ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARC AUTHIER

Problème de Dirichlet pour des opérateurs hyperboliques de type positif

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 4 (1971), p. 691-765

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_4_691_0>

PROBLÈME DE DIRICHLET POUR DES OPÉRATEURS HYPERBOLIQUES DE TYPE POSITIF

par MARC AUTHIER

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction.

Le problème de Dirichlet pour des équations linéaires non-elliptiques (en particulier hyperboliques) a été étudié dans différentes voies. D'abord pour l'équation des cordes vibrantes (Hadamard [16], [17], Huber [20 bis], Bourgin-Duffin [5], Berezanski [4 bis]) avec des résultats essentiellement négatifs. Puis, en partant de la décomposition spectrale de certains opérateurs, Louhivaara [30] et Browder [6], [7], ont étudié l'existence de solutions dans $H_0^m(\Omega)$ pour des opérateurs assez généraux d'ordre 2 m. Enfin des problèmes aux limites assez généraux ont été étudiés par Berenzanski [4] et Hörmander [20], mais parmi lesquels on ne retrouve pas toujours le problème de Dirichlet pour un ouvert borné.

On va faire ici une hypothèse de positivité, qui sera essentielle pour l'existence et l'unicité des solutions du problème de Dirichlet (on reviendra de façon plus précise sur la nécessité de cette condition dans une publication ultérieure). On va donc étudier ici le problème aux limites de Dirichlet pour des opérateurs différentiels de type positif posé par M. L. Schwartz dans [39]. On ne considèrera dans ce travail que des opérateurs hyperboliques positifs à coefficients constants. Ces opérateurs ne sont jamais strictement hyperboliques, l'introduction de termes non-principaux soulèvera donc toujours un certain nombre de difficultés (cf. Lax [23], Hörmander [19], Chaillou [9]). C'est pourquoi la plupart des résultats présentés ici concerneront soit des opérateurs se comportant comme des opérateurs homogènes, soit des opérateurs à caractéristiques réelles d'ordre 2 au plus.

L'espace des solutions d'un tel problème de Dirichlet se présente comme complété de $\mathcal{D}(\Omega)$, Ω ouvert convenable de R^n, pour une certaine norme.

L'étude de ce problème comporte donc deux parties distinctes. D'abord l'interprétation de la nullité au bord correspondant au problème posé, ainsi que les problèmes inhomogènes associés. Ensuite l'étude des solutions, et en particulier de leur régularité quand celle du second membre augmente. Dans le présent travail l'accent est mis sur le premier point et le second n'est étudié que dans des cas particuliers. On reviendra sur cette question dans une étude ultérieure basée sur l'étude des solutions au voisinage des points caractéristiques de la frontière, et avec des restrictions (du type P-convexité) sur les ouverts.

On étudiera également dans un autre article l'aspect « opérateur non borné dans L^2 » des problèmes traités ici, ainsi que certaines équations d'évolution liées aux opérateurs hyperboliques positifs.

Voici le plan de l'étude. Dans le chapitre I on a rassemblé un certain nombre de résultats concernant le problème étudié (I-1) et les opérateurs hyperboliques (I-2), en particulier les opérateurs hyperboliques positifs. De cette étude on déduit une classe d'ouverts dans lesquels le problème est bien posé (I-3).

Le chapitre II est consacré à l'étude du problème de Dirichlet dans des ouverts de type « futur » on démontre d'abord une inégalité intégrale de type Hardy (II-1). On étudie ensuite la structure de l'espace des solutions et de l'espace des second membres. On en déduit une expression du noyau de Green à l'aide d'opérateurs de convolution (II-2). La régularité des solutions est étudiée en (III-3).

Le chapitre III contient trois paragraphes, le dernier est résumé ci dessus. Les deux premiers sont consacrés à l'étude du problème de Dirichlet dans des ouverts du même genre que la bande spatiale (définition en III-1-1), d'abord interprétation des problèmes homogènes et inhomogènes (III-1), puis régularité de la solution (III-2).

Au chapitre IV on étudie un espace du type Sobolev dans le plan, mais défini par une seule dérivée partielle; on donne d'abord des propriétés générales de ces espaces (IV-1), puis des théorèmes de traces (IV-2).

De l'étude précédente on déduit, au chapitre V, l'interprétation du problème de Dirichlet homogène pour un opérateur hyperbolique positif ayant deux caractéristiques réelles distinctes seulement (mais d'ordre quelconque) dans un ouvert borné du plan (V-1). On donne ensuite des compléments dans le cas des opérateurs du quatrième ordre. Dans ces deux chapitres on abandonne partiellement la formulation hilbertienne des problèmes pour une formulation dans L^p.

Le chapitre VI enfin est consacré à l'interprétation du problème homogène (VI-1) et inhomogène (VI-2) pour un ouvert borné très régulier de R^n, ainsi qu'à des compléments pour les opérateurs du quatrième ordre (VI-3).

L'interprétation, fondée sur un théorème de trace moins précis que celui du chapitre IV, est moins complète que celle du chapitre V.

Les résultats des chapitres II, III, IV, V ont été en partie résumés dans deux notes aux Comptes-Rendus (Authier [1], [2]). Je remercie M. Lions et M. Schwartz, de m'avoir posé ce problème, de s'être constamment intéressés à mon travail, et de m'avoir permis d'exposer certains des résultats présentés ici au cours de leur Séminaire 1968-1969.

Chapitre I

Ce chapitre contient des rappels et quelques résultats élémentaires concernant: le problème aux limites étudié (extraits en général de [26] et [39]), les opérateurs hyperboliques (extraits de [12], [19], [25], [33] et [43]), les opérateurs hyperboliques positifs, et les ouverts dans lequel le problème considéré est défini.

I-1 : Le problème de Dirichlet pour les opérateurs de type positif.

I-1-1 : *Définitions et généralités.*

Soit $P(D)$, $D = -i\dfrac{\partial}{\partial x}$, un opérateur différentiel linéaire dans un ouvert Ω de R^n, on dit qu'il est positif sur Ω si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\langle P(D)\varphi, \bar{\varphi} \rangle \geq 0. \tag{I-1}$$

Si $P(D)$ est à coefficients constants, il est positif sur tout ouvert Ω de R^n si et seulement si son polynome transformé de Fourier vérifie

$$P(\xi) \geq 0 \qquad \forall\, \xi \in R^n, \tag{I-2}$$

nous nous restreindrons à ce cas. On peut alors définir, quel que soit Ω, un sous-espace hilbertien $\mathcal{W}(P, \Omega)$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ de la façon suivante:

$$\begin{cases} \mathcal{W}(P, \Omega) \text{ est le complété de } P(D)\,(\mathcal{D}(\Omega)) \text{ pour la norme} \\ \| P(D)\varphi \|_{\mathcal{W}} = \langle P(D)\varphi, \bar{\varphi} \rangle^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{I-3}$$

Si cet espace est normal, ce qui aura lieu au moins pour tout ouvert borné, on considère son dual $\mathcal{U}(P, \Omega)$ qui est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'(\Omega)$, et on peut écrire

$$\text{(I-3)} \qquad \begin{cases} \mathcal{U}(P, \Omega) \textit{ est le complété de } \mathcal{D}(\Omega) \textit{ pour la norme} \\ \| \varphi \|_{\mathcal{U}} = \langle P(D)\varphi, \bar{\varphi} \rangle^{\frac{1}{2}} . \end{cases}$$

$P(D)$ est alors un isomorphisme de $\mathcal{U}(P, \Omega)$ sur $\mathcal{W}(P, \Omega)$. C'est le problème aux limites ainsi défini que nous étudierons dans la suite. Nous l'appellerons problème de Dirichlet homogène par l'analogie avec le cas où $P(D) = \sum_{i=1}^{n} D_i^2 + c$, $c > 0$, où l'isomorphisme précédent devient

$$P(D) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

c'est à-dire le problème de Dirichlet homogène habituel.

REMARQUE : Louhivaara [30] et Browder [6] ont étudié un problème de Dirichlet pour des opérateurs non-elliptiques. Il n'a que très peu de rapports avec celui qui est défini ci-dessus. En effet ces auteurs ont cherché des conditions, utilisant la décomposition spectrale des opérateurs, sur les second membres pour qu'il existe des solutions dans $H_0^m(\Omega)$ (pour un opérateur d'ordre $2m$ non nécessairement positif) ; ainsi qu'un théorème d'existence analogue pour le problème inhomogène.

On va également ici définir un problème de Dirichlet inhomogène. Soient Ω_1 et Ω_2, $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_2'$, deux ouverts tels que $\mathcal{W}(P, \Omega_i)$ soit normal, soit $\mathcal{V}(P, \Omega_1)$ l'ensemble des restrictions à Ω_1 des fonctions de $\mathcal{U}(P, \Omega_2)$, cet espace est, pour Ω_1 suffisamment régulier, indépendant de Ω_2, et peut être muni, par passage au quotient, d'une structure de sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit alors $T \in \mathcal{W}(P, \Omega)$ et $v \in \mathcal{V}(P, \Omega)$, il existe $u \in \mathcal{V}(P, \Omega)$, . unique tel que

$$\text{(I-5)} \qquad \begin{cases} P(D)u = T \\ u - v \in \mathcal{U}(P, \Omega). \end{cases}$$

Nous désignerons ce problème sous le nom de problème de Dirichlet inhomogène.

I-1-2 : *Un cas particulier d'opérateurs positifs : les opérateurs* $P(D) = Q^*(D)\, Q(D)$.

Pour ces opérateurs, $Q^*(D)$ désignant l'adjoint de $Q(D)$, les espaces $\mathcal{U}(P, \Omega)$ et $\mathcal{W}(P, \Omega)$ prennent une forme spéciale. Soit $H_0(Q, \Omega)$ le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme

$$\| \varphi \|_Q = \| Q(D) \varphi \|_{L^2} \tag{I-6}$$

une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{W}(P, \Omega)$ soit normal est que $H_0(Q, \Omega)$ soit un espace de distributions. Et, alors, $H_0(Q, \Omega) = \mathcal{U}(P, \Omega)$ en tant qu'espaces de Hilbert. On peut alors remarquer que $\mathcal{W}(P, \Omega) = H'(Q, \Omega)$ est l'image par $Q^*(D)$ de $L^2(\Omega)$. Ces notations coïncident, à une équivalence de norme près, avec celles de [26].

I-2 : Opérateurs hyperboliques.

I-2-1 : *Généralités :*

DÉFINITION : *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants et $N \in R^n$, on dit que $P(D)$ est hyperbolique par rapport à N si et seulement si*

$$\begin{cases} P(N) \neq 0 \ \textit{ et il existe } \tau_0 \textit{ tel que } P(\xi + i\tau N) \neq 0 \\ \textit{pour } \tau < \tau_0 \text{ et } \xi \in R^n . \end{cases} \tag{I-7}$$

Dans le cas où $P(D)$ est homogène il est nécessaire et suffisant pour cela que $P(N) \neq 0$ et $P(\xi + \tau N)$ ait toutes ses racines réelles comme polynôme en τ quelque soit $\xi \in R^n$.

Les opérateurs hyperboliques P sont également caractérisés par le fait d'avoir une solution élémentaire E à support dans un cône $\Gamma(P)$ tel que

$$\Gamma(P) \cap \{x ; \langle x, N \rangle \leq 0\} = \{0\}.$$

Cette propriété permet d'ailleurs de définir des opérateurs de convolution hyperboliques, non nécessairement différentiels et ayant de nombreuses propriétés analogues à ceux ci [21]. On appelera solution élémentaire de Cauchy cette solution élémentaire, elle vérifie en particulier

$$\begin{cases} \text{pour tout } \tau < \tau_0 ,\ e^{\tau \langle x, N \rangle} E \in \mathcal{S}' \quad \text{et} \\ \mathcal{F}(e^{\tau \langle x, N \rangle} E) = (P(\xi + i\tau N))^{-1} . \end{cases} \tag{I-8}$$

On notera $\Gamma_x(P)$ le translaté de $\Gamma(P)$ de sommet x

I-2-2 : *Quelques classes particulières d'opérateurs hyperboliques.*

D'une façon générale tout ce que nous ferons par la suite sera valable pour les opérateurs hyperboliques homogènes, mais le passage aux opérateurs inhomogènes amènera des difficultés.

Nous allons définir trois classes particulières d'opèrateurs hyperboliques qui nous serviront, suivant les cas, à généraliser les résultats obtenus aux opérateurs inhomogènes

La première classe est classique.

DÉFINITION : *On dit que $Q(D)$ est strictement hyperbolique par rapport à $N \in R^n$, si et seulement si sa partie principale $Q_m(D)$ est hyperbolique par rapport à N, et les racines de $Q_m(\xi + \tau N)$ sont toutes simples.*

Ces opérateurs sont hyperboliques, de même force que leur partie principale, et pourront donc, dans de nombreux cas être remplacés par leur partie principale.

La deuxième classe est définie et étudiée dans [33]. Donnons auparavant quelques notations : soit $Q(D)$ un opérateur hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$ $Q_m(D)$ sa partie principale, on a :

$$Q_m(\tau, \xi') = \prod_{k=1}^{m} [\tau - \lambda_{0,k}(\xi')] \tag{I-9}$$

où l'on a posé $\xi_1 = \tau$, $(\xi_2, \dots, \xi_n) = \xi' \in R^{n-1}$. Si l'on pose

$$\frac{\partial^i Q_m}{\partial \tau^i}(\tau, \xi^0) = \prod_{k=1}^{m-i} [\tau - \lambda_{i,k}(\xi')] \tag{I-10}$$

tous les $\lambda_{i,k}$ sont réels. On posera

$$H_{i,j}(\tau, \xi') = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m-i} [\tau - \lambda_{i,k}(\xi')]. \tag{I-11}$$

On peut alors donner la définition :

DÉFINITION : *Soit $Q(D) = Q_m(D) + Q_{m-1}(D) + \dots + Q_0$, un opérateur hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$, on dit que Q est proprement hyperbolique si pour tout $\alpha \in (1, \dots, m)$*

$$Q_{m-\alpha}(\tau, \xi') = \sum_{j=1}^{m-\alpha+1} \gamma_{\alpha,j}(\xi') H_{\alpha-1,j}(\tau, \xi') \tag{I-12}$$

quelque soit $(\tau, \xi') \in R^n$, les fonctions $\gamma_{\alpha,j}(\xi')$ étant bornées sur R^{n-1}.

Tout opérateur strictement hyperbolique est proprement hyperbolique. Cette classe d'opérateurs hyperboliques permet de généraliser les inégalités d'énergie, classiques dans le cas strictement hyperbolique [13].

Enfin, on donnera la définition

DÉFINITION : *Soit* $Q(D)$ *un opérateur différentiel et* $N \in R^n$, *on dit que* $Q(D)$ *est fortement hyperbolique par rapport à* N *si et seulement si* $Q(D)$ *est hyperbolique par rapport à* N *et* $P(\xi + \tau N) = 0$ *n'a que des racines réelles comme polynôme en* τ *quand* $\xi \in R^n$.

Tout opérateur hyperbolique homogène est fortement hyperbolique. L'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \Delta_{x_2, \dots, x_n} + i \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c$, est fortement hyperbolique pour $(a_1, \dots, a_n) \in R^n$ et $4c > \sum_{i=1}^{n} a_j^2$.

I-2-3 : *Les opérateurs hyperboliques positifs.*

On a d'abord.

PROPOSITION I-1 : *Soit* $P(D)$ *fortement hyperbolique par rapport à* N *et positif; alors* $P(D) = Q^*(D) \cdot Q(D)$, *avec* $Q(D)$ *fortement hyperbolique par rapport à* N.

DÉMONSTRATION : $P(\xi + \tau N) = H(\tau, \xi)$ est un polynôme à coefficients réels dont les racines comme polynôme en τ sont toutes d'ordre pair. C'est donc le carré d'un polynôme à coefficients réels [[19] p. 277, lemme 3 2].

$$H(\tau, \xi) = [K[\tau, \xi)]^2$$

donc $P(\xi) = H(0, \xi) = [K(0, \xi)]^2 = Q(\xi)^2$, $Q(D)$ possède visiblement les propriétés voulues.

COROLLAIRE : *Soit* $P(D)$ *un opérateur différentiel hyperbolique positif, il est d'ordre pair* $2m$, *et il existe un opérateur hyperbolique homogène d'ordre* m, $Q_m(D)$ *tel que* $P(D) = [Q_m(D)]^2 + R(D)$, *avec ordre* $R \leq 2m - 1$.

DÉMONSTRATION : La partie principale d'un opérateur hyperbolique positif est elle même positive, et évidemment fortement hyperbolique.

Donnons enfin un autre résultat élémentaire concernant certains opérateurs hyperboliques positifs

PROPOSITION I-2 : *Soit* $P(D)$ *un opérateur hyperbolique positif dont la partie principale* $P_{2m}(D)$ *est le carré d'un opérateur strictement hyperbolique, alors* $P(D)$ *et* $P_{2m}(D)$ *sont de même force.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de montrer d'après [19] (Th. 5.5.7, P. 134) Que $P(D)$ est moins fort que $P_{2m}(D)$. Or.

$$P(D) = \sum_{\alpha=0}^{2m} P_\alpha(D) = [Q(D)]^2 + \sum_{\alpha=0}^{2m-1} P_\alpha(D),$$

il faut donc vérifier que P_α est moins fort que Q^2, ce qui est évident pour $\alpha \leq 2(m-1)$, puisque tout opérateur d'ordre $m-1$ est moins fort qu'un opérateur strictement hyperbolique d'ordre m. Pour $\alpha = 2m-1$, on remarque que $P_{2m-1}(\xi)$ est nécessairement nuls pour tous les ξ de R^n tel que $Q(\xi)$ soit nul, sinon P ne serait pas positif, donc est divisible par $Q(\xi)$ puisque $Q(\xi)$ est sans facteur multiple donc

$$P_{2m-1}(D) = Q(D)\, R(D),$$

$R(D)$ d'ordre $m-1$ est moins fort que $Q(D)$, d'où la proposition.

I-3 : Conditions pour que $\mathcal{W}(P, \Omega)$ soit normal.

I-3-1 : *Remarques préliminaires.*

Soit $P(D)$ un opérateur hyperbolique positif à coefficients constants. On peut faire les remarques suivants. D'abord pour Ω borné, $\mathcal{W}(P, \Omega)$ sera toujours normal ([39] prop. 34, p. 233) : et si $\Omega' \subset \Omega$ et si $\mathcal{W}(P, \Omega)$ est normal, alors $\mathcal{W}(P, \Omega')$ l'est également. D'autre part si P est homogène, $\mathcal{W}(P, R^n)$ n'est certainement pas normal ; en effet il est nécessaire et suffisant pour que

$$\mathcal{W}(P, R^n) \text{ soit normal que } \frac{1}{P(\xi)} \in L^1_{\mathrm{loc}} \cap \mathcal{S}' \text{ ([39]}$$

prop. 33, p. 231). Ceci n'est jamais vérifié sous les hypothèses précédentes.

On est donc amené à chercher des ouverts « les plus grands possibles » tels que $\mathcal{W}(P, \Omega)$ soit normal.

I-3-2 : *Conditions pour que $H_0(Q, \Omega)$ soit un espace de distributions.*

On commence par énoncer un lemme rassemblant deux inégalités que nous utiliserons ensuite.

LEMME I-1 : *Soit $Q(D)$ hyperbolique d'ordre m par rapport à N, et soit $\tau < \tau_0$, alors* *a) il existe une constante $C(\tau)$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$*

$$\| e^{\tau \langle x, N \rangle} \varphi \|_{L^2} \leq C(\tau) \| e^{\tau \langle x, N \rangle} Q(D) \varphi \|_{L^2} \tag{I-13}$$

b) si, de plus, $Q(D)$ est strictement hyperbolique, il existe $C(\tau)$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$

$$\sum_{|\alpha| \leq m-1} \| e^{\tau \langle x, N \rangle} D^\lambda \varphi \|_{L^2} \leq C(\tau) \| e^{\tau \langle x, N \rangle} Q(D) \varphi \|_{L^2}. \tag{I-14}$$

Démonstration : (I-14) se trouve dans [43] (p. 35-37) Par transformée de Fourier (I-13) résulte de l'inégalité

$$| Q(\xi + i \tau T) | \geq Q(N) | \tau - \tau_0 |^m , \tau < \tau_0 ,$$

vérifiée par tout opérateur hyperbolique par rapport à N ([19], p. 137, inégalité 5.6.2).

