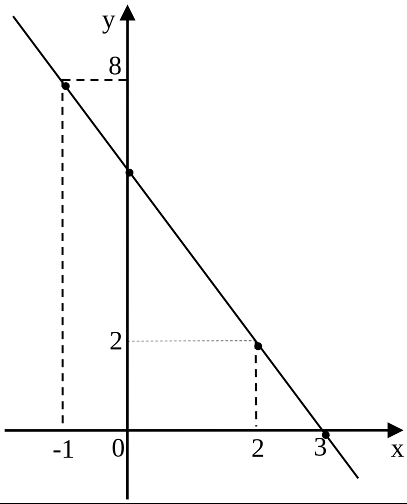


Figura 3 – Bloco de ATIVIDADE III, sequência didática diagnóstica

A primeira estratégia que o aluno lança mão para solucionar a questão é a proporcionalidade direta. Ou seja, para encaminhar as soluções referentes a esta atividade ele precisará buscar construções já realizadas nas atividades do *Caderno do Aluno* (São Paulo, 2008b), já que este foi o primeiro contato que teve com uma situação, apresentada no registro gráfico, onde a proporcionalidade direta não se adequava. Assim, esperava-se que a maioria dos alunos fizesse a conversão.

Esta proposta difere da anterior no sentido de conversão, pois é proposta no registro algébrico para a conversão gráfica. Para Duval (1995 apud Almouloud, 2007), nos registros gráficos, a questão do tratamento se torna mais complexa na medida em os mesmos tratamentos não são algoritmizáveis.

Este é o tipo de conversão (Algébrica → Gráfica), de caráter não-congruente, enquadrando-se no tipo que Duval (1995 apud Almouloud, 2007) considera importante na sequência de atividades. As variáveis visuais pertinentes do registro gráfico (inclinação, intersecção com os eixos) são difíceis de serem mobilizadas na coordenação desse registro de saída com os valores escalares da expressão algébrica (coeficiente angular, linear e seus valores, respectivamente, negativo e positivo).

Para o autor, a falta de transparência do registro terminal (algébrico) dificulta a coordenação espontânea entre os dois registros, exigindo assim, um esforço cognitivo maior, que leva ao entendimento do conceito. Nesse sentido, esperávamos grandes dificuldades de resolução para a maioria dos alunos.

Conforme argumenta DUVAL (2003, *apud* LOPES JUNIOR, 2006, p. 17), “a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor que ou igual a 1)”.

Nesse sentido, esperávamos observar como tais variáveis didáticas relativas ao gráfico eram utilizadas pelos alunos durante a conversão algébrica.

Como possíveis resoluções, esperamos tratamentos numéricos para os sistemas lineares S_1, S_2 e S_3.

$$S_1 \begin{cases} 8 = -a + b \\ 2 = 2a + b \end{cases}, \quad S_2 \begin{cases} 8 = -a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases} \text{ ou } S_3 \begin{cases} 2 = 2a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$$

Em relação à condição de variação de f(x) para cada unidade a mais de ***x*** ser igual ao coeficiente angular, ou seja, **se f(x) = ax + b, então f(x+1) – f(x) = a** não eram esperadas argumentações.

Para a ATIVIDADAE IV, tínhamos uma conversão, partindo de registros algébricos para gráficos, com auxílio de registro em linguagem natural, de caráter não-congruente (Figura 4). Os procedimentos esperados para essa atividade, ao coordenarem as variáveis escalares das equações (zero da função, coeficientes angular positivo e negativo) com as variáveis visuais pertinentes do registro gráfico (inclinação, intersecção com os eixos) são:

- Para a 1ª afirmação – que o grupo reconhecesse o zero da função afim, f(0) = 3; a inclinação da reta e, a partir do tratamento do registro algébrico 3 = – b/a, com a = 2, determinasse o valor do coeficiente linear, para, desta forma, traçar a reta com interseção nos eixos cartesianos de par ordenado (3, 0), no eixo das abscissas, e (0, – 6) para os eixos das ordenadas.
- Para a 2ª afirmação – que o grupo não reconhecesse a condição de função decrescente (*para* $x_2 > x_1$ temos $f(x_2) < f(x_1)$) imediatamente. Contudo, poderiam reconhecer a inclinação da reta, os valores dos coeficientes, com tratamento algébrico e numérico da inequação, de forma a traçar a reta com interseção nos eixos cartesianos de par ordenado (– 3, 0) para eixo das abscissas e (0, – 6) para os eixos das

ordenadas.

- Para a 3ª afirmação – que o grupo não reconhecesse a condição de função linear imediatamente. Contudo, reconheceriam a inclinação da reta e os valores dos coeficientes, pela informação da função positiva para $x > 0$ com as coordenadas do ponto A. Desta maneira, traçariam a reta com interseção nos pares ordenados (0, 0) e (2,4).

BLOCO ATIVIDADE IV

Leia atentamente as afirmações sobre variação de sinal da função afim e, a seguir, esboce sua representação gráfica.

