PRINCIPE VARIATIONNEL ET GROUPES KLEINIENS

Jean-Pierre Otal et Marc Peigné

Summary - Let Γ be a non-elementary Kleinian group acting on a Cartan-Hadamard manifold $\tilde{X}$; denote by $\Lambda(\Gamma)$ the non-wandering set of the geodesic flow (ϕ_t) acting on the unit tangent bundle $T^1(\tilde{X}/\Gamma)$. When Γ is *convex cocompact* (i.e. $\Lambda(\Gamma)$ is compact), the restriction of (ϕ_t) to $\Lambda(\Gamma)$ is an Axiom A flow : therefore, by a theorem of Bowen-Ruelle, there exists a *unique* invariant measure on $\Lambda(\Gamma)$ which has maximal entropy. In this paper, we study the case of an arbitrary Kleinian group Γ. We show that there exists a measure of maximal entropy for the restriction of (ϕ_t) to $\Lambda(\Gamma)$ if and only if the *Patterson-Sullivan measure* is finite ; furthermore when this measure is finite, it is the unique measure of maximal entropy.

By a theorem of Handel-Kitchens, the supremum of the measure-theoretic entropies equals the infimum of the entropies of the distances d on $\Lambda(X)$; when Γ is geometrically finite, we show that this infimum is achieved by the Riemannian distance d on $\Lambda(X)$.

Classification A.M.S :

Primary 37C40, 37D40, 37B40, , 37D35

Secondary 28A50

Dans cet article, $\tilde{X}$ désignera une variété riemannienne complète simplement connexe, dont les courbures sectionnelles sont comprises entre deux constantes négatives $-\alpha^2$ et $-\beta^2$ $(0 < \alpha \leq \beta)$. *Un groupe Kleinien* sera un groupe discret d'isométries de $\tilde{X}$, non-élémentaire (i.e. qui ne possède pas de sous-groupes abéliens d'indice fini) et sans torsion : un groupe Kleinien Γ opère sans points fixes sur $\tilde{X}$ et on note $X = \tilde{X}/\Gamma$ la variété riemannienne quotient. *L'ensemble non-errant* du flot géodésique (ϕ_t) agissant sur le fibré unitaire T^1X est noté $\Lambda(\Gamma)$: c'est sur cet ensemble que se concentre la dynamique intéressante du flot.

Nous allons relier certains invariants de la restriction de (ϕ_t) à $\Lambda(\Gamma)$ à *l'exposant critique du groupe* Γ, un invariant de Γ. Ce nombre $\delta(\Gamma)$ est défini comme l'exposant critique de la série, dite de Poincaré, $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(o,\gamma o)}$, où o est un point de $\tilde{X}$; en d'autres termes, $\delta(\Gamma) = \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log card\{\gamma / d(o,\gamma o) \leq r\}$.

Jean-Pierre Otal UMPA, UMR 128 CNRS,ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 7 et MAPMO, Université d'Orléans, Rue de Chartres, B. P. 6759, 45067 Orléans cedex 2

Marc Peigné, LMPT, UMR 6083, Faculté des sciences et techniques, Parc de Grandmont, 37200 Tours

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Soit $\sigma = (\sigma_x)_{x\in\tilde{X}}$ une famille de *mesures de Patterson* sur ∂X; rappelons qu'en général, une telle famille n'est pas unique, mais que lorsque Γ est *de type divergent*, c'est-à-dire lorsque la série de Poincaré ci-dessus diverge pour $s = \delta(\Gamma)$, elle l'est. Nous rappellerons dans §3 la construction importante de Sullivan qui permet d'associer à la famille $(\sigma_x)_{x\in\tilde{X}}$ une mesure de Radon μ invariante par le flot (ϕ_t) et de support $\Lambda(\Gamma)$. Si cette mesure est finie, on la supposera toujours normalisée en une mesure de probabilité.

Lorsque Γ est *convexe cocompact* – c'est-à-dire lorsque $\Lambda(\Gamma)$ est compact –, la mesure μ est finie et son entropie égale à $\delta(\Gamma)$; de plus, *l'entropie topologique* du flot géodésique sur $\Lambda(\Gamma)$ vaut aussi $\delta(\Gamma)$ (voir [Su2]). En fait, le flot (ϕ_t) restreint à $\Lambda(\Gamma)$ est Axiome A : par un résultat de Bowen et Ruelle [BR], on sait alors que μ est l'*unique mesure d'entropie maximale*.

Ce sont ces problèmes que nous étudierons, mais pour des groupes Γ qui ne sont plus convexes cocompacts : calculer l'entropie de la mesure μ, calculer l'entropie topologique de (ϕ_t) restreint à $\Lambda(\Gamma)$, et décider s'il existe une unique mesure qui maximise l'entropie.

Si l'on s'intéresse, lorsque Γ n'est plus convexe cocompact, à l'entropie *topologique* du flot (ϕ_t) restreint à $\Lambda(\Gamma)$, il faut tenir compte du fait que l'espace $\Lambda(\Gamma)$ du flot n'est pas compact. Pour un flot sur un espace *métrique* qui n'est pas compact, Bowen a précisé la notion d'entropie topologique [Bowe]. Cette entropie h_d du flot (ϕ_t) restreint à $\Lambda(\Gamma)$ dépend donc du choix d'une métrique d sur $\Lambda(\Gamma)$ et nous l'appellerons *l'entropie de la distance* d ; *l'entropie topologique* $h_{\rm top}$ *du flot* (ϕ_t) est ensuite définie comme l'infimum des entropies h_d sur l'ensemble de toutes les distances d sur $\Lambda(\Gamma)$ qui induisent la topologie usuelle. C'est pour cette entropie topologique que l'on a un *Principe variationnel*, comme dans le cas d'un flot sur un espace compact : en effet, Handel et Kitchens ont montré que l'entropie topologique $h_{\rm top}$ est la borne supérieure des entropies des mesures finies invariantes [HK]. Dans cet article, nous calculerons l'entropie topologique $h_{\rm top}$ pour un groupe Kleinien Γ quelconque et étudierons la question de l'existence d'une mesure d'entropie maximale.

Théorème 1. *Soit Γ un groupe Kleinien d'isométries de $\tilde{X}$. Alors $h_{\rm top} = \delta(\Gamma)$; de plus, il existe une mesure de probabilité invariante m qui maximise l'entropie si et seulement si la mesure de Patterson-Sullivan est finie et dans ce cas $m = \mu$.*

La première généralisation de la notion de groupe cocompact est celle de *groupe géométriquement fini*. La définition et les propriétés de ces groupes seront rappelées dans §1 mais disons déjà que cette famille inclut tous les groupes de *covolume fini*, c'est-à-dire ceux tels que $X = \tilde{X}/\Gamma$ est une variété de volume fini. Lorsque Γ est géométriquement fini, le domaine de la dynamique de (ϕ_t), c'est-à-dire l'ensemble non-errant $\Lambda(\Gamma)$, même s'il n'est pas forcément compact, est toujours la réunion d'un compact et d'un nombre fini de bouts dont la géométrie est bien comprise [Bowd]. Ces groupes ont été considérés par D. Sullivan dans [Su2] où il est montré que pour un groupe géométriquement fini Γ d'isométries de *l'espace hyperbolique réel* $\mathbb{H}^n$, la mesure μ est finie et son entropie est égale à $\delta(\Gamma)$. Pour les groupes géométriquement finis d'isométries d'un espace symétrique de rang 1, Corlette et Iozzi ont aussi montré la finitude de μ (voir [CI]).

Mais pour un groupe Kleinien Γ agissant sur un espace $\tilde{X}$ général, la mesure μ n'est pas toujours finie. Lorsque Γ est géométriquement fini, il existe un critère "local" portant sur les sous-groupes paraboliques de Γ pour que ce soit le cas et on peut construire des groupes géométriquement finis pour lesquels μ est infinie [DOP] ; il existe aussi des groupes Kleiniens qui ne sont pas géométriquement finis, mais tels que μ est finie (voir [A], [Pe]).

La démonstration du Théorème 1 comprend deux parties, une partie de théorie de la mesure et une partie de nature géométrique. Nous montrerons d'abord :

Théorème 2. *Soit Γ un groupe Kleinien d'isométries de $\tilde{X}$. Alors,*

(1) *l'entropie de toute mesure de probabilité (ϕ_t)-invariante est inférieure à $\delta(\Gamma)$;*

(2) *si la mesure de Patterson-Sullivan est finie, son entropie vaut* $\delta(\Gamma)$ *et c'est l'unique mesure de probabilité d'entropie* $\delta(\Gamma)$ *;*

(3) *si la mesure de Patterson-Sullivan est infinie, il n'existe pas de mesures de probabilité d'entropie* $\delta(\Gamma)$.

La démonstration de ce Théorème utilisera de manière essentielle la théorie des *partitions mesurables* de Rokhlin et nous en rappellerons d'abord quelques propriétés dans §2. Les trois points du Théorème 2 sont démontrés simultanément ; la méthode est à rapprocher de celle du Théorème de Ledrappier et Young qui caractérise les mesures, invariantes par un difféomorphisme d'une variété compacte, et pour lesquelles on a égalité dans la formule de Pesin. Comme dans [LY], on se fixe une mesure de probabilité invariante et ergodique m et on commence par construire une partition m-mesurable ξ, d'entropie égale à $h_m(\phi)$ et dont les atomes sont contenus dans les feuilles du feuilletage fortement instable. Lorsque m est la mesure de Patterson-Sullivan μ, supposée finie, la formule de Rokhlin donne alors directement que l'entropie de μ vaut $\delta(\Gamma)$; l'inégalité de Jensen entraîne ensuite qu'une mesure d'entropie $\delta(\Gamma)$ ne peut-être que μ. Même si l'existence de ces partitions est déjà établie dans [LS] et [LY], et dans un cadre plus général, nous la redonnerons dans la section §2, car leur construction dans notre cas particulier se simplifie. Le Théorème 2 sera ensuite démontré dans §3.

Un fois admis le Théorème 2, la démonstration du Théorème 1 se ramène à voir que $h_{\text{top}} \geq \delta(\Gamma)$. En effet, si h_{top} était strictement supérieur à $\delta(\Gamma)$, il existerait d'après le Principe variationnel de Handel et Kitchens des mesures finies dont l'entropie est arbitrairement proche de h_{top}, et en particulier strictement supérieure à $\delta(\Gamma)$; ceci est impossible d'après le Théorème 2. La deuxième partie du Théorème 1 est alors contenue dans le Théorème 2. On est donc ramené à montrer que, *pour toute* distance d' sur $\Lambda(\Gamma)$, l'entropie $h_{d'}$ vérifie $h_{d'} \geq \delta(\Gamma)$: nous verrons que ce résultat est à rapprocher du théorème de Bishop et Jones qui identifie la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite radial d'un groupe Kleinien dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ avec l'exposant critique $\delta(\Gamma)$ [BJ] et les démonstrations sont vraiment parallèles. C'est la partie géométrique du Théorème 1 et elle sera traîtée dans la section §4.

Toutefois, la distance la plus "naturelle" sur le fibré tangent unitaire T^1X est la *distance riemannienne* et on peut se poser la question du calcul de son l'entropie métrique. Ce calcul semble difficile dans la situation d'un groupe Kleinien Γ quelconque. Dans la section §4, nous démontrerons le résultat suivant :

Proposition 3. *Soit* Γ *un groupe géométriquement fini d'isométries de* $\tilde{X}$. *Alors, l'entropie du flot* (ϕ_t) *restreint à* $\Lambda(\Gamma)$ *pour la distance riemannienne* d *est égale à* $\delta(\Gamma)$.

L'inégalité $h_d \geq \delta(\Gamma)$ est vraie pour tous les groupes Γ, d'après le Théorème 1. Par contre, pour établir l'inégalité $h_d \leq \delta(\Gamma)$, nous utiliserons de manière essentielle la description géométrique des bouts du cœur de Nielsen de la variété quotient $\tilde{X}/\Gamma$ lorsque Γ est géométriquement fini. Chacun de ces bouts est quasi-isométrique à une demi-droite : l'idée de la démonstration est alors que l'entropie topologique du flot "restreint" à un tel bout est nulle.

Notons que pour un groupe Kleinien Γ quelconque, la Proposition 3 devient fausse. En effet, si Γ et Γ' sont deux groupes Kleiniens tels que $\Gamma \subset \Gamma'$ et $L(\Gamma') = L(\Gamma)$, alors l'entropie métrique du flot géodésique sur $\Lambda(\Gamma)$ pour la distance riemannienne d est supérieure à celle du flot géodésique sur $\Lambda(\Gamma')$ (toujours pour la distance riemannienne). Ceci découle directement de la définition de l'entropie h_d (cf. §4) et du fait que la projection de revêtement $\tilde{X}/\Gamma \to \tilde{X}/\Gamma'$ induit un revêtement de $\Lambda(\Gamma) \to \Lambda(\Gamma')$ qui décroît la distance riemannienne. Maintenant l'égalité des ensembles limites $L(\Gamma) = L(\Gamma')$ a lieu dès que Γ est un sous-groupe distingué non-trivial, par exemple le noyau d'un homomorphisme non-trivial de Γ' sur un groupe G. Or, on peut construire des exemples de groupes Γ' qui admettent un homomorphisme $\psi : \Gamma' \to G$ tels que $\delta(\mathrm{Ker}\psi) < \delta(\Gamma')$ (cf. [K2]). Une question naturelle est donc la suivante:

Question. Soit Γ un groupe Kleinien. Existe-t'il une distance d sur $\Lambda(\Gamma)$ telle que $h_d = h_{top}$?