On peut alors énoncer

Proposition I-3 : *Soit $Q(D)$ un opérateur hyperbolique par rapport à N, alors $H_0(Q, \Omega)$ est un espace de distributions pour tout ouvert Ω contenu dans un demi-espace de la forme $\Omega_a^+ = \{x ; \langle x, N \rangle > a\}$, ou $\Omega_a^- = \{x ; \langle x, N \rangle < a\}$.*

Démonstration : Elle se fait en deux étapes. On montre d'abord que l'injection j de $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_Q$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est continue, ce qui est une conséquence immédiate de l'inégalité (I-13) si Ω est contenu dans Ω_a^+ (et de l'inégalité (I-13) et du fait que $Q(D)$ est aussi hyperbolique par rapport à $-N$, si $\Omega \subset \Omega_a^-$). Il faut ensuite montrer que le prolongement de j à $H_0(Q, \Omega)$ par continuité est encore une injection.

Soit alors (φ_n) une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_Q$ tendant vers 0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $(Q(D)\varphi_n)$ est une suite de Cauchy dans L^2 convergeant vers 0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc convergeant vers 0 dans $L^2(\Omega)$, donc $\| \varphi_n \|_Q$ tend vers 0, ce qui achève la démonstration.

Remarque 1 : On peut dans l'énoncé précédent remplacer N par n'importe quel vecteur de $\mathring{\Gamma}(Q)$.

Remarque 2 : Soit Ω un ouvert convexe de R^2 et $Q(D) = D_1^2 - D_2^2$, alors la condition de la proposition précédente est nécessaire.

Sinon Ω contient une bande $B = \{(x, y) ; a < x + y < b\}$, considérons la suite $\varphi_p \in \mathcal{D}(\Omega)$, définie par

$$\varphi_p(x, y) = \psi\left(\frac{y - x}{p}\right) \theta(x + y)$$

avec $\psi \in \mathcal{D}(R)$, $\theta \in \mathcal{D}(\,]a, b[\,)$, $\| \psi' \|_{L^2} = \| \theta' \|_{L^2} = 1$.

Alors $\| \varphi_p \|_Q = \dfrac{1}{p}$ tend vers 0 et (φ_p) tend vers $\psi(0)\theta(x+y)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

I-3-3 : *Application à* $\mathcal{W}(P, Q)$.

De la proposition I-3 on tire immédiatement la suivante

PROPOSITION I-4 : *Soit* $P(D)$ *un opérateur hyperbolique positif par rapport à* N, Ω *un ouvert contenu dans* Ω_a^+ *ou* Ω_a^- *(notations de la proposition* I-3), *si* $P(D)$ *est minoré (au sens de la relation d'ordre sur les noyaux positifs de* $\mathcal{D}'(\Omega)$) *par un opérateur hyperbolique* $P_1(D) = Q_1^*(D) \cdot Q_1(D)$ *alors* $\mathcal{W}(P, \Omega)$ *est normal.*

DÉMONSTRATION : D'après [39] (proposition 30, p. 214 et Remarque 1, p. 215) il suffit de vérifier, pour que $\mathcal{W}(P, \Omega)$ soit normal, que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{W}(P, \Omega)$. Or la condition de la proposition exprime que $\mathcal{W}(P_1, \Omega) \subset \mathcal{W}(P, \Omega)$, et d'autre part d'après la proposition I-3 on sait que $\mathcal{W}(P_1, \Omega) = [H_0(Q_1, \Omega)]'$ est normal.

En fait nous n'appliquerons cette proposition que dans le cas où $P(D) = P_1(D)$, et même essentiellement seulement lorsque $P(D)$ est hyperbolique et de la forme $P(D) = [Q(D)]^2 + [R(D)]^2$, $Q(D)$ hyperbolique d'ordre m, $R(D)$ d'ordre inférieur ou égal à $m-1$, à coefficients réels.

PROPOSITION I-5 : *Soit* $Q(D)$ *un opérateur strictement hyperbolique et* $P(D) = Q^*(D)\, Q(D)$, *alors* $\mathcal{W}(P, \Omega) = \mathcal{W}(P_m, \Omega)$, *où* P_m *est la partie principale de* P, *pour tout ouvert* Ω *contenu dans une bande* $B = \{x ; a < x_1 < b\}$.

REMARQUE : on a supposé Q hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$. D'autre part cette proposition n'est pas conséquence directe de la proposition I-2 si Ω n'est pas borné.

DÉMONSTRATION : On a la double inégalité (Hörmander [19], ineg. 5.5.7., p. 135) :

$$\frac{1}{2}\left| Q_{\frac{m}{2}}(\xi_1 + i\tau, \xi'') \right| \leq | Q(\xi_1 + i\tau, \xi') | \leq 2 \left| Q_{\frac{m}{2}}(\xi_1 + i\tau, \xi') \right|$$

valable pour τ suffisamment grand. Par transformation de Fourier inverse, elle devient :

$$\frac{1}{2}\left\| e^{\tau x_1} Q_{\frac{m}{2}}(D)\, \varphi \right\|_{L^2} \leq \| e^{\tau x_1} Q(D)\, \varphi \|_{L^2} \leq 2 \left\| e^{\tau x_1} Q_{\frac{m}{2}}(D)\, \varphi \right\|_{L^2}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$. Ce qui, compte tenu de l'hypothèse sur Ω, donne facilement le résultat de la proposition.

REMARQUE : Cette proposition ne s'étend pas aux ouverts contenus dans un demi-espace, sinon en effet $\mathcal{U}(P, \Omega) = H_0(Q, \Omega)$ et $\mathcal{U}(P_m, \Omega) = H_0(Q_{\frac{m}{2}}, \Omega)$ seraient confondus. Or, soient par exemple, $P\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \square^2 + 1 = (\square + i)(\square - i)$ dans le plan. $\Omega = \{(x, y); x > 0\}$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ positive, nous verrons au chapitre II que si E est la solution élémentaire de $\square$ à support dans $\Omega \cup \{0\}$, $E * \varphi \in H_0(\square, \Omega)$, mais il est facile de voir que, $(\square + i) E * \varphi$ n'appartemant pas à $L^2(\Omega)$, $E * \varphi$ n'appartient pas à $H_0(\square + i, \Omega)$.

I-3-4 : *Propriétés élémentaires de $H_0(Q, \Omega)$, Q hyperbolique.*

Soit $Q(D)$ un opérateur hyperbolique et Ω vérifiant les conditions de ~~la proposition~~ I-3 on utilisera souvent les deux remarques suivantes. Si $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ on peut identifier $H_0(Q, \Omega')$ à un sous espace fermé de $H_0(Q, \Omega)$ en prolongeant les fonctions de $H_0(Q, \Omega')$ par 0 à l'extérieur de Ω'. D'autre part $Q(D)$ est une isométrie de $H_0(Q, \Omega)$ sur un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ et, par transposition, $Q^*(D)$ est un homomorphisme de norme 1 de $L^2(\Omega)$ sur $H'(Q, \Omega)$, dual de $H_0(Q, \Omega)$.

Supposons maintenant que Q est strictement hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$ et Ω contenu dans une bande $B = \{x; a < x_1 < b\}$, on peut donner alors les précisions suivantes, par application de l'inégalité I-14.

PROPOSITION I-6 : *On a*

$$H_0^m(\Omega) \subset H_0(Q, \Omega) \subset H_0^{m-1}(\Omega)$$

avec injections continues. Ni l'une, ni l'autre de ces injections ne sont compactes même si Ω est borné.

DÉMONSTRATION : Compte tenu de l'inégalité I-14 seule la deuxième assertion reste à vérifier. Or il est nécessaire pour que les injections soient compactes que $\frac{\tilde{Q}(\xi)^2}{(1 + |\xi|^2)^m}$ (1), pour la première, $\frac{(1 + |\xi|^2)^{m-1}}{\tilde{Q}(\xi)^2}$, pour la seconde, tendent vers 0 quand $|\xi|$ tend vers l'infini (Hörmander [19], p. 38), ce qui n'est visiblement pas vérifié.

---

(1) On désigne par $\tilde{Q}(\xi)^2$ l'expression

$$Q(\xi)^2 = \sum_{\alpha \geq 0} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2$$

Soit toujours Q strictement hyperbolique, et soit Ω borné. Pour étudier le problème inhomogène posé au paragraphe I-1-1, dans Ω pour un opérateur de la forme $P(D) = Q^*(D)\ Q(D) + R(D)$, avec ordre $R(D) < 2$ ordre $Q(D)$ (cf. Proposition I-2). On a le choix, à priori et par analogie avec le cas elliptique, entre deux définitions pour l'espace des solutions :

$$\widetilde{H}(Q, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega) ;\ u \in H^{m-1}(\Omega),\ Q(D)\, u \in L^2(\Omega)\}$$

et

$$H(Q, \Omega) = \mathcal{V}(P, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega) ; \text{ il existe } \Omega' \supset \overline{\Omega} \text{ et } v \in H_0(Q, \Omega') \text{ tels que } u = v/\Omega\}.$$

Dans le cas elliptique et pour des ouverts suffisamment réguliers ces deux espaces coïncident. Ici, à part dans des cas très particuliers ils ne coïncident pas (voir un contre exemple au paragraphe V-1-2).

Le problème posé au paragraphe I-1-1 utilise le second de ces espaces, c'est donc lui que nous étudierons essentiellement dans la suite (voir cependant le chapitre VI, pour un problème posé dans $\widetilde{H}(Q, \Omega)$).

Nous le munirons de la norme

$$\| u \| = \inf_{v \in H_0(P, \Omega') ;\ \overline{\Omega} \subset \Omega',\ v/\Omega = u} \| v \|.$$

I-4 : Remarques diverses.

On peut considérer, bien évidemment, d'autres problèmes aux limites que celui de Dirichlet posé précédemment, pour des opérateurs hyperboliques de type positif. En particulier un opérateur hyperbolique de type positif définit une classe d'opérateurs non bornés dans $L^2(\Omega)$. On peut alors caractériser les réalisations fermées de cette classe par des conditions aux limites, comme l'a fait G. Grubb [15] pour les opérateurs elliptiques. Ceci sera fait dans un travail ultérieur, ici nous ne nous intéressons qu'à l'opérateur minimal (i. e. fermeture de l'opérateur ayant pour domaine $\mathcal{D}(\Omega)$), et sans nous occuper de la caractérisation du domaine de cet opérateur (ce qui est un théorème de régularité) sauf dans des cas particuliers (Ch. II et III). Dans ce même travail ultérieur nous étudierons les réalisations maximales positives, donc celles dont l'opposé est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions, et les problèmes d'évolution liés à ces réalisations (R. S. Phillips [34], [35]).

Il importe de remarquer qu'ici les opérateurs considérés ne sont pas envisagés comme opérateurs non bornés dans $L^2(\Omega)$, mais dans $\mathcal{W}(P, \Omega)$.

CHAPITRE II

Ce chapitre contient l'étude du problème aux limites posé au chapitre précédent pour des ouverts contenant avec chacun de leurs points le cône « futur » de ce point et des opérateurs fortement hyperboliques positifs. On commence par donner une inégalité du type Hardy pour les opérateurs fortement hyperboliques. Ensuite on construit un noyau de Green du problème.

Les résultats de régularité concernant cette situation sont donnés au chapitre suivant.

II-1 : **Préliminaires :**

II-1-1 : *Les hypothèses et les notations.*

Dans tout le chapitre $P(D)$ est un opérateur fortement hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$, positif. Il est donc de la forme $Q(D)^2$, où $Q(D)$ est fortement hyperbolique par rapport à N d'ordre k.

Ω est un ouvert, nécessairement non borné, vérifiant la condition de la proposition I-3 et de plus :

$$\text{(II-1)} \qquad [\text{quel que soit } x_0 \in \Omega,\ \Gamma_{x_0}(Q) \subset \Omega].$$

Les ouverts vérifiant la condition de la proposition I-3 et la condition II-1 seront dits *ouverts de type futur.*

Exemples d'ouverts de type futur :

a) $\qquad \Omega = \{x\,;\ \langle x, N\rangle > a\}$, avec $N \in \mathring{\Gamma}(Q)$

b) $\qquad \Omega = \mathring{\Gamma}_{x_0}(Q)$.

Soit E la solution élémentaire de Cauchy de Q, (elle a donc son support dans $\Gamma(Q)$), on notera pour toute $f \in L^2(\Omega)$, Ω de type futur, $E * f$ la restriction à Ω du produit de convolution de E par le prolongement par 0 à l'extérieur de Ω de f. Soit encore F la solution élémentaire de $Q(-D)$ à support dans $-\Gamma(Q)$. Enfin on notera, lorsque ce sera nécessaire :
p_0 l'opérateur de prolongement par 0

$$p_0 :\ L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(R^n)$$

ϱ_Ω l'opérateur de restriction à Ω

$$\varrho_\Omega : \mathcal{D}'(R^n) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

p un opérateur de prolongement à R^n quelconque

$$p : H'(Q, \Omega) \to \mathcal{D}'(R^n)$$

l'existence d'un tel opérateur de prolongement étant facile à vérifier.

II-1-2 : *Une inégalité intégrale pour les opérateurs fortement hyperboliques.*

Nous allons donner une inégalité qui jouera, pour les opérateurs hyperboliques dans R^n, le rôle de l'inégalité de Hardy pour les fonctions d'une variable.

PROPOSITION II-1 : *On a les deux inégalités :*

$$\text{(II-2)} \qquad a) \quad \int\limits_{x_1 \geq 0} \left| \frac{\partial^\lambda Q}{\partial \xi_1^\lambda}(D)\,\varphi(x) \right|^2 dx \leq c \int\limits_{x_1 \geq 0} |\, x_1^\lambda\, Q(D)\,\varphi(x)\,|^2\, dx$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$

$$\text{(II-3)} \qquad b) \quad \int\limits_{0 \leq x_1 \leq a} \left| \frac{\partial^\lambda Q}{\partial \xi_1^\lambda}(D)\,\varphi(x) \right|^2 dx \leq C \int\limits_{0 \leq x_1 \leq a} |\,(x_1 - a)^\lambda\, Q(D)\,\varphi(x)\,|^2 dx$$

pour tout $a > o$ *et toute* $\varphi \in \mathcal{E}\,(R_{x_1}, \mathcal{D}(R^{n-1}))$ *avec supp* $\varphi \subset \{x\,;\, x_1 \geq 0\}$.

REMARQUE : rappellons que dans tout ce chapitre Q est fortement hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \ldots, 0)$.

DÉMONSTRATION : Elle est basée sur les inégalités analogues pour les fonctions d'une variable pour $\beta > -\dfrac{1}{p}$ et $1 < p < +\infty$.

$$\text{(II-4)} \qquad \int_0^\infty |\, t^\beta\, \varphi(t)\,|^p\, dt \leq C(\beta) \int_0^\infty |\, t^{\beta+1}\, \varphi'(t)\,|^p\, dt$$

$$\text{(II-5)} \qquad \int_0^a |\,(t-a)^\beta\, \varphi(t)\,|^p\, dt \leq C(\beta) \int_0^a |\,(t-a)^{\beta+1}\, \varphi'(t)\,|^p\, dt$$

(II-4) quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(R)$, (II-5) quel que soit $\varphi \in \mathcal{E}(R)$ avec $\varphi(0) = 0$. La première est l'inégalité de Hardy classique, la seconde se démontre par exemple en faisant un raisonnement analogue à celui de Morel ([32], p. 340) démontrant (II-4).

Nous allons démontrer (II-2) en partant de (II 4), le même raisonnement donnerait (II-3) à partir de (II-5). On effectue une transformation de Fourier partielle par rapport à $x' = (x_2, \dots, x_n)$, Q étant fortement hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$ il vient

$$\widehat{Q}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \xi'\right) = c_0 \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\, a_j(\xi')\right) \tag{II-6}$$

où les a_j sont des fonctions réelles. Alors

$$\frac{\partial^\lambda Q}{\partial \xi_1^\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \xi'\right) = c_0 \sum_{\substack{\text{indices} \\ \text{manquants}}} \prod_{h=1}^{k-\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} - i\, a_{j_h}(\xi')\right].$$

Pour démontrer l'inégalité (II-3) il suffit donc de montrer que

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{R^+\times R^{n-1}} \left| \prod_{h=1}^{k-\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} - i\, a_{j_h}(\xi')\right] \cdot \widehat{\varphi}(x_1, \xi')\right|^2 dx_1\, d\xi' \\ &\qquad \leq C \int_{R^+\times R^{n-1}} \left| x_1^\lambda \prod_{j=1}^{k} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} - i\, a_j(\xi')\right] \cdot \widehat{\varphi}(x_1, \xi')\right|^2 dx_1\, d\xi' \end{aligned}\right. \tag{II-7}$$

Posons $\psi(x_1, \xi') = \prod_{h=1}^{k-\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} - i a_{j_h}(\xi')\right] \cdot \widehat{\varphi}(x_1, \xi')$ et soit $j_0 \neq j_1, \dots, j_{k-\lambda}$; posons encore

$$\chi(x_1, \xi') = e^{-i a_{j_0}(\xi') x_1}\, \psi(x_1, \xi')$$

on remarque que $|\psi| = |\chi|$. En appliquant alors l'inégalité (II-4) à ξ' fixé et $\beta = 0$, il vient

$$\int_0^\infty |\chi(x_1, \xi')|^2\, dx_1 \leq C \int_0^\infty \left| x_1 \frac{\partial \chi}{\partial x_1}(x_1, \xi')\right|^2 dx_1$$

soit encore

$$\int_{R^+\times R^{n-1}} |\psi(x_1, \xi')|^2\, dx_1, d\xi' \leq C \int_0^\infty \left| x_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} - i\, a_{j_0}(\xi')\right] \psi(x_1, \xi')\right|^2 dx_1\, d\xi'.$$

Il ne reste qu'à itérer le procédé, avec β prenant les valeurs successives $1, 2, \ldots, \lambda - 1$, pour obtenir l'inégalité (II-7), d'où (II-2).

REMARQUE 1 : On peut obtenir des inégalités plus générales que (II-2) et (II-3) en utilisant les inégalités à une variable de Talenti ([39], [40]); en particulier on peut obtenir des inégalités du type (II-3) pour des opérateurs pour lesquels les racines $a_j(\xi')$ de la décomposition (II-6) ne sont pas nécessairement réelles, mais dans un certain demi-plan.

REMARQUE 2 : Les inégalités (II-2) et (II-3) ne sont en général pas valables pour des opérateurs hyperboliques non fortement hyperboliques. Par exemple, soit $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 1$, E la solution élémentaire de Q à support dans $\{(x, y) : x < |y|, x \geq 0\}$, et $\psi \in \mathcal{D}(R^2)$, positive, à support dans le dem-plan $x \geq 0$, $\varphi = E * \psi$ vérifie les hypothéses de (II 3).

Or pour $\lambda = 1$, le premier membre de (II-3) croit exponentiellement avec a, alors que le second membre reste constant pour a suffisamment grand.

II 2 : **Noyau de Green pour un ouvert de type futur :**

II-2-1 : *Structure de $H_0(Q, \Omega)$.*

Les hypothèses et les notations étant toujours celles de II-1-1, on a la proposition :

PROPOSITION II-2 : $H_0(Q, \Omega) = E * L^2(\Omega)$.

DÉMONSTRATION : On va montrer que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $E * \varphi \in H_0(Q, \Omega)$ et que l'application

$$\varphi \longmapsto E * \varphi$$

se prolonge en une application linéaire continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0(Q, \Omega)$. Ce prolongement est bien la restriction à $L^2_{\bar{\Omega}}(R^n)$ de la convolution par E, application de $\mathcal{D}'_{\bar{\Omega}}(R^n)$ dans $\mathcal{D}'_{\bar{\Omega}}(R^n)$. Donc, compte tenu du fait que Q applique isométriquement $H_0(Q, \Omega)$ sur un sous espace fermé de $L^2(\Omega)$, la proposition sera bien démontrée.

Soient alors $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}(R)$ vérifiant $0 \leq \psi \leq 1$ et $\psi(t) = 1$ pour $|t| \leq 1$, $\psi(t) = 0$ pour $|t| \geq 2$, posons $u = E * \varphi$ et $u_p = \psi\left(\frac{x_1}{p}\right) \cdot u$; $u_p \in \mathcal{D}(\Omega)$. Il suffit donc de montrer qu'il existe une constante C indépen dante de p telle que

$$(\text{II-8}) \qquad \| u_p \|_{H_0(Q,\,\Omega)} \leq C \, \| \varphi \|_{L^2(\Omega)}$$

en effet le résultat cherché sera alors conséquence du raisonnement standard de compacité faible.

