PROBLEMAS DE TRANSPORTES: COMENTÁRIOS SOBRE A SOLUÇÃO INICIAL DE DUAS ETAPAS

*Getúlio Góes Ferreti **

*Mestre em Ciências, Professor do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina.

1. INTRODUÇÃO

Em um comentário desta revista[1] foi proposto um novo método para a obtenção da solução inicial dos problemas de transportes. O presente trabalho tem por objetivos, mostrar, através de dois exemplos, que a aplicação de tal método não leva sempre a uma solução ótima, e colaborar, assim, para o melhor posicionamento daquele estudo dentro do olgaritmo clássico de solução dos problemas de transportes. Durante o presente estudo, a solução apresentada naquele trabalho será chamada de método das duas etapas. Para melhor localização do problema faz-se, de início, uma breve descrição do problema de transportes.

2. PROBLEMAS DE TRANSPORTES

O problema de programação linear, conhecido como "de transportes", pode ser definido como:

Minimizar $$z = \sum_{j=1}^{n} C_{i_j} X_{i_j} \qquad (1)$$

Sujeito a $$\sum_{j=1}^{n} X_{i_j} = a_i \, , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{i_j} = b_j \, , \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (3)$$

$$X_{i_j} \geqslant 0$$

Esse problema representa a situação clássica em que se têm m fábricas, cada uma delas com produção, por unidade de tempo, igual a a_i unidades, que devem ser distribuídas a n depósitos, cada um deles demandando b_j unidades por unidade de tempo. O mínimo custo unitário de transporte entre uma fábrica i e um depósito j é considerado constante e igual a C_{ij}. Querem-se determinar as quantidades, X_{ij}, que devem ser transportadas da fábrica i ao depósito j, de modo a se incorrer no mínimo custo total de transporte (equação 1), ao mesmo tempo em que fiquem satisfeitas as restrições quanto às produções de cada fábrica (equação 2) e quanto às demandas de cada depósito (equação 3). Em muitos casos reais as restrições (2) e (3) não estão em forma de igualdades, ou seja, não se tem:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4)$$

São os casos em que a soma das quantidades disponíveis nas fábricas não é igual à soma das quantidades demandadas pelos depósitos. Nessas situações, para adaptar o problema real ao clássico de transportes, dado pelas equações (1) até (3), cria-se ou um depósito fictício ou uma fábrica fictícia, com demanda ou produção que faça com que a equação (4) fique satisfeita, ou, equivalentemente, as restrições (2) e (3) tomem a forma de igualdades. Os custos fictícios são considerados nulos. A equação (4) faz com que o problema sempre tenha solução viável, e, conseqüentemente, tenha solução ótima.

Colocando-se o mesmo problema na forma matricial tem-se:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar:} && z = \tilde{c}\,\tilde{x} \\ &\text{Sujeito a:} && A\,\tilde{x} = \tilde{d} \\ & && \tilde{x} \geqslant \tilde{0} \end{aligned}$$

onde $\tilde{c}$ é um vetor linha, cujas n componentes são os custos unitários de transportes, $\tilde{x}$ é um vetor coluna, cujas $m \times n$ componentes são as quantidades que serão transportadas, A é uma matriz de ordem $(m+n) \times (m \times n)$ e $\tilde{d}$ é um vetor coluna cujas $m + n$ componentes são as produções e as demandas. A matriz A apresenta estrutura simples e característica: seus elementos são todos ou zero ou um e seu posto (*rank*) é igual a $m + n - 1$. Essa estrutura de matriz A é que permitiu o desenvolvimento de um algoritmo especial para a solução do problema de transportes. No entanto, apesar de ser um algoritmo especial, ele não deixa de ser apenas uma modificação do algoritmo simples, conservando deste último a característica de exigir uma solução inicial básica viável e, iterativamente, por um processo finito, chegar a uma solução ótima.