Dans tout cet article, π désignera la projection canonique du fibré unitaire T^1X sur X, $\tilde{\pi}$ celle de $T^1\tilde{X}$ sur $\tilde{X}$. La distance riemanienne dans $\tilde{X}$ sera notée $d_{\tilde{X}}$.

Nous remercions les referees pour les nombreuses remarques qu'ils ont faites et qui ont permis d'améliorer la rédaction de cet article. Nous tenons aussi à remercier ici F. Ledrappier pour les discussions fructueuses que nous avons eues avec lui sur la théorie de l'entropie.

§1. Rappels sur les groupes Kleiniens et sur les mesures de Patterson-Sullivan.

—Groupes Kleiniens.

On note $\partial\tilde{X}$ le *bord visuel* de $\tilde{X}$. Tout vecteur v de $T^1\tilde{X}$ détermine de manière unique une géodésique notée $v_s :]-\infty, \infty[\to \tilde{X}$ de condition initiale $v_0 = v$. On notera v^+ et v^- les deux bouts de cette géodésique dans $\partial\tilde{X}$.

Étant donné un vecteur $\tilde{v} \in T^1\tilde{X}$, on note $W^+(\tilde{v})$ (resp. $W^-(\tilde{v})$) la variété fortement instable (resp. fortement stable) de $\tilde{v}$ pour le flot géodésique sur $T^1\tilde{X}$: $W^+(\tilde{v})$ (resp. $W^-(\tilde{v})$) est l'ensemble des vecteurs sortant (resp. rentrant) normaux à l'horosphère passant par le point $\tilde{\pi}(\tilde{v})$ et centrée au point $\tilde{v}^+$. Étant donné un vecteur $v \in T^1X$, on note $W^+(v)$ (resp. $W^-(v)$) la variété fortement instable (resp. fortement stable) de v pour le flot (ϕ_t) : c'est exactement l'image de $W^{\pm}(\tilde{v})$ par la projection de revêtement $T^1\tilde{X} \to T^1X$. Le *feuilletage instable* W^+ (resp. le feuilletage *instable* W^-) est défini par la partition de T^1X en les feuilles $W^+(v)$ (resp. en les feuilles $W^-(v)$).

Si Γ est un groupe Kleinien d'isométries de $\tilde{X}$, *l'ensemble limite* de Γ est le plus petit fermé non-vide $L(\Gamma)$ de $\partial\tilde{X}$ qui est invariant par l'action de Γ. L'ensemble non-errant du flot géodésique (ϕ_t) sur T^1X, noté $\Lambda(\Gamma)$, est le projeté sur T^1X de l'ensemble des vecteurs de $T^1\tilde{X}$ dont les bouts v^+ et v^- sont dans l'ensemble limite $L(\Gamma)$.

On note $C(\Gamma)$ l'enveloppe convexe de $L(\Gamma)$ dans $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$: c'est un fermé invariant par Γ et l'espace quotient $N(\Gamma) = C(\Gamma)/\Gamma$ est appelé *le cœur de Nielsen de* X. Par définition, $\Lambda(\Gamma)$ est contenu dans la préimage $\pi^{-1}(N(\Gamma))$.

Rappelons quelques propriétés des groupes géométriquement finis que nous utiliserons dans la section §4 (cf. [Bowd] pour un exposé détaillé). On dit qu'un groupe Kleinien Γ est *géométriquement fini* lorsque, pour $\epsilon > 0$, l'ϵ-voisinage $N_\epsilon(\Gamma)$ de $N(\Gamma)$ est de volume fini. Le cœur de Nielsen $N(\Gamma)$ d'un groupe géométriquement fini se décompose en la réunion disjointe d'un compact C_0 et d'une famille finie $\{C_1, ..., C_l\}$ de "bouts cuspidaux" : pour $i \geq 1$, chaque C_i est isométrique au quotient de l'intersection de $C(\Gamma)$ et d'une horoboule $\tilde{\mathcal{H}}_i$ par un sous-groupe parabolique maximal $\mathcal{P}_i \subset \Gamma$. Notons $\partial\tilde{\mathcal{H}}_i$ l'horosphère, bordant $\tilde{\mathcal{H}}_i$ et paramétrons $\tilde{\mathcal{H}}_i$ par le produit $\partial\tilde{\mathcal{H}}_i \times [0, \infty[$, en associant au point $p \in \tilde{\mathcal{H}}_i$ le couple (h, t) où h est la projection de p sur l'horosphère $\tilde{\mathcal{H}}_i$ et t la distance algébrique de p à cette horosphère. Ce paramétrage est invariant par rapport aux isométries de $\mathcal{P}_i$. Il induit un paramétrage de $\mathcal{H}_i = \tilde{\mathcal{H}}_i/\mathcal{P}_i$ par le produit $\partial\mathcal{H}_i \times [0, \infty[$. Lorsque Γ est géométriquement fini, on sait que l'intersection du cœur de Nielsen $N(\Gamma)$ avec $\mathcal{H}_i$ est contenue dans le produit $N_i \times [0, \infty[$, pour un certain compact $N_i \subset \partial\mathcal{H}_i$; de plus, le diamètre de l'intersection $N_i^r = N(\Gamma) \cap (\partial\mathcal{H}_i \times \{r\})$ tend vers 0 quand r tend vers ∞.

—Mesures de Patterson-Sullivan.

Rappellons la construction fondamentale de Patterson. Soit Γ un groupe Kleinien et soit $x \in \tilde{X}$. On peut choisir une fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui ne dépend pas de x et telle que la série $G(x, s) =$

$\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd_{\tilde{X}}(x,\gamma o)}h(d_{\tilde{X}}(x,\gamma o))$ diverge si et seulement si $s \leq \delta(\Gamma)$. Lorsque Γ est divergent, la fonction $h = 1$ convient ; sinon la construction de h est plus délicate (cf. [Pa]). *Une mesure de Patterson* σ_x est une valeur d'adhérence faible sur $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$ lorsque $s \to \delta(\Gamma)^+$ de la famille de mesures orbitales

$$\sigma_{x,s} = \frac{1}{G(o,s)} \sum_{\gamma\in\Gamma} h(d(x,\gamma o))e^{-sd_{\tilde{X}}(x,\gamma o)}\delta_{\gamma o}.$$

Le support de ces mesures limites est toujours égal à $L(\Gamma)$.

Lorsque Γ est *divergent*, la suite de mesures $\sigma_{x,s}$ converge lorsque $s \to \delta(\Gamma)^+$ et la mesure σ_x est portée par *l'ensemble limite radial* de Γ, c'est-à-dire l'ensemble des points ξ de $L(\Gamma)$ tels qu'il existe une infinité de points de l'orbite Γo à distance bornée du rayon géodésique $[o,\xi[$.

Lorsque Γ est *convergent*, la situation est très différente : en particulier, pour un groupe géométriquement fini convergent, les mesures σ_x sont *purement atomiques*, portées par les orbites de points fixes paraboliques de Γ.

Mais dans tous les cas, les mesures σ_x sont $\delta(\Gamma)$-*conformes*, c'est-à-dire qu'elles vérifient, pour x, x' dans $\tilde{X}$:

$$\frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x'}}(\xi) = e^{-\delta(\Gamma)\mathcal{B}_\xi(x,x')},$$

où $\mathcal{B}_\xi(x,x')$ désigne la fonction de Busemann centrée en ξ. Les mesures σ_x sont aussi Γ-invariantes : pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma^*\sigma_x = \sigma_{\gamma^{-1}x}$.

Dans la suite, nous fixerons *une* mesure de Patterson σ_x. Nous allons rappeler le procédé mis en lumière par D. Sullivan qui permet d'associer à cette famille une mesure sur T^1X : c'est une mesure que nous noterons μ, invariante sous l'action du flot géodésique et portée par son ensemble non-errant $\Lambda(\Gamma)$. Le fibré unitaire $T^1\tilde{X}$ est homéomorphe à $(\partial X \times \partial X - \Delta) \times \mathbb{R}$, où Δ désigne la diagonale : si $\tilde{v}$ est un vecteur de $T^1\tilde{X}$, de point base x, on lui associe le triplet $(\tilde{v}^-, \tilde{v}^+, -t)$, où $\tilde{v}^\pm$ sont les extrémités positive et négative de la géodésique déterminée par $\tilde{v}$, et $t = \mathcal{B}_{\tilde{v}^+}(o,x)$. La mesure

$$d\tilde{\mu} = e^{\delta(\Gamma)(\mathcal{B}_{\tilde{v}^-}(o,x)+\mathcal{B}_{\tilde{v}^+}(o,x))}d\sigma(\tilde{v}^-)d\sigma(\tilde{v}^+)dt$$

ne dépend pas du choix du point x, qu'elle est invariante sous l'action de Γ et sous celle du flot géodésique sur $T^1\tilde{X}$; elle passe au quotient en une mesure μ, appelée *mesure de Patterson-Sullivan.* Son support est l'ensemble non-errant $\Lambda(\Gamma)$; c'est une mesure de Radon, qui peut être finie ou infinie. Par exemple, si $\tilde{X}$ est un espace symétrique de rang 1 et Γ est géométriquement fini, μ est toujours finie ([Su2], [CI]). Lorsque μ est finie, nous la supposerons toujours normalisée en une mesure de probabilité.

La mesure μ a deux propriétés essentielles. C'est d'une part sa *structure de produit local* par rapport au feuilletages stable/instable, d'autre part *une propriété d'expansion uniforme* .

Pour tout vecteur $\tilde{v} \in T^1\tilde{X}$, l'application $P_{\tilde{v}}$ de $W^+(\tilde{v})$ sur $\partial\tilde{X} - \{\tilde{v}^-\}$ qui associe à un vecteur w le bout positif w^+ de la géodésique qu'il détermine est un homéomorphisme. On définit une mesure $\mu^+_{\tilde{v}}$ sur $W^+(\tilde{v})$ en posant, pour tout borélien $A \subset T^1\tilde{X}$:

$$\mu^+_{\tilde{v}}(A) = \int \chi_A(P^{-1}_{\tilde{v}}(\xi))e^{-\delta(\Gamma)\mathcal{B}_\xi(o,\tilde{\pi}(\tilde{v}))}d\sigma(\xi).$$

Si $v \in T^1X$ est l'image de $\tilde{v}$ par la projection de revêtement, on note μ^+_v l'image par cette projection de la mesure $\mu^+_{\tilde{v}}$ restreinte à un domaine fondamental de l'action de Γ sur $\tilde{X}$: la mesure μ^+_v est supportée sur la feuille $W^+(v)$.

On définit de la même manière une famille de mesures $(\mu_v^-)_{v\in T^1X}$ sur les feuilles du feuilletage stable W^-.

Nous aurons besoin plus loin d'expliciter l'expression locale de la mesure μ_σ. Soit U un voisinage de v sur sa feuille stable W_v^- ; soit $\epsilon > 0$. On remarque que tout vecteur $v \in T^1X$ est contenu dans un *ouvert feuilleté* $\mathcal{U} = \bigcup_{u\in U}\bigcup_{|s|<\epsilon} U^+_{\phi_s u}$ où $U^+_{\phi_s u}$ est un voisinage de $\phi_s u$ sur sa feuille fortement instable. La mesure μ restreinte à $\mathcal{U}$ a alors pour expression, si A est un borélien contenu dans $\mathcal{U}$:

$$\mu(A) = \int_U \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mu^+_{\phi^s u}(A \cap W^+_{\phi_s u}) e^{-\delta_\Gamma s} ds \right) d\mu_v^-(u).$$

Comme les mesures σ_x sont $\delta(\Gamma)$-conformes, on voit aussi que la famille $(\mu_v^+)_{v\in T^1X}$ possède la propriété d'expansion uniforme suivante. Pour tout $v \in T^1X$ et pour tout réel t, on a :

$$\frac{d(\phi_t^* \mu^+_{\phi_t v})}{d\mu_v^+} = e^{\delta(\Gamma)t}.$$

On utilisera dans la démonstration du Théorème 2 le fait que, pour tout borélien $A \subset T^1(X)$, l'application $v \to \mu_v^+(A)$ est borélienne : ceci découle de l'expression de μ_v^+ et de ce que l'application $\tilde{v} \to P_{\tilde{v}}^{-1}(\xi)$ est continue sur son ensemble de définition.

§**2. Partitions mesurables et Théorie de l'entropie.**

—Partitions mesurables.

On considère un espace mesuré $(M, \mathcal{M}, m)$ et on note $\overline{\mathcal{M}}$ la tribu obtenue en complétant la tribu $\mathcal{M}$ par les ensembles m-négligeables. Soit ξ une partition de M ; on appelle les éléments de ξ des "atomes" et on note $\xi(x)$ l'atome contenant x. On note M_ξ l'espace quotient de la partition, c'est-à-dire l'ensemble des atomes. On munit M_ξ de la σ-algèbre $\mathcal{M}_\xi$ des éléments de $\overline{\mathcal{M}}$ qui sont réunion d'éléments de ξ. La mesure m induit une mesure $\bar{m}$ sur M_ξ.