On a

$$\| u_p \|_{H_0(Q,\,\Omega)} = \| Q(D) \, u_p \|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_\lambda \frac{c_\lambda}{p^\lambda} \left\| \psi^{(\lambda)}\left(\frac{x_1}{p}\right) \frac{\partial^\lambda Q}{\partial \xi_1^\lambda}(D) \, u \right\|_{L^2(\Omega)}$$

majorons successivement tous les termes de la somme. Pour $\lambda = 0$

$$\left\| \psi\left(\frac{x_1}{p}\right) Q(D) \, u \right\|_{L^2} \leq \| Q(D) \, u \|_{L^2} = \| \varphi \|_{L^2}$$

pour $\lambda > 0$

$$\frac{1}{p^{2\lambda}} \int_\Omega \left| \psi^{(\lambda)}\left(\frac{x_1}{p}\right) \frac{\partial^\lambda Q}{\partial \xi_1^\lambda}(D) \, u \right|^2 dx \leq \frac{C}{p^{2\lambda}} \int_{0 \leq x_1 \leq 2p} \left| \frac{\partial^\lambda Q}{\partial \xi_1^\lambda}(D) \, u \right|^2 dx$$

nous sommes dans les conditions d'application de l'inégalité (II-3), donc en tenant compte du fait que pour $0 \leq x_1 \leq 2p$, $| x_1 - 2p | \leq 2p$ on a l'inégalité:

$$\frac{1}{p^{2\lambda}} \int_\Omega \left| \psi^{(\lambda)}\left(\frac{x_1}{p}\right) \frac{\partial^\lambda Q}{\partial \xi_1^\lambda}(D) \, u \right|^2 dx \leq C \int_\Omega | Q(D) \, u |^2 \, dx = C \, \| \varphi \|_{L^2}^2$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire: *a) Q est un isomorphisme de $H_0(Q, \Omega)$ sur $L^2(\Omega)$.*

b) Q^* est un isomorphisme de $L^2(\Omega)$ sur $H'(Q, \Omega)$.

La vérification est immédiate.

Remarque 1: La proposition précédente est en général fausse pour des opérateurs hyperboliques non fortement hyperboliques. L'exemple de la remarque 2 après la proposition II-1, permet de donner facilement un contre-exemple.

Remarque 2: Dans le cas où Q est non seulement fortement hyperbolique mais de plus homogène, on peut donner une démonstration plus directe de la proposition II-2 (i. e. sans utiliser l'inégalité II 3). L'idée de base est la même: montrer que

$$\varphi \longmapsto E * \varphi$$

se prolonge en une application continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0(Q, \Omega)$. On commence par vérifier que pour $\lambda > 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $g = e^{-\lambda x_1}(E * \varphi) \in \mathcal{D}_{L^2}(R^n)$. Puis on tronque g à l'infini comme dans la démonstration précédente en posant

$$g_p = \psi\left(\frac{x_1}{p}\right) y.$$

Il est alors évident, g appartenant à $\mathcal{D}_{L^2}$, que g_p est bornée dans $H_0(Q, \Omega)$, donc que $g \in H_0(Q, \Omega)$. On achève la démonstration en faisant tendre λ vers 0 : soit (f_n) la suite de fonctions de $H_0(Q, \Omega)$ définie par

$$f_n = e^{-\frac{x_1}{n}} \qquad (E * \varphi)$$

et posons $\chi_n = e^{-\frac{x_1}{n}} \varphi$, alors

$$Q(D) f_n = Q(D)\,[e^{-\frac{x_1}{n}} E * \chi_n]$$

soit

$$\| Q(D) f_n \|^2_{L^2} = \left(\int \left| \frac{Q(\xi)\, \hat{\chi}_n(\xi)}{Q\left(\xi_1 - \frac{i}{n},\ \xi'\right)} \right|^2 d\xi \right)$$

la démonstration sera visiblement achevée si nous vérifions que

$$\left| \frac{Q(\xi)}{Q\left(\xi - \frac{i}{n},\ \xi'\right)} \right| \leq K,$$

K indépendant de n puisque $\| \chi_n \|_{L^2} \leq \| \varphi \|_{L^2}$. Or Q étant homogène en posant $u = n\,\xi$, il vient

$$\left| \frac{Q(\xi)}{Q\left(\xi - \frac{i}{n},\ \xi'\right)} \right| = \left| \frac{Q(u)}{Q(u_1 - i,\ u')} \right|.$$

Or Q étant hyperbolique (Hörmander [19], p. 135). On a

$$\widetilde{Q}(\xi_1 - i,\ \xi') \leq c\, | Q(\xi_1 - i,\ \xi') |.$$

Il nous suffit donc de montrer que $Q(\xi)$ est moins fort que $Q(\xi_1 - i, \xi')$, et pour cela, $Q(\xi_1 - i, \xi')$ ayant sa partie principale hyperbolique, que $Q(\xi_1 - i, \xi')$ est moins fort que $Q(\xi)$. (Hörmander [19], Th. 5.5.7, p. 134). Or

$$| Q(\xi_1 - i,\ \xi') | = \left| \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial^\alpha Q}{\partial \xi_1^\lambda}(\xi) \right| \leq C\, \widetilde{Q}(\xi).$$

II-2-2 : *Structure de $H'(Q, \Omega)$.*

On a vu au paragraphe précédent que la surjection

$$Q^*(D): L^2(\Omega) \longrightarrow H'(Q, \Omega)$$

était, sous les hypothèses de ce chapitre, un isomorphisme. On va chercher l'isomorphisme réciproque, et pour cela donner une caractérisation des distributions de $H'(Q, \Omega)$. Les notations sont celles de II-1-1, p désigne un prolongement *quelconque* des distributions de $H'(Q, \Omega)$.

PROPOSITION II-3 : *a) Soit $T \in H'(Q, \Omega)$, pour toute $\psi \in \mathcal{D}(R)$, la suite (f_n) définie par :*

$$f_n = \varrho_\Omega \left[F * \psi\left(\frac{x_1}{n}\right) pT\right]$$

est une suite bornée de $L^2(\Omega)$.

b) Soit $\psi_n \in \mathcal{D}(R)$, tel que (ψ_n) tende vers 1 dans $\mathcal{E}(R)$, soit $U \in \mathcal{D}'(R^n)$ telle que la restriction de $F * \psi_n(x_1)\, U$ à Ω soit dans $L^2(\Omega)$ et reste bornée dans $L^2(\Omega)$ quand n varie, alors $\varrho_\Omega\, U \in H'(Q, \Omega)$.

DÉMONSTRATION : soit $T \in H'(Q, \Omega)$, on peut d'abord remarquer que Ω étant de type futur f_n est indépendant du prolongement p choisi. Or il existe $f \in L^2(\Omega)$ tel que $Q^*(D) f = T$ [2], on prendra pour prolongement $\widetilde{T}$ de T

$$\widetilde{T} = Q^*(D)\, p_0 f.$$

Un calcul direct montre alors que f_n est la restriction à Ω de

$$\sum_\lambda \frac{c_\lambda}{n^\lambda} \frac{\partial^\lambda Q^*}{\partial \xi_1^\lambda}(D) \left[F * \psi^{(\lambda)}\left(\frac{x_1}{n}\right) \cdot p_0 f\right].$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\frac{1}{n^\lambda} \frac{\partial^\lambda Q^*}{\partial \xi_1^\lambda}(D)\, f_n$$

est bornée dans $L^2(\Omega)$. Pour $\lambda = 0$, c'est évident puisque F est inverse à droite de Q. Pour $\lambda \geq 1$, soit (φ_k) une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ tendant vers f dans $L^2(\Omega)$ avec

$$\| \varphi_k \|_{L^2} \leq \| f \|_{L^2}.$$

Posons

$$f_{n,k} = F * \psi\left(\frac{x_1}{n}\right) \varphi_k$$

---

[2] $Q^*(D) = Q(-D)$ car Q est fortement hyperbolique.

alors $f_{n,k} \in \mathcal{E}(R, \mathcal{D}(R^{n-1}))$ et est nulle pour $x_1 \geq n\,a$ (si supp $\psi \subset [-a, +a]$), on a donc, en supposant que $x_1 \geq 0$ quel que soit $x \in \Omega$, ce qui est toujours possible par changement de coordonnées :

$$\frac{1}{n^{2\lambda}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^\lambda Q^*}{\partial \xi_1^\lambda}(D) f_{n,k} \right|^2 dx \leq \frac{1}{n^{2\lambda}} \int_{0 \leq x_1 \leq a} \left| \frac{\partial^\lambda Q^*}{\partial \xi_1^\lambda}(D) f_{n,k} \right|^2 dx$$

d'où, en utilisant l'inégalité (II-2) et le fait que F est inverse à droite de Q^*

$$\frac{1}{n^{\lambda}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^\lambda Q}{\partial \xi_1^\lambda}(D) f_{n,k} \right|^2 dx \leq \frac{C}{n^{2\lambda}} \int_{R_1^+ \times R^{n-1}} \left| x_1^\lambda\, \psi^{(\lambda)}\left(\frac{x_1}{n}\right) \cdot \varphi_k(x) \right|^2 dx$$

mais le membre de droite est, puisque la fonction à intégrer est nulle pour $x_1 \geq n\,a$, majoré par une quantité de la forme $C \, \| \varphi_k \|_{L^2}^2$, ce qui achève la démonstration du *a*).

Soit donc maintenant $U \in \mathcal{D}'(R^n)$, telle que la restriction g_n à Ω de $F * \psi_n U$ soit bornée dans $L^2(\Omega)$ quand n varie. Il y a une sous-suite $(g_{n,p})$ de la suite (g_n) qui converge faiblement vers un élément $g \in L^2(\Omega)$. On a pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle Q^*(D)\, g, \varphi \rangle = \langle g, Q(D)\, \varphi \rangle = \lim_{p \to \infty} \langle g_{n,p}, Q(D)\, \varphi \rangle$$

$$= \lim_{p \to \infty} \langle Q^*(D)\, g_{n,p}, \varphi \rangle$$

soit encore, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $Q^*(D)\, g = \varrho_\Omega U$, ce qui montre bien que $\varrho_\Omega U \in H'(Q, \Omega)$.

II-2-3 : *Noyau de Green.*

Sous les hypothèses de ce chapitre : P fortement hyperbolique positif, Ω de type futur, nous avons décomposé l'isomorphisme

$$P(D) : H_0(Q, \Omega) \longrightarrow H'(Q, \Omega) \tag{II-9}$$

représentant le problème de Dirichlet en deux isomorphismes partiels

$$Q(D) : H_0(Q, \Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$Q^*(D) : L^2(\Omega) \longrightarrow H'(Q, \Omega)$$

pour lesquels nous avons, dans les propositions II-2 et II-3, construits des isomorphismes réciproques. Ceci nous permet de déterminer le noyau de Green G (i. e. l'isomorphisme réciproque de II-9) du problème posé.

PROPOSITION II-4 : *Soit* $T \in H'(Q, \Omega)$, *la solution* $u \in H_0(Q, \Omega)$ *de* $P(D)\, u = T$, *s'écrit :*

$$u = GT = E * p_0 \left[\varrho_\Omega (F * p\, T) \right].$$

Nous utiliserons ce résultat dans le chapitre suivant pour étudier la régularité des solutions.

CHAPITRE III

Dans ce chapitre on étudie les problèmes de Dirichlet homogène et inhomogène essentiellement pour des opérateurs hyperboliques positifs $P(D) = Q^*(D)\,Q(D)$, où Q est strictement hyperbolique par rapport à $N=(1,0,\dots 0)$, et pour des ouverts « voisins » (voir III-1-1) d'une bande spatiale $B = \{x\,;\, a < x_1 < b\}$. Après l'interprétation du problème on étudie la régularité des solutions.

III-1 : **Interprétation du problème.**

III-1-1 : *Hypothèses et notations.*

Dans tout le chapitre, sauf indication contraire, Q sera un opérateur strictement hyperbolique par rapport à $N=(1, 0, \dots, 0)$ et $\Gamma(Q) \subset \{x\,;\, x_1 > 0\} \cup \{0\}$. On notera Ω_0 le demi-espace $\{x\,;\, x_1 > 0\}$. On supposera tous les ouverts contenus dans Ω_0.

Soit Σ une variété C^∞ de dimension $n-1$, bord d'un ouvert de R^n (nécessairement non borné), on dira qu'elle est *uniformément spatiale* s'il existe un cône fermé γ contenu dans $\{0\} \cup \mathring{\Gamma}(Q)$ tel qu'en chaque point de Σ une normale à Σ soit contenue dans γ.

Les ouverts Ω considérés dans ce chapitre vérifieront alors :

(III-1)

a) il existe deux bandes spatiales $B_0 = \{x\,;\, a_0 < x_1 < b_0\}$ et $B_1 = \{x\,;\, a_1 < x_1 < b_1\}$, $0 < a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$, telles que $B_1 \subset \Omega \subset B_0$.

b) le bord Σ de Ω est une variété C^∞ uniformément spatiale.

En vue d'utiliser au paragraphe suivant les inégalités d'énergies établies dans [10], il faut rappeler une définition de [10]. Soit $Q(x, D)$ un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur R^n, strictement hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$, d'ordre m, alors les racines du polynôme en ξ_1 $Q_m(x, \xi_1, \xi')$ sont toutes réelles et distinctes, et il existe une minoration de la différence de deux telles racines, de la forme

$$|\,\xi_{1,j}(x,\xi') - \xi_{1,h}(x,\xi')\,| \geq c(x)\,|\,\xi'\,|,\ c(x) > 0.$$

On dira que l'hyperplan $x_1 = t$ est *régulièrement spatial*, s'il existe $c > 0$ tel que $c(t, x') \geq c$ pour tout $x' = (x_1, \dots, x_n)$.

La condition (III-1) entraine qu'il existe un difféomorphisme transformant Ω et Q, en une bande $a < x_1 < b$ et un opérateur $Q_1(x, D)$, tels que $x_1 = a$ et $x_1 = b$ soient réguliérement spatiaux pour Q_1.

Les opérateurs $P(D)$ pour lesquels le problème de Dirichlet est étudié sont, sauf indication contraire, de la forme $Q^*(D)\,Q(D)$.

REMARQUE : La proposition I-5 nous permettra de remplacer, pour l'interprétation du problème, Q par sa partie principale.

D'autre part P n'est pas nécessairement fortement hyperbolique a priori (donc on ne peut pas appliquer les résultats du chapitre précédent), mais la remarque précédente permet de remplacer P par un opérateur homogène, donc fortement hyperbolique.

III-1-2 : *Inégalité d'énergie et théorème de trace.*

L'outil essentiel de ce paragraphe est le lemme suivant que l'on trouvera avec une démonstration et des variantes dans Gårding [13] et Dionne [10].

LEMME III-1 : *Soit $Q(x, D)$ un opérateur à coefficients dans $\mathcal{B}(R^n)$, d'ordre m, strictement hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$, tel que $x_1 = a$ et $x_1 = 0$ soient régulièrement spatiaux, alors il existe une constante C telle que*

$$\text{(III-2)} \qquad \sum_{|\alpha| \leq m-1} \left[\int_{R^{n-1}} |D^\alpha u(a, x')|^2\, dx' \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \left\{ \left[\int_{0 \leq x_1 \leq a} |Q(x, D)\, u(x_1, x')|^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \left[\int_{R^{n-1}} |D^\alpha u(0, x')|^2\, dx' \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

pour toute $u \in \mathcal{E}(R, \mathcal{D}(R^{n-1}))$.

C'est à cette inégalité (III-2) que nous nous référerons en parlant d'inégalité d'énergie.

On va noter Σ_1 et Σ_2 les composantes connexes du bord Σ de Ω, et démontrer le théorème de traces suivant

PROPOSITION III-1 : *Soit $\gamma = \gamma_0^1, \dots, \gamma_{m-1}^1, \gamma_0^2, \dots, \gamma_{m-1}^2$, avec $\gamma_j^i\, \varphi = \left.\dfrac{\partial^j \varphi}{\partial x_1^j}\right|_{\Sigma_i}$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, alors γ se prolonge en un homomorphisme surjectif de $H(Q, \Omega)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1}(\Sigma_1) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1}(\Sigma_2)$.*

DÉMONSTRATION : La proposition est évidemment équivalente à la suivante : γ^i, défini sur $\mathcal{D}(\Omega_0)$, se prolonge en un homomorphisme surjectif de $H_0(Q, \Omega_0)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1}(\Sigma_i)$. Or on peut trouver un difféomorphisme transformant Ω_0 en lui même, Σ_i en $x_1 = t$ et Q en $Q_1(x, D)$, tel que $x_1 = t$ soit régulièrement spatial. L'inégalité (III-2) montre alors la propriété de prolongement par continuité. Réciproquement on vérifie l'existence d'un relèvement continu de la façon suivante. Soit $u_j \in \mathcal{D}(\Sigma_i)$, il existe $f_j \in \mathcal{E}(R^+, \mathcal{D}(R^{n-1}))$ telle que :

$$\text{(III-3)} \qquad \begin{cases} Q(D) f_j = 0 \\ \gamma_k^i f_j = \delta_k^j u^j \end{cases}$$

puisque Q est strictement hyperbolique et Σ_i uniformément spatial. Soit alors $\Phi_j = \psi(x_1) f_j$, où ψ vaut 1 sur un voisinage de $[a_0, a_1]$ et appartient à $\mathcal{D}(R^+)$, on obtient, en tenant compte de $Q(D) f_j = 0$.

$$\text{(III-4)} \qquad \| Q(D) \Phi_j \| \leq C \| f_j \|_{H^{m-1}(B_0)}$$

où $B_0 = \overset{\circ}{\widehat{\sup \psi}} \times R^{n-1}$. On transforme alors III-3 par le difféomorphisme déjà employé, soit à l'image de B_0 ; et g l'image de f_j, on a

$$\text{(III 5)} \qquad \| f_j \|_{H^{m-1}(B_0)} \leq C \| g \|_{H^{m-1}(A)} .$$

D'autre part soit $A^- = A \cap \{x ; x_1 < t\}$ et $A^+ = A \cap \{x_1 > t\}$. On a

$$\| g \|_{H^{m-1}(A^-)} \leq \sup_{s \in (0,\, t)} \sum_{|\alpha| \leq m-1} \| D^\alpha g / x_1 = s \|_{L^2(R^{n-1})} .$$

En utilisant alors (III-2), et les inégalités analogues sur A^+, il vient, compte tenu de (III-5), et (III-4)

$$\| Q(D) \Phi_j \| \leq C \| u_j \|_{H^{m-j-1}} .$$

D'où en répétant ce raisonnement pour $j = 1, \dots, n$, et par combinaison linéaire, l'existence du relèvement cherché (on a utilisé l'existence et l'unicité de f_j).

Remarque. Dans le cas où Ω est une bande spatiale, c'est-à-dire où Σ_1 et Σ_2 sont des hyperplans, on peut généraliser les résultats ci-dessus au cas où Q n'est plus strictement hyperbolique.

D'abord, sans restriction sur Q, la détermination des traces sur un hyperplan des fonctions d'un espace du type $H_0(Q, \Omega)$ se ramène à un calcul d'intégrale (Hörmander [19], th. 2.2.8). L'utilisation de cette méthode pour des opérateurs d'ordre élevé, même strictement hyperboliques, est assez compliquée.

D'autre part pour des opérateurs proprement hyperboliques on a des inégalités d'énergie analogues à celles du lemme III-1 (G. Peyser [33]) qui permettent d'obtenir assez rapidement (toujours uniquement si Ω est une bande spatiale) des espaces « encadrant » les espaces de traces, sans toutefois que des encadrements généraux non triviaux (sauf pour Q strictement hyperbolique !) puissent s'obtenir facilement.

III-1-3 : *Interprétation du problème de Dirichlet.*

N. B.: Dans ce paragraphe on utilisera la remarque finale du paragraphe III-1-1, et on supposera donc dans les démonstrations Q homogène, sans perte de généralité pour les résultats.

Dans le cas où Ω vérifie III-1 on peut donner une caractérisation plus simple de $H(Q, \Omega)$ que celle qui est donnée au paragraphe I-3-4.

PROPOSITION III 2 ; *Si Ω vérifie* (III-1) *et Q est strictement hyperbolique,* $H(Q, \Omega) = \{u \,;\, u \in H^{m-1}(\Omega),\ Q(D)\, u \in L^2(\Omega)\}$.

Autrement dit, avec les notations de I-3-4 :

$$H(Q, \Omega) = \widetilde{H}(Q, \Omega).$$

DÉMONSTRATION : Il faut construire un prolongement à Ω_0 des fonctions du deuxième membre qui soit dans $H_0(Q, \Omega_0)$. On notera $\widetilde{H}(Q, \Omega)$ le deuxième membre, soit $u \in \widetilde{H}(Q, \Omega)$ et $\psi \in \mathcal{E}(R)$ avec $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(x_1) = 1$ pour $x_1 \geq b_1$, $\psi(x_1) = 0$ pour $x_1 \leq a_1$ alors $\psi u \in \widetilde{H}(Q, \Omega)$. Considérons les trois fonctions $p_0(\psi u)$ [3], $v = E * p_0[Q(D)(\psi u)]$, $w = E * Q(D)[p_0(\psi u)]$ de $L^2(\Omega_0)$, on remarque que $p_0(\psi u)$ et w coïncident sur Ω_0 (l'unicité du problème de Cauchy) et que v et w coïncident sur Ω puisque E à son support dans $\Gamma(Q)$; enfin $v \in H_0(Q, \Omega_0)$ d'après les résultats du chapitre II. On a trouvé ainsi un prolongement de ψu, on peut construire d'une manière analogue (en prenant la solution élémentaire de Q à support dans $-\Gamma(Q)$ et en tronquant un prolongement de $(1-\psi)\, u$).