3. PROCESSOS PARA OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO INICIAL BÁSICA VIÁVEL

O primeiro passo para a resolução de um problema "de transportes" é a determinação de uma solução inicial, viável. Muitos métodos são utilizados para isso. Dentre eles comentaremos apenas dois. Quando se utiliza computadores, o método mais usado é o canto noroeste, por não exigir muitas comparações entre números e, por isso mesmo, ser computacionalmente bastante rápido. A solução inicial obtida por esse método está na maioria das vezes, bastante longe da ótima. Essa desvantagem, no entanto, é compensada pela sua simplicidade e rapidez de execução. Já o método de Vogel é mais adequado para execuções manuais, pois baseia-se todo ele na comparação entre números, o que em computador é relativamente demorado.

A solução inicial obtida pelo método de Vogel está na maioria dos casos, bastante próxima da ótima; daí a maior razão de seu uso em execuções manuais.

4. COMENTÁRIOS SOBRE O MÉTODO DAS DUAS ETAPAS

A própria autora reconhece que, no seu estudo, não pesquisou um número estatisticamente significativo de casos. Esclarece também, e com muita propriedade, que não espera validade universal para o método, que, no entanto, dá resultados excelentes para certos casos. Em suma, é um método heurístico como o são todos os demais métodos de obtenção de solução inicial. Convém ressaltar que a heurística utilizada, embora não deixada explícita no artigo, é uma heurística excelente. Começar pela linha (coluna) de maior soma de custos e por isso mesmo candidata a possuir os maiores custos individuais, e aproveitar dessa linha (coluna), progressivamente, as células que apresentarem os menores custos quando comparados com os demais custos das colunas (linhas), certamente é uma boa idéia. O que, no entanto, não se pode esperar, é que se chegue sempre a uma solução ótima, mesmo que seja após a aplicação das duas etapas do método.

4.1 Primeiro exemplo

Trata-se de um exemplo em que se procura maximizar o lucro decorrente da venda de um certo produto elaborado em quatro diferentes fábricas, e vendido a cinco mercados distintos. Como o algoritmo de transportes é aplicado mais para problemas de minimização, transforma-se a maximização em minimização através da equação:

$$\text{maximizo de:} z = -\text{mínimo de } (-z) \qquad (5)$$

De acordo então com o quadro 1, a seguir, cada unidade produzida na fábrica 2, se vendida no mercado 1 dará um lucro de 300 unidades monetárias, se vendida no mercado 2 dará um lucro de 325 unidades monetárias etc. Seria o caso de um vendedor monopolista e discriminador de preços. O mercado 6 é fictício e foi criado para que a soma das produções seja igual à das demandas, conforme já se comentou anteriormente.

Quadro 1

Fábricas	Mercados						Totais
	1	2	3	4	5	6	
1	-275	-350	-425	-225	-150	0	300
2	-300	-325	-450	-175	-100	0	250
3	-250	-350	475	-200	-125	0	150
4	-325	-275	-400	-250	-175	0	200
Totais	150	100	75	250	200	125	900

Aplicando o método das duas etapas começa-se pela linha que apresenta maior soma de custos, que é a linha 2, depois passa-se à linha 3 etc. A menor diferença da linha 2 é igual a zero e corresponde à coluna 6. A segunda menor diferença é 25 e aparece nas colunas 1, 2 e 3. Nesses casos de empate optou-se pela alocação a partir da célula de menor custo.

A solução obtida pela primeira etapa do método é apresentada no quadro 2, onde, por simplicidade de escrita, não aparecem os custos.

Quadro 2

Fábricas	Mercados						Totais
	1	2	3	4	5	6	
1				100	200		300
2		50	75			125	250
3		50		100			150
4	150			50			200
Totais	150	100	75	250	200	125	900

O custo total dessa solução é −201.250 (lucro = 201.250), que não é o custo ótimo.

Aplicando a segunda etapa do método, começa-se pela coluna 6, depois passa-se para a 5, e assim por diante. A solução encontrada nessa segunda etapa é a apresentada no quadro 3.