La partition ξ est dite *m-mesurable*, s'il existe un ensemble de mesure pleine $N \subset M$, et une famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_\xi$ tels que pour tous les éléments distincts ξ_1 et ξ_2 de ξ, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\xi_1 \cap N \subset A_i$ et $\xi_2 \cap N \subset M - A_i$ (quitte à échanger ξ_1 et ξ_2). Une telle famille (A_n) est appelée une *base* de la partition ξ. Si ξ est une partition m-mesurable, l'espace $(M_\xi, \mathcal{M}_\xi, \bar{m})$ est un espace de Lebesgue, c'est-à-dire qu'il est isomorphe à la réunion de l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue et d'un ensemble discret de mesure finie.

On identifie deux partitions m-mesurables ξ et ξ' lorsque, pour m-presque tout x, $\xi(x) = \xi'(x)$.

Si ξ et ξ' sont deux partitions m-mesurables, on dit que ξ *est plus fine que* ξ' et l'on écrit $\xi \succ \xi'$ si pour m-presque tout x, on a : $\xi(x) \subset \xi'(x)$. Ceci définit un ordre partiel sur l'ensemble des (classes d'équivalence de) partitions mesurables.

Si ξ et ξ' sont deux partitions m-mesurables, on note $\xi \vee \xi'$ la partition m-mesurable obtenue en intersectant les éléments de ξ et de ξ'.

Si $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de partitions mesurables, on note $\vee_{n\in\mathbb{N}}\xi_n$ la borne supérieure des partitions ξ_n, c'est-à-dire la plus petite partition mesurable qui majore toutes les ξ_n.

Une partition mesurable peut toujours être vue comme limite croissante d'une suite de partitions finies. Soit en effet ξ_n la partition formée des intersections des ensembles A_i et $M - A_i$ pour $i \le n$. Alors $\xi_{n+1} \succ \xi_n$ et on a : $\vee_{n\in\mathbb{N}}\xi_n = \xi$.

Enfin, lorsque ϕ est une transformation de $(M, \mathcal{M}, m)$ dans lui-même, la partition $\phi^{-1}\xi = \{\phi^{-1}(\xi(x)) | x \in M\}$ est une partition mesurable (on a bien sûr $\phi^{-1}\xi(x) = \phi^{-1}(\xi(\phi(x)))$.

—Mesures conditionnelles.

Supposons que m est une mesure de probabilité. À la donnée d'une partition m-mesurable ξ, on associe une famille de mesures conditionnelles sur les atomes de ξ. Précisément, pour presque tout $x \in M$, on peut définir une mesure de probabilité $m_{\xi(x)}$ sur l'atome $\xi(x)$; cette mesure a les propriétés suivantes :

(1) pour tout ensemble mesurable $A \subset M$, la fonction $x \to m_{\xi(x)}(A \cap \xi(x))$ est mesurable ;
(2) on a : $m(A) = \int_M m_{\xi(x)}(A \cap \xi(x))dm(x)$.

Une famille de mesures $(m_{\xi(x)})_x$ avec ces deux propriétés est appelée *famille de probabilités conditionnelles pour* ξ. Elle est définie de manière unique modulo m.

—Entropie.

Si ξ est une partition mesurable finie de $(M, \mathcal{M}, m)$, on appelle *entropie de* ξ *relativement à* m, le nombre

$$H_m(\xi) = -\int_M \log m(\xi(x))dm(x) = -\sum \log m(\xi_i)m(\xi_i),$$

en convenant que $\infty.0 = 0$. *L'entropie moyenne de* ξ est alors $h_m(\phi, \xi) = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} H_m(\vee_0^{n-1} \phi^{-k}\xi)$. *L'entropie de* ϕ est la quantité $h_m(\phi) = \sup\{h_m(\phi, \xi)\}$, le suprémum étant pris sur toutes les partitions finies ξ.

On peut définir aussi l'entropie moyenne d'une partition mesurable *décroissante* (on dit qu'une partition mesurable ξ est décroissante lorsque $\phi^{-1}\xi \succ \xi$). D'abord, si ξ et ξ' sont deux partitions mesurables de M telles que $\xi \succ \xi'$, on pose

$$H_m(\xi \mid \xi') = -\int \log m_{\xi'(x)}(\xi(x))dm(x),$$

en convenant que $\int_A \infty.dm(x) = 0$ lorsque $m(A) = 0$ et $= +\infty$ sinon. Si ξ est une partition mesurable décroissante, on définit : $h_m(\phi, \xi) = H_m(\phi^{-1}\xi \mid \xi)$. Si ξ est une partition finie, la partition $\xi^+ = \vee_{n\in\mathbb{N}}\ \phi^{-n}\xi$ est une partition mesurable décroissante et on a : $h_m(\phi, \xi) = H_m(\phi^{-1}\xi^+|\xi^+) = h_m(\phi, \xi^+)$.

On dit que la partition m-mesurable ξ est *génératrice pour* ϕ si la partition $\vee_{n\in\mathbb{N}}\phi^{-n}\xi$ est la partition en points.

Dans ce qui suit, nous appliquerons ces notions au cadre suivant : M est l'ensemble non-errant $\Lambda(\Gamma)$ du flot géodésique sur T^1X, la tribu $\mathcal{M}$ est la tribu borélienne, et la transformation ϕ est l'un des temps ϕ_τ du flot géodésique (ϕ_t).

On dit alors que la partition m-mesurable ξ est *subordonnée* au feuilletage instable W^+, si pour m-presque tout $v \in M$, l'atome $\xi(v)$ est contenu dans la feuille $W^+(v)$ et est un voisinage de v sur cette feuille.

Proposition 1. *Soit m une mesure de probabilité invariante par le flot géodésique sur $\Lambda(\Gamma)$ et soit $\phi = \phi_\tau$ un temps du flot géodésique. Supposons que m est ergodique pour ϕ. Alors il existe une partition m-mesurable ξ de $\Lambda(\Gamma)$ qui est décroissante, génératrice pour ϕ et subordonnée au feuilletage W^+.*

Démonstration. Ce résultat est classique dans le cas où ϕ est un difféomorphisme ergodique d'une variété compacte [LS] ; toutefois, nous en donnons la démonstration ici car certains points se simplifient du fait du caractère Anosov du flot (ϕ_t).

Pour $u \in T^1X$ et $r > 0$, on note $B^+(u,r)$ (resp. $B^-(u,r)$) la boule de centre u, et de rayon r de la feuille $W^+(u)$ (resp. sur $W^-(u)$), pour la métrique riemannienne induite. Pour tout triplet (r_0, r^-, r^+) de réels strictement positifs, on définit la "cellule"

$$\mathcal{C}(u, r_0, r_-, r_+) = \bigcup_{|s|<r_0} \phi_s(\cup_{v \in B^-(u,r_-)} B^+(v, r_+)).$$

C'est un voisinage ouvert de u dans T^1X et d'après les théorèmes de comparaison [CE], on a, pour tout $t > 0$:

$$\mathcal{C}(\phi_t u, r_0, e^{-\beta t} r_-, e^{\alpha t} r_+) \subset \phi_t(\mathcal{C}(u, r_0, r_-, r_+)) \subset \mathcal{C}(\phi_t u, r_0, e^{-\alpha t} r_-, e^{\beta t} r_+).$$

Fixons un vecteur $u \in \Lambda(\Gamma)$ et posons pour simplifier $\mathcal{C}(u,r) = \mathcal{C}(u,r,r,r)$. On munit la cellulle $\mathcal{C}(u,r)$ de "coordonnées" de la façon suivante : un point $x \in \mathcal{C}(u,r)$ est représenté par $s \in]-r, r[$ tel que $x = \phi_r(w)$ où $w \in \cup_{v \in B^-(u,r)} B^+(v,r)$; w est représenté par $v \in B^-(u,r)$ tel que $w \in B^+(v,r)$. Choisissons un réel $0 < \rho \leq inj(\pi(u)/4$. On définit alors sur $\mathcal{C}(u,\rho)$ une fonction $h : x \to \sup(|s|, d^-(w,v), d^+(u,v))$: par construction, la ligne de niveau $h^{-1}\{r\}$, pour $r \in]0, \rho[$, est égale à la frontière de la cellule $\mathcal{C}(u,r)$. D'autre part, la régularité des feuilletages stable et instable entraînent que la fonction h est Hölder sur $\mathcal{C}(u,\rho)$, celle-ci étant munie de la distance induite par la distance riemannienne de T^1X.

Pour $r > 0$, considérons la partition $\hat{\xi}_r$ de T^1X dont les atomes sont d'une part les intersections $W^+(v) \cap \mathcal{C}(u,r)$ et aussi $T^1X - \mathcal{C}(u,r)$. Nous fixerons la valeur de r plus tard, mais supposons pour le moment $r \leq inj(\pi(u))/4$ où $inj(\pi(u))$ est le rayon d'injectivité en la projection $\pi(u)$ du vecteur u sur X. Cette propriété sera utilisée, dans le Lemme 2; elle garantit que si v et w sont deux points de T^1X tels que $W^+(v) = W^+(w)$ mais $\hat{\xi}_r(v) \neq \hat{\xi}_r(w)$, alors $d^+(v,w) \geq \frac{r}{2}$, où d^+ est la distance induite par la métrique riemannienne sur les feuilles de W^+.

On définit $\xi_r = \vee_0^\infty \phi^n \hat{\xi}_r$: ξ_r est une partition décroissante de T^1X et en particulier induit une partition décroissante de $\Lambda(\Gamma)$, toujours notée ξ_r. Nous allons montrer que l'on peut choisir r de sorte que ξ_r vérifie les conclusions de la Proposition 1.

Montrons d'abord que ξ_r est m-mesurable. Il est clair que la partition $\hat{\xi}_r$ l'est, puisque l'espace des atomes de $\hat{\xi}_r$ contenus dans $\mathcal{C}(u,r)$ s'identifie à $B^-(u,r) \times]-r, r[$; il suffit alors de choisir pour base la famille dénombrable $(A_i)_i$ formée du complémentaire de $\mathcal{C}(u,r)$ et des saturés par $\hat{\xi}_r$ des ouverts d'une base dénombrable de $B^-(u,r) \times]-r, r[$. On en déduit que ξ_r est mesurable, la base correspondante étant formée des $\phi^k(A_i)$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Vérifions que pour tout $r > 0$ et pour m-presque tout v, l'atome $\xi_r(v)$ est contenu dans $W^+(v)$. Puisque $u \in \Lambda(\Gamma)$, la mesure $m(\mathcal{C}(u,r))$ est strictement positive. L'ergodicité de m assure donc en particulier que pour m-presque tout v, il existe un entier $n > 0$ tel que $\phi^{-n}v \in \mathcal{C}(u,r)$; ainsi $\xi_r(v)$ est inclus dans $\phi^n(\hat{\xi}_r(\phi^{-n}v))$, et a fortiori dans $W^+(v)$. Un argument analogue donne que ξ_r est génératrice pour ϕ. En effet, pour m-presque tout v, il existe une suite (n_k) tendant vers $+\infty$ telle que $\phi^{n_k}v \in \mathcal{C}(u,r)$: comme le diamètre des atomes de la partition $\hat{\xi}_r$ contenus dans $\mathcal{C}(u,r)$ est majoré, le diamètre de l'atome $\phi^{-n_k}\hat{\xi}_r(\phi^{n_k}v)$ tend vers 0 quand $k \to \infty$.

Remarquons que l'argument d'ergodicité précédent montre aussi que pour m-presque tout v, l'atome $\xi_r(v)$ est contenu dans un ensemble $\phi^k(A_i)$ qui est relativement compact. En particulier, lorsqu'on décrit ξ_r comme limite croissante d'une suite (ξ_n) de partitions finies, alors pour m-presque tout v, l'atome $\xi_r(v)$ est contenu dans un atome $\xi_n(v)$ qui est relativement compact. Cette remarque sera utilisée dans le Fait 9, au cours de la démonstration du Théorème 2.

Il est plus délicat de montrer que l'on peut choisir $r > 0$ de sorte que pour m-presque tout v, l'atome $\xi_r(v)$ soit un voisinage de v sur la feuille $W^+(v)$. Pour cela, rappelons que d'après le caractère Anosov du flot (ϕ_t) sur T^1X, il existe un réel $A>0$ tel que si un vecteur $w\in W^+(v)$ vérifie $d^+(v,w)<inj_X(\pi(v))$, alors pour tout temps $t\geq 0$, on aura $d^+(\phi^{-t}v,\phi^{-t}w)\leq Ae^{-\alpha t}d^+(v,w)$. Posons alors

$$\beta(v)=\inf_{n\geq 0}\{\frac{e^{n\alpha}}{2A}d^+(\phi^{-n}v,\partial\mathcal{C}(u,r)),\frac{r}{2A},inj(\pi(v))\}.$$

Lemme 2.