Après avoir donné cette caractérisation plus simple des fonctions de $H(Q, \Omega) = \mathcal{V}(P, \Omega)$, on peut donner l'interprétation suivante du problème de Dirichlet dans Ω.

PROPOSITION III-3 (problème homogène): *$H_0(Q, \Omega)$ est le noyau de γ dans $H(Q, \Omega)$.*

DÉMONSTRATION : Soit $\mathcal{N}$ le noyau de γ, $H_0(Q, \Omega) \subset \mathcal{N}$. Pour vérifier l'inclusion opposée on vérifie d'abord facilement que si $u \in \mathcal{N} \cap \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ alors $Q(D)(p_0 u) \in L^2(\Omega_0)$ et que

$$\| Q(D)\, p_0\, u \|_{L^2(\Omega_0)} = \| Q(D)\, u \|_{L^2(\Omega)} .$$

---

[3] p_0 désigne le prolongement par 0 à l'extérieur de Ω des fonctions de $L^2(\Omega)$.

Compte tenu du fait que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H(Q, \Omega)$ ceci entraine que, pour toute $u \in \mathcal{N}$, $Q(D)(p_0 u) \in L^2(\Omega_0)$. Ce résultat, compte tenu de la proposition II-2 et du lemme ci-dessous, entraine facilement la proposition.

LEMME III-2 : $H_0(Q, \Omega) = \{u \,;\, u \in H(Q, \Omega), p_0 u \in H_0(Q, \Omega_0)\}$.

DÉMONSTRATION : L'ensemble du premier membre étant visiblement contenu dans celui du second, on vérifie seulement l'inclusion opposée. Soit $v \in H_0(Q, \Omega_0)$ avec supp $v \subset \bar{\Omega}$, on sait (proposition II-2) que $v = E * w$, avec $w = Q(D)\ v \in L^2(\Omega_0)$ et supp $w \subset \bar{\Omega}$. D'autre part on vérifie facilement que si E^- est la solution élémentaire de Q à support dans $-\Gamma(Q)$, $v = E^- * w$. Soit alors ψ la fonction introduite dans la démonstration de la proposition III-2, et $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ tendant vers V dans $H_0(Q, \Omega_0)$, on vérifie en appliquant l'inégalité (II-3) que $(\psi\varphi_n)$ est bornée dans $H_0(Q, \Omega_0)$. Donc, par un raisonnement standard de faible compacité, ψ_u appartient à l'adhérence de cette suite donc de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0(Q, \Omega_0)$, donc à $H_0(Q, \Omega)$. Le même raisonnement appliqué à $(1 - \psi)\, u$ et utilisant E^- au lieu de E, montre finalement le résultat.

REMARQUE : La démonstration de la proposition III-3 est évidemment une adaptation à notre cas particulier de la démonstration standard de ce type de proposition. Si Ω était une bande, cette proposition est alors contenue par exemple dans la thèse de Hörmander [20], mais la démonstration de [20], basée sur un lemme faisant explicitement intervenir le fait que la frontière est un hyperplan, s'adapte difficilement à notre cas. De même que la démonstration analogue pour les espaces de Sobolev habituels où l'on utilise l'invariance par difféomorphisme de ces espaces.

On peut maintenant rassembler les propositions III-1 et III-3 en une interprétation du problème inhomogène.

PROPOSITION III-4 (problème inhomogène) : *Pour toute distribution* $T \in H'(Q, \Omega)$ *et toute* $f \in \prod_{j=1}^{m-1} H^{m-j-1}(\Sigma_1) \times \prod_{j=1}^{m-1} H^{m-j-1}(\Sigma_2)$ *il existe* $u \in H(Q, \Omega)$ *unique tel que*

$$\text{(III-6)} \qquad \begin{cases} P(D)\, u = Q^*(D)\, Q(D)\, u = T \\ \gamma u = f. \end{cases}$$

III-2 : Régularité dans une bande spatiale.

III-2-1 : *Notations et lemmes préliminaires.*

Soit Ω un ouvert de R^n, s un entier positif, α un multi-entier positif, on utilisera les espaces

$$V_{s,\alpha}(Q,\Omega) = \{T\,;\ D^\lambda T \in H'(Q,\Omega)\ \ \forall\lambda,\ \lambda \leq \alpha,\ |\lambda| \leq s\}$$

$$H_{s,\alpha}(\Omega) \quad = \{f\,;\ D^\lambda f \in L^2(\Omega) \qquad \forall\lambda,\ \lambda \leq \alpha,\ |\lambda| \leq s\}$$

$$U_{s,\alpha}(Q,\Omega) = \{u\,;\ D^\lambda u \in H(Q,\Omega) \quad \forall\lambda,\ \lambda \leq \alpha,\ |\lambda| \leq s\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour les produits scalaires

$$(S,T)_{V_{s,\alpha}} = \sum_{\substack{\lambda\leq\alpha \\ |\lambda|\leq s}} (D^\lambda S, D^\lambda T)_{H'}$$

$$(f,g)_{s,\alpha} = \sum_{\substack{\lambda\leq\alpha \\ |\lambda|\leq s}} (D^\lambda f, D^\lambda g)_{L^2}$$

$$(u,v)_{U_{s,\alpha}} = \sum_{\substack{\lambda\leq\alpha \\ |\lambda|\leq s}} (D^\lambda u, D^\lambda v)_{H}.$$

On écrira en abrégé $V_s(Q,\Omega)$, $H^s(\Omega)$, $U_s(Q,\Omega)$ quand $\alpha = (s, s, \dots, s)$. D'autre part on notera a et b étant deux nombres réels

$$\Omega_a^+ = \{x\,;\ x \in R^n,\ x_1 > a\}$$

$$\Omega_a^- = \{x\,;\ x \in R^n,\ x_1 < a\}$$

$$B = \{x\,;\ a < x_1 < b\}.$$

On supposera de plus Q homogène dans tout le paragraphe III 2. On va d'abord donner quelques propriétés des espaces introduits ci-dessus dans le cas où $\Omega = \Omega_a^+$.

Lemme III-3 : *$\mathcal{D}(\overline{\Omega}_a^+)$ est dense dans $H_{s,\alpha}(\Omega_a^+)$.*

Démonstration : On vérifie d'abord que l'ensemble

$$\mathcal{K} = \{\psi f\,;\ \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}_a^+),\ f \in H_{s,\alpha}(\Omega_a^+)\}$$

est faiblement dense dans $H_{s,\alpha}(\Omega_a^+)$. En effet si $\psi_p \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}_a^+)$ converge vers 1 dans $\mathcal{E}(\Omega_a^+)$ en restant bornée dans $\mathcal{B}(\Omega_a^+)$, la suite $(\psi_p f)$ reste bornée dans $H_{s,\alpha}(\Omega_a^+)$, donc admet une sous suite convergeant faiblement dans

$H_{s,\alpha}(\Omega_a^+)$ et nécessairement vers f puisqu'elle converge aussi dans $\mathcal{D}'(\Omega_a^+)$. Ensuite il suffit d'approximer toutes les fonctions de $\mathcal{K}$ par régularisation pour avoir le résultat.

LEMME III-4 : *Soit* $T \in V_{s,\alpha}(Q, \Omega_a^+)$ *et* $f \in L^2(\Omega_a^+)$ *vérifiant*, $Q(D)f = T$, *alors* $f \in H_{s,\alpha}(\Omega_a^+)$.

REMARQUES : 1) on a écrit Q au lieu de Q^* puisque Q est supposé homogène.

2) ce lemme est un résultat de régularité pour le problème aux limites

$$Q : \; L^2(\Omega_a^+) \longrightarrow H'(Q, \Omega_a^+)$$

étudié au paragraphe II-2-2.

DÉMONSTRATION : Nous utiliserons les résultats et notations du paragraphe II-2-2. On sait déjà que f est unique. Soit pT un prolongement de T à R^n et $\psi \in \mathcal{D}(R)$ valant 1 sur un voisinage de 0, considérons la suite (f_p) de fonctions de $L^2(\Omega_a^+)$ définie par

$$f_p = \varrho_\Omega \left[F * \left(\psi\left(\frac{x_1}{p}\right) pT\right)\right]$$

un calcul direct montre que

$$D^\lambda f_p = \varrho_\Omega \left[\sum_\mu \frac{c_\mu}{p^\mu}\left[F * \psi^{(\mu)}\left(\frac{x_1}{p}\right) p\, D^{\lambda-\mu}\, T\right]\right].$$

Or $D^{\lambda-\mu}\, T \in H'(Q, \Omega)$ quelque soit λ vérifiant $\lambda \leq \alpha$ et $|\lambda| \leq s$; on en déduit que (f_p) est bornée dans $H_{s,\alpha}(\Omega_a^+)$. Il y a donc une sous-suite qui converge faiblement vers $g \in H_{s,\alpha}(\Omega_a^+)$. Or g vérifie $Q(D)\,g = T$, donc $g = f$.

LEMME III-5 : $\mathcal{D}(\overline{\Omega}_a^+)$ *est dense dans* $V_{s,\alpha}(Q, \Omega_a^+)$.

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence évidente des lemmes III-3 et III-4.

III-2-2 : *Régularité dans la bande spatiale* (I) : *La récurrence sur les variables d'espace.*

Le but de ce paragraphe et des prochains est la démonstration du résultat suivant : si $Q(D)$ est strictement hyperbolique par rapport à $N =$

$= (1, 0, \ldots, 0)$ et homogène, et si $T \in V_s(Q, B)$ alors la solution unique $u \in H_0(Q, B)$ de

$$Q(D)^2 u = T$$

appartient à $U_s(Q, \Omega)$ (proposition III-12, ci-dessous). On va démontrer ce résultat par récurrence sur l'entier s, et en distinguant les variable x_1 d'une part et $x_2, \ldots, x_n$ d'autre part qui jouent un rôle différent. La méthode employée pour les variables x_k, $k \neq 1$, (variables d'espace) est le procédé classique d'approximation de $\frac{\partial}{\partial x_k}$ par $\frac{1}{h}(\tau_{k,h} - 1)$, $\tau_{k,h}$ translation parallèle à x_k. Pour la variable x_1 on procède en deux étapes d'abord régularité intérieure puis régularité au bord.

PROPOSITION III-5 : *Soit $T \in V_{s,\alpha}(Q, B)$ et $j \neq 1$, l'ensemble $\frac{1}{h}(T_{h_j} - T)$ est borné dans $V_{s-1,B}(Q, B)$ quand h parcourt R.*

NOTATIONS : *a*) h_j est le vecteur de R^n de composantes $h \cdot \delta_i^j$.

b) T_{h_j} est la distribution translatée de T par hj.

c) β est le multi entier de composantes $\beta_i = \alpha_i - \delta_i^j$ ·

DÉMONSTRATION : Il suffit de montrer que $V_{s,\alpha}(Q, B)$ est le domaine $\mathcal{V}$ du générateur infinitésimal $\frac{\partial}{\partial x_j}$ du semi groupe équicontinu des translations parallèlement à x_j dans $V_{s-1,\beta}(Q, B)$. A priori $\mathcal{V}$ est un sous espace fermé de $V_{s,\alpha}(Q, B)$. On vérifie d'autre part que $\mathcal{D}(\overline{B}) \subset \mathcal{V}$. Il suffit donc de vérifier que $\mathcal{D}(\overline{B})$ est dense dans $V_{s,\alpha}(Q, B)$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(R)$ égale à 1 pour $|x_1| \leq a + \delta$, nulle pour $|x_1| \geq h - \delta$ (on suppose $0 < \delta < a < b$), soit alors $\widetilde{\psi T}$ le prolongement de ψT par 0 en dehors de B, à Ω_a^+. On a $\widetilde{\psi T} \in V_{s,\alpha}(Q, \Omega_a^+)$, en effet on vérifie

$$D^\lambda(\widetilde{\psi T}) = \Sigma\, c_\alpha\, \widetilde{\psi^{(\alpha)} D^{\lambda-\alpha} T}$$

il suffit donc de montrer que $T \in H'(Q, B)$ entraîne $\widetilde{\psi T} \in H'(Q, \Omega_a^+)$. Ou encore que

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_a^+)} \frac{|\langle \psi T, \varphi \rangle|}{\| Q(D) \varphi \|_{L^2}} < +\infty .$$

Or

$$|\langle \psi T, \varphi \rangle| \leq \| T \|_{H'} \times \| Q(D) \psi \varphi \|_{L^2}$$

car $\psi\varphi \in \mathcal{D}(B)$. En calculant $Q(D)[\psi\varphi]$ et en appliquant l'inégalité (II-2) sur $(a, +\infty)$ puisque φ est nulle pour $x_1 = a$, on trouve

$$\| Q(D)\psi\varphi \|_{L^2} \leq C \| Q(D)\varphi \|_{L^2}$$

d'où le résultat annoncé. Mais alors d'après le lemme III-5, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_a^+)$ dont la restriction à B converge vers ψT dans $V_{s,\alpha}(Q, B)$. On peut faire le même raisonnement avec $(1-\psi)T$ et Ω_b^-, d'où la proposition.

REMARQUE : Au cours de la démonstration précédente on a montré que

LEMME III-6 : *Si $T \in V_{s,\alpha}(Q, B)$ et supp $T \subset B \setminus \Omega_{h-\delta}^+$ alors $\widetilde{T} \in V_{s,\alpha}(Q, \Omega_a^+)$.*

Dans l'énoncé suivant u désigne la solution dans $H_0(Q,B)$ de $Q^2(D)u = T$. Les autres notations sont celles de la proposition précédente.

PROPOSITION III-6 : *Soient les propositions*
A) $T \in V_{s-1,\beta}(Q, B)$ entraîne $u \in U_{s-1,\beta}(Q, B)$
B) $T \in V_{s,\alpha}(Q, B)$ entraîne $u \in U_{s,\alpha}(Q, B)$
alors A) entraîne B).

DÉMONSTRATION : A) entraine que $Q^2(D)$ est une bijection de $H_0(Q, B) \cap \cap U_{s-1,\beta}(Q, B)$ sur $V_{s-1,\beta}(Q, B)$. Comme $H_0(Q, B) \cap U_{s-1,\beta}(Q, B)$ est un sous-espace fermé de $U_{s-1,\beta}(Q, B)$ (noyau de γ). On a une inégalité de la forme

$$\| u \|_{U_{s-1,\beta}} \leq C \| T \|_{V_{s-1,\beta}} .$$

D'autre part $\frac{1}{h}(u_{hj} - u)$ est solution dans $H_0(Q, B)$ de

$$Q^2(D)\, V = \frac{1}{h}(T_{h_j} - T) .$$

On a donc

$$\left\| \frac{1}{h}(u_{hj} - u) \right\|_{U_{s-1,\beta}} \leq C \left\| \frac{1}{h}(T_{h_j} - T) \right\|_{V_{s-1,\beta}} .$$

La proposition III-5 entraine alors que $v_h = \frac{1}{h}(u_{hj} - u)$ est bornée dans $U_{s-1,\beta}(Q, B)$ donc par un argument de compacité faible joint au fait que v_h converge vers $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ dans $\mathcal{D}'(B)$, $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in U_{s-1,\beta}(Q, B)$ soit $u \in U_{s,\alpha}(Q, B)$.

Proposition III-7 : (récurrence sur les variables d'espace). *La proposition* : $T \in V_{s-1}(Q, B)$ *entraîne* $u \in U_{s-1}(Q, B)$, *entraîne la proposition* : $T \in V_s(Q, B)$ *entraîne* $u \in V_{s,\gamma}(Q, B)$, *avec* $\gamma_1 = s - 1$ *et* $\gamma_j = s$ *pour* $j \geq 2$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer la proposition précédente à tous les indices $j \geq 2$.

III-2-3 : *Régularité dans la bande spatiale* (II).

La récurrence sur la variable temps.

On va maintenant ètudier le comportement des dérivées par rapport à x_1, d'abord à l'intérieur, puis au bord. Les notations sont celles du paragraphe précédent, χ désignera une fonction de $\mathcal{D}(]a, b[)$.

Proposition III-8 : *La proposition* : $T \in V_{s-1}(Q, B)$ *entraine* $u \in U_{s-1}(Q, B)$ *entraine la proposition* : $T \in V_s(Q, B)$ *entraine* $Q^2(D)[\chi(x_1) u] \in V_s(Q, B)$.

Démonstration : D'après la proposition précédente il suffit de montrer que $\frac{\partial}{\partial x_1} Q^2(D)[\chi u] \in V_{s-1}(Q, B)$. En calculant explicitement cette quantité on voit qu'il suffit de montrer que, pour $\alpha + \beta \geq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^\alpha Q}{\partial \xi_1^\alpha}(D) \cdot \frac{\partial^\beta Q}{\partial \xi_1^\beta}(D)\, u \in V_{s-1}(Q, B).$$

Le terme $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ne pose aucun problème. De même que les termes tels que $\alpha + \beta \geq 3$, en effet l'opérateur différentiel est alors d'ordre inférieur ou égal à $2m - 2$, $U_{s-1}(Q, B) \subset H^{s+m-2}(B)$ et $H^{s-m}(B) \subset V_{s-1}(Q,B)$ comme on le vérifie facilement. On peut encore éliminer les cas $\alpha = 2$, $\beta = 0$ et $\alpha = 0$, $\beta = 2$ de façon évidente. Il reste donc $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Dans le premier de ces deux cas on a en tenant compte de l'homogénéité de Q.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial Q}{\partial \xi_1} Q\, u = m \frac{\partial}{\partial x_1} Q^2 u - \sum_{k \geq 2} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial Q}{\partial \xi_k} Q\, u.$$

Or d'après la proposition III-7 tous les termes du second membre sont dans $V_{s-1}(Q, B)$. Dans le cas $\alpha = 1$, $\beta = 1$, on écrit la même décomposition et on utilise le fait que $\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}$ opère de $H^{s-1}(B)$ dans $V_{s-1}(Q, B)$.

Proposition III-9 : *Sous les hypothèses de la proposition précédente* $\chi u \in U_s(Q, B)$.

DÉMONSTRATION : $\widetilde{\chi u}$ appartient visiblement à $H_0(Q, \Omega_a^+)$. D'autre part d'après la proposition précédente et le lemme III-6, on a $Q^2(D)[\chi u] \in V_s(Q, \Omega_a^+)$. Donc d'après la proposition III-4 : $Q(D)[\chi u] \in H^s(\Omega_a^+)$, comme elle est nulle au bord elle appartient à $H_0^s(\Omega_a^+)$, donc d'après un résultat classique ([19], Th. 5-6-3, p. 139) $\widetilde{\chi u} = E * Q(\widetilde{\chi u})$ appartient à $U_s(Q, \Omega_a^+)$, donc $\chi u \in H_0(Q, B) \cap U_s(Q, B)$.

Il nous faut maintenant, après ce résultat de régularité intérieure, étudier le comportement des dérivées par rapport à x_1 au bord de B. Soit alors $\psi \in \mathcal{E}([a, b])$ une fonction valant 1 au voisinage de $x_1 = a$ et 0 au voisinage de $x_1 = b$, on pose:

$$v = \psi u, \quad g = Q(D) v, \quad S = Q(D) g.$$

Le raisonnement de la proposition III-8 est encore valable ici, donc $\widetilde{S} \in V_s(Q, \Omega_a^+)$, d'où, d'après le lemme III-4, $\widetilde{g} \in H^s(\Omega_a^+)$ et $\widetilde{v} = E * \widetilde{g}$. Pour que $v \in U_s(Q, B)$ il suffit que $v \in H^{s+m-1}(B)$ et $Q(D)\, v \in H^s(B)$. Nous allons montrer

PROPOSITION III-10 : *Soit* $T \in V_s(Q, B)$, $u \in H_0(Q, B)$ *tels que* $Q^2(D)\, u = T$, ψ, v, g, S *les fonctions et distributions définies ci-dessus, si* $u \in U_{s-1}(Q, B)$, *alors* $v \in U_s(Q, B)$.

DÉMONSTRATION : v appartient à $U_{s-1}(Q, B)$, en effet u appartenant à $H_0(Q, B)$, v appartient à $H_0(Q, B)$. La proposition III-7 nous montre alors que v appartient à $H_{s+m-1,\sigma}(B)$, avec $\sigma = (s+m-2, s+m-1, \dots, s+m-1)$. Il suffit donc, pour démontrer la proposition, de vérifier que $\dfrac{\partial^m v}{\partial x_1^m} \in H^{s-1}(B)$ puisque d'autre part $Q(D)\, v = g \in H^s(B)$. On peut supposer que le coefficient de $\dfrac{\partial^m}{\partial x_1^m}$ dans Q est 1 (il est certainement différent de 0), on a alors

$$\frac{\partial^m v}{\partial x_1^m} = Q(D)\, v - R(D)\, v$$

$R(D)$ est un opérateur d'ordre m dans lequel les dérivées par rapport à x_1 sont d'ordre $m-1$ au plus, donc $v \in H_{s+m-1,\sigma}(B)$ entraîne que $R(D)\, v$ appartient à $H^{s-1}(B)$. D'où le résultat cherché.