Quadro 3

Fábricas	Mercados						Totais
	1	2	3	4	5	6	
1				175	125		300
2	150	25	75				250
3		75		75			150
4					75	125	200
Totais	150	100	75	250	200	125	900

O custo total dessa solução é de −199.375 (lucro = 199.375), que continua não sendo a ótima, já que uma das soluções ótimas é dada no quadro 4.

O custo ótimo é, então, −206.875 (lucro = 206.875).

Quadro 4

Fábricas	Mercados						Totais
	1	2	3	4	5	6	
1		25		50	200	25	300
2	150					100	250
3		75	75				150
4				200			200
Totais	150	100	75	250	200	125	900

4.2 *Segundo exemplo*[2]

Trata-se do problema, cujos custos unitários, demandas e produção aparecem no quadro 5, abaixo.

A primeira etapa do método produz a solução do quadro 6 a seguir que não é ótima.

O custo dessa solução é de 331

Quadro 5

Fábricas	Depósitos						Totais
	1	2	3	4	5	6	
1	2	1	3	3	2	5	50
2	3	2	2	4	3	4	40
3	3	5	4	2	4	1	60
4	4	2	2	1	2	2	31
Totais	30	50	20	40	30	11	181

Quadro 6

Fábricas	Depósitos						Totais
	1	2	3	4	5	6	
1	21	29					50
2		20	20				40
3	9			40		11	60
4		1			30		31
Totais	30	50	20	40	30	11	181

A segunda etapa do método fornece a solução do quadro 7 a seguir.

O custo total dessa solução é de 358.

Como se pode ver, o método das duas etapas também nesse caso não deu solução ótima, já que uma das soluções ótimas pode ser vista no quadro 8, com custo total ótimo de 330.

Quadro 7

Fábricas	Depósitos						Totais
	1	2	3	4	5	6	
1	30	20					50
2		20	20				40
3		9		40		11	60
4		1			30		31
Totais	30	50	20	40	30	11	181

Quadro 8

Fábricas	Depósitos						Totais
	1	2	3	4	5	6	
1	20	30					50
2		20	20				40
3	10			39		11	60
4				1	30		31
Totais	30	50	20	40	30	11	181

Poder-se-ia continuar a apresentação de inúmeros exemplos em que o método das duas etapas não leva a uma solução ótima.

5. CONCLUSÃO

O método das duas etapas para a obtenção de uma solução inicial para o problema de transportes nem sempre leva a uma solução que também é ótima. Como todos os outros métodos, é mais adequado para um tipo de problema do que para outros. Em vista disso, a segunda etapa do método é perfeitamente dispensável, uma vez que após a primeira etapa, para saber se ela é ótima deve-se utilizar um dos métodos de obtenção de solução ótima (*stepping-stone* ou da dualidade, este último também chamado método do Dantzig). Ora, uma vez verificada a não-otimalidade, e não se podendo garantir que a segunda etapa do método chegará a ele, é mais fácil, por envolver menos cálculos, utilizar o método de Dantzig para se chegar ao ótimo, mesmo porque esse método converge sempre.

A primeira etapa do método, no entanto, é sem dúvida de grande utilidade. ■

[1] Rodrigues, Maria M. E. Mischan. Método dos transportes: desenvolvimento de uma nova solução inicial. *Revista de Administração de Empresas.* v. 15, n. 2, p. 40-6, mar/abr. 1975.

[2] Exemplo tirado de Hadley, G. (ver bibliografia).

BIBLIOGRAFIA

Rodrigues, Maria M. E. Mischan. Método dos transportes: desenvolvimento de uma nova solução inicial. *Revista de Administração de Empresas,* FGV, v. 15, n. 2, p. 40-6, mar/abr. 1975.

Hadley, G. *Linear programming.* Reading. 8.ª ed. Massachussets, Addison-Wesley Publishing, 1974.

Dantzig, G. B. *Linear programming and extensions.* Princeton, New York, Princeton University Press, 1963.

Hillier, SH. & Liebermann, G. J. *Introduction to operations research.* 6. ed. San Francisco, California, Holden Day, 1970.