(1) *Si $w\in W^+(v)$ vérifie $d^+(v,w)<\beta(v)$, alors pour tout entier $n\geq 0$, on a : $\hat{\xi}_r(\phi^{-n}v)=\hat{\xi}_r(\phi^{-n}w)$.*

(2) *On peut choisir $0<r<inj(\pi(u)/4$ de sorte que pour m-presque tout v on ait $\beta(v)>0$.*

Admettons ce résultat pour le moment et terminons la démonstration de la Proposition 1. Choisissons la constante r de sorte que (2) soit vérifié. Alors, d'après (1), on trouve que pour un ensemble de mesure pleine de $v\in\Lambda(\Gamma)$, la boule ouverte $B^+(v,\beta(v))$ de $W^+(v)$ est contenue dans $\xi_r(v)$. La partition ξ_r est donc subordonnée à W^+. $\square$

Démonstration du Lemme 2. Soit $w\in W^+(v)$ tel que $d^+(v,w)<\beta(v)$. Alors, par définition de $\beta(v)$, on a $d^+(\phi^{-n}v,\phi^{-n}w)\leq Ae^{-\alpha n}d^+(v,w)$, d'où $d^+(\phi^{-n}v,\phi^{-n}w)\leq\frac{1}{2}d^+(\phi^{-n}v,\partial\mathcal{C})$ et aussi $d^+(\phi^{-n}v,\phi^{-n}w)\leq\frac{r}{2}$. La première inégalité montre alors qu'on ne peut avoir simultanément $\phi^{-n}v\in\mathcal{C}(u,r)$ et $\phi^{-n}w\in\mathcal{C}(u,r)^c$ (ou vice versa) ; la seconde que si $\phi^{-n}v$ et $\phi^{-n}w$ appartiennent à $\mathcal{C}(u,r)$ alors $\hat{\xi}(\phi^{-n}v)=\hat{\xi}(\phi^{-n}w)$.

Pour montrer (2), on utilise un argument de théorie de la mesure (cf. [LS], Proposition 3.2).

Fait 3. *Soit ν une mesure de probabilité supportée sur un intervalle $]0,\rho[\subset\mathbb{R}^+$ et $a\in]0,1[$. Alors la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\{r\in]0,\rho[\quad|\quad\sum_0^\infty\nu[r-a^k,r+a^k]<\infty\}$ est égale à ρ.*

Prolongeons la fonction h en une fonction Hölder en la définissant égale à ρ dans le complémentaire de la couronne $\mathcal{C}(u,\rho)$. Appliquons le Fait 3 à la mesure image de la mesure m par l'application h. L'invariance de m par ϕ entraîne alors que l'ensemble des $r\in]0,\rho[$ tels que $\sum_{k=0}^\infty m\{v\in T^1X:|h(\phi^{-k}v)-r|\leq a^k\}<\infty$ est de mesure de Lebesgue pleine.

Or, puisque h est Hölder, il existe des constantes $A'>0$, et $\kappa\in]0,1[$ telles que si $d(w,\partial\mathcal{C}(u,r))\leq\tau$, alors on a : $|h(w)-r|\leq(A'\tau)^\kappa$. Soit K l'ensemble des $r\in]0,\rho[$ tels que

$$\sum_{k=0}^\infty m\{v\in T^1X\mid d(\phi^{-k}v,\partial\mathcal{C}(u,r))\leq\frac{e^{-k\alpha}}{A'}\}<\infty;$$

cet ensemble sera a fortiori de mesure de Lebesgue pleine. Si on choisit $r\in K$ tel que $m(\bigcup_k\phi^k\partial\mathcal{C}(u,r))=0$, on obtient le résultat escompté. $\square$

Le résultat suivant montre l'utilité de la partition ξ construite dans la Proposition 1 puisqu'elle va nous permettre de calculer l'entropie de la mesure m.

Proposition 4. *Soient m une mesure ϕ-invariante ergodique et ξ la partition mesurable construite dans la Proposition 1. Alors $h_m(\phi)=h_m(\phi,\xi)$.*

Au cours de la démonstration, nous utiliserons des partitions finies d'un type particulier que nous allons maintenant introduire. Rappelons que le feuilletage *faiblement instable* de T^1X a pour feuilles les orbites par le flot géodésique (ϕ_t) des feuilles instables, c'est-à-dire les réunions $W_f^+(v)=\bigcup_t\phi_tW^+(v)$. Sous les hypothèses de la Proposition 4, on a :

Fait 5. *Il existe une partition finie $\hat{\mathcal{P}}$ de $\Lambda(\Gamma)$ telle que la partition $\mathcal{P} = \vee_0^\infty \phi^n \hat{\mathcal{P}}$ possède les propriétés suivantes :*

(1) *pour m-presque tout $v \in T^1X$, l'atome $\mathcal{P}(v)$ est contenu dans la feuille faiblement instable $W_f^+(v)$.*
(2) *pour presque tout v et pour tout $w \in \mathcal{P}(v)$, on a : $W^+(w) \cap \mathcal{P}(v) = \xi(w) \cap \mathcal{P}(v)$.*

De plus, on peut choisir la partition finie $\hat{\mathcal{P}}$ de sorte que $h_m(\phi, \mathcal{P})$ soit arbitrairement proche de $h_m(\phi)$.

Démonstration. Considérons la cellule $\mathcal{C}(u,r)$ utilisée dans la construction de ξ. On définit maintenant $\hat{\mathcal{P}}$ comme la partition en deux atomes : $\mathcal{C}(u,r)$ et son complémentaire $T^1X - \mathcal{C}(u,r)$. La partition $\mathcal{P} = \vee_0^\infty \phi^n \hat{\mathcal{P}}$ est mesurable. Par ergodicité de la mesure m, pour m-presque tout $v \in T^1X$, il existe une suite (n_k) tendant vers $+\infty$ et telle que $\phi^{-n_k} v \in \mathcal{C}(u,r)$. Observons qu'il existe r' tel que pour tout $u' \in \mathcal{C}(u,r)$, on a : $\mathcal{C}(u,r) \subset \mathcal{C}(u',r')$. Puisque $\mathcal{C}(u,r) \subset \mathcal{C}(\phi^{-n_k}v, r')$, on aura alors $\mathcal{P}(v) \subset \mathcal{C}(v, r', e^{-\alpha n_k} r', e^{\beta n_k} r')$ pour tout k. Comme $\cap_k \mathcal{C}(v, r', e^{-\alpha n_k} r', e^{\beta n_k} r') \subset W_f^+(v)$, on a bien : $\mathcal{P}(v) \subset W_f^+(v)$ pour m-presque tout v.

D'après la construction de ξ, pour presque tout v et pour tout $w \in \mathcal{P}(v)$, on a : $\xi(w) = \xi(w) \cap \mathcal{P}(v) = W^+(w) \cap \mathcal{P}(v)$.

Soit maintenant $\mathcal{A}$ une partition finie d'entropie proche de $h_m(\phi)$. Alors, la partition $\hat{\mathcal{P}}' = \hat{\mathcal{P}} \vee \mathcal{A}$ est finie, son entropie est proche de $h_m(\phi)$ et $\mathcal{P}' = \vee_0^\infty \phi^n \hat{\mathcal{P}}'$ vérifie (1) et (2). $\square$

Démonstration de la Proposition 4. Soit ξ la partition mesurable construite dans la Proposition 1. Il nous faut montrer d'une part que $h_m(\phi, \xi)$ est finie et d'autre part que pour toute partition $\mathcal{P}$ d'entropie finie, on a : $h_m(\phi, \xi) \geq h_m(\phi, \mathcal{P})$. Il suffit de considérer les partitions $\mathcal{P}$ construites dans le Fait 5. Soit $\mathcal{P}$ une telle partition ; on définit une nouvelle partition mesurable en posant $\eta = \xi \vee \mathcal{P}$.

Remarquons d'abord que $h_m(\phi, \eta) = h_m(\phi, \xi)$. Puisque η est plus fine que ξ, il suffit de vérifier que $h_m(\phi, \eta) \leq h_m(\phi, \xi) = H_m(\xi \mid \phi\xi)$. Or on a :

$$h_m(\phi, \eta) = H_m(\xi \vee \mathcal{P} \mid \phi\xi \vee \phi\mathcal{P}) = H_m(\xi \mid \phi\xi \vee \phi\mathcal{P}) + H_m(\mathcal{P} \mid \xi \vee \phi\mathcal{P})$$

$$= H_m(\xi \mid \phi\xi \vee \phi\mathcal{P}) + H_m(\phi\mathcal{P} \mid \phi\xi \vee \phi^2\mathcal{P}) = H_m(\xi \vee \phi\mathcal{P} \mid \phi\xi \vee \phi^2\mathcal{P}).$$

De même on a, pour tout $n \geq 0$: $h_m(\phi, \eta) = H_m(\xi \vee \phi^n\mathcal{P} \mid \phi\xi \vee \phi^{n+1}\mathcal{P})$. Or,

$$H_m(\xi \vee \phi^n\mathcal{P} \mid \phi\xi \vee \phi^{n+1}\mathcal{P}) \leq H_m(\xi \mid \phi\xi) + H_m(\mathcal{P} \mid \phi^{-n+1}\xi \vee \phi\mathcal{P}).$$

Comme le dernier terme tend vers 0 quand $n \to \infty$, on a que $h_m(\phi, \eta) \leq h_m(\phi, \xi)$.

Avant de commencer la démonstration de la Proposition 4, nous allons décrire un peu plus les atomes de $\mathcal{P}$. La partition η induit une partition de $\mathcal{P}(v)$, notée $\eta \mid \mathcal{P}(v)$ dont les atomes sont les $\eta(w)$ pour $w \in \mathcal{P}(v)$. Pour m-presque tout v, cette partition est aussi la partition en feuilles instables d'après le Fait 5, (2). Si w et w' sont deux points de $\mathcal{P}(v)$, on pose $d_T(\eta(w), \eta(w')) = |\mathcal{B}_{v^-}(\pi w, \pi w')|$ où $\mathcal{B}$ désigne la fonction de Busemann. On vérifie que d_T est une distance sur $\eta \mid \mathcal{P}(v)$, que nous appellerons "distance transverse". En d'autres termes, on a identifié l'espace des atomes de la partition $\eta \mid \mathcal{P}(v)$ à un intervalle I_v de $\mathbb{R}$ en associant à $\eta(w)$ le point d'intersection $W^+(w) \cap (\phi_t v)_{t \in \mathbb{R}}$; dans cette identification, la distance d_T correspond à la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$. De plus, ϕ induit une isométrie de $(\eta \mid \mathcal{P}(v), d_T)$ sur $(\eta \mid \mathcal{P}(\phi v), d_T)$.

Montrons maintenant que l'entropie $h_m(\phi,\xi) = h_m(\phi,\eta) = H_m(\phi^{-1}\eta \mid \eta)$ est finie. Par définition,

$$H_m(\phi^{-1}\eta \mid \eta) = -\int \log m_{\eta(v)}(\phi^{-1}\eta(v))dm(v),$$

qui, d'après le choix de la partition ξ, vaut aussi :

$$-\int \log m_{\eta(v)}(\phi^{-1}\mathcal{P}(v))dm(v).$$

On définit une fonction mesurable sur M en posant $g(v) = m_{\eta(v)}(\phi^{-1}\mathcal{P}(v))$; on veut donc montrer que $-\log g$ est intégrable.

Fixons un atome $\mathcal{P}(v)$. Pour presque tout v, la fonction g induit une fonction sur l'espace des atomes de $\eta \mid \mathcal{P}(v)$, c'est-à-dire sur l'intervalle I_v ; cet intervalle porte la mesure image de la mesure $m_{\mathcal{P}(v)}$, que nous noterons toujours $m_{\mathcal{P}(v)}$. On définit g_δ comme la moyenne de g relativement à $m_{\mathcal{P}(v)}$ sur l'intervalle $I(w,\delta) \subset I_v$ de centre $\eta(w)$ et de rayon δ pour la distance transverse, c'est-à-dire :

$$g_\delta(w) = \frac{1}{m_{\mathcal{P}(v)}(I(w,\delta))}\int_{I(w,\delta)} g dm_{\mathcal{P}(v)}.$$

On introduit la fonction "maximale" $g_*(w) = \inf_\delta g_\delta(w)$.

Le Théorème de dérivation de Lebesgue donne $\lim_{\delta\to 0} g_\delta(w) = g(w)$, pour presque tout $w \in I_v$; appliqué à chaque atome, on a donc $g_\delta(v) \to g(v)$, pour presque tout v.

D'autre part, la partition $\mathcal{P}$ est d'entropie finie; donc pour presque tout v, la partition $\phi^{-1}\mathcal{P}|\mathcal{P}(v)$ est d'entropie finie. En raisonnant, comme dans [LS, p. 525] on trouve que $-\log g_*$ est intégrable et que :

$$-\int_{\mathcal{P}(v)} \log g_* dm_{\mathcal{P}(v)} \leq H_{m_{\mathcal{P}(v)}}(\phi^{-1}\mathcal{P}) + \log 2 + 1.$$

En intégrant par rapport à m, il vient, puisque $g \geq g_*$:

$$-\int \log g dm \leq -\int \log g_* dm \leq H_m(\phi^{-1}\mathcal{P} \mid \mathcal{P}) + \log 2 + 1.$$

L'entropie de ξ est donc finie.

Montrons enfin que $h_m(\phi,\eta) \geq h_m(\phi,\mathcal{P})$, ce qui démontrera la Proposition 4, puisque $h_m(\phi,\mathcal{P})$ peut être choisie arbitrairement proche de $h_m(\phi)$. Nous utiliserons le résultat suivant.