III-2-4 : *Théorème de régularité.*

On peut d'abord récapituler les propositions III-7 à III-10 dans la proposition suivante

PROPOSITION III-11 : *Soit* $T \in V_s(Q, B)$, *si* $u \in U_{s-1}(Q, B)$ *alors* $u \in U_s(Q,B)$.

Il suffit alors d'un raisonnement par récurrence à partir de $s = 1$ pour obtenir la proposition

PROPOSITION III-12 : (théorème de régularité) : *Soit* $T \in V_s(Q, B)$ *et* $u \in H_0(Q, B)$ *tels que* $Q^2(D)\, u = T$ *alors* $u \in U_s(Q, B)$.

III-3 : Régularité : ouverts de type futur.

III-3-1 : *Cas du demi-espace.*

Le problème de la régularité du problème de Dirichlet pour $P(D) = Q^2(D)$, Q strictement hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$ homogène, dans l'ouvert Ω_0

$$\Omega_0 = \{ x \,;\, x_1 > 0 \}$$

se subdivise en deux problèmes de régularité d'après la proposition II-2 et son corollaire

(III-7) — régularité de $Q(D) : H_0(Q, \Omega_0) \to L^2(\Omega_0)$

(III-8) — régularité de $Q(D) : L^2(\Omega_0) \to H'(Q, \Omega_0)$.

Le problème (III-8) est traité dans le lemme III 4, il suffit donc d'étudier l'image de $H^s(\Omega_0)$ par l'application

$$f \to E * p_0 f.$$

PROPOSITION III-13 : *Si* $f \in H^s(\Omega_0)$, $E * p_0 f \in U_s(Q, \Omega_0)$.

DÉMONSTRATION : Soit $a > 0$ et $\psi \in \varepsilon(R)$ valant 1 pour $x_1 \geq 2a$ et nulle pour $x_1 \leq a$. On vérifie d'abord que $g = Q(D)(\psi u)$ appartient à $H_0^s(\Omega_a^+)$. En effet

$$D^\lambda g = \Sigma\, c_{\alpha, \beta, \gamma}\, \psi^{(\alpha)} \frac{\partial^\beta Q}{\partial \xi_1^\beta} [E * D^\gamma f]$$

et si $f \in L^2(\Omega_0)$, $\dfrac{\partial^\beta Q}{\partial \xi_1^\beta}(D)(E * f) \in L^2(B)$, où B est la bande $0 < x_1 < 3a$, en effet en appliquant (II-3)

$$\left\| \frac{\partial^\beta Q}{\partial \xi_1^\beta}(E * \varphi_n) \right\|_{L^2}^2 \leq C \int_B |(x_1 - 3a)^\beta \varphi_n|^2 \, dx$$

où (φ_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega_a^+)$ convergeant vers f, d'où le résultat cherché par un argument de compacité faible.

On en déduit que $Q(D)\, w \in H^s(\Omega_a^+)$, où $w = (1 - \psi)\, u$. D'autre part w est solution dans $H_0(Q, B)$ de $Q^2(D)\, w = S$, où S est une distribution de $V_s(Q, B)$, donc d'après la proposition III-12 $w \in U_s(Q, B)$, et son prolongement par 0 à l'extérieur de B est dans $U_s(Q, \Omega_a^+)$, de même que $\psi\, u = E * g$. La proposition est donc complétement démontrée.

On en déduit

PROPOSITION III-14: (théorème de régularité): *Soit* $T \in V_s(Q, \Omega_0)$ *et* $u \in H_0(Q, \Omega_0)$ *tels que* $Q^2(D)\, u = T$, *alors* $u \in U_s(Q, \Omega_0)$.

REMARQUE: La méthode utilisée ici, basée sur des inégalités à priori L^2, ne donne pas pour les fonctions indéfiniment différentiables le meilleur résultat de régularité:

$$f \in \mathcal{E}(\overline{\Omega}) \cap H'(Q, \Omega) \Longrightarrow u \in \mathcal{E}(\overline{\Omega}) \cap H_0(Q, \Omega)$$

mais seulement

$$f \in \mathcal{D}_{L^2}(\Omega) \Longrightarrow u \in \mathcal{D}_{L^2}(\Omega) \cap H_0(Q, \Omega)$$

puisque les ouverts considérés ici sont non bornés.

III-3-2: *Contre exemple et généralisations.*

Tous les résultats obtenus jusqu'à maintenant dans ce chapitre ont trait à des situations où la régularité du second membre se transmet à la solution. On va voir maintenant que ce n'est pas toujours le cas. Pour cela on va prendre un ouvert de type futur dont la frontière a des points caractéristiques. On sait que le problème III-8 est toujours régulier (i.e. $T \in V_s(Q, \Omega)$ entraîne $\varrho_\Omega(F * pT) \in H_s(\Omega)$, il reste seulement par suite à étudier le problème III-7.

EXEMPLE: Soit dans R^2, Q l'opérateur des cordes vibrantes $\dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$, et Ω un ouvert de type futur, contenu dans $\{(x, y)\,;\, x + y > -1\}$, dont la frontière coïncide pour $|x|$ et $|y|$ inférieurs à 1 avec $y = x^3$. Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}(R)$ une fonction valant 1 pour $|t| \leq \dfrac{1}{2}$, nulle pour $|t| \geq 1$. On va étudier le problème III-7 avec comme second membre $f \in H^k(\Omega)$ quel que soit $k > 0$, définie par

$$f(x, y) = \varrho_\Omega\, (\varphi_{(x)}\, \varphi_{(y)}).$$

Il suffit de calculer $E * f(x, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \varrho_\Omega\, [\varphi(s)\, \varphi(t)]\, ds\, dt.$

On vérifie alors facilement que pour $|y| < \frac{1}{8}$ et $x \geq 1$ par exemple $\frac{\partial^2}{\partial y^2}[E * f](x, y) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$ qui n'est pas localement de carré intégrable. On a donc un exemple de second membre appartenant à H^k pour tout k et pour lequel la solution n'appartient pas à H^2_{loc}.

REMARQUE : On peut chercher les conditions sur $\partial\Omega, \Omega$ de type futur, pour qu'il y ait régularité. Sans faire une étude générale on peut remarquer que l'exemple ci-dessus est caractérisé par le fait qu'il y a des caractéristiques entrantes (donc pas de Q-convexité). D'autre part on vérifie facilement à l'aide d'intégrations explicites dans le cas où Q est l'opérateur des cordes vibrantes que c'est le seul cas où la régularité C^∞ ne se conserve pas.

Ce dernier résultat (régularité C^∞) est susceptible de généralisations partielles en utilisant les résultats de Trèves Zerner [44].

CHAPITRE IV

Dans ce chapitre on étudie un espace du type Sobolev, mais lié à une seule dérivée partielle $\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta}$, et seulement dans R^2. L'intérêt de cette étude est de permettre une interprétation plus complète du problème de Dirichlet pour un ouvert borné du plan (Chapitre V). Le point essentiel du chapitre est le théorème de trace démontré en IV-2.

Le paragraphe IV-1 contient essentiellement les préliminaires nécessaires au paragraphe IV-2. Les résultats de ce chapitre se généralisent pour la plupart à R^n, ils ont été annoncés, pour n quelconque, dans [1], les démonstrations sont techniquement beaucoup plus compliquées. Cette raison et le fait que nous n'utiliserons que le cas $n = 2$ expliquent que nous nous limiterons dans le présent chapitre au cas du plan.

IV-1 : Espace $\overset{\circ}{W}{}^{(m)}(\Omega)$, généralités.

IV-1-1 : *Préliminaires et définitions.*

Avant de donner la définition de l'espace fonctionnel étudié ici, on va rassembler en un lemme deux inégalités classiques qui, ainsi que (II-4) et (II-5) seront d'un usage constant dans ce chapitre.

LEMME IV-1: *p et q étant deux nombres réels vérifiant $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a:*

a) Soit φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle U de longueur d, nulle aux extrémités de U, alors quel que soit $y \in U$:

$$|\varphi(y)|^p \leq d^{p/q} \int_U |\varphi'(\xi)|^p \, d\xi. \tag{IV-1}$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et toute $\varphi \in \mathcal{D}(R)$ on a:

$$\int_R e^{kx} |\varphi(x)|^p \, dx \leq \left(\frac{p}{|k|}\right)^p \int_R e^{kx} |\varphi'(x)|^p \, dx. \tag{IV-2}$$

On peut trouver une démonstration, des variantes, et des références concernant ces inégalités dans Morel [32] p. 329-340.

Soit maintenant $m = (m_1, m_2)$ un couple d'entiers positifs, Ω un ouvert de R^2, p vérifiant $1 < p < +\infty$, on pose pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\varrho(m, p, \Omega)(\varphi) = \left[\iint_\Omega \left| \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^{m_1} \partial y^{m_2}} \varphi(x, y \right|^p dx\, dy\right]^{1/p}$$

définissant ainsi une semi-norme sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

On voit facilement que c'est en fait une norme.

En effet, par exemple, soit Δ un ouvert borné contenant le support de φ, il existe $C(\Delta)$ telle que:

$$\|\varphi\|_{L^p} \leq C(\Delta)\, \varrho(m, p, \Omega)(\varphi)$$

(application répétée de IV-2).

Ceci nous permet de donner la définition suivante:

DÉFINITION: *On désigne par $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\varrho(m, p, \Omega)$.*

Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, on notera

$$\varrho(m, p, \Omega)(\varphi) = \|\varphi\|_{(m)}$$

On s'interessera exclusivement au cas où $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ est un espace de distributions. Une condition suffisante pour cela est que Ω soit contenu dans un demi-plan de la forme

$$^{+}\Omega_a^{+} = \{(x, y) ;\ x + y > a\}$$

$$^{+}\Omega_a^{-} = \{(x, y) ;\ x + y < a\}$$

$$^{-}\Omega_a^{+} = \{(x, y) ;\ x - y > a\}$$

$$^{-}\Omega_a^{-} = \{(x, y) ;\ x - y < a\}$$

On le vérifie par un raisonnement identique à celui de la proposition I-3. La remarque 2 suivant cette proposition montre que cette condition est nécessaire si Ω est convexe. Dans la suite nous supposerons toujours que Ω vérifie cette condition et même, sauf s'il en est autrement précisé, que

$$\Omega \subset {}^{+}\Omega_0^{+} = G.$$

IV-1-2 : *Propriétés élémentaires.*

Nous allons donner rapidement quelques propriétés générales de ces espaces. La première de ces propriétés met en évidence une des différences essentielles avec les espaces de Sobolev classiques.

Proposition IV-1 : *Soient Ω, Ω', U, U' quatre ouverts de R^2 avec $\overline{\Omega} \subset U$, $\overline{\Omega}' \subset U'$, soit π un difféomorphisme de U sur U' appliquant Ω sur Ω', de la forme*

$$\pi :\ (x, y) \longmapsto \pi(x, y) = (X(x),\ Y(y)).$$

Le transporté par π^{-1} de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega')$ est isomorphe à $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ (en tant qu'espace normable).

Cette proposition est évidente en écrivant explicitement la norme dans les deux espaces.

On voit alors que les seules propriétés d'invariance de ces espaces, données dans la proposition précédente, donnent des ouverts ayant le même nombre de points caractéristiques de la frontière, et avec la même disposition. Il sera donc impossible de transformer localement les ouverts en demi-plans, procédé fréquemment employé pour l'étude des espaces de Sobolev habituels.

On va maintenant décrire une classe de multiplicateurs dans $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$. Soit Ω un ouvert de R^2 et $(x_0, y_0) \in \Omega$, on pose

$$\lambda(x_0, y_0, \Omega) = \inf_{\{(s,t) \in \partial\Omega,\ t = y_0\}} |x_0 - s|$$

et

$$\mu(x_0, y_0, \Omega) = \inf_{\{(s,t) \in \partial\Omega,\, s = x_0\}} |y_0 - t|.$$

Soit alors $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $\Lambda^\alpha(x_0, y_0, \Omega) = \lambda^{\alpha_1}(x_0, y_0, \Omega)$. $\mu^{\alpha_2}(x_0, y_0, \Omega)$. On a alors.

PROPOSITION IV-2 : *Soit Ω un ouvert borné très régulier* [4], *M un point de $\partial\Omega$, θ une fonction vérifiant.*

(IV-3)
$$\left| \begin{array}{l} \theta \in \mathcal{E}(\bar{\Omega} \setminus \{M\}), \textit{ et il existe un voisinage } V \textit{ de } M \textit{ tel} \\ \textit{que pour tout } s \leq m, \textit{ on ait} \\ \\ \sup\limits_{(x,y) \in V \cap \Omega} |\Lambda^{-s}(x, y, \Omega)\, D^s \theta(x, y)| < +\infty. \end{array} \right.$$

Alors la multiplication par θ est une application linéaire continue de $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ dans lui-même.

DÉMONSTRATION : On commence par vérifier qu'il existe une constante C telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on ait

(IV-4)
$$\int_\Omega |\Lambda^{-\alpha}(x, y, \Omega)\, D^{m-\alpha} \varphi(x, y)|^p\, dx\, dy \leq C \,\|\varphi\|_{(m)}$$

pour cela on applique de façon répétée l'inégalité de Hardy (II-4). D'autre part sur Ω on a

$$D^m(\theta\varphi) = \sum_{k \leq m} a_k\, D^k \theta\, D^{m-k} \varphi$$

il suffit donc de majorer en fonction de $\|\varphi\|^p_{(m)}$ les intégrales

$$\mathrm{I}_k(\varphi) = \int_\Omega |D^k \theta\, D^{m-k} \varphi|^p\, dx\, dy.$$

Or d'après (IV-3) et l'inégalité de Hölder, il existe M tel que

$$I_k(\varphi) \leq M^p \int_{\Omega \cap V} |\Lambda^{-k}(x, y, \Omega)\, D^{m-k} \varphi|^p\, dx\, dy$$
$$+ \int_{\Omega \setminus V} |D^k \theta\, D^{m-k} \varphi|^p\, dx\, dy$$

---

[4] Ω très régulier : $\partial\Omega$ est une variété C^∞ et Ω est d'un seul côté.

d'où d'après (IV 4) et Ω étant borné

$$I_k(\varphi) \leq C \| \varphi \|^p_{(m)}$$

ce qui achève la démonstration.

Soit maintenant Ω_1 un ouvert contenu dans Ω, $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega_1)$ s'identifie de façon évidente à un sous espace fermé de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$, en prolongeant les fonctions de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega_1)$ par 0 dans $\Omega \setminus \Omega_1$. Supposons maintenant que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{s} \Omega_j$, l'espace de Banach $\sum_{j=1}^{s} \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega_j)$ est un sous espace vectoriel de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ muni d'une topologie plus fine que la topologie induite par ce dernier. On va donner des conditions suffisantes simples pour que ces deux espaces coincident. Ce qui nous permettra dans la suite de « localiser » un certain nombre de problèmes.

PROPOSITION IV 3 : Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés très réguliers, l'égalité

$$\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega_1) + \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega_2)$$

a lieu sous l'une quelconque des trois hypothèses suivantes :

a) $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$

b) $\partial(\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_2) \cap \partial(\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1) = \emptyset$

c) $\partial \Omega_1 \cap \partial \Omega_2$ *est un ensemble fini et en chacun de ses points* $\partial \Omega_1$ *et* $\partial \Omega_2$ *ne sont pas tangents.*

DÉMONSTRATION : On posera $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. On remarque d'abord que le résultat est évident sous les hypothèses *a*) et *b*) et que l'on a toujours l'inclusion topologique du second membre dans le premier. D'autre part en utilisant le résultat sous l'hypothèse *b*) on peut se ramener à un voisinage arbitraire V d'un point a de $\partial \Omega_1 \cap \partial \Omega_2$. Enfin, en utilisant la proposition IV-1, on se ramène au cas : $a = 0$, $\partial \Omega_1 = \{(x, y) ; y = \lambda x\}$ et $\partial \Omega_2$ la droite perpendiculaire (sauf si $\partial \Omega_1$ est caractéristique en a sans que $\partial \Omega_2$ le soit, mais ce cas se traite de façon analogue).

Soit alors θ définie par

$$\theta(x, y) = \exp\left[-\left(\frac{x + \lambda y}{y - \lambda x}\right)^2\right]$$

prolongée classiquement par 0 et 1. θ vérifie les hypothèses de la proposition IV-2 et opère donc continuement par multiplication de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega \cap V)$

dans $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega_1 \cap V)$; de même $1 - \theta$ opère continuement par multiplication de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega \cap V)$ dans $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega_2 \cap V)$. On en déduit immédiatement le résultat cherché.

Pour en terminer avec ces quelques propriétés générales de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$, donnons quelques résultats sur son dual. $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ étant un espace de distribution normal, son dual est également un espace de distributions normal. D'autre part, pour $1 < p < +\infty$, $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ est réflexif puisque l'application:

$$D^m : u \longrightarrow D^m u$$

est un isomorphisme de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ sur un sous espace fermé de $L^p(\Omega)$. Le dual de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ est donc lui aussi normal et réflexif. D'autre part en transposant l'isomorphisme précédent on obtient un homomorphisme surjectif de norme 1

$$D^m : L^q \longrightarrow [\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)]'.$$

On notera en conséquence

$$[\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)]' = W_q^{(-m)}(\Omega).$$

IV-1-3 : *Cas d'un ouvert de type futur.*

Ici il s'agit bien entendu d'un ouvert qui avec chacun de ses points (x_0, y_0) contient le quart de plan $x > x_0$, $y > y_0$. On énoncera les résultats dans le cas où $\Omega = G$ (défini en IV-1-1).

Proposition IV-4 : *Soit $\widetilde{L}^p(R^n)$ le sous espace des fonctions de $L^p(R^n)$ nulles sur $R^n \setminus G$. Soit Y_m la solution élémentaire de $\dfrac{\partial^{|m|}}{\partial x^{m_1}\,\partial y^{m_2}}$ à support dans $\{0\} \cup G$, alors*

$$\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(G) = \varrho_G[Y_m * \widetilde{L}^p(R^n)]$$

Démonstration : Cette proposition, analogue à la proposition II-2 se démontre exactement de la même manière en utilisant l'inégalité (II-5) au lieu de l'inégalité (II-3).

Corollaire : *Pour tout $s \leq m$ (c'est-à-dire $s_1 \leq m_1$, $s_2 \leq m_2$) $\dfrac{\partial^{|s|}}{\partial x^{s_1}\,\partial y^{s_2}}$ est un isomorphisme de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(G)$ sur $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m-s)}(G)$.*

DÉMONSTRATION : Evidente puisque $Y_m = Y_{m-s} * Y_s$,

REMARQUE : Ces résultats constituent des généralisations pour $p \neq 2$ de résultats du chapitre II, on pourrait se demander si le chapitre II en entier ne pourrait pas se généraliser pour $p \neq 2$,

Ceci n'est pas possible, en effet une conséquence des inégalités à priori utilisées dans le chapitre serait l'existence d'un type d'inégalité à priori pour tous les opérateurs hyperboliques homogènes dont Littman [28] a montré, dans le cas de l'opérateur des ondes, qu'ils n'étaient valables dans R^n avec $n > 2$ que pour $p = 2$.

IV-2 : Espace $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$, théorème de trace.

IV-2-1 : *Hypothèses et notations.*

Nous allons étudier les traces des fonctions de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ et de certaines de leurs dérivées sur des arcs fermés Γ qui seront, dans le chapitre suivant, des bords d'ouverts bornés dans lesquels on posera le problème aux limites.

Avant de donner des hypothèses plus précises sur les arcs Γ, on peut faire une remarque que nous utiliserons systématiquement sans le rappeler à chaque fois, dans les démonstrations. Si $\Gamma \subset \Omega$, on peut en fait remplacer Ω, par n'importe quel ouvert contenant Ω, en particulier prendre pour Ω un pavé, ou bien prendre $\Omega = G$.

Nous supposerons que Γ est un arc C^∞, bord d'un ouvert très régulier borné. D'autre part, en désignant par π_1 et π_2 les projections

$$\pi_1 : (x, y) \longmapsto (x, o)$$

$$\pi_2 : (x, y) \longmapsto (o, y)$$

et par U_i; $i = 1, 2$, le plus grand ouvert de Γ où π_i est un difféomorphisme local. On supposera que U_i n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et que les contacts de Γ avec les tangentes parallèles à $0x$ et $0y$ sont d'ordre fini.