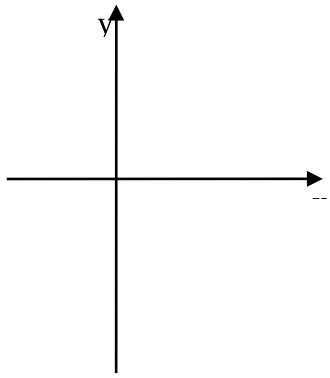
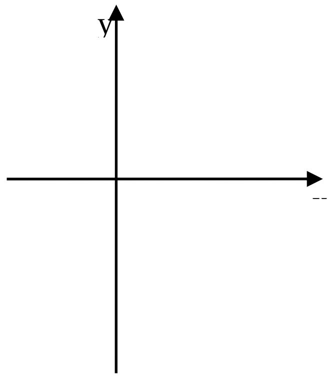
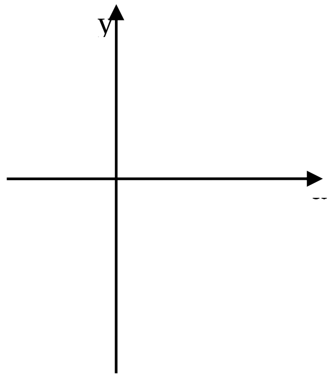
1ª afirmação A função se anula para $x = 3$; A função é negativa para todo x real, menores que 3 $(x < 3)$; Essa função é do tipo $f(x) = ax + b$; Para valores de x maiores que a raiz $(-b/a)$ a função é positiva, ou seja, tem o mesmo sinal do coeficiente angular $(a = 2)$.	
2ª afirmação Devemos ter $f(x_2)<f(x_1)$ *com* $x_2>x_1$; Os valores de x para os quais $f(x)$ é negativo $(f(x)<0)$ são as soluções da inequação $-2x - 6 < 0$.	
3ª afirmação Temos $f(0)=0$; A função é positiva para todo x real, maiores que 0 $(x>0)$; As coordenadas do ponto $A(2,4)$ pertencem ao gráfico da função.	

Figura 4 – Bloco de ATIVIDADE IV, sequência didática diagnóstica

Aqui, com relação aos resultados, esperava-se que todos os alunos esboçassem corretamente o gráfico da primeira afirmação. Para as demais afirmações, esperava-se que a minoria respondesse corretamente.

Sequência didática ´- Parte II – Atividades e análises, com instruções ao professor do Ensino Médio (Fase 2: estratégia pedagógica, com o uso de TICs, contemplando a análise dos erros da fase anterior)

A sequência didática é composta de cinco (5) blocos de atividades, denominadas de Atividades 1, 2, 3, 4 e 5, contendo um roteiro de questões em papel impresso que buscam, basicamente, colocar em evidência algumas representações e transformações entre as mesmas.

Atividade 1

Para os erros obtidos na categoria <u>Avaliação de função</u>, apresentada aos alunos na ATIVIDADE I, a proposta é de uma atividade contendo uma tabela dinâmica, que possibilita inserir vários registros numéricos, evidenciando o coeficiente de proporcionalidade da função linear e, consequentemente, o registro algébrico e gráfico. Numa etapa final, pode-se associar, na tela do computador, a representação gráfica da função com as variações numéricas da tabela, possibilitando a constatação de sua linearidade característica, bem como explorar a mesma como um caso da função afim. O objetivo é que o aluno, ao relacionar a tabela com a constante de proporcionalidade, consiga obter uma Ideia do conceito de função e a relação (gráfica e algébrica) das funções linear e afim com a constante de proporcionalidade. A **Atividade 1** possibilita diferentes conversões e representações relacionadas a função afim (Figura 5).

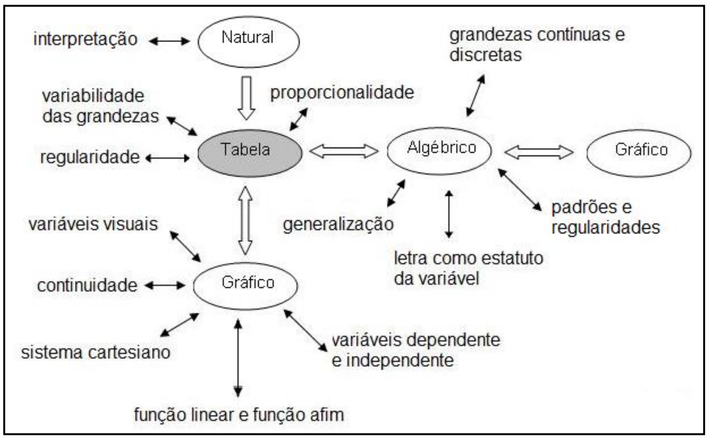


Figura 5 – Conversões e representações da **Atividade 1**

A seguir apresentaremos um roteiro e o layout de apresentação na tela do computador para que o aluno execute as tarefas pedidas.