Lemme 6. *Soit $c \in]0,1[$. Pour m-presque tout v, on a :*

$$\liminf_{n\to\infty} -\frac{\log m_{\mathcal{P}(v)}(I(v,e^{-cn}))}{n} \geq (1-c)(h_m(\phi,\mathcal{P}) - h_m(\phi,\eta) - c).$$

Démonstration. Nous allons adapter l'argument de [LY, Proposition 5.1]. Notons p la partie entière de $n(1-c)$; fixons $\delta > 0$. On a :

$$m_{\mathcal{P}(v)}(I(v,\delta)) \leq \Pi_0^{p-1} \frac{m_{\mathcal{P}(\phi^k v)}(I(\phi^k v,\delta))}{m_{\mathcal{P}(\phi^{k+1} v)}(I(\phi^{k+1} v,\delta))}.$$

La mesure m étant ϕ-invariante et la partition $\mathcal{P}$ décroissante, on a, par la propriété de transitivité des mesures conditionnelles que, pour m-presque tout w et pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathcal{P}(\phi w)$:

$$m_{\mathcal{P}(\phi w)}(A) = \frac{m_{\mathcal{P}(w)}(\phi^{-1}A)}{m_{\mathcal{P}(w)}(\phi^{-1}\mathcal{P}(w))}.$$

Appliquons cette égalité aux points $\phi^k v$ et aux boréliens $I(\phi^k v, \delta)$ pour $k = 0, 1, \cdots, p-1$; on obtient alors

$$\frac{1}{n} \log m_{\mathcal{P}(v)}(I(v, \delta)) \leq I_n(v, \delta) + J_n(v), \quad \text{où}$$

$$I_n(v, \delta) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \log \frac{m_{\mathcal{P}(\phi^k v)}(\phi^{-1} I(\phi^{k+1} v, \delta))}{m_{\mathcal{P}(\phi^k v))}(I(\phi^k v, \delta))} \quad \text{et}$$

$$J_n(v) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \log m_{\mathcal{P}(\phi^k v)}((\phi^{-1}\mathcal{P})(\phi^k v)).$$

D'après le Théorème ergodique, pour m-presque tout v, on a, lorsque $n \to \infty$:

$$J_n(v) \to -(1-c) H_m(\phi^{-1}\mathcal{P} \mid \mathcal{P}) = -(1-c) h_m(\phi, \mathcal{P}).$$

Par ailleurs, $\phi^{-1} I(\phi^{k+1} v, \delta) = I(\phi^k v, \delta) \cap \phi^{-1}\mathcal{P}(\phi^k v)$; donc,

$$I_n(v, \delta) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \log g_\delta(\phi^k(v)).$$

Comme pour presque tout v, $g_\delta(v) \to g(v)$, il existe une fonction mesurable $v \to \delta(v)$ telle que $-\log g_\delta(v) \leq -\log g(v) + c/2$, dès que $\delta \leq \delta(v)$. On a vu plus haut que $-\int \log g_* dm < \infty$; donc pour une certaine constante $\delta_c > 0$ on a $\int_{\{\delta(v) \leq \delta_c\}} -\log g_*(v) dm(v) \leq c/2$. Posons : $A_c = \{v \in M \mid \delta(v) > \delta_c\}$. Pour tout entier n vérifiant $e^{-cn} \leq \delta_c$, on a :

$$I_n(v, e^{-cn}) = \frac{1}{n} \sum_{\phi^k v \in A_c} + \frac{1}{n} \sum_{\phi^k v \notin A_c} \leq \frac{1}{n} \sum_{\phi^k v \in A_c} (-\log g(\phi^k v) + \frac{c}{2}) - \frac{1}{n} \sum_{\phi^k v \notin A_c} \log g_*(\phi^k v).$$

D'où, d'après le théorème ergodique, presque tout v vérifie :

$$\limsup I_n(v, e^{-cn}) \leq (1-c)(\int -\log g dm + \frac{c}{2} + \int_{M - A_c} -\log g_* dm) \leq (1-c)(\int_M -\log g dm + c).$$

En utilisant que $\int_M -\log g dm = h_m(\phi, \eta)$, on obtient le Lemme 6. □

Pour terminer la démonstration de la Proposition 4, on remarque que le terme de gauche dans l'inégalité du Lemme 6 est majoré par c. En effet, pour toute mesure de Radon ν sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on a, pour ν-presque tout x :

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log \nu(I(x, \epsilon))}{\log \epsilon} \leq 1.$$

Appliqué à la mesure $m_{\mathcal{P}(v)}$ sur l'intervalle $\eta \mid \mathcal{P}(v)$, on trouve que pour m-presque tout point de M,

$$\liminf_{n\to\infty} -\frac{\log m_{\mathcal{P}(v)}(I(v,e^{-cn}))}{n} \leq c.$$

En faisant tendre c vers 0 dans l'inégalité obtenue au Lemme 6, on obtient alors : $h_m(\phi,\eta) \geq h_m(\phi,\mathcal{P})$. □

Pour terminer cette section, supposons maintenant que la mesure de Patterson-Sullivan μ est finie et soit ξ une partition μ-mesurable subordonnée au feuilletage W^+. Nous allons maintenant interpréter les mesures conditionnelles $\mu_{\xi(v)}$ en termes des mesures μ_v^+ (cf. §1). On peut recouvrir un ensemble de mesure pleine de T^1X par une famille d'ouverts feuilletés $\mathcal{U}_i$ comme ceux de §1. On définit alors une partition ι de T^1X dont les atomes sont les ouverts U_w pour $w \in U_i$ et le complémentaire de $\cup\mathcal{U}_i$: cette partition est mesurable.

Considérons la partition $\xi' = \xi \vee \iota$ qui raffine ξ et ι. D'après la structure de produit local de la mesure μ, et puisque pour μ-presque tout v, l'atome $\xi'(v)$ est un voisinage relativement compact de v sur W_v^+, et a donc une μ_v^+-mesure positive, on a :

$$\mu_{\xi'(v)} = \frac{1}{\mu_v^+(\xi'(v))}\mu_v^+.$$

La *propriété de transitivité* des mesures conditionnelles [Ro] dit aussi que pour μ-presque tout v, on a :

$$\mu_{\xi'(v)} = \frac{1}{\mu_{\xi(v)}(\xi'(v))}\mu_{\xi(v)}.$$

On en déduit que pour μ-presque tout v, on a :

$$\mu_{\xi(v)} = \frac{1}{\mu_v^+(\xi(v))}\mu_v^+.$$

§3. Démonstration du Théorème 2.

Les outils sont maintenant en place pour démontrer le Théorème 2. Rappelons que l'entropie $h_m((\phi_t))$ d'une mesure m pour un flot (ϕ_t) est par définition celle de ϕ_1 le temps 1 du flot ; par homogénéité, c'est aussi, pour $\tau > 0$, $h_m((\phi_t)) = \frac{1}{\tau}h_m(\phi_\tau)$. Pour calculer l'entropie $h_m(\phi_\tau)$, nous utiliserons une partition m-mesurable fournie par la Proposition 1. Pour construire ces partitions, une hypothèse était que la mesure m soit ergodique pour ϕ_τ : nous utiliserons le lemme bien connu suivant (cf. [PS], Theorem 1, pour un énoncé plus général). Par souci de clarté, nous en proposons une démonstration.

Lemme 7. *Soit (M,m) un espace de probabilité tel que $L^2(M,m)$ soit séparable. Soit (T_t) un groupe à 1 paramètre de transformations de M préservant la mesure. Si m est ergodique pour le flot (ϕ_t), alors pour tous les temps $\tau \in \mathbb{R}$, sauf ceux d'un ensemble au plus dénombrable, m est ergodique pour la transformation ϕ_τ.*

Démonstration. On note (U_t) le groupe de transformations unitaires de $L^2(M,m)$ induit par l'action de (T_t) sur M. Soit H le sous-espace de $L^2(M,m)$ formé des fonctions d'intégrale nulle. Soit τ un temps tel que ϕ_τ n'est pas ergodique. Alors U_τ fixe un vecteur non-nul $v \in H$. Soit K le sous-espace fermé de H engendré par l'orbite (U_tv). La représentation de $\mathbb{R}$ restreinte à K se factorise par une représentation du cercle $\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$. L'espace K est donc somme orthogonale, indexée par

$\mathbb{Z}$, de sous-espaces K_n, correspondants aux caractères $t \to e^{2i\pi nt/\tau}$ du groupe $\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$. L'ergodicité du flot (T_t) signifie que la représentation de $\mathbb{R}$ n'a pas de vecteur non-nul invariant; donc $K_0 = \{0\}$. Soit $K_n \neq \{0\}$, l'un de ces sous-espaces, et $y \neq 0$ un vecteur de K_n : on a $U_t y = e^{2i\pi nt/\tau} y$. Or, si y, y' sont deux vecteurs de H associés à des caractères différents $t \to e^{2i\pi nt/\tau}$ et $t \to e^{2i\pi n't/\tau'}$ (c'est-à-dire tels que $n/\tau \neq n'/\tau'$) alors y et y' sont orthogonaux. Comme H est séparable, on en déduit le lemme 7. □

Nous pourrons donc toujours choisir, une mesure de probabilité ergodique m étant fixée, un temps $\tau > 0$ tel que m soit ergodique pour ϕ_τ.

Nous allons d'abord montrer que lorsque la mesure de Patterson-Sullivan μ est finie, son entropie est égale à $\delta(\Gamma)$. D'après le Théorème de Hopf, si μ est finie, alors elle est ergodique pour le flot (ϕ_t). Soit $\phi = \phi_\tau$ un temps tel que μ est ergodique pour ϕ_τ et choisissons une partition μ-mesurable vérifiant les conditions de la Proposition 1.

Comme on l'a remarqué dans la section §2, on a :

$$\mu_{\xi(v)} = \frac{1}{\mu_v^+(\xi(v))}\mu_v^+.$$

La propriété d'expansion uniforme de μ_v^+ sous l'action de ϕ_τ se traduit alors par :

$$-\log \mu_{\xi(v)}(\phi^{-1}\xi(v)) = \delta(\Gamma)\tau + F(v) - F(\phi v)$$

en posant $F(v) = \log \mu_v^+(\xi(v))$. La fonction F est μ-mesurable puisque la partition ξ est μ-mesurable ; elle est finie sur une ensemble de μ-mesure pleine puisque pour μ-presque tout v, l'atome $\xi(v)$ est un voisinage de v sur $W^+(v)$. On voit aussi sur la formule que le cobord $v \to F(\phi v) - F(v)$ est majoré par $\delta(\Gamma)\tau$. On utilise alors le Lemme classique suivant. Ne connaissant pas de référence précise, nous en proposons une démonstration qui nous a été suggérée par Emmanuel Lesigne.

Lemme 8. *Soit T une transformation d'un espace de probabilité (M, m) et soit $H : M \to \mathbb{R}$ une fonction m-mesurable. Supposons que le cobord $h = H \circ T - H$ a une partie négative intégrable ; alors h est intégrable et $\int_M hdm = 0$.*

Démonstration. Supposons que la mesure m est ergodique. Par hypothèse, $\int_M h^-(v)dm(v) < \infty$; donc, d'après le théorème ergodique, $(\frac{1}{N}\sum_0^{N-1} h^- \circ T^k(v)) \to \int_M h^-(v)dm(v)$ quand $n \to \infty$, pour m-presque tout v. Si h^+ n'est pas intégrable, $\int_M h^+(v)dm(v) = \infty$; alors, toujours d'après le théorème ergodique, pour m-presque tout v, la suite $(\frac{1}{N}\sum_0^{N-1} h^+ \circ T^k(v)) \to \infty$ lorsque $N \to \infty$. Donc $(\frac{1}{N}\sum_0^{N-1} h \circ T^k(v)) \to \infty$ pour m-presque tout v, c'est-à-dire : $\lim \frac{1}{N}(H \circ T^N(v) - H(v)) = \infty$, pour m-presque tout v. Or, comme H est à valeurs finies sur un ensemble de mesure pleine, H/N converge vers 0 en probabilité ; et il en est de même pour $H \circ T^N/N$, la mesure m étant T-invariante. Donc h est intégrable. Par le théorème ergodique, ses sommes de Birkhoff tendent alors vers $\int_M h$, m-presque partout. Comme nous l'avons vu, ces sommes tendent vers 0 en probabilité. On a donc : $\int_M hdm = 0$.

Lorsque m n'est pas ergodique, on note $\mathcal{I}$ la tribu des ensembles T-invariants. Puisque h est intégrable, on a encore que $(\frac{1}{N}\sum_0^{N-1} h \circ T^k(v))$ converge presque partout vers $\mathbb{E}(h/\mathcal{I})$, à valeurs dans $]-\infty, \infty]$. Si h^+ n'est pas intégrable, $\mathbb{E}(h/\mathcal{I})$ est d'espérance infinie ; en particulier, $\lim(\frac{1}{N}\sum_0^{N-1} h \circ T^k(v))$ est supérieur à 1 sur un ensemble de mesure > 0, ce qui contredit que $\frac{1}{N}(H \circ T^N - H)$ tend vers 0 en probabilité. Donc h est intégrable; de plus $\int hdm = 0$, car sinon on aboutirait à la même contradiction. □

Une application du Lemme 8 lorsque $m = \mu$, $T = \phi$ et $H = -F$ donne :

$$-\int \log \mu_{\xi(v)}(\phi^{-1}\xi(v))d\mu(v) = \delta(\Gamma)\tau.$$

Donc, d'après la Proposition 4, $h_\mu(\phi_\tau) = \delta(\Gamma)\tau$. L'entropie de μ pour le flot (ϕ_t) est donc bien égale à $\delta(\Gamma)$.