Dans la suite de ce paragraphe on supposera toujours les hypothèses précédentes vérifiées.

REMARQUE : Ces hypothèses sont en particulier vérifiées si Γ est à la fois le bord d'un ouvert borné très régulier et l'image par un difféomorphisme du type indiqué dans la proposition IV-1 d'une variété analytique réelle. Ceci est à rapprocher des propriétés dens ensembles analytiques réels étudiées dans [31].

On notera $\overset{\circ}{W}{}_p^{[k;i]}(U_i)$, $i = 1, 2$, l'espace de distributions sur U_i construit de la façon suivante: sur chaque composante connexe $U_{i,\lambda}$ de U_i on considère l'espace transporté par π_i^{-1} de l'espace de Sobolev habituel $\overset{\circ}{W}{}_p^k[\pi_i(U_{i,\lambda})]$, et on fait la somme directe de ces espaces.

Si on se donne un paramétrage régulier de l'arc Γ

$$t \longmapsto (x(t),\ y(t))$$

on peut interpréter, sur chaque composante $U_{1,\lambda}$, $\overset{\circ}{W}{}_p^{[k;1]}(U_1)$ comme un espace de Sobolev avec le poids $|x'(t)|^{1-kp}$.

IV-2-2: *Théorème de traces: cas particulier* $m_1 = 0$.

On supposera toujours $m_1 \leq m_2$ et on va commencer par donner le théorème de traces dans le cas particulier où $m_1 = 0$ (et $m_2 > 0$). On posera pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\gamma_{i,j}\varphi$ la fonction de $\mathcal{D}(\Gamma)$ restriction à Γ de $\dfrac{\partial^{i+j}\varphi}{\partial x^i\, \partial y^j}$.

PROPOSITION IV-5: *L'application* $\gamma = (\gamma_{0,0}, \gamma_{0,1}, \dots, \gamma_{0,m-1})$ *se prolonge en un homomorphisme surjectif de* $\overset{\circ}{W}{}_p^{(0,m)}(\Omega)$ *sur* $\prod_{k=0}^{m-1} \overset{\circ}{W}{}_p^{[0;1]}(U_1)$.

DÉMONSTRATION: On a d'abord, en désignant par $U_{1,h}$ les composantes connexes de U_1, par k un entier inférieur ou égal à $m-1$ et par φ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\|\gamma_{0,k}\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{[0;1]}(U_1)} = \sum_h \left[\int_{\pi_1(U_{1,h})} \left|\frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}(x,\ y_h(x))\right|^p dx\right]^{1/p}.$$

On applique alors les inégalités (IV-1) et (IV-2) (en supposant que Ω est un pavé, cf. § IV-1-1), et on trouve

$$\int_{\pi_1(U_{1,h})} \left|\frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}(x,\ y(x))\right|^p dx \leq C\, \|\varphi\|^p_{(m)}.$$

On voit donc que γ se prolonge en une application linéaire continue de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(0,m)}(\Omega)$ dans $\prod^{m-1} \overset{\circ}{W}{}_p^{[0;1]}(U_1)$.

On vérifie ensuite que $\gamma[\overset{\circ}{W}_p^{(0,m)}(\Omega)]$ est dense, et même, en fait qu'il contient $\overset{m-1}{\Pi}\mathcal{D}(U_1)$.

Il reste donc seulement à vérifier que γ est un homomorphisme, ou encore que $\gamma_{0,k}$ est un homomorphisme de $\overset{\circ}{W}_p^{(0,m)}(\Omega)$ sur $W_p^{[0;1]}(U_1)$.

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(U_{1,h})$, α s'écrit de manière unique $\alpha = \beta \circ \pi_1$, avec $\beta \in \mathcal{D}[\pi_1(U_{1,h})]$; soit alors $\psi \in \mathcal{D}(R)$ valant 1 au voisinage de $\pi_2(\Gamma)$, et $\theta \in \mathcal{D}(R)$ défini par $\theta(y) = \psi(y) \times \dfrac{y^k}{k!}$. La fonction φ définie par

$$\varphi(x, y) = \beta(x)\,\theta(y)$$

vérifie $\gamma_{0,k}\,\varphi = \alpha$, et, en posant $C = \|\theta\|_{W_p^m(R)}$

$$\|\varphi\|_{(0,m)} = C\,\|\alpha\|_{W_p^{[0;1]}}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

On peut donc maintenant supposer m_1 et m_2 tous deux non nuls.

IV 2·3 : *Théorème de traces : cas général.*

On va d'abord démontrer la proposition :

Proposition IV-6 : *L'application $\gamma_{0,0}$ se prolonge en un homomorphisme de $\overset{\circ}{W}_p^{(m)}(\Omega)$ sur $\overset{\circ}{W}_p^{[m_1;1]}(U_1) + \overset{\circ}{W}_p^{[m_2;2]}(U_2)$.*

Démonstration : Elle est assez longue.

A $\gamma_{0,0}$ *se prolonge en une application continue : cas $m_1 < m_2$.*

Supposons que $0 \in \Gamma \setminus U_1$, soit $\mu_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ valant 1 sur un voisinage de 0 et telle que supp $\mu_0 \subset U_2$, considérons alors les trois applications définies sur $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$T_0 :\ \varphi \longmapsto \psi_0 = \mu_0 \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{x^k}{k!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(0, y)$$

$$U_0 :\ \varphi \longmapsto \theta_0 = \mu_0 \varphi - \psi_0$$

$$V_0 :\ \varphi \longmapsto \chi_0 = (1 - \mu_0)\,\varphi.$$

Ces trois applications sont continues de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ dans lui-même, en effet il suffit de le vérifier pour T_0, et

$$\| \psi_0 \|_{(m)} \leq C \sum_{k \leq m_1 - 1} \left\| \frac{\partial^{k+m_2} \varphi}{\partial x^k \, \partial y^{m_2}} (0, y) \right\|_{L^p}$$

d'où le résultat par application de (IV-1) et (IV-2).

D'autre part on peut répéter la décomposition précédente au voisinage de chacun des points (isolés et en nombre fini) de $\Gamma \setminus U_1$. On obtient ainsi trois applications continues de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ dans lui-même, définies sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par

$$T: \varphi \longmapsto \psi = \Sigma \, \psi_i$$

$$U: \varphi \longmapsto \theta = \Sigma \, \theta_i$$

$$V: \varphi \longmapsto \chi = \Sigma \, \chi_i = \varphi - \theta - \psi.$$

On va étudier séparément les traces des fonctions ψ, θ, χ.

a) supp $\chi \cap \Gamma \subset U_1$, la trace $\gamma_{0,0} \chi$ de χ sur Γ appartient donc à $\mathcal{D}(U_1)$, et on a sur la composante connexe $U_{1,h}$ de U_1

$$\| \gamma_{0,0} \chi \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{[m_1;1]}(U_1)} \leq \sum_{\alpha+\beta \leq m_1} C_{\alpha\beta} \left\| \frac{\partial^{\alpha+\beta} \chi}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta} (x, y_h(x)) \right\|_{L^p(\pi_1(U_{1,h}))} .$$

D'où, en utilisant les inégalités (IV-1) et (IV-2) et puisque $m_1 \leq m_2 - 1$, l'inégalité

$$\left\| \frac{\partial^{\alpha+\beta} \chi}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta} (x, y(x)) \right\|_{L^p} \leq C \, \| \chi \|_{(m)}$$

d'où finalement

$$\text{(IV-5)} \qquad \| \gamma_{0,0}, \chi \|_{[m_1;1]} \leq C \, \| \chi \|_{(m)} .$$

b) On a supp $\psi_0 \cap \Gamma \subset U_2$, et

$$\| \gamma_{0,0} \, \psi_0 \|_{[m_2;2]} = \left\| \frac{d^{m_2}}{dy^{m_2}} [\psi_0 (x(y), y)] \right\|_{L^p[\pi_2(U_2)]}$$

soit

$$\| \gamma_{0,0} \, \psi_0 \|_{[m_2;2]} \leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq m_1 - 1 \\ 0 \leq \beta \leq m_2}} a_{k\beta} \left\| \frac{\partial^{k+\beta} \varphi}{\partial x^k \, \partial y^\beta} (0, y) \right\|_{L^p}$$

d'où en utilisant (IV-1), (IV-2) et en sommant sur les ψ_i

$$\text{(IV-6)} \qquad \| \gamma_{0,0} \, \psi \|_{[m_2;2]} \leq C \, \| \varphi \|_{(m)} .$$

c) On peut écrire

$$\theta_0(x, y) = \mu_0(x, y) \int_0^x \frac{(x-t)^{m_1-1}}{(m_1-1)!} \frac{\partial^{m_1}\varphi}{\partial x^{m_1}}(t, y)\, dt.$$

D'autre part θ_0 est nulle sur $\Gamma \setminus U_1$ on va donc chercher à montrer que $\gamma_{0,0}\,\theta_0 \in \overset{\circ}{W}{}_p^{[m_1;1]}(U_1)$ et que sa norme dans cet espace se majore en fonction de $\|\varphi\|_{(m)}$. Il suffit pour cela de montrer que $[\gamma_{0,0}\,\theta_0] \circ \pi_1$ est nulle en 0 ainsi que ses $m_1 - 1$ premières dérivées et que la norme de cette fonction dans $W_p^{m_1}(R)$ se majore en fonction de $\|\varphi\|_{(m)}$. Or

$$\frac{d^k}{dx^k}[\gamma_{0,0}\,\theta_0 \circ \pi_1](x) = \sum_{\alpha \leq k} \lambda_\alpha(x) \int_0^x (x-t)^{m_1-\alpha-1} \frac{\partial^{m_1+k-\alpha}\varphi}{\partial x_1^{m_1}\,\partial y^{k-\alpha}}[t, y(x)]\, dt$$

et, d'autre part, d'après l'hypothèse fait sur le contact de Γ avec $x = 0$, on a

(IV-7) $$|\lambda_\alpha(x)| \leq C\,|x|^{\alpha-k}$$

d'où

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}(\gamma_{0,0}\,\theta_0 \circ \pi_1)(x)\right| \leq C\,|x| \sup_{x,\alpha}\left|\frac{\partial^{m_1+k-\alpha}\varphi}{\partial x^{m_1}\,\partial y^{k-\alpha}}\right|$$

ce qui achève la démonstration du premier point.

Pour vérifier le second on va seulement vérifier que l'on a bien

(IV-8) $$\left\|\frac{d^{m_1}}{dx_1^{m_1}}(\gamma_0\,\theta_0 \circ \pi_1)\right\|_{L^p} \leq C\,\|\varphi\|_{(m)}$$

le raisonnement pour les dérivées d'ordre inférieur étant identique. En écrivant explicitement les dérivations, tout revient à majorer

$$I_\alpha = \int \left|\lambda_\alpha(x) \int_0^x (x-t)^{m_1-\alpha-1} \frac{\partial^{2m_1-\alpha}\varphi}{\partial x^{m_1}\,\partial y^{m_1-\alpha}}[t, y(x)]\, dt\right|^p dx.$$

On applique d'abord l'inégalité (IV-1) à la fonction

$$f_\alpha : y \longmapsto \lambda_\alpha(x) \int_0^x (x-t)^{m_1-\alpha-1} \frac{\partial^{2m_1-\alpha}\varphi}{\partial x_1^{m_1}\,\partial y^{m_1-\alpha+1}}(t, y)\, dt$$

puis (IV-7) pour $k = m_1$, ce qui donne

$$I_\alpha \leq C \int \left| x^{\alpha - m_1} \int_0^x (x - t)^{m_1 - \alpha - 1} \frac{\partial^{2m_1 - \alpha + 1} \varphi}{\partial x^{m_1} \partial y^{m_1 - \alpha + 1}} (t, y) \, dt \right|^p dx$$

d'où en développant $(x - t)^{m_1 - \alpha - 1}$ et en appliquant l'inégalité de Hardy (II-5) à chacun des termes de la somme :

$$I_\alpha^{1/p} \leq C \left\| \frac{\partial^{2m_1 - \alpha + 1} \varphi}{\partial x_1^{m_1} \partial y^{m_1 - \alpha + 1}} \right\|_{L^p}$$

d'où (IV-8) puisque $m_1 \leq m_2 - 1$ par application de (IV-2).

En regroupant tous les résultats analogues on obtient :

(IV-9) $$\| \gamma_{0,0} \, \theta \|_{[m_1 ; 1]} \leq C \| \varphi \|_{(m)} .$$

Il ne reste alors qu'à regrouper (IV-5), (IV-6) et (IV-9) et à appliquer la définition de la norme dans l'espace somme $\overset{\circ}{W}{}_p^{[m_1 ; 1]} (U_1) + \overset{\circ}{W}{}_p^{[m_2 ; 2]} (U_2)$ pour obtenir

(IV-10) $$\| \gamma_{0,0} \, \varphi \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{[m_1 ; 1]} (U_1) + \overset{\circ}{W}{}_p^{[m_2 ; 2]} (U_2)} \leq C \| \varphi \|_{(m)}$$

$\gamma_{0,0}$ se prolonge bien en une application continue.

B $\gamma_{0,0}$ ***se prolonge en une application continue : cas*** $m_1 = m_2$.

L'espace somme est alors tout simplement $W_p^{m_1} (\Gamma)$. Par une partition de l'unité on peut se ramener au cas où le support de $\gamma_{0,0} \, \varphi$ est contenu dans une composante connexe de U_1 et contient un seul point de $\Gamma \setminus U_2$. On peut prendre pour paramétrage de Γ au voisinage du support de $\gamma_{0,0} \, \varphi$

$$x \longrightarrow (x, y (x))$$

et supposer que le point de $\Gamma \setminus U_2$ est l'origine, i. e. supposer $y' (0) = y (0) = 0$.

Pour vérifier que

(IV-11) $$\| \varphi [x, y (x)] \|_{W_p^{m_1}} \leq C \| \varphi \|_{(m)}$$

on va vérifier seulement que

(IV-12) $$\left\| \frac{d^{m_1}}{dx^{m_1}} \varphi (x, y (x)) \right\|_{L^p} \leq C \| \varphi \|_{(m)}$$

les autres vérifications étant analogues. Or on a

$$\text{(IV-13)}\quad \frac{d^{m_1}}{dx^{m_1}}\varphi(x, y(x)) = \sum_{\substack{\alpha+\beta\leq m_1\\ \beta\leq m_1-1}} \lambda_{\alpha,\beta}(x)\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}[x, y(x)] + [y'(x)]^{m_1}\frac{\partial^{m_1}\varphi}{\partial y^{m_1}}[x, y(x)],$$

les fonctions $\lambda_{\alpha,\beta}(x)$ sont bornées, donc en appliquant (IV-1) et (IV-2) à chacun des termes de la somme, on obtient

$$\text{(IV-14)}\qquad \left\|\sum_{\substack{\alpha+\beta\leq m_1\\ \beta\leq m_1-1}} \lambda_{\alpha,\beta}(x)\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}[x, y(x)]\right\|_{L^p} \leq C\,\|\varphi\|_{(m)}\,.$$

Il reste donc pour obtenir (IV-12), et par suite (IV-11) qu'à majorer le dernier terme de la somme (IV-13). On écrit

$$\left[\int^{x_1}\left|\,|y'(x)^{m_1}\frac{\partial^{m_1}\varphi}{\partial y^{m_1}}(x, y(x))\right|^p dx\right]^{1/p} \leq \left[\int_{x_0}^{0}\left|y'(x)^{m_1}\frac{\partial^{m_1}\varphi}{\partial y^{m_1}}(x, y(x))\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$+\left[\int_0^{x_1}\left|y'(x)^{m_1}\frac{\partial^{m_1}}{\partial y^{m_1}}(x, y(x))\right|^p dx\right]^{1/p}$$

sur l'intervalle $]0, x_1]$, π_2 est un difféomorphisme, on peut donc prendre y comme paramètre.

Le jacobien du changement de variable est $|y'(x)|$, or puisque m_1 et p sont supérieurs ou égaux à 1, $|y'(x)|^{pm_1-1}$ est bornée, donc

$$\int_0^{x_1}\left|y'(x)^{m_1}\frac{\partial^{m_1}\varphi}{\partial y^{m_1}}(x, y(x))\right|^p \leq C\int_0^{y_1}\left|\frac{\partial^{m_1}\varphi}{\partial y^{m_1}}(x(y), y)\right|^p dy$$

il ne reste donc qu'à appliquer (IV-1) de la manière habituelle puis (IV-2) pour obtenir l'inégalité cherchée, d'où finalement (IV-11).

En résumé, nous avons établi en **A** et **B** que $\gamma_{0,0}$ se prolonge en une application continue de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ dans $\overset{\circ}{W}{}_p^{[m_1;1]}(U_1)$, $+\ \overset{\circ}{W}{}^{[m_2;2]}(U_2)$.

Il reste donc seulement à montrer que ce prolongement est un homomorphisme surjectif.

C $\gamma_{0,0}$ ***est un homomorphisme surjectif.***

Il suffit de vérifier que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ il existe $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\text{(IV-15)}\qquad \begin{cases}\gamma_{0,0}\,\Phi = \varphi\\[2ex] \|\Phi\|_{(m)} \leq C\,\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{[m_1;1]}(U_1)+\overset{\circ}{W}{}_p^{[m_2;2]}(U_2)}\end{cases}$$

Par partition de l'unité il suffit, pour vérifier (IV-15), de montrer que si φ a son support dans une composante connexe de U_i, il existe $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\text{(IV-16)} \qquad \begin{cases} \gamma_{0,0}\,\Phi = \varphi \\ \|\Phi\|_{(m)} \leq C\,\|\varphi\|_{[m_i\,;\,i]} \,. \end{cases}$$

En effet (IV-15) résultera alors de la définition de la norme dans l'espace somme.

Le raisonnement est alors absolument identique à celui de la proposition (IV-5). φ s'écrit de façon unique (en supposant $i = 1$).

$$\varphi = \beta \circ \pi_1$$

soit alors $\theta \in \mathcal{D}(R)$ telle que $\theta(y) = 1$ sur $\pi_2(\operatorname{supp} \varphi)$, on prend

$$\Phi(x, y) = \beta(x)\,\theta(y)$$

on vérifie facilement (IV-16) et ceci achève la démonstration de la proposition.

On peut enfin énoncer

PROPOSITION IV-7 : *L'application* $\gamma_{i,j}$, *avec* $i \leq m_1$, $j \leq m_2$, $i + j \leq m_1 + m_2 - 1$, *se prolonge en un homomorphisme de* $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ *sur l'espace* $\overset{\circ}{W}{}_p^{[m_1-i\,;\,1[}(U_1) + \overset{\circ}{W}{}_p^{[m_2-j\,;\,2]}(U_2)$.

DÉMONSTRATION : Le corollaire de la proposition IV-4 permet de ramener de façon évidente le résultant énoncé ci-dessus, soit à la proposition IV-6 si $i \leq m_1 - 1$ et $j \leq m_2 - 1$, soit à la proposition IV-5.

CHAPITRE V

Dans ce chapitre, on applique les résultats du chapitre précédent à l'étude du problème de Dirichlet dans le plan. On étudie successivement les points suivants :

— définition d'un espace sans condition au bord

— caractérisation de l'espace des solutions par une condition de nullité des traces

— compléments dans le cas des opérateurs d'ordre 4.

V-1 : Espaces $W_p^{(m)}(\Omega)$ et $\overset{\circ}{W}_p^{(m)}(\Omega)$.

V-1-1 : *Espace* $W_p^{(m)}(\Omega)$.

Comme nous l'avons signalé au paragraphe 1-3-4, on peut définir deux types d'espaces sans condition au bord

$$W_p^{(m)}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \,;\, \exists\, \Omega' \supset \overline{\Omega},\, \exists\, v \in \overset{\circ}{W}_p^{(m)}(\Omega'),\, u = v/\Omega \}$$

et

$$\widetilde{W}_p^{(m)}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \,;\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\, \forall\, \alpha \leq m \}.$$

Et nous avons affirmé que ces deux espaces, qui coïncident dans le cas des espaces de Sobolev habituels et pour des ouverts suffisamment réguliers (vérifiant une condition de cone par exemple), ne coïncident pas dans le cas présent. On a seulement l'inclusion évidente

$$W_p^{(m)}(\Omega) \subset \widetilde{W}_p^{(m)}(\Omega)$$

l'inclusion opposée étant en général fausse comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE : Soit $\Omega = \{(x, y) \,;\, x^2 < y < 1\}$, $m = (1, 1)$ et $u(x, y) = |x|^{1/4}$, on a de façon évidente $u \in \widetilde{W}_2^{(m)}(\Omega)$, mais u n'admet pas de traces dans $H^1(\partial\Omega)$ au voisinage de 0, donc ne peut appartenir à $W_2^{(m)}(\Omega)$. Cet exemple peut se généraliser facilement dans tous les cas où $\partial\Omega$, de classe $C^{|m|}$, a des points caractéristiques isolés, sans changement du signe de la courbure, avec $p > 1$ et $m \geq (1, 1)$.