1) No GeoGebra, denomine um arquivo de Ativ_1.ggb. O layout na tela, ao acionar os interruptores TABELA - 1 e TABELA - 2, APÊNDICE D, deve ter as seguintes características:

a) Acionando o interruptor ☑ TABELA - 1 temos a apresentaçao na tela, de forma fixa, dos textos: TABELA – 1(junto com a tabela), GRÁFICO e ÁLGEBRA y = f(x) = kx. O ponto (●) é móvel e representa todos os pontos (x,y) da tabela. Desabilitando o interruptor, desaparecem os textos, a tabela e o ponto móvel;

b) Acionando o interruptor ☑ Coordenadas (x;y) temos a apresentação das dos pontos (x,y) no plano cartesiano. Desabilitando o interruptor desaparecem os os pontos (x,y);

c) Acionando o interruptor ☑ Gráfico f(x) tem-se a apresentação da reta.

2) Acionando o interruptor ☑ f(x) = ax + b tem-se a apresentação dos textos: **ÁLGEBRA**, **Seletores** (coeficientes **a** e **b)** e **GRÁFICO** com a representação gráfica de uma função afim f(x) = ax + b e um ponto móvel (Figura 6).

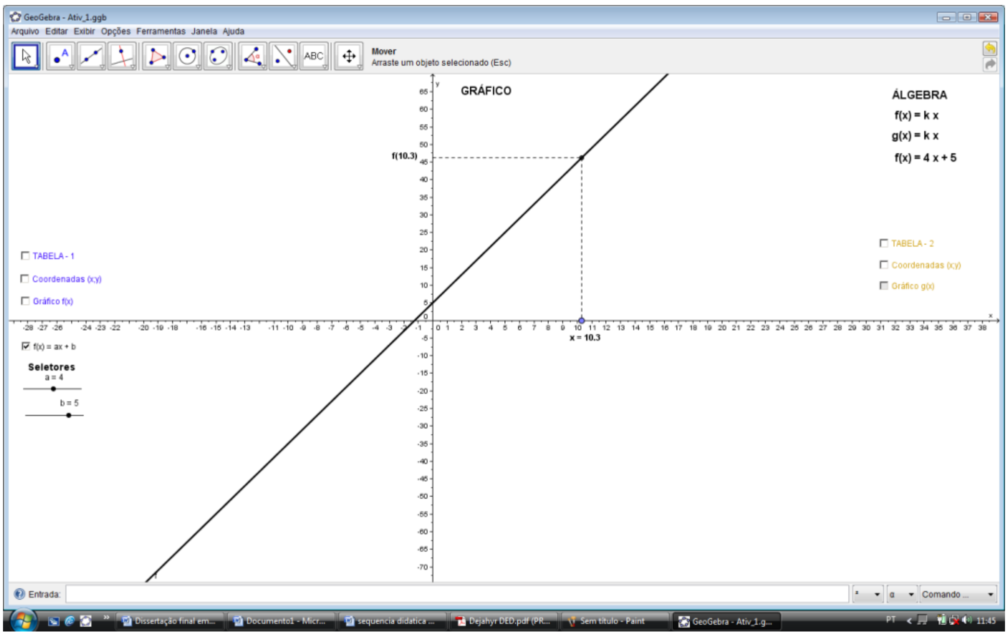


Figura 6 – Layout GeoGebra do interruptor f(x = ax + b, **Atividade 1**

Atividade 2

Os erros obtidos na categoria Coeficientes angulares e lineares, apresentados pelos alunos na ATIVIDADE II, podem ser superados em uma atividade dinâmica que possibilita, no início, fazer várias vezes um registro algébrico, destacando os coeficientes. Em uma etapa seguinte, o estudante pode fornecer representações gráficas que evidenciam translações e rotações na tela, possibilitando a relação dos coeficientes da função afim e conversão do registro gráfico para o algébrico. Assim a **Atividade 2** foi dividida em duas partes: Atividade 2.1 e Atividade 2.2

Na **Atividade 2.1** pode-se identificar o coeficiente angular e o coeficiente linear da função afim a partir de sua expressão algébrica. O objetivo é convencer o aluno de que um tratamento algébrico pode ser necessário para reconhecer os coeficientes, testando-os após tratamento.

Para a **Atividade 2.2** o objetivo é fazer a conversão do registro gráfico para o algébrico da função afim, com o coeficiente linear.

As **Atividades 2.1** e **2.2** possibilitam diferentes conversões e representações relacionadas à função afim (Figura 7).