Supposons maintenant que m est une mesure de probabilité finie, invariante par le flot (ϕ_t) et d'entropie h_m ; on veut montrer que $h_m \leq \delta(\Gamma)$ et que l'égalité $h_m = \delta(\Gamma)$ entraîne que $m = \mu$, lorsque μ est finie et aboutit à une contradiction lorsque μ est infinie. Pour cela, on ne perd rien à supposer que m est ergodique. Choisissons, comme précédemment, un temps $\tau > 0$ tel que m est ergodique pour ϕ_τ et une partition m-mesurable ξ vérifiant les conclusions de la Proposition 1. D'après la Proposition 4, $h_m(\phi_\tau) = \tau h_m$ est égale à $H_m(\phi_\tau^{-1}\xi \mid \xi)$.

Nous allons montrer dans un premier temps que les conditionnelles de m et de μ sont égales pour presque tout atome de ξ. Puisque ξ est m-mesurable, les conditionnelles de m sur les atomes de $\xi(v)$ sont bien définies pour m-presque tout v. Il n'en est pas de même pour μ, que nous ne supposons même pas finie pour le moment; toutefois la structure produit de μ permet de définir sur m-presque tout atome $\xi(v)$ une mesure. En effet pour m-presque tout v, $\xi(v)$ est un voisinage de v par construction; en particulier sa μ_v^+-mesure est non-nulle et on peut alors définir une mesure, que nous noterons encore $\mu_{\xi(v)}$, en posant pour tout borélien $A \subset W_v^+$:

$$\mu_{\xi(v)}(A) = \frac{\mu_v^+(A \cap \xi(v))}{\mu_v^+(\xi(v))}.$$

Lorsque μ est une mesure finie, et lorsque ξ est subordonnée à μ, c'est exactement la mesure $\mu_{\xi(v)}$ d'après la fin de la section 2.

La partition ξ étant décroissante et subordonnée au feuilletage instable, $\phi^{-1}\xi \mid \xi(v)$ est une partition de l'atome $\xi(v)$. Notons que, pour $\bar{m}$-presque tout atome $\xi(v)$, la partition $\phi^{-1}\xi \mid \xi(v)$ est au plus dénombrable. On définit pour m-presque tout v

$$\psi(v) = \frac{\mu_{\xi(v)}(\phi^{-1}\xi(v))}{m_{\xi(v)}(\phi^{-1}\xi(v))}.$$

Fait 9. *La fonction ψ définie ci-dessus est m-mesurable. Les fonctions ψ et $\log \psi$ sont m-intégrables.*

Démonstration. Pour voir que ψ est m-mesurable, il suffit de montrer que $\mu_{\xi(v)}(\phi^{-1}\xi(v))$ est m-mesurable, puisque la mesurabilité du dénominateur découle de la m-mesurabilité de ξ. Montrons que $v \to \mu_v^+(\xi(v))$ est m-mesurable, la démonstration pour $v \to \mu_v^+(\phi^{-1}\xi(v))$ étant identique. La partition ξ est la borne supérieure d'une suite croissante de partitions finies ξ_n dont les atomes sont des boréliens : de plus, pour m-presque tout v, l'atome $\xi_n(v)$ est relativement compact lorsque n est assez grand si bien que $\mu_v^+(\xi_n(v))$ converge vers $\mu_v^+(\xi(v))$, m-presque partout. Il suffit donc de montrer que $v \to \mu_v^+(\xi_n(v))$ est m-mesurable. Puisque la partition ξ_n est finie, il suffit en fait de vérifier que pour tout borélien C de T^1X, la fonction $v \to \mu_v^+(C)$ est m-mesurable. Or on a déjà remarqué lorsqu'on a décrit les mesures μ_v^+ que la fonction $v \to \mu_v^+(C)$ est borélienne; elle est donc m-mesurable.

Pour montrer maintenant que la fonction (positive) ψ est m-intégrable, il nous faut voir, d'après la définition de la mesure conditionnelle, que sur l'espace quotient M_ξ, la fonction mesurable

$\xi(v) \to \int_{\xi(v)} \psi(w)dm_{\xi(v)}(w)$ est $\bar{m}$-intégrable. Or, d'après la définition de la mesure conditionnelle, $\int_{\xi(v)} \psi(w)dm_{\xi(v)}(w) = \sum \mu_{\xi(v)}(\phi^{-1}\xi')$, la somme étant prise sur les atomes de $\phi^{-1}\xi$ (en quantité dénombrable) qui sont contenus dans $\xi(v)$; cette somme est évidemment majorée par $\mu_{\xi(v)}(\xi(v)) = 1$ et ψ est bien m-intégrable. On a de plus : $\int_M \psi(v)dm(v) \leq 1$.

Pour voir finalement que $\log\psi$ est intégrable, on remarque que $\log\psi$ est la différence des deux fonctions mesurables négatives $\log\mu_{\xi(v)}(\phi^{-1}\xi(v))$ et $\log m_{\xi(v)}(\phi^{-1}\xi(v))$. L'intégrabilité de la première fonction découle de l'expression $-\log\mu_{\xi(v)}(\phi^{-1}\xi(v)) = \delta(\Gamma)\tau + F(v) - F(\phi v)$ et du Lemme 8; l'intégrabilité de la deuxième de la Proposition 4 et de ce que l'entropie de ϕ_τ est finie. □

Nous allons maintenant appliquer l'inégalité de Jensen. Par définition de ψ, on a $\int_M \psi(v)dm(v) \leq 1$; de plus $\int_M \log\psi(v)dm(v) = -\delta(\Gamma)\tau + H_m(\phi^{-1}\xi \mid \xi)$. D'après Jensen, on a donc : $H_m(\phi^{-1}\xi \mid \xi) - \delta(\Gamma)\tau \leq \log(\int_M \psi(v)dm(v)) \leq 0$, d'où l'inégalité : $h_m \leq \delta(\Gamma)$.

L'hypothèse $h_m = \delta(\Gamma)$ et le cas d'égalité dans l'inégalité de Jensen entraînent alors que $\psi(v) = 1$ m-presque partout. On en déduit que pour m-presque tout v, les mesures conditionnelles $m_{\xi(v)}$ et $\mu_{\xi(v)}$ coïncident sur la tribu engendrée par $\phi^{-1}\xi \mid \xi(v)$. De même, en remplaçant ϕ par ϕ^k, on trouve que pour m-presque tout v, $m_{\xi(v)}$ et $\mu_{\xi(v)}$ coïncident sur la tribu engendrée par $\phi^{-k}\xi \mid \xi(v)$ pour tout $k \geq 1$. Puisque ξ est génératrice (cf. Proposition 1), les mesures $m_{\xi(v)}$ et $\mu_{\xi(v)}$ sont donc égales, pour m-presque tout v.

L'argument de Hopf va nous permettre de conclure à présent que m est nécessairement la mesure de Patterson-Sullivan μ. Fixons une fonction f continue et à support compact sur T^1X. Supposons dans un premier temps que μ est une mesure finie. Alors μ est ergodique d'après le théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan [Su1]. Donc l'ensemble Λ_f des vecteurs $v \in \Lambda(\Gamma)$ tels que $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\phi_s v)ds = \mu(f)$ est de μ-mesure pleine; de plus, par l'uniforme continuité de f, Λ_f est saturé par le feuilletage faiblement stable. Donc, pour toute feuille instable W_v^+, Λ_f est de μ_v^+-mesure pleine; en particulier, pour tout atome $\xi(v)$, l'intersection $\Lambda_f \cap \xi(v)$ est de $\mu_{\xi(v)}$-mesure pleine. Donc, d'après le paragraphe précédent, $\Lambda_f^\mu \cap \xi(v)$ est de $m_{\xi(v)}$-mesure pleine pour $\bar{m}$-presque tout atome $\xi(v)$; autrement dit, Λ_f est de m-mesure pleine. Le Théorème ergodique appliqué cette fois à la mesure m donne alors $m(f) = \mu(f)$. La fonction f étant quelconque, il vient $m = \mu$.

Supposons maintenant que μ est une mesure infinie. Par le théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan, ou bien Γ est convergent, auquel cas le flot (ϕ_t) est complètement dissipatif pour la mesure μ, ou bien Γ est divergent, auquel cas (ϕ_t) est ergodique et complètement conservatif (pour la mesure μ).

Dans le premier cas, pour μ-presque tout v, on a $\lim_{t\to\infty} f(\phi_t v) = 0$, et donc aussi $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\phi_s v)ds = 0$. Par l'argument du paragraphe précédent, il vient $m(f) = 0$ pour tout fonction continue à support compact, ce qui est impossible.

Dans le deuxième cas, il existe sur T^1X une fonction ρ strictement positive, continue, bornée et μ-intégrable telle que pour μ-presque tout v $\lim_{t\to\infty}\int_0^t \rho(\phi_s v)ds = \infty$ (la construction donnée dans [Su1] en courbure constante s'adapte immédiatement au cas où la courbure est variable). Le Théorème ergodique de Hopf en mesure infinie appliqué à la mesure μ, le Théorème ergodique classique appliqué à m donnent, en reprenant encore l'argument précédent :

$$\frac{m(f)}{m(\rho)} = \frac{\mu(f)}{\mu(\rho)}.$$

Ceci n'est possible que si les mesures m et μ sont proportionnelles, alors que nous avions supposé l'une finie, l'autre infinie. Cette contradiction termine la démonstration du Théorème 2.

§4. Entropie topologique.

Avant de démontrer le Théorème 1, nous allons maintenant rappeler la définition de Bowen de l'entropie topologique d'un flot (ϕ_t) agissant sur un espace métrique non-compact (E,d) (cf. [Bowe]). Pour tout $T>0$, on note d_T la distance sur E définie par

$$d_T(x,y)=\sup_{0\le t\le T} d(\phi_t(x),\phi_t(y)).$$

Soit $\epsilon>0$ et soit $K\subset E$ un compact. Un ensemble $D\subset K$ est (K,T,ϵ)-*dense* si pour tout point $x\in K$, il existe $y\in D$ tel que $d_T(x,y)\le\epsilon$. Un ensemble $S\subset K$ est (K,T,ϵ)-*séparé* si pour tous points distincts x, y de S, $d_T(x,y)\ge\epsilon$. On définit alors h_d, *l'entropie de la distance* d en posant :

$$h_d=\sup_K\sup_{\epsilon>0}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log d(K,T,\epsilon)=\sup_K\sup_{\epsilon>0}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log s(K,T,\epsilon),$$

où $d(K,T,\epsilon)$ est le cardinal minimum d'un ensemble (K,T,ϵ)-dense et $s(K,T,\epsilon)$ le cardinal maximum d'un ensemble (K,T,ϵ)-séparé.

Contrairement au cas d'un flot sur un espace compact, cette définition ne dépend pas uniquement de la topologie sur l'espace. On définit l'entropie topologique h_{top} comme l'infimum des entropies h_d, lorsque d décrit l'ensemble des distances sur E, qui définissent la topologie de E.

Dans le cas du flot géodésique sur $\Lambda(\Gamma)$, la distance naturelle est *la distance riemannienne* dont nous donnons une définition. Un vecteur $v\in T^1X$ détermine une géodésique $v_s:\mathbb{R}\to X$ de condition initiale $v_0=v$. Si on munit T^1X de la distance $d(v,v')=\sup_{s\in[-1,1]}d_X(v_s,v'_s)$, où d_X est la distance riemannienne sur X, la distance est équivalente à la distance riemannienne sur T^1X. On définit de la même façon la distance $\tilde d$ sur $T^1\tilde X$.

Démonstration du Théorème 1. Comme il a été dit dans l'introduction, il suffit de montrer que pour toute distance d' sur $\Lambda(\Gamma)$, on a : $h_{d'}\ge\delta(\Gamma)$. Nous allons d'abord considérer le cas de la distance riemannienne d ci-dessus; à la fin, nous indiquerons comment modifier l'argument pour une distance d' quelconque. Nous allons construire, pour tout $\delta'<\delta(\Gamma)$ un compact $K\subset\Lambda$ et une suite d'ensembles (K,T_i,ϵ)-séparés de cardinal $\ge Ce^{\delta' T_i}$, pour une suite (T_i) tendant vers ∞, une constante $C>0$ indépendante de (T_i), et un certain $\epsilon>0$. Nous ne ferons qu'adapter un argument d'un exposé d'Ursula Hamenstädt (cf. [H]) qui portait sur le théorème de Bishop-Jones [BJ].

Si $B(x,C)$ est la boule de rayon C centrée au point $x\in\tilde X$, on note $\mathcal{O}(x,C)$ son *ombre vue de l'origine* o, c'est-à-dire l'ensemble des extrémités dans $\partial\tilde X$ des rayons géodésiques issus de o et passant par un point de $B(x,C)$.

Le résultat suivant est une conséquence de l'inégalité triangulaire pour (1), des théorèmes de comparaison pour (2).

Fait 10.