REMARQUE 1 : Il résulte de l'étude qu'a faite Strichartz [40] des espaces analogues aux espaces de Sobolev pour les problèmes quasi-elliptiques, et où il cherche des propriétés de prolongement de fonctions ayant certaines dérivées dans L^p, en remplaçant la condition de cone classique par des conditions appropriées, que cette condition se transforme pour $\widetilde{W}_p^{(m)}(\Omega)$ en condition du « carré » aux points caractéristiques, i.e., approximativement, que Ω doit contenir un cone du type $(x - a)(x - b) > 0$ au voisinage de chaque point caractéristique (a, b) de sa frontière.

REMARQUE 2 : On utilisera l'espace $\widetilde{W}_p^{(m)}(\Omega)$ (et les espaces $\widetilde{H}(Q, \Omega)$) au chapitre suivant pour étudier un problème inhomogène, en donnant une caractérisation de $W_p^{(m)}(\Omega)$ dans $\widetilde{W}_p^{(m)}(\Omega)$.

Soit maintenant Ω un ouvert borné très régulier de R^2, vérifiant $\bar{\Omega} \subset G$, on notera $\tilde{u} \in L^p(G)$ le prolongement par 0 de $u \in L^p(\Omega)$. On munira d'autre part $W_p^{(m)}(\Omega)$ de la norme

$$\| u \| = \inf_{v \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(G),\, v/\Omega = u} \| v \|$$

qui en fait un espace de Banach. On peut alors remarquer que si $\partial\Omega = \Gamma$ vérifie les hypothèses du chapitre IV (IV-2-1), $\gamma = (\gamma_{i,j})$, $i \leq m_1$, $j \leq m_2$, $i + j \leq |m| - 1$, se prolonge en un homomorphisme de $W_p^{(m)}(\Omega)$ *dans* (non indépendance de toutes les $\gamma_{i,j}$) $\prod_{\substack{i \leq m_1 \\ j \leq m_2 \\ i+j \leq |m|-1}} \{ \overset{\circ}{W}{}_p^{[m_1 - i\,;\,1]}(U_1) + \overset{\circ}{W}{}_p^{[m_2 - j\,;\,2]}(U_2) \}$.

V-1-2 : *Caractérisation de* $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$.

On cherche à caractériser $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ dans $W_p^{(m)}(\Omega)$ par une condition de nullité au bord. On commence par vérifier :

Lemme V-1 : *Soit* $u \in L^p(\Omega)$, *une condition nécessaire et suffisante pour que* $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ *est que* $\tilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(G)$.

Démonstration : La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on remarque d'abord que l'on peut supposer que $\tilde{u}$ a son support dans un voisinage arbitraire d'un point de la frontière de Ω, soit (x_0, y_0) ce point et (a, b) le vecteur normal intérieur à $\partial\Omega$ en (x_0, y_0). Soit $\varrho \in \mathcal{D}(R^2)$ tel que $\int \varrho \, dx \, dy = 1$ et $\operatorname{supp} \varrho \subset \{(x, y) ; x^2 + y^2 \leq 1\}$, on définit ϱ_n par

$$\varrho_n(x, y) = n^2 \varrho\,[n(x - a),\, n(y - b)].$$

Pour n suffisamment grand $\varrho_n * \tilde{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$, et converge vers $\tilde{u}$ dans $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(G)$, donc $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$.

Proposition V-1 : *Soit Ω un ouvert borné très régulier tel que $\Gamma = \partial\Omega$ vérifie les hypothèses du paragraphe* IV-2-1, *alors* $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ *est le noyau de* γ *dans* $W_p^{(m)}(\Omega)$.

Démonstration : Soit $\mathcal{N}$ le noyau de γ, il est évident que $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega) \subset \mathcal{N}$. Soit maintenant $u \in W_p^{(m)}(\Omega)$ tel que $\gamma u = 0$, on va montrer que $\tilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(G)$.

Pour cela on vérifie d'abord, par régularisation, que si $v \in \mathcal{D}'(R^n)$ a son support compact dans G et toutes ses dérivées $D^\alpha v \in L^p(R^n)$ pour $\alpha \leq m$, alors $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(G)$. D'autre part, par partition de l'unité, on peut supposer que $\widetilde{u}$ a son support dans un voisinage quelconque d'un point frontière de Ω. Alors, en utilisant le fait que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W_p^{(m)}(\Omega)$, la continuité de γ_0, et une intégration par parties, on montre que si $\gamma_{0,0}\, u = 0$, dans $W_p^{[0;1]}(U_1)$, alors $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial y} \in L^p(R^n)$. D'où le résultat par itération.

V·2 : Problème de Dirichlet homogène dans un ouvert borné très régulier du plan.

V·2·1 : *Particularités des opérateurs à deux variables.*

L'intérêt des opérateurs à deux variables est essentiellement contenu dans la proposition suivante :

PROPOSITION V·2 : *Soit $P(D)$ un opérateur hyperbolique à deux variables, $P_m(D)$ sa partie principale :*

a) $P(D)$ et $P_m(D)$ sont de même force.

b) $P(D)$ est hyperbolique par rapport à toute direction non caractéristique.

DÉMONSTRATION : Cette proposition est classique.

a) résulte par exemple du théorème 5·5·8 de Hörmander [19]. *b)* est alors conséquence de *a)* et du fait que tout polynôme homogène à deux variables se décompose en un produit de facteurs linéaires.

L'interprétation du problème de Dirichlet pour un opérateur hyperbolique positif et un ouvert borné du plan se ramène donc, quelque soit l'ordre des caractéristiques, au cas d'un opérateur homogène. En fait, nous allons nous restreindre dans ce chapitre aux opérateurs n'ayant que deux caractéristiques distinctes, et donc, après changement de variable aux opérateurs $P(D)$ de partie principale

$$P_{2m}(D) = D^{2m} = D_x^{2m_1}\, D_y^{2m_2}\,.$$

L'espace $\mathcal{U}(P, \Omega)$ et alors l'espace $\overset{\circ}{W}{}_2^{(m)}(\Omega)$ pour tout ouvert borné, nous le noterons $H_0^{(m)}(\Omega)$. Nous supposerons d'autre part dans tout ce paragraphe que le bord Γ de Ω vérifie les hypothèses de IV·2·1.

V-2-2 : *Interprétation du problème homogène.*

Soit $(B_j)_{j\in J}$ un système d'opérateurs définis sur la frontière Γ de Ω, γ_B l'opérateur de traces correspondant

$$\gamma_B : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow \prod_{j\in J} \mathcal{D}(\Gamma)$$

On dira que $(B_j)_{j\in J}$ est un système de Dirichlet dans $W_p^{(m)}(\Omega)$ si γ_B se prolonge par continuité dans $W_p^{(m)}(\Omega)$ et si $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ est le noyau de γ_B dans $W_p^{(m)}(\Omega)$. C'est par exemple le cas de γ dans la proposition V-1.

L'interprétation du problème de Dirichlet homogène pour un opérateur hyperbolique positif $P(D)$ de partie principale D^{2m} s'écrit alors (B_j) étant un système ~~de Dirichlet~~ :

$$\text{(V-1)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{le système } P(D)\,u = T,\ \gamma_B\, u = 0, \text{ a une solution et} \\ \text{une seule dans } H^{(m)}(\Omega), \text{ pour toute distribution} \\ T \in H^{(-m)}(\Omega). \end{array}\right.$$

On va chercher s'il existe des systèmes de Dirichlet comprenant un opérateur et un seul d'ordre k, $0 \leq k \leq |m| - 1$. Soit

$$t \longrightarrow (x(t), y(t))$$

un paramétrage propre de Γ, on désigne par $\dfrac{\partial}{\partial \tilde{\nu}}$ l'opérateur

$$\text{(V-2)} \qquad \frac{\partial}{\partial \tilde{\nu}} = x'(t)\frac{\partial}{\partial x} - y'(t)\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Alors pour toute φ et toute ψ de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ on a

$$\text{(V-3)} \qquad \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\cdot\psi - \varphi\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y}\right] dx\, dy = \frac{1}{2}\int_\Gamma \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\nu}}\cdot\psi - \varphi\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\nu}}\right] dt.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[\frac{\partial^{|m|}\varphi}{\partial x^{m_1}\,\partial y^{m_2}}\cdot\psi - \frac{\partial^{m_2-m_1}\varphi}{\partial y^{m_2-m_1}}\cdot\frac{\partial^{2m_1}\psi}{\partial x^{m_1}\,\partial y^{m_1}}\right] dx\,dy \\ &\quad = \frac{1}{2}\sum_{0\leq\lambda\leq 2m_1-1}\int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\nu}}\cdot\frac{\partial^{|m|-2\lambda}\varphi}{\partial x^{m_1-\lambda}\cdot\partial y^{m_2-\lambda}}\cdot\frac{\partial^{2\lambda}\psi}{\partial^\lambda x\,\partial^\lambda y}\right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^{|m|-2\lambda}\varphi}{\partial x^{m_1-\lambda}\cdot\partial y^{m_2-\lambda}}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde{\nu}}\cdot\frac{\partial^{2\lambda}\psi}{\partial^\lambda x\,\partial^\lambda y}\right] dt. \end{aligned}$$

En appliquant l'identité précédente à $\psi = u$ et en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $W_p^{(m)}(\Omega)$ ainsi que la continuité des deux membres, on obtient le système de Dirichlet

$$\left(1, \frac{\partial}{\partial \tilde{\nu}}, \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial}{\partial \tilde{\nu}}\, \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{\nu}} \cdot \frac{\partial^{2(m_1-1)}}{\partial x^{m_1-1}\, \partial y^{m_1-1}}, \frac{\partial^{2m_1}}{\partial x^{m_1}\, \partial y^{m_1}}, \right.$$
$$\left. \frac{\partial^{2m_1+1}}{\partial x^{m_1}\, \partial y^{m_1+1}}, \dots, \frac{\partial^{|m|-1}}{\partial x^{m_1}\, \partial y^{m_2-1}}\right).$$

REMARQUE : Le système précédent n'est évidemment pas le seul possible ayant la propriété de contenir un opérateur et un seul de chaque ordre. En particulier, en tenant compte des propriétés de continuité des traces et des diverses relations de compatibilité on peut remplacer les m_1-premiers opérateurs de ce système par $\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^k$, $0 \leq k \leq m_1 - 1$; $\frac{\partial}{\partial \nu}$ désignant la dérivation normale. Par contre pour des ordres supérieurs à $m_1 - 1$ on ne peut obtenir d'opérateur ayant une composante normale non nulle en tout point de Γ. On verra des exemples plus précis au paragraphe suivant.

V-3. Opérateurs du quatrième ordre.

V-3-1 : *Interprétation du problème de Dirichlet, ouvert borné très régulier.*

Par un changement de variable linéaire on peut toujours ramener la partie principale d'un opérateur hyperbolique d'ordre 4 dans R^2 à la forme $\frac{\partial^4}{\partial x^2\, \partial y^2}$. L'interprétation du problème de Dirichlet pour n'importe lequel de ces opérateurs revient donc à l'étude de $H_0^{(1,1)}(\Omega)$. Nous allons dans ce cas donner l'interprétation complète des problèmes homogènes et inhomogènes pour un ouvert très régulier borné dont le bord vérifie les hypothèses du paragraphe IV-2-1.

On prendra un paramétrage propre de Γ et on désignera par $\frac{\partial}{\partial \tilde{\nu}}$ l'opérateur (V-2). Cet opérateur est tangent à Γ aux points où Γ est caractéristique, transversal partout ailleurs. On a alors la proposition :

PROPOSITION V-3 :

a) L'application $\gamma = (\gamma_{0,0}, \gamma_{\tilde{\nu}})$ (5) *de* $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ *dans* $\mathcal{D}(\Gamma) \times \mathcal{D}(\Gamma)$ *se prolonge en un homomorphisme de* $H^{(1,1)}(\Omega)$ *sur* $H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.

---

(5) On a posé $\gamma_{\tilde{\nu}}\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\nu}} / \Gamma$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

b) $\left(1, \dfrac{\partial}{\partial \tilde{\nu}}\right)$ *est un système de Dirichlet.*

Démonstration : On sait déjà que γ est un homomorphisme de $H^{(1,1)}(\Omega)$ sur un sous espace fermé de $H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. D'autre part soient $\mathcal{A}(\Gamma)$ et $\mathcal{B}(\Gamma)$ respectivement les sous espaces de $\mathcal{D}(\Gamma)$ formés des fonctions dont les dérivées d'ordre supérieur ou égal à un sont nulles sur $\Gamma \setminus U_1 \cap U_2$, et celui formé des fonctions nulles ainsi que toutes leurs dérivées sur $\Gamma \setminus U_1 \cap \cap U_2$. L'image de γ contient $\mathcal{A}(\Gamma) \times \mathcal{B}(\Gamma)$. En effet soit $\beta \in \mathcal{B}(\Gamma)$ et à support par exemple dans un voisinage d'un point de $\Gamma \setminus U_2$. Alors la fonction λ définie par

$$\lambda(t) = [y'(t)]^{-1} \beta(t)$$

appartient à $\mathcal{D}(\Gamma)$ et a son support contenu dans ce même voisinage. Il existe donc (problème de Cauchy non caractéristique) une fonction $\psi_\beta \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ telle que $\gamma_{0,0}\,\psi_\beta = 0$ et $\gamma_{0,0} \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial y} = \lambda(t)$. Soit alors $(\alpha, \mu) \in \mathcal{A}(\Gamma) \times \mathcal{B}(\Gamma)$, il existe une fonction $\Phi_\alpha \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ telle que $\gamma_{0,0}\,\Phi_\alpha = \alpha$, et $x'(t)\dfrac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} = \alpha'(t) \in \in \mathcal{B}(\Gamma)$, la fonction $\Phi_\alpha - \psi_{\alpha'-\mu}$ vérifie bien

$$\gamma\,[\Phi_\alpha - \psi_{\alpha'-\mu}] = (\alpha, \mu).$$

D'autre part $\mathcal{A}(\Gamma) \times \mathcal{B}(\Gamma)$ est dense dans $H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ de façon évidente, ce qui démontre *a*).

Quant à *b*) il résulte immédiatement du raisonnement fait au paragraphe V-2-2, c'est-à-dire de l'identité (V-3) et du fait que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^{(1,1)}(\Omega)$.

Remarque : On va montrer, sur un exemple, qu'il n'est pas possible d'avoir comme deuxième condition de nullité au bord, la nullité de la trace pour un opérateur à composante normale non nulle aux points caractéristiques de Γ. Supposons par exemple que Γ soit défini au voisinage de l'origine par $y = x^3$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\displaystyle\int \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, t^3)\, dt = 1$. Alors les deux suites (ψ_n) et (θ_n) définies ci dessous convergent vers 0 dans $H^{(1,1)}(\Omega)$

$$\psi_n(x, y) = \frac{1}{n^{2/3}}\, \varphi(x, ny)$$

$$\theta_n(x, y) = \frac{1}{n^{1/2} \log n}\, \varphi(x, ny).$$

On remarque alors que $\frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} / \Gamma$ converge vers δ dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$ et que $\frac{\partial \theta_n}{\partial \nu} / \Gamma$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$.

Soit $P(D)$ positif de partie principale $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial y^2}$, on a, toujours avec les mêmes hypothèses sur Ω, la conséquence évidente suivante de la proposition précédente, qui donne une interprétation du problème de Dirichlet inhomogène posé au paragraphe I-1-1.

PROPOSITION V-4 : *Soit $T \in H'(D_x D_y, \Omega)$ et $f = (f_1, f_2)$ appartenant à $H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, il existe $u \in H^{(1,1)}(\Omega)$ unique vérifiant :*

$$\text{(V-4)} \qquad \begin{cases} P(D)\, u = T \\ \gamma\, u = f. \end{cases}$$

Au chapitre VI nous donnerons une méthode plus générale pour poser des problèmes aux limites inhomogènes qui contiendra celle-ci comme cas particulier.

REMARQUE : Au paragraphe V-2 comme dans celui-ci on a repris la formulation hilbertienne du problème. Concernant une formulation L^p on peut faire les remarques suivantes : (uniquement pour $m = (1, 1)$ mais elles se généralisent facilement).

Soit Ω un ouvert borné :

a) D^{2m} opère continuement de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ dans $W_p^{(-m)}(\Omega)$.

b) D^{2m} est une injection de $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ dans $W_p^{(-m)}(\Omega)$, (autrement dit le problème de Dirichlet homogène a une solutions unique), c'est évident pour $p > 2$, pour p quelconque on peut en donner la démonstration suivante : D^{2m} est une injection sur $\mathcal{D}(\Omega)$ dont il faut montrer qu'elle se prolonge à $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(\Omega)$ en une injection. Soit donc $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ suite de Cauchy dans $\overset{\circ}{W}{}_p^{(1,1)}(\Omega)$ telle que $\frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^2 \, \partial y^2}$ converge vers 0 dans $W_p^{(-1,-1)}(\Omega)$, il faut monter que φ_n tend vers 0 dans $\overset{\circ}{W}{}_p^{(-1,-1)}(\Omega)$, ou encore que $\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \, \partial y}$ tend vers 0 dans L^p, et il suffit pour cela de montrer que $\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \, \partial y}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ puisque c'est une suite de Cauchy dans L^p. On suppose encore que Ω est convexe et de diamètre δ, soit Ω' l'ouvert translaté de 2δ dans la direction $0x$, Ω'' l'ouvert translaté de 2δ de Ω' dans la direction $0y$, Δ

l'enveloppe convexe de $\Omega \cup \Omega' \cup \Omega'' \cup \Omega'''$. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la fonction Φ valant φ sur Ω et Ω''', $-\varphi$ sur Ω' et Ω'' est l'image par $\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$ d'une certaine fonction de $\mathcal{D}(\Delta)$. On vérifie facilement que $\frac{\partial^4 \Phi_n}{\partial x^2\, \partial y^2}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\Delta)$, que $\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x\, \partial y}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Delta)$, la première de ces propriétés montre que $\langle \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x\, \partial y}, \psi \rangle$ tend vers 0 sur toute $\psi \in \mathcal{D}(\Delta)$ de la forme $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y}$ avec $\theta \in \mathcal{D}(\Delta)$ donc sur toute ψ avec $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, d'où l'on tire facilement que $\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x\, \partial y}$ tend vers 0 faiblement dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

c) Le problème de l'existence des solutions pour $T \in W_p^{(-m)}(\Omega)$ est pour $p > 2$ un problème de régularité qui sera traité ultérieurement.

d) Remarquons enfin que le paragraphe IV-1-3, donne [proposition IV-4] l'existence et l'unicité pour ce problème de Dirichlet L^p, dans des ouverts de type futur.

V-3-2 : *Ouverts à frontière caractéristique.*

Nous allons maintenant étudier ce que devient le problème homogène quand la frontière de Ω devient caractéristique. On considère donc toujours un opérateur de partie principale $\frac{\partial^4}{\partial x^2\, \partial y^2}$, mais dans l'ouvert $D =]0,1[\times$ $\times]0,1[$.

PROPOSITION V-8 $H_0^{(1,1)}(D) = H^{(1,1)}(D) \cap H_0^1(D)$.

En d'autres termes, le problème de Dirichlet est défini par une seule condition au bord.

DÉMONSTRATION : Les espaces des deux membres sont des sous espaces fermés de $H^{(1,1)}(D)$, et l'inclusion du premier membre dans le second est évidente. D'autre part, l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\bar{D})$ nulles sur ∂D est dense dans $H^{(1,1)}(D) \cap H_0^1(D)$. En effet, soit u dans cet espace, u est la restriction à D de $v \in H_0^{(1,1)}(G)$, où $G = \{(x,y)\,;\, x + y > -1\}$. Soit $\varphi_n \in \mathcal{D}(G)$ convergeant vers v dans $H_0^{(1,1)}(G)$, considérons $\psi_n \in \mathcal{D}(G)$ définie par

$$\psi_n(x,y) = \varphi_n(0,y)\ \theta(x) = \gamma_{0,0}\ \varphi_n \cdot \theta$$

où $\theta \in \mathcal{D}(R)$ vaut 1 au voisinage de $x = 0$. Alors

$$\| \psi_n \|_{(1,1)} \leq C \| \gamma_{0,0}\, \varphi_n \|_{H^1}.$$

D'autre part $\gamma_{0,0}\varphi_n$ tend vers $\gamma_{0,0}\, u$ dans $H^1(R)$ et vers 0 dans $H^{1/2}(R)$, donc vers 0 dans H^1.