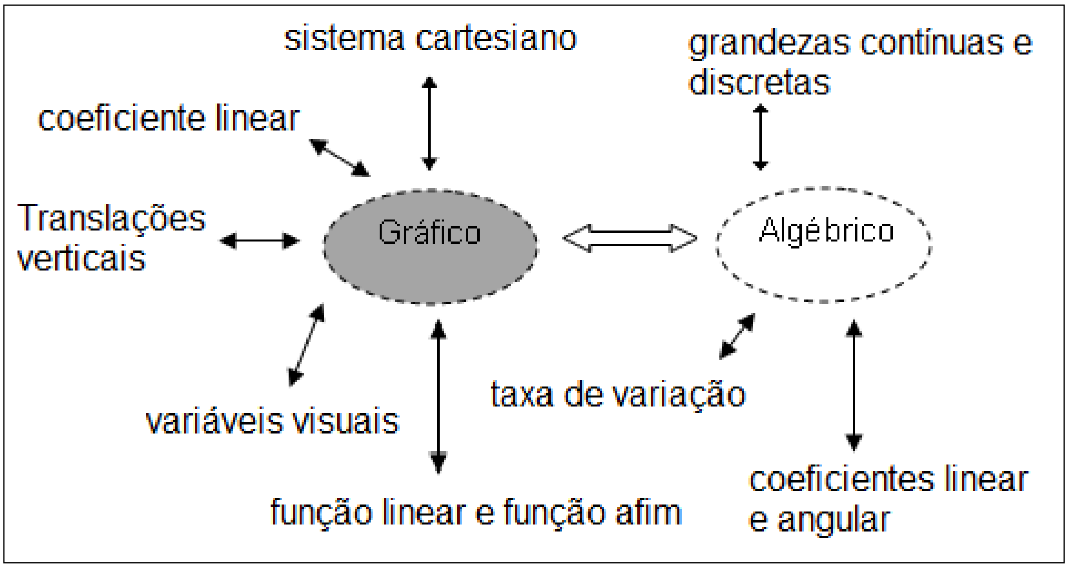


Figura 7 – Conversões e representações da **Atividade 2**.

A seguir apresentaremos um roteiro e o layout de apresentação na tela do computador para que o aluno execute as tarefas pedidas na atividade 2.

1) No GeoGebra, denomine um arquivo de Ativ_2.ggb.
2) A Atividade 2.1deve ter as seguintes características:

a) Com os interruptores desabilitados, escreva os títulos;

b) Acionando o interruptor BLOCO - 1 temos a apresentaçao na tela da função algébrica (os **Seletores** dos respectivos coeficientes pertencem a esta função). Desabilitando o interruptor, desaparece a forma algébrica;

c) Acionando o interruptor BLOCO - 2 temos a apresentação da função algébrica com tratamento (os **Seletores** dos respectivos coeficientes pertencem também a esta função). Desabilitando o interruptor, desaparece a forma algébrica

3) Para a Atividade 2.2 temos o seguinte roteiro de layout e apresentação:

a) No mesmo arquivo (Ativ_2.ggb), há o layout na tela ao acionar os interruptores f(x), Gráfico 1, Gráfico 2, Gráfico 3, Gráfico 4 e Gráfico 5, (Figura 8).