(1) *Pour tout* $C>0$, *si* $|d_{\tilde X}(o,x)-d_{\tilde X}(o,y)|\le 1$ *et* $d_{\tilde X}(x,y)\ge 4C+1$, *alors les ombres* $\mathcal{O}(x,C)$ *et* $\mathcal{O}(y,C)$ *sont disjointes;*

(2) *Il existe une constante* $C_0>0$ *telle que pour tout* $C\ge C_0$, *pour tout angle* $\theta\le\pi/4$, *il existe* $R(C)$ *telle que si deux points* x *et* y *sont à distance supérieure à* $R(C)$, *et si l'angle* $\widehat{oxy}$ *du triangle géodésique oxy est supérieur à* $\pi-\theta$, *alors* $\mathcal{O}(y,C)\subset\mathcal{O}(x,C)$.

Rappelons finalement la propriété suivante des quasi-géodésiques dans une variété à courbure négative. Il existe une constante $\eta(\theta)$ qui tend vers 0 avec θ telle que : tout chemin c réunion de segments géodésiques faisant des angles supérieurs à $\pi - \theta$, est contenu dans le voisinage tubulaire de rayon $\eta(\theta)$ de la géodésique qui a les mêmes extrémités, dès lors que les longueurs des segments géodésiques sont toutes supérieures à une constante $R(\theta)$.

Fixons $0 < \theta \leq \pi/4$ et $R \geq \max(R(C_0), R(\theta))$; sans perte de généralité, on peut supposer que $\eta(\theta)$ est inférieur au rayon d'injectivité en la projection de o sur X. Soit $\mathcal{G} \subset \Gamma$ un ensemble fini d'éléments tels que :

(1) $|d_{\tilde{X}}(o, go) - R| \leq 1/2$,
(2) $d_{\tilde{X}}(go, g'o) \geq 4C_0 + 1$ pour tous les éléments distincts g, g', et
(3) il existe un vecteur $v \in T^1X$ tel que pour tout $g \in \mathcal{G}$, le segment géodésique $[o, go]$ se projette sur X en un lacet dont les vecteurs tangents en ses extrémités font un angle inférieur à $\theta/2$ avec v.

Pour tout entier $k > 0$, considérons l'ensemble $\mathcal{G}^k$ des mots de longueur k dans le semi-groupe engendré par $\mathcal{G}$. En raisonnant par récurrence sur k, on voit que le Fait 10 et les propriétés vérifiées par l'ensemble $\mathcal{G}$ entraînent d'une part que le cardinal de $\mathcal{G}^k$ est $(\sharp\mathcal{G})^k$, et même que, si g et g' sont deux mots distincts de $\mathcal{G}^k$, les ombres $\mathcal{O}(go, C)$ et $\mathcal{O}(g'o, C)$ sont disjointes.

Alors si $g = g_{i_1}...g_{i_k} \in \mathcal{G}^k$, le segment géodésique $[o, go]$ se projette sur X en un lacet l_g librement homotope à une géodésique fermée c_g par une homotopie qui bouge les points de moins que $\eta(\theta)$: notons v^g le vecteur unitaire tangent à c_g, au point image de o par cette homotopie. Soit $K \subset T^1X$ le compact défini comme le $\eta(\theta)$-voisinage de l'ensemble des vecteurs tangents aux géodésiques l_g, où $g \in \mathcal{G}$. Soit $\epsilon > 0$ une constante strictement inférieure d'une part à $2C - 2\eta(\theta)$, d'autre part au rayon d'injectivité du compact $\pi(K)$.

Fait 11. *Pour tout entier k, l'ensemble des vecteurs v^g lorsque g décrit $\mathcal{G}^k$ est $(K, k(R+1/2), \epsilon)$-séparés.*

Démonstration. La propriété de $\eta(\theta)$ entraîne que les orbites par le flot géodésique des vecteurs v^g, (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents aux géodésiques c_g) sont contenues dans K ; d'autre part, puisque $\eta(\theta)$ est inférieur au rayon d'injectivité de X en le projeté de o, chaque vecteur v^g a un unique relevé $\tilde{v}^g$, basé en un point à distance inférieure à $\eta(\theta)$ de o, et la géodésique qu'il détermine est à distance inférieure à $\eta(\theta)$ du segment $[o, go]$. Donc pour deux mots différents g et g' de $\mathcal{G}^k$, il existe un premier temps $\tau \leq k(R + 1/2)$ où les points $\tilde{v}^g_\tau$ et $\tilde{v}^{g'}_\tau$ sont à distance supérieure à ϵ (puisque $\tilde{v}^g_{k(R+1/2)}$ et $\tilde{v}^{g'}_{k(R+1/2)}$ sont à distance supérieure à $2C - 2\eta(\theta)$). Il en est de même alors pour les points v^g_τ et $v^{g'}_\tau$ d'après le choix de ϵ. $\square$

D'après ce qui précède, s'il existe un point $o \in \tilde{X}$ et un ensemble $\mathcal{G}$ vérifiant (1), (2) et (3) de cardinal $\sharp\mathcal{G} \geq e^{\delta'(R+1/2)}$, alors on aura : $h_d \geq \delta'$. Dans le but de construire ce point et cet ensemble, rappelons d'abord que pour tout groupe Kleinien Γ d'isométries de $\tilde{X}$, le flot géodésique (ϕ_t) restreint à l'ensemble non-errant $\Lambda(\Gamma)$ admet un vecteur u d'orbite dense [Eb] ; soit u un tel vecteur, basé en un point noté $o \in \tilde{X}$. La divergence de la série de Poincaré pour tout exposant $\delta' < \delta(\Gamma)$ entraîne l'existence, pour toute constante $C > 0$, d'une suite (R_i) tendant vers l'infini telle que l'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma$ vérifiant $d_{\tilde{X}}(o, \gamma o) \simeq R_i \pm 1/4$ a un cardinal supérieur à $Ce^{\delta' R_i}$. Soit $0 < \theta < \pi/4$. La compacité de la sphère unité du fibré tangent au point o et la discrétude de l'orbite Γo entraînent alors qu'il existe deux vecteurs v et w dans cette sphère unité tels que : pour tout angle $\theta > 0$, il existe une suite (R_i) tendant vers ∞ et des ensembles $\mathcal{G}(R_i, \theta) \subset \Gamma$ de cardinal supérieur à $e^{\delta' R_i}$ dont les éléments γ, γ' vérifient :

(1) $d_{\tilde{X}}(o, \gamma o) \simeq R_i \pm 1/4$;
(2) $d_{\tilde{X}}(\gamma o, \gamma' o) \geq 4C_0 + 1$;

(3) les vecteurs tangents au point o (resp. γo) aux segments géodésiques $[o, \gamma o]$ se projettent en des vecteurs situés dans le cône d'amplitude $\theta/4$ autour de v (resp. autour de w).

Alors si $v = w$, pour tout angle $\theta \leq \pi/4$, le point o et l'ensemble $\mathcal{G}(R_i, \theta)$ auront les propriétés voulues pour i suffisamment grand.

Lorsque $v \neq w$, on distingue deux cas :

1) $v = -w$. Supposons dans un premier temps v proche de u (le cas où v est proche de $-u$ se traîte de façon analogue). Puisque l'orbite de $-u$ est dense, il existe un lacet géodésique basé en o dont le vecteur tangent est proche de $-u$ en son origine et proche de u en son extrémité ; en outre, plus la longueur de ce lacet est grande, plus ces vecteurs peuvent être rendus proches de $-u$ et u respectivement. Soit a l'élément de Γ représentant la classe d'homotopie d'un tel lacet. Alors le point o et l'ensemble des éléments $a\gamma$ pour $\gamma \in \mathcal{G}(R_i, \theta)$ auront les propriétés voulues si θ est assez petit et i assez grand.

Supposons maintenant que v fait un angle $\varphi > 0$ avec u et avec $-u$. Par la densité de l'orbite de u, il existe des lacets géodésiques basés en o dont les vecteurs tangents en o sont arbitrairement proches de u, faisant par exemple un angle inférieur à $\varphi/4$. Soit $a \in \Gamma$ un élément représentant la classe d'homotopie d'une telle géodésique. Alors le point o et les éléments $a\gamma a$, pour $\gamma \in \mathcal{G}(R_i, \varphi/4)$, auront les propriétés voulues dès que la longueur de a est assez grande, pour tout i assez grand.

2) $v \neq -w$. Dans le triangle isocèle opq dont les côtés en o sont les segments géodésiques déterminés par les vecteurs v et w de longueur ρ, les angles aux sommets p et q tendent vers 0 lorsque ρ tend vers ∞. Notons a le segment géodésique $[q, o]$ et $\mathcal{G}'(R_i, \theta)$ l'ensemble des éléments de Γ représentant les lacets $a^{-1}\gamma a$ basés en q, où $\gamma \in \mathcal{G}(R_i, \theta)$. Alors pour ρ assez grand, le point q et l'ensemble $\mathcal{G}'(R_i, \theta)$ auront d'après le cas 1 les propriétés voulues si θ est assez petit et i assez grand.

Soulignons que pour tout élément g dans le semi-groupe engendré par $\mathcal{G}$, l'orbite du vecteur v_g reste dans K. Si d' est une distance topologiquement équivalente à d, sa restriction à K appartient à la même classe uniforme que celle de d. Ainsi, il existe $\epsilon' > 0$ tel que l'ensemble des vecteurs v^g du Fait 11 soit $(K, k(R+1/2), \epsilon')$-séparé pour d'. On aura donc $h_{d'} \geq \delta(\Gamma)$. $\square$

Démonstration de la Proposition 3. Nous sommes maintenant dans la situation d'un groupe Γ géométriquement fini et nous garderons les mêmes notations pour ces groupes que celles du §1.

Par le Théorème 1, il nous suffit de montrer que pour la distance d, on a : $h_d \leq \delta(\Gamma)$. Fixons un compact $K \subset \Lambda(\Gamma)$ et une constante $\delta' > \delta(\Gamma)$. Nous allons montrer que pour toute constante ϵ suffisamment petite, tout ensemble (K, T, ϵ)-séparé $\mathcal{S}$ a un cardinal inférieur à $\kappa T^2 e^{\delta' T}$ où la constante κ ne dépend pas de T.

Nous supposerons dans la suite que les horoboules $\mathcal{H}_i$, $i = 1, ...l$ ont été choisies de sorte que, pour tout $r \geq 0$, le diamètre de l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\partial\mathcal{H}_i \times \{r\}$ basés en des points de N_i^r est inférieur à $\epsilon/4$; ceci est possible, quitte à remplacer $\mathcal{H}_i$ par $\partial\mathcal{H}_i \times [r_0, \infty[$ pour r_0 assez grand, puisque le diamètre de N_i^r tend vers 0 quand $r \to \infty$ et que la deuxième forme fondamentale des horosphères est comprise entre $\alpha\mathrm{Id}$ et $\beta\mathrm{Id}$. Sans perte de généralité, on peut aussi supposer que la projection $\pi(K)$ est contenue dans le compact C_0.

Choisissons maintenant un compact $\tilde{C}_0 \subset \tilde{X}$ qui se surjecte sur C_0 par la projection de revêtement de $\tilde{X}$ sur X.

Si $v \in K$, le segment géodésique $(v_t)_{t \in [0,T]}$ joint un point de C_0 au point v_T qui est contenu soit dans C_0 soit dans l'un des bouts cuspidaux C_i, $i = 1, ..., l$. On partitionne $\mathcal{S}$ en deux ensembles $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ où $v \in \mathcal{S}^\pm$ selon que v_T est ou n'est pas dans C_0. On va d'abord montrer que le cardinal de $\mathcal{S}^+$ est inférieur à $c_+e^{\delta' T}$ puis que celui de $\mathcal{S}^-$ est inférieur à $c_-T^2e^{\delta' T}$, pour des constantes c_- et c_+ indépendantes de T.

Pour un vecteur $v \in K$, choisissons un relevé $\tilde{v}$ de v qui est contenu dans $\tilde{C}_0$. Alors, si $v_T \in C_0$, $\tilde{v}_T$ appartient à un translaté $\gamma\tilde{C}_0$, pour un certain $\gamma \in \Gamma$. Le nombre de translatés $\gamma\tilde{C}_0$ dont la distance à $\tilde{C}_0$ est inférieure à T est majoré par $ce^{\delta' T}$, où, par définition de l'exposant critique, la constante c ne dépend pas de T. D'après la convexité de la fonction distance entre deux géodésiques, et puisque la courbure de $\tilde{X}$ est minorée, il existe une constante $\epsilon' > 0$, indépendante de $T \geq 1$ telle que pour tous vecteurs $\tilde{v}^1$, $\tilde{v}^2$ de $T^1\tilde{X}$ vérifiant $d_{\tilde{X}}(\tilde{v}^1_0, \tilde{v}^2_0) \leq \epsilon'$ et $d_{\tilde{X}}(\tilde{v}^1_T, \tilde{v}^2_T) \leq \epsilon'$, on a $\tilde{d}_T(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2) \leq \epsilon$; a fortiori, si $v_i \in T^1X$ désigne le projeté de $\tilde{v}_i$, on a $d_T(v^1, v^2) \leq \epsilon$ puisque la projection de revêtement décroît les distances. Soit k le cardinal maximal d'un ensemble $\epsilon'/2$-séparé dans $\tilde{C}_0$. Le cardinal de l'ensemble des relevés de S^+ appartenant à $\tilde{C}_0$ est donc inférieur à $ck^2e^{\delta' T}$; il en est de même pour le cardinal de S^+.