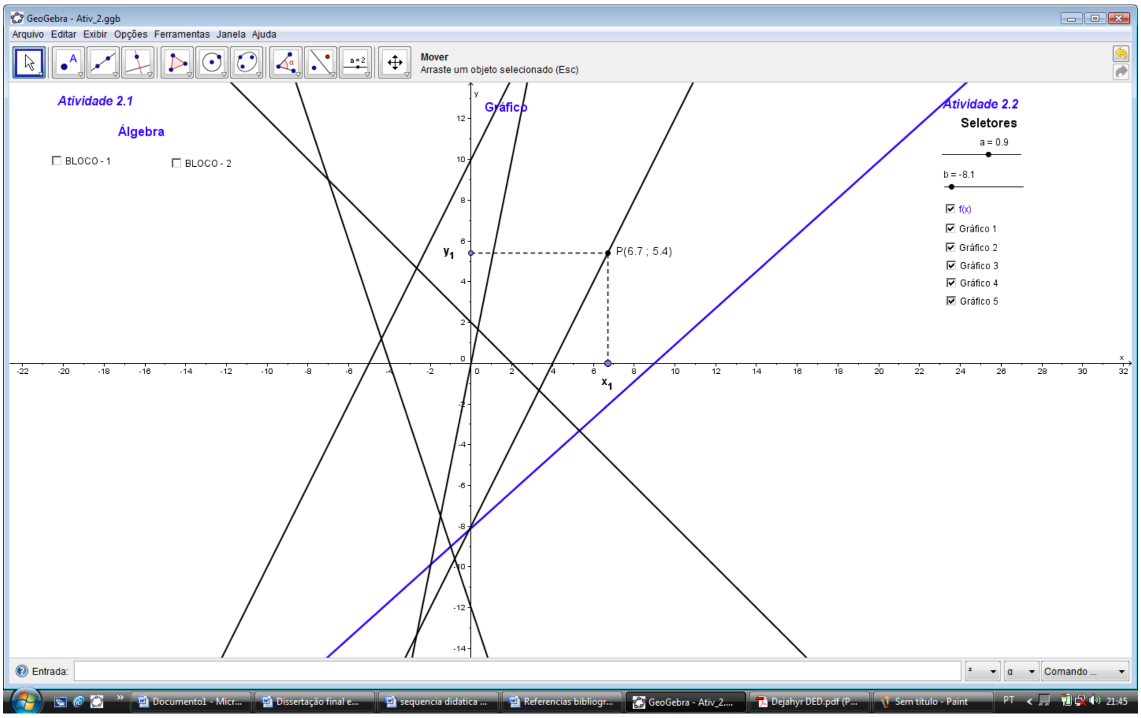


Figura 8 – Layout GeoGebra dos interruptores, **Atividade 2.2**

b) Acionando o interruptor f(x), temos a apresentaçao na tela do gráfico de desta função (os **Seletores** dos respectivos coeficientes pertencem a esta função). Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;

c) Acionando o interruptor ☑ Gráfico 1 temos a apresentaçao na tela do gráfico da função f(x) = 2x – 8, com as coordenadas do ponto P móvel. Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;

d) Acionando o interruptor ☑ Gráfico 2 temos a apresentaçao na tela o gráfico da função f(x) = 2x + 10. Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;

e) Acionando o interruptor ☑ Gráfico 3 temos a apresentaçao na tela o gráfico da função f(x) = – 3x + 10. Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;

f) Acionando o interruptor ☐ Gráfico 4 temos a apresentaçao na tela o gráfico da função f(x) = – x + 2. Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;

g) Acionando o interruptor ☑ Gráfico 5 temos a apresentaçao na tela o gráfico da função f(x) = 5x. Desabilitando o interruptor, desaparece a forma gráfica;

Atividade 3

Nos erros obtidos na categoria Conversão da ATIVIDADE III, o *software* GeoGebra apresenta interface dinâmica e interativa para a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, possibilitando ao aluno agir sobre o objeto matemático num contexto abstrato, mas tendo como suporte a representação gráfica na tela do computador.

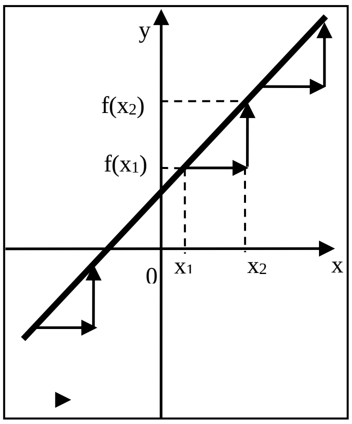


Figura 9 – Visualização do ‘triângulo dinâmico’ de proporcionalidade constante

Assim as dificuldades dos alunos em fazer a conversão, sem o coeficiente linear, podem ser trabalhadas em uma atividade dinâmica que contempla a taxa de variação da função afim. Com o recurso de trabalhar com as coordenadas cartesianas, pode-se corresponder visualmente o "triângulo dinâmico", com os correspondentes catetos em diversas situações (Figura 9).

Esta proposta tem por finalidade favorecer a concretização do conceito matemático de que, na função afim, a proporcionalidade $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ é sempre constante e igual ao coeficiente angular (a), restando somente um tratamento numérico simples para determinar o valor do coeficiente linear (b).

Do mesmo modo, podemos validar dinamicamente, na atividade anterior, a proporcionalidade $a=\frac{f(x)-b}{x}$, trabalhando visualmente com o coeficiente linear, de modo a converter para o registro algébrico.

Assim, na **Atividade 3,** o objetivo é o de escrever a expressão algébrica da função afim a partir do seu gráfico, o que pode possibilitar diferentes conversões e representações relacionadas a função afim (Figura 10).

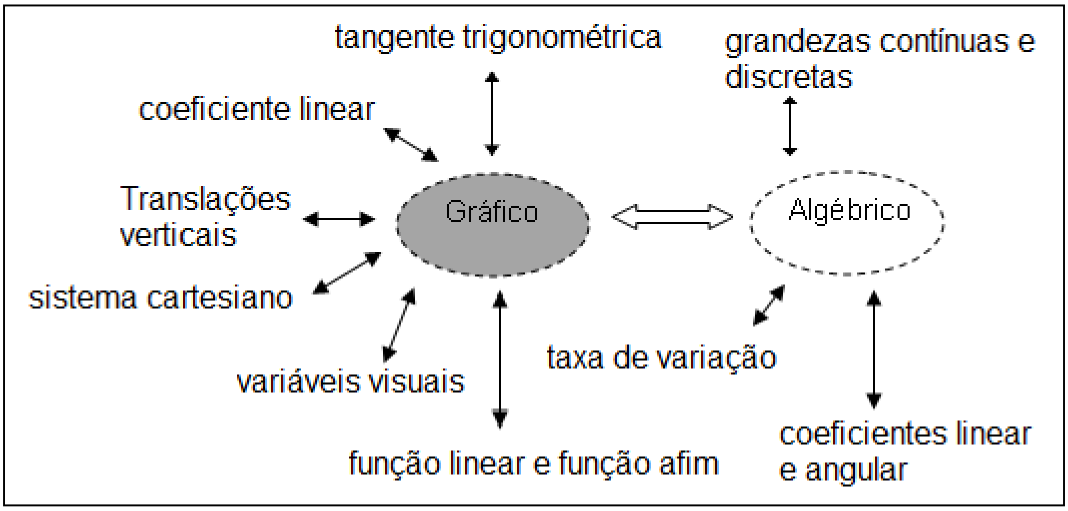


Figura 10 – Conversões e representações da **Atividade 3**

A seguir apresentaremos um roteiro e o layout de apresentação na tela do computador.

1) No GeoGebra, denomine um arquivo de Ativ_3.ggb, com um layout na tela para acionar o interruptor da função f(x). Deve ter as seguintes

características:

a) Acionando o interruptor ☑ Gráfico f(x) temos a apresentação na tela do gráfico da função algébrica (os Seletores dos respectivos coeficientes pertencem a esta função). Desabilitando o interruptor, desaparece a reta.

b) Os comprimentos dos catetos são móveis pelos pontos $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$;

2) Para o acionamento dos demais interruptores, temos as seguintes caracteristicas:

a) Acionando o interruptor ☑ Gráfico 1 temos a apresentação na tela da reta que passa pelos pontos de coordenadas (– 4 ; 2) e (– 2; 6) ambos móveis pelas abscissas;

b) Acionando o interruptor ☑ Gráfico 2 temos a apresentação na tela da reta que passa pelos pontos de coordenadas (1 ; 8) e (2; 6) fixos;

c) Acionando o interruptor ☑ Gráfico 3 temos a apresentaçao na tela da reta que passa pelos pontos de coordenadas (– 1 ; – 5) e (2; 7) fixos;

Atividade 4

Esta atividade, de característica dinâmica, tem o objetivo de intervir nos resultados da categoria <u>Sinal da função</u> e pode apresentar vantagens: a possibilidade de realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, diferentemente da manipulação concreta. É a primazia da ação favorecendo o processo de investigação e abstração, com a consequente construção de conceitos e relações.

No caso da categoria em questão, podemos utilizar o dinamismo do *software* para a representação e explorar, separadamente, os conceitos de zero da função, domínio e imagem e sinal da função, além de constatar visualmente quando a função é positiva ou negativa, através das representações gráficas.

Na **Atividade 4** o objetivo é o Estudo do sinal da função afim pela análise do gráfico e da expressão algébrica, possibilitando diferentes conversões e representações relacionadas a esse conceito (Figura 11).

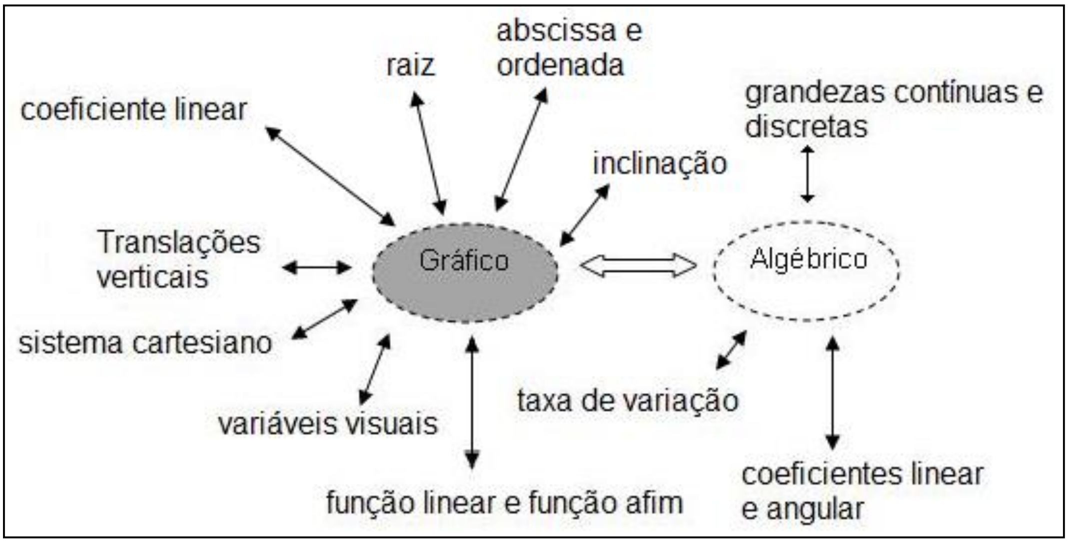


Figura 11 – Conversões e representações da **Atividade 4**

A seguir apresentaremos um roteiro e o layout de apresentação na tela do computador.

1) No GeoGebra, denomine um arquivo de Ativ_4.ggb. O layout na tela terá os registros algébrico (com os **Seletores** dos respectivos coeficientes), gráfico representativo e o dispositivo prático (Figura 12).