Afin de majorer le cardinal de $\mathcal{S}^-$, nous allons d'abord étudier la "restriction" du flot géodésique à la préimage des pointes, c'est-à-dire à $\pi^{-1}(C_i) \cap \Lambda(\Gamma)$, $i \geq 1$. Fixons $1 \leq i \leq l$ et considérons les vecteurs de $\Lambda(\Gamma)$, basés en des points de $\partial\mathcal{H}_i$ et qui pointent *dans* l'horoboule $\mathcal{H}_i$; pour $t > 0$; notons W_t l'ensemble de ces vecteurs w tels que le segment géodésique $\{w_s\}_{0\leq s\leq t}$ reste contenu dans $\mathcal{H}_i$.

Lemme 12. *Il existe une constante c' telle que tout ensemble (t, ϵ)-séparé de vecteurs contenus dans W_t a un cardinal inférieur à $c't$.*

Démonstration. Considérons un vecteur $w \in W_t$ et $s \to w_s$ la géodésique qu'il détermine. Soient $\tilde{w}$ un relevé de w basé sur $\partial\tilde{\mathcal{H}}_i$, et $s \to \tilde{w}_s$ la géodésique qu'il détermine. Soit $s \to h_w(s)$ (resp. $s \to h_{\tilde{w}}(s)$) la fonction égale à la distance de w_s à l'horosphère $\partial\mathcal{H}_i$ (resp. $\partial\tilde{\mathcal{H}}_i$); on a $h_w = h_{\tilde{w}}$. D'autre part, h_w est une fonction strictement concave inférieure à s ; en particulier, elle atteint son maximum sur l'intervalle $[0, t]$ en un point s_0. Notons $\tilde{w}'$ le vecteur unitaire basé en $\tilde{w}_0$ orthogonal à l'horosphère contenant ce point (c'est-à-dire $\partial\tilde{\mathcal{H}}_i$) et pointé vers le centre de $\tilde{\mathcal{H}}_i$. Lorsque $t > s_0$, notons $\tilde{w}''$ le vecteur tel que $\phi_t(\tilde{w}'')$ soit le vecteur unitaire basé en $\tilde{w}_t$, orthogonal à l'horosphère contenant $\tilde{w}_t$ (c'est-à-dire $\partial\tilde{\mathcal{H}}_i \times \{h_{\tilde{w}}(t)\}$) et orienté vers l'extérieur de $\tilde{\mathcal{H}}_i$. Le résultat suivant compare les trajectoires des vecteurs $\tilde{w}$ et $\tilde{w}'$, $\tilde{w}''$.

Fait 13. *Il existe une constante $c' > 0$, indépendante de w et de t telle que :*

(1) $d(\phi_s(\tilde{w}), \phi_s(\tilde{w}')) \leq c'e^{-\beta(s_0-s)}$, *pour* $s \leq s_0$,
(2) $d(\phi_s(\tilde{w}), \phi_s(\tilde{w}'')) \leq c'e^{-\beta(s-s_0)}$, *pour* $s_0 < s \leq t$.

Démonstration. Par définition de s_0, les points $\tilde{w}_{s_0}$ et $\tilde{w}'_{h(s_0)}$ sont sur la même horosphère; il est facile de voir que leur distance est bornée indépendamment de w. Supposons d'abord $s \leq s_0$. D'après les théorèmes de comparaison [CE] $d_{\tilde{X}}(\tilde{w}_s, \tilde{w}'_s) \leq c_1e^{-\beta(s_0-s)}$ et l'angle entre $\phi_s(\tilde{w})$ et le vecteur normal rentrant à l'horosphère passant par $\tilde{w}_s$ est inférieur à $c_2e^{-\beta(s_0-s)}$; ces inégalités entraînent le résultat cherché. Quand $s \geq s_0$, on se ramène au cas précédent par symétrie. □

La signification géométrique de ce fait est que l'orbite $\{\phi_s(w)\}_{0\leq s\leq t}$ du vecteur $w \in W_t$ est "essentiellement" déterminée par le point s_0 : $\phi_{s_0}(\tilde{w})$ est sur une horosphère à hauteur $\simeq s_0$, $\phi_t(\tilde{w})$ est sur une horosphère à hauteur $\simeq 2s_0 - t$, et il existe $l(\epsilon) > 0$ tel que hors d'un intervalle de longueur $2l(\epsilon)$ centré en s_0, l'orbite de w reste $\epsilon/4$-proche de celle d'un vecteur orthogonal à $\partial\mathcal{H}_i$: sur l'intervale $0 \leq s \leq s_0 - l(\epsilon)$, c'est le vecteur $\tilde{w}'$, sur l'intervalle $s_0 + l(\epsilon) \leq s \leq t$, c'est le vecteur $\tilde{w}''$. Puisque la projection de revêtement $T^1\tilde{X} \to T^1X$ décroît les distances, on a la même description pour l'orbite de $\{\phi_s(w)\}_{0\leq s\leq t}$: si w' et w'' sont les projections dans $T^1(X)$ des vecteurs $\tilde{w}'$ et $\tilde{w}''$, alors l'orbite $\{\phi_s(w)\}$ est $\epsilon/4$-proche de celle du vecteur w' pour $0 \leq s \leq s_0 - l(\epsilon)$, et de celle de w'' pour $s_0 + l(\epsilon) \leq s \leq t$. Mais d'après le choix des horosphères, le diamètre des vecteurs normaux à N_i^r est inférieur à $\epsilon/4$. Donc si w^1 et w^2 sont deux vecteurs de W_t tels que les fonctions h_{w^1} et h_{w^2} atteignent leur maximum en des points s_0^1 et s_0^2 différents de moins que $\epsilon/8$ et tels que les horosphères contenant w_t^1 et w_t^2 sont à distance $\leq \epsilon/8$, alors la distance entre les orbites $\phi_s(w^1)$ et $\phi_2(w^2)$ est inférieure à ϵ sur les intervalles $[0, s_0^1 - l(\epsilon)]$ et $[s_0^1 + l(\epsilon), t]$.

Reprenons la démonstration du Lemme 12. Soit S un ensemble (t, ϵ)-séparé contenu dans W_t. Partitionnons S en sous-ensembles $S_{n,m}$, de sorte que pour $w \in S_{n,m}$, la fonction h_w atteigne son maximum en un point de l'intervalle $[n\epsilon/8, (n+1)\epsilon/8[$ et que $h_w(t)$ appartienne à $[m\epsilon/8, (m+1)\epsilon/8[$. D'après le paragraphe précédent, les instants où les orbites de deux vecteurs distincts de $S_{n,m}$ se séparent appartiennent nécessairement à l'intervalle $[n\epsilon/8 - l_\epsilon, n\epsilon/8 + l_\epsilon]$: le cardinal de $S_{n,m}$ est donc majoré par le cardinal maximal d'un ensemble ϵ-séparé de vecteurs basés dans une boule de rayon $2l_\epsilon$ de $\tilde{X}$. Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit de voir que le nombre de classes $S_{n,m}$ est inférieur à $c(\epsilon)t$. Or, si pour un vecteur $w \in W$, le maximum de h_w est atteint en un point $s_0 \leq t$, on a $h_w(t) \in [2s_0 - t - c, 2s_0 - t + c]$, pour une constante c indépendante de w. Le nombre des classes $S_{n,m}$ est donc inférieur à $C(\epsilon)t$. $\square$

Terminons la démonstration de la majoration du cardinal de $\mathcal{S}$. Par définition, pour $v \in \mathcal{S}^-$, le point v_T est contenu dans l'une des horoboules $\mathcal{H}_i$; il existe donc $\tau(v) \leq T$ tel que le segment géodésique $\{v_s\}_{0 \leq s \leq T}$ entre une dernière fois dans l'une des horoboules $\mathcal{H}_i$ à l'instant $\tau(v)$ et y reste jusqu'à l'instant T. Partitionnons $\mathcal{S}^-$ en sous-ensembles $\mathcal{S}_{n,i}^-$ tels que si $v \in \mathcal{S}_{n,i}^-$ le segment géodésique $\{v_s\}_{0 \leq s \leq T}$ entre dans l'horoboule $\mathcal{H}_i$ au temps $\tau(v) \in [n\epsilon/2, (n+1)\epsilon/2[$ et y reste jusqu'à l'instant T. Choisissons dans $\mathcal{S}_{n,i}^-$ un sous-ensemble $\mathcal{S}'$ de cardinalité maximale, qui soit $((n+1)\epsilon/2, \epsilon)$-séparé dans $\mathcal{S}_{n,i}^-$; le cardinal de $\mathcal{S}'$ est inférieur à $c(\epsilon)e^{\delta' n\epsilon/2}$ d'après la première partie de la démonstration. Par maximalité, tout vecteur de $\mathcal{S}_{n,i}^-$ est $((n+1)\epsilon/2, \epsilon)$-proche d'un vecteur de $\mathcal{S}'$. Puisque $\mathcal{S}$ est (T, ϵ)-séparé, les vecteurs $\{\phi_{\tau(v)}(v)\}$, où v décrit l'ensemble des vecteurs proches d'un même élément v' de $\mathcal{S}'$, forment un ensemble $(T - n\epsilon/2, \epsilon)$-séparé contenu dans $W_{T-(n+1)\epsilon/2}$; d'après le Lemme 12, le cardinal de cette famille est inférieur à $c'(T - n\epsilon/2)$. Finalement, le cardinal de $\mathcal{S}_{n,i}^-$ est majoré par $c'(\epsilon)(T - n\epsilon/2)e^{\delta' n\epsilon/2}$. Le cardinal de $\mathcal{S}^-$ est donc inférieur à $c'(\epsilon)\sum_{n \leq 2T/\epsilon}(T - n\epsilon/2)e^{\delta' n\epsilon/2}$, somme que l'on peut majorer par $c_-(\epsilon)T^2 e^{\delta' T}$. Le cardinal de $\mathcal{S}$ est donc inférieur à $c(\epsilon)T^2 e^{\delta' T}$, ce qui entraîne $h_d \leq \delta'$. Ceci ayant lieu pour tout $\delta' > \delta(\Gamma)$, on a $h_d \leq \delta(\Gamma)$. $\square$

References

[A] A. Ancona, *Exemples de surfaces hyperboliques de type divergent, de mesures de Sullivan associées finies mais non géométriquement finies*, manuscrit non-publié (1999).

[BJ] C. Bishop, P. Jones, *Hausdorff dimension and Kleinian groups*, Acta Math. **179** (1997), 1–39.

[Bou] M. Bourdon, *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT (-1)-espace*, Enseign. Math. **41** (1995), 63–102.

[Bowd] B. Bowditch, *Geometrical finiteness with variable negative curvature*, Duke Math. J. **77** (1995), 229–274.

[Bowe] R. Bowen, *Topological entropy for non-compact sets*, Trans. American Math. Soc. **184** (1973), 125–136.

[BD] R. Bowen et D. Ruelle, *The ergodic theory of Axiom A flows*, Invent. Math. **3** (1975), 181-202.

[CE] J. Cheeger et D. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, vol. 9, North-Holland Mathematical Library, 1975.

[CI] K. Corlette et A. Iozzi, *Limit sets of isometry groups of exotic hyperbolic spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 1507–1530.

[DOP] F. Dal'bo, J.-P. Otal et M. Peigné, *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*, Israel J. Math. **118** (2000), 109–124.

[Eb] P. Eberlein, *Geodesic flows on negatively curved manifolds, I.*, Ann. of Math. **95** (1972), 492–510.

[Ha] U. Hamenstädt, *Conférence à Orléans au séminaire de Systèmes Dynamiques : "Dimension de Hausdorff de l'ensemble limite radial des groupes Kleiniens"* (8 Décembre 1999).

[HK] M. Handel, B. Kitchens, *Metrics and entropy for non-compact spaces*, Israel J. Math. **91** (1994), 253–271.

[K1] V. Kaïmanovitch, *Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds*, Ann. IHP **53** (1990), 361–393.

[K2] V. Kaïmanovitch, *Ergodic properties of the horocycle flow and classification of fuchsian groups*, J. Dynam. Control Systems **6** (2000), 21–56.

[LS] F. Ledrappier et Strelcyn, *A proof of the estimation from below in Pesin's formula*, Ergodic Theory Dynam. Systems **2** (1983), 203–219.

[LY] F. Ledrappier , L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms, I*, Ann. of Math. **2** (1985), 509–539.

[Pa] S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math. **136** (1976), 241–273.

[Pe] M. Peigné, *On the Patterson-Sullivan measure of some discrete groups of isometries*, Israel J. Math. **133** (2003), 77–88.

[Ro] V. A. Rokhlin, *Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations*, Russian Mathematical Surveys (1967), 1–51.

[Su1] D. Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Publ. IHES **50** (1979), 171–202.

[Su2] D. Sullivan, *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Math. **153** (1984), 259–277.

[W] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer Verlag, 1982.

[Y] C. Yue, *The ergodic theory of discrete isometry groups on manifolds of variable negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 4965–5005.

Jean-Pierre Otal : jpotal@umpa.ens-lyon.fr
Marc Peigné : peigne@univ-tours.fr