2) Deve ter as seguintes características:

a) Acionando o seletor “a” o dispositivo prático e a reta fazem as mesmas rotações. Aqui é interessante mudar de cor a ordenada quando a função passa de crescente para decrescente;

b) Acionando o seletor “b” a raiz **r** sobre o eixo x desloca horizontalmente;

c) O ponto sobre o eixo x é móvel e indica os valores das coordenadas.

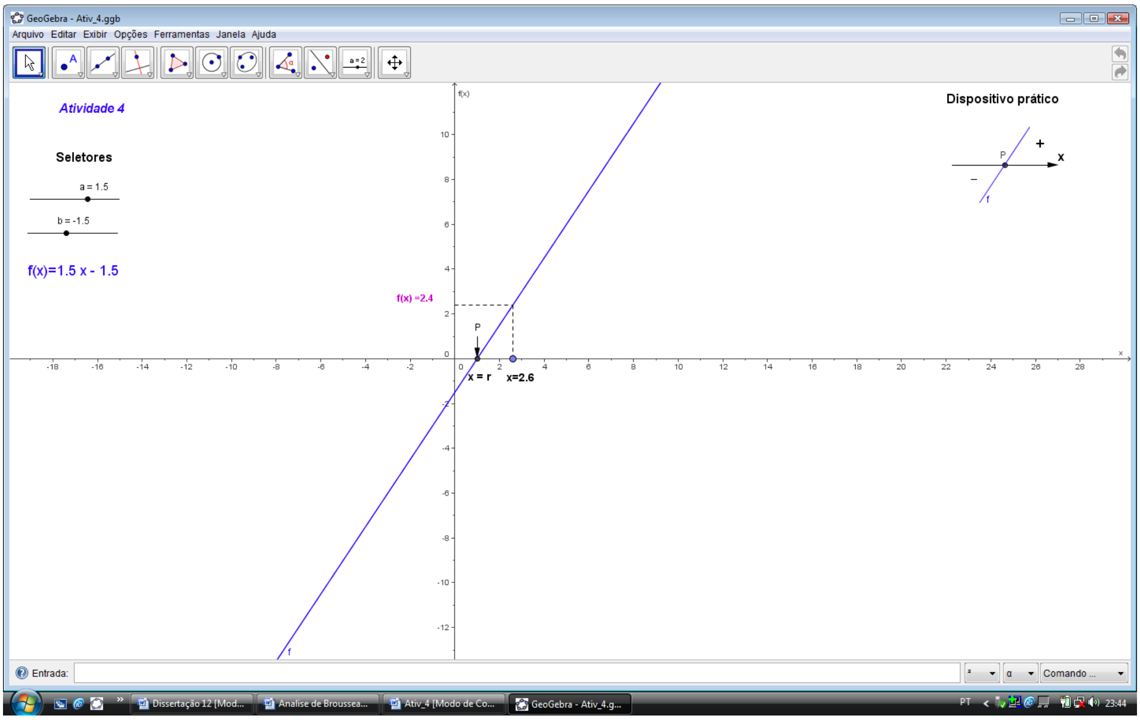


Figura 12 – Layout GeoGebra da **Atividade 4**

Atividade 5

O objetivo da **Atividade 5** é a de relacionar área e o perímetro de um retângulo com a forma algébrica da função afim e, no caso da área, com a função linear de caráter não-congruente.

Com a conversão dos registros Figural ↔ Algébrico pode-se explorar representações relacionadas a esse conceito (Figura 13).

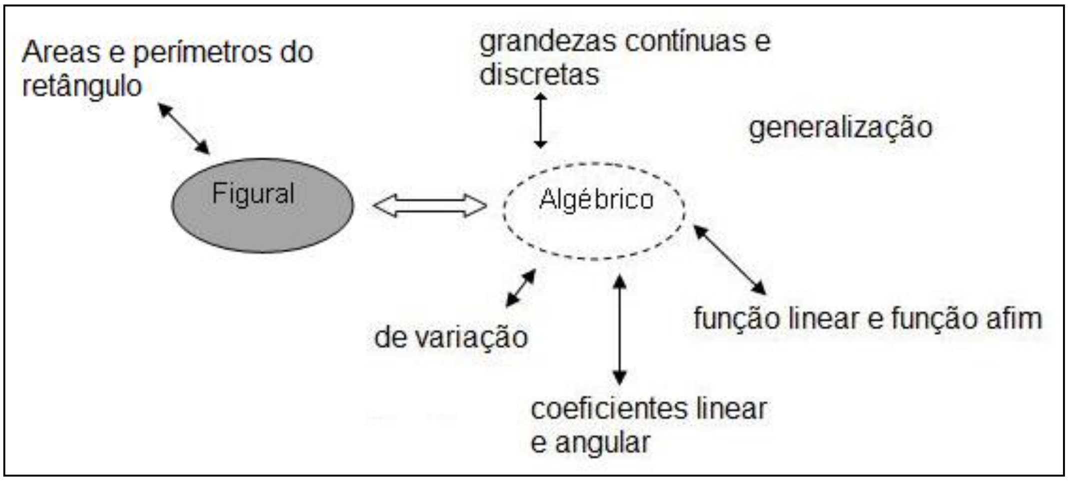


Figura 13 – Conversões e representações da **Atividade 5**

No GeoGebra, a **Atividade 5** é apresentada como arquivo Ativ_5.ggb. Possui seletores para apresentar e organizar cada item das atividades. Para o desenvolvimento das questões temos, conforme Figura 14, o seguinte layout:

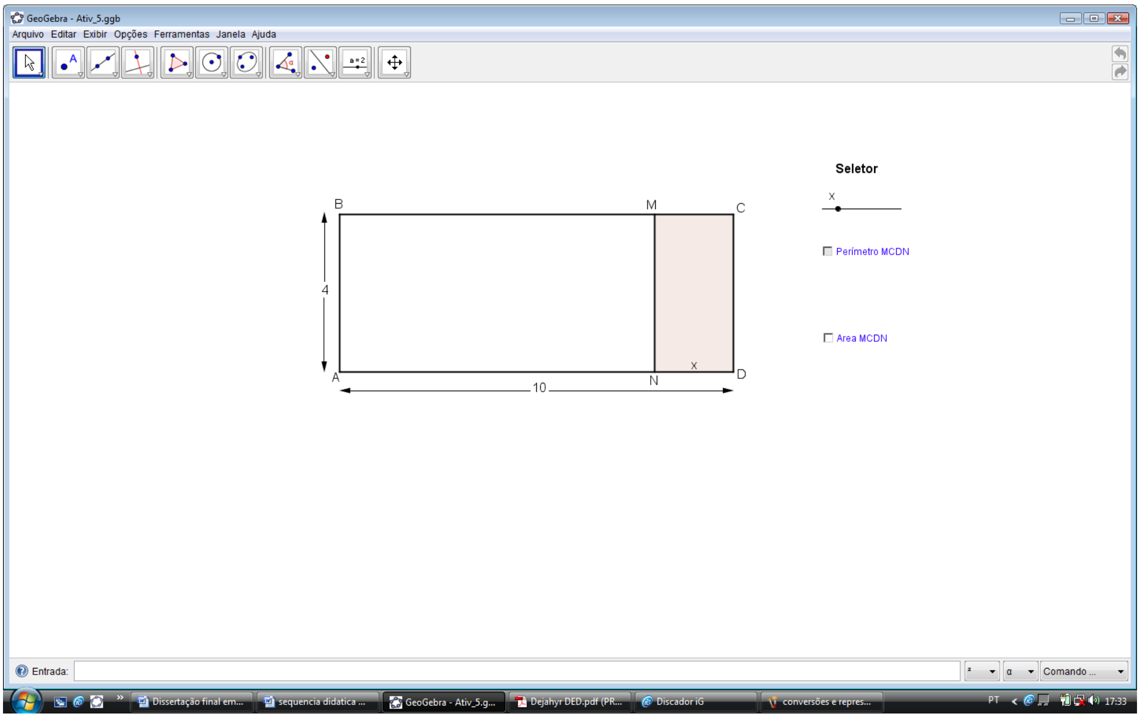


Figura 14 – Layout GeoGebra da **Atividade 5**

Deve ter as seguintes características:

a) Acionando o seletor “a” o dispositivo prático e a reta fazem as mesmas rotações;

b) Acionando o seletor “b” a raiz **r** sobre o eixo x desloca horizontalmente;

c) O ponto móvel indica os valores das coordenadas.

Com a proposta dessas atividades espera-se uma superação dos erros cometidos pelos alunos, pois, segundo Oliveira (2009) essas mudanças nas tarefas “podem ocorrer, por conseqüência, mudanças na maneira de pensar e resolver problemas, com as interfaces assumindo o papel de suportes do pensamento.”.

Referências Bibliográficas

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba, Editora UFPR, 2007.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2005.

OLIVEIRA, Gerson Pastre de; **Transposição didática: aportes teóricos e novas práticas**. In: WITTER, Geraldina P. FUJIWARA, Ricardo (Orgs). Ensino de Ciências e Matemática: análise de problemas. São Paulo: Atelier, 2009.

SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **SARESP 2008**: Relatório Pedagógico: Língua Portuguesa, Matemática e Ciências. São Paulo, SEE, 2009.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Matrizes de referência para a avaliação Saresp**: Matemática/ Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, 2009b.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do gestor: gestão do currículo na escola**: Matemática/ Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, 2009c.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática/ Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, 2008.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do Professor**: Matemática, Ensino Médio, 1ª série. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 2008b.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do Aluno**: Matemática, Ensino Médio, 1ª série. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado,

2008c.