Donc ψ_n tend vers 0 dans $H_0^{1,1}(G)$, donc $\varphi_n - \psi_n$ tend vers u dans $H^{1,1}(D)$. D'où le résultat annoncé. D'autre part ce même ensemble de fonctions de $\mathcal{D}(\bar{D})$ nulle au bord est contenu dans $H_0^{(1,1)}(D)$. Soit en effet f une telle fonction, on peut supposer que son support est dans $[0,1[\times\times[0,1[$; soit alors $\psi\in\mathcal{E}(R)$ telle que $\theta\leq\psi\leq 1$, $\psi(t)=0$ pour $t\leq 1/2$, $\psi(t)=1$ pour $t\geq 1$, on considère la suite $f_p\in\mathcal{D}(D)$ définie par :

$$f_p(x,y)=\psi(px)\,\psi(py)\,f(x,y)$$

Cette suite est bornée dans $H_0^{(1,1)}(D)$, en effet en désignant par

$$D'_p=]0,1[\times\left]0,\frac{1}{p}\right[$$

$$D''_p=\left]0,\frac{1}{p}\right[\times]0,1[$$

$$D_p=\left]0,\frac{1}{p}\right[\times\left]0,\frac{1}{p}\right[$$

on a

$$\text{(V-5)}\quad \|f_p\|_{(1,1)}\leq C\left[p^2\,\|f\|_{L^2(D_p)}+p\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{L^2(D'_p)}+p\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_{L^2(D''_p)}+\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right\|_{L^2(D)}\right].$$

D'autre part f étant indéfiniment différentiable, $f(o,y)=0$ entraine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(o,y)=0$, de même en x.

On peut donc appliquer l'inégalité (II 5) aux trois premiers termes du second membre de (V-5). Il vient alors

$$\|f_p\|_{(1,1)}\leq C\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right\|_{L^2(D)}.$$

Ce qui, la suite f_p convergeant vers f dans $\mathcal{D}'(D)$, suffit à achever la démonstration.

Dans le cas de l'opérateur homogène $\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}$, on peut d'ailleurs résoudre explicitement le problème de Dirichlet homogène dans D, au moins pour des seconds membres assez réguliers.

Soit $f \in H^1(D)$, la solution du problème

$$\text{(V-6)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^4}{\partial x^2\, \partial y^2} = f \\ u \in H_0^{(1,1)}(D) \end{cases}$$

peut s'obtenir en résolvant successivement

$$\text{(V-7)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2} v_y(x) = f_y(x) \\ v_y(x) \in H_0^1(]o, 1[) \end{cases}$$

pour chaque y, avec $f_y \in H^{1/2}(]o, 1[)$

$$f_y : x \longmapsto f(x, y)$$

et le problème analogue en y avec comme second membre

$$v_x : y \longrightarrow v_y(x)$$

La solution s'écrit donc

$$u(x, y) = \int_0^x \int_0^y \xi\eta f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - y \int_0^x \int_0^1 \xi\eta f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$- x \int_0^1 \int_0^y \xi\eta f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + xy \int_0^1 \int_0^1 \xi\eta f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Ce qui permet de vérifier que si $f \in H^k(D)$, $u \in H^{k+1}(D)$, ce qui est donc un résultat de régularité pour le problème considéré.

Chapitre VI

Dans ce chapitre on généralise partiellement les résutats du paragraphe V-3 à la situation suivante : Ω est un ouvert borné très régulier de R^n, $P(D)$ est un opérateur hyperbolique positif dont la partie principale est le carré d'un opérateur strictement hyperbolique. On interprète ainsi le problème homogène et, partiellement, le problème inhomogène.

On donne d'autre part, au paragraphe V-2 une méthode pour définir des problèmes de Dirichlet inhomogènes plus généraux que celui défini au paragraphe I-1. Cette méthode est un développement de celle employée par Bardos [3] dans le cas des opérateurs d'ordre 1. Il ne sera pas question dans ce chapitre de la régularité de la solution des problèmes résolus.

VI-1 : Problème de Dirichlet homogène dans un ouvert borné de R^n, pour un opérateur à caractéristiques d'ordre 2 au plus.

VI-1-1 : *Un résultat préliminaire.*

Le théorème de trace du paragraphe VI-1-2 et l'interprétation du problème de Dirichlet qu'on en déduira au paragraphe VI-1-3 sont fondés sur le résultat suivant, divisé, pour la simplicité de l'exposé, en deux propositions.

PROPOSITION VI-1 : *Soit Ω un ouvert borné, $P(x, D)$ un opérateur d'ordre m à coefficients dans $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$, indépendants de x_1, on suppose que $P(x, D)$ vérifie la condition : il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:*

$$\text{(VI-1)} \qquad \| \varphi \|_{H^{m-1}(\Omega)} \leq C \, \| P(x, D) \|_{L^2(\Omega)}$$

Alors il existe un opérateur $B(x, D)$ d'ordre $m - 1$ vérifiant :

$$\text{(VI-2)} \qquad \{x \in \Omega \, ; \, x_1 = 0, \, B(x, \vec{n}) = 0\} = \{x \in \Omega ; \, x_1 = 0, \, P(x, \vec{n}) = 0\}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $x_1 = 0$, et il existe une constante $C > 0$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\text{(VI-3)} \qquad \| [B(x, D) \, \varphi] \, (0, x') \|_{H^{-1}(R^{n-1})} \leq C \, \| P(x, D) \, \varphi \|_{L^2(\Omega)}$$

PROPOSITION VI-2 : *Supposons, en plus des hypothèses de la proposition précédente que le coefficient de D_1^m dans $P(x, D) = a_{(m, 0 \ldots, 0)}(x)$ est tel que $a_{(m, 0, \ldots, 0)}(x) = 0$ définisse une variété C^∞, il n'existe aucun opérateur d'ordre $m - 1$ qui vérifie* (VI-3) *sans vérifier* (VI-2).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION VI-1 : On notera $x = (x_1, x')$, $x' \in R^{n-1}$ et on posera $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x') D^\alpha$. Soit alors $v \in \mathcal{D}(H \cap \Omega)$ (H est l'hyperplan $x_1 = 0$), que l'on identifiera à la fonction $1_{x_1} . v(x') \in \mathcal{E}(R^n)$, on va démontrer l'identité :

$$
\text{(VI-4)} \quad \left[\begin{aligned} & P(x, D) u \cdot D_k^j v + (-1)^{m+j+1} D_k^j u \cdot P(x, D) v \\ & \qquad = D_1 [B(x, D) u \cdot D_k^j v] \\ & \qquad + \sum_{i \geq 2} D_i A_i(x', u, v) + A_0(x, u, v) \end{aligned} \right.
$$

où $u \in \mathcal{D}(\Omega)$; $j = 0, \ldots, m-1$; $k = 2, \ldots, n$ et où les A_i sont des formes que nous allons expliciter.

On considère d'abord la partie principale de P et, dans celle-ci les, termes tels que $\alpha_1 \neq 0$, on a alors

$$D^{\alpha_1, \alpha'} u \cdot D_k^j v = D_1 [D^{\alpha_1 - 1, \alpha'} u \cdot D_k^j v]$$

d'où en posant :

$$B(x, D = \sum_{\substack{\alpha_1 \geq 1 \\ |\alpha| = m}} a_\alpha(x') D^{\alpha_1 - 1, \alpha'}$$

$$
\begin{aligned}
P(x, D) u \cdot D_k^j v + (-1)^{m+j+1} D_k^j u \, P(x, D) v = D_1 [B(x, D) u \cdot D_k^j v] \\
+ R(x', D') u \cdot D_k^j v + (-1)^{m+j+1} D_k^j u \cdot R(x', D') v \\
+ S(x, D) u \cdot D_k^j v + (-1)^{m+j+1} D_k^j u \cdot S(x, D) v
\end{aligned}
$$

avec

$$R(x', D') = \sum_{\substack{|\alpha| = m \\ \alpha_1 = 0}} a_\alpha(x') D^\alpha$$

et

$$S(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} a_\alpha(x') D^\alpha .$$

D'autre part si $|\alpha| = m$ et $j \leq m-1$, on a l'identité

$$
\begin{aligned}
& D^{0, \alpha'} u \cdot D_k^j v + (-1)^{m+j+1} D_k^j u \cdot D^{0, \alpha} v \\
& \qquad = \sum_{i \geq 2} D_i [\sum_{\substack{|\lambda + \mu| \leq m-2 \\ |\lambda| \leq m-1, |\mu| \leq m-2}} c_{\lambda, \mu} D^{0, \lambda} u, D^{0, \mu} v]
\end{aligned}
$$

où $c_{\lambda,\mu} = -1, 0, +1$ suivant les cas. On en déduit que

$$a_{0,\alpha'}(x')\, D^{0,\alpha'} u \cdot D_k^j v + (-1)^{m+j+1} D_k^j u \cdot a_{0,\alpha'}(x')\, D^{0,\alpha'} v$$

$$= \sum_{i\geq 2} D_i \Big[a_{0,\alpha'}(x') \sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda,\mu} D^{0,\lambda} u \cdot D^{0,\mu} v\Big]$$

$$+ \sum_{i\geq 2} \Big[D_i (a_{0,\alpha'}(x')) \cdot \sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda,\mu} D^{0,\mu} u \cdot D^{0\,\mu} v\Big]$$

et, par suite, en sommant par rapport à α

$$R(x', D)\, u \cdot D_k^j v + (-1)^{m+j+1} D_k^j u \cdot R(x', D')\, v$$

$$= \sum_{i\geq 2} [D_i \cdot A_i(x', u, v)] + B_0(x', u, v).$$

L'identité (VI-4) est donc démontrée en posant :

$$A_0(x', u, v) = B_0(x', u, v) + S(x, D)\, u \cdot D_k^j v$$

$$+ (-1)^{m+j+1} D_k^j u \cdot S(x, D)\, v.$$

Nous allons maintenant intégrer cette identité sur $\Omega \cap \{x_1 > 0\} = U$, en tenant compte du fait que $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Il vient alors :

$$\int_{H \cap \Omega} [B(x, D)\, u](o, x') \cdot D_k^j v(x')\, dx'$$

$$= \int_U [P(x, D)\, u \cdot D_k^j v + (-1)^{m+j+1} D_k^j u \cdot P(x, D)\, v]\, dx - \int_U A_0(x', u, v)\, dx.$$

On intègre par parties dans le premier membre et le deuxième terme du second, puis on fait les majorations standard et on trouve

$$\left| \int_{H \cap \Omega} D_k^j [B(x, D)\, u](o, x') . v(x')\, dx' \right| \leq C \| u \|_{H_0^{m-1}(\Omega)} \cdot \| v \|_{H_0^m(H \cap \Omega)}$$

$$+ C \| P(x, D)\, u \|_{L^2(\Omega)} \| v \|_{H_0^{m-1}(H \cap \Omega)} .$$

D'où, en tenant compte de (VI-1) et de la définition de la norme dans $H^{-m}(\Omega)$, il vient

$$\| D_k^j B(x, D)\, u \|_{H^{-1}(H \cap \Omega)} \leq C \| P(x, D)\, u \|_{L^2}$$

d'où l'inégalité (VI-3) en faisant varier j de 0 à $m-1$ et k de 2 à n. On peut remarquer que $B(x, D)$ vérifie bien (VI-2).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION VI-2 :

On va construire une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $P(x, D)\varphi_n$ tende vers 0 dans $L^2(\Omega)$ et que $D_1^{m-1}\varphi_n/H$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(H \cap \Omega)$, s'il existe des points où H est caractéristique pour P.

Le résultat démontré sera donc que non seulement pour avoir des traces dans H^{-1} la condition V-2 est nécessaire, mais aussi pour avoir des traces dans $\mathcal{D}'$ (6). Sous les hypothèses faites on peut supposer qu'il existe un voisinage U de l'origine où $a_{(m,0,\dots,0)}(x') = 0$ coïncide avec $x_2 = 0$ par example. Soit alors $\Phi \in \mathcal{D}(U)$ de la forme

$$\Phi(x) = \varphi(x_1, x_2)\,\psi(x_3, \dots, x_n)$$

où $\psi = 1$ ou voisinage de 0 dans R^{n-2}. Soit alors

$$\varphi_p(x_1, x_2) = p^{5/4-m}\,\varphi\left(px_1, p^{\frac{1}{2(2p-1)}}x_2\right).$$

On peut vérifier que $P(x, D)[\varphi_n\psi]$ tend vers 0 dans L^2 et que la trace de $D_1^{m-1}(\varphi_n\psi)$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(H)$.

REMARQUES : 1. Les hypothèses des propositions précédentes ne sont évidemment pas nécessaires. En particulier l'hypothèse que les coefficients sont indépendants de x_1, cependant son introduction simplifie notablement les calculs et elle est vérifiée dans les applications que nous en ferons.

2. Dans le cas où $P(D)$ est à coefficients, la démonstration précédente se simplifie considérablement en utilisant un résultat classique de Hörmander ([19]-Th. 2.2.8). En effet l'intégrale

$$\int_{R^n} \frac{\xi_1^{2m-2}\,d\xi_1}{\widetilde{P}(\xi)^2}$$

est convergente si et seulement si le plan $x_1 = 0$ n'est pas caractéristique.

VI-1-2 : *Théorème de trace.*

---

(1) On peut obtenir néanmoins des théorèmes de traces dans ce cas (cf. Goulaouic-Grisvard [14], et des résultats non publiés de ces auteurs) mais dans des espaces à poids non localement intégrables.

Proposition VI-3 : *Soit $Q(D)$ un opérateur strictement hyperbolique d'ordre m, Ω un ouvert borné de R^n, Γ une variété C^∞ de dimension $n-1$ plongée dans R^n, alors il existe un opérateur différentiel homogène défini sur Γ, d'ordre $m-1$, dont le coefficient de $\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{m-1}$ $\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right.$ dérivation normale a $\left.\Gamma\right)$ est non nul en $y \in \Gamma$, si et seulement si Γ n'est pas caractéristique pour 0 au point y, tel que l'opérateur*

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1})$$

de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-2} \mathcal{D}(\Gamma \cap \Omega)$, où $\gamma_j \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j \varphi/\Gamma$ si $j \leq m-2$ et $\gamma_{m-1} \varphi = B\varphi/\Gamma$, se prolonge en une application continue de $H_0(Q, \Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-2} H_0^{m-j-3/2}(\Gamma \cap \Omega) \times H^{-1}(\Gamma \cap \Omega)$.

Démonstration : On a vu au premier chapitre (proposition I-6) que $H_0(Q, \Omega) \subset H_0^{m-1}(\Omega)$ avec injection continue, donc γ_j se prolonge bien, pour $j \leq m-2$, en une application continue de $H_0(Q, \Omega)$ dans $\Pi H_0^{m-j-3/2}(\Gamma \cap \Omega)$. D'autre part, à l'aide d'une partition finie de l'unité, on peut se ramener au cas où la projection π_n

$$\pi_n : x \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

est un difféomorphisme d'un ouvert U de Γ tel que $\Gamma \cap \Omega \subset U$, sur un ouvert V de $x_n = 0$ le changement de variable correspondant nous met dans les conditions d'application de la proposition VI-1, d'où le résultat.

Remarque : Comme pour la proposition VI-1, ces résultats ne sont pas nécessairement les meilleurs possible. Ceux-ci ont été obtenus pour $n = 2$ et $Q = \square$ au chapitre V (proposition V-3) et pour n quelconque, mais Ω bande spatiale au chapitre III (proposition III-1). Nous reviendrons sur cette question au paragraphe suivant, en particulier pour $Q = \square$.

Soit maintenant Ω un ouvert borné très régulier de bord Γ, on a alors, en utilisant la définition de $H(Q, \Omega)$ donnée au chapitre I.

Proposition VI-4 : *L'application γ de la proposition* VI-3 *se prolonge en une application continue de $H(Q, \Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-2} H^{m-j-3/2}(\Gamma) \times H^{-1}(\Gamma)$.*

VI-1-3 : *Interprétation du problème homogène.*

Soit Ω un ouvert borné très régulier, Q un opérateur strictement hyperbolique. Dans la démonstration de la proposition ci-dessous, on supposera que Q est hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \dots, 0)$.

PROPOSITION VI-5 : *$H_0(Q, \Omega)$ est le noyau de γ dans $H(Q, \Omega)$, γ étant définie à la proposition* VI-3.

DÉMONSTRATION : Elle est analogue à celle de la proposition V-1. On commence par vérifier comme au lemme V-1, que $u \in H_0(Q, \Omega)$ équivaut à $u \in H(Q, \Omega)$ et le prolongement $\tilde{u}$ de u par 0 à l'extérieur de Ω satisfait à $\tilde{u} \in H_0(Q, \Omega_0)$ (notations du chapitre III : Ω_0 est le demi espace $x_1 > 0$, et on suppose $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$). Ensuite on vérifie que si $v \in \mathcal{E}'(\Omega_0) \cap \tilde{H}(Q, \Omega_0)$ alors $v \in H_0(Q, \Omega_0)$. Ces deux vérifications ne posent aucun problème. D'autre part on sait que si $u \in H(Q, \Omega) \cap \operatorname{Ker} \gamma$, $u \in H_0^{m-1}(\Omega)$, il suffit donc de vérifier que $Q(D)\tilde{u} \in L^2(G)$. Et, compte tenu de la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $H(Q, \Omega)$ et de la continuité de γ, il suffit de vérifier cette propriété pour une fonction de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ à support dans un voisinage arbitraire d'un point frontière de Ω. Alors le même changement de variable que celui de la proposition VI-3 et une intégration par parties montrent que

$$Q(D)\,u = \widetilde{Q(D)\,u} + \sum_{|\alpha| \leq m-1} c_\alpha D^\alpha \tilde{u}$$

d'où le résultat cherché.

Soit alors toujours $P(D)$ hyperbolique positif dont la partie principale est le carré de l'opérateur strictement hyperbolique $Q(D)$, soit Ω un ouvert borné très régulier, le problème de Dirichlet homogène s'écrit :

$$\text{(VI 5)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Pour toute distribution } T \in H'(Q, \Omega) \text{ il existe } u \in H(Q, \Omega) \\ \text{unique tel que } P(D)\,u = T \text{ et } \gamma u = 0. \end{array} \right.$$

REMARQUE : Nous verrons au paragraphe suivant une interprétation du même type de ce problème homogène mais où $H(Q, \Omega)$ est remplacé par divers espaces de fonctions, dont certains beaucoup plus grands.

VI 2 : Problème inhomogène.

VI-2-1 : *Une méthode pour définir des problèmes de Dirichlet non-homogènes.*

Les notations et les hypothèses sont les mêmes que dans le paragraphe précédent. On va essayer de poser des problèmes dans $\tilde{H}(Q, \Omega)$ au lieu de $H(Q, \Omega)$. Rappelons que $\tilde{H}(Q, \Omega)$ est l'espace des fonctions de $H^{m-1}(\Omega)$ telles que $Q(D)\, u \in L^2(\Omega)$.

On va faire les hypothèses supplémentaires suivantes : l'ensemble des points de $\Gamma = \partial\Omega$ caractéristiques pour Q est une variété C^∞ de dimension $n - 2$, Soit de plus $(\mathcal{T}_i)_{0\leq i\leq m-1}$ une famille d'espaces de distributions normaux sur Γ vérifiant

$$\text{(VI-6)} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{si } T \in \mathcal{T}_i \text{ et supp } T \subset V,\ V \text{ variètè de dimension } n-2 \\ \text{tracée sur, } \Gamma, \text{ alors } T = 0.\end{array}\right.$$

et

$$\text{(VI-7)} \qquad [\mathcal{T}_i \text{ est invariant par les difféomorphismes de } \Gamma.$$

On note alors $\mathcal{T} = \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{T}_i$ et on désigne par $\mathcal{H}$ l'adhérence dans $\widetilde{H}(Q, \Omega) \times \times \mathcal{T}$ de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \times \gamma\, \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Un élément de $\mathcal{H}$ est alors un $m + 1$ — uple $(u, v_0, \dots, v^{m-1})$, avec $u \in \widetilde{H}(Q, \Omega)$ et $v_i \in \mathcal{T}_i$. On a alors

PROPOSITION VI-6 : *La projection* $(u, (v_i)) \to u$ *de* $\mathcal{H}$ *sur* $\widetilde{H}(Q, \Omega)$ *est une injection.*

DÉMONSTRATION : Il faut montrer que $(0, (v_i)) \in \mathcal{H}$ entraine $v_i = 0$ quel que soit i. C'est-à-dire que si $\varphi_n \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ converge vers 0 dans $\widetilde{H}(Q, \Omega)$ et $\gamma\varphi_n$ converge dans $\mathcal{T}$, nécessairement $\lim \gamma\varphi_n = 0$. On peut rupposer que φ_n a son support dans un voisinage arbitraire d'un point de Γ. On fait alors le changement de coordonnées habituel transformant localement Ω en $\Omega_0 = \{x\,; x_1 > 0\}$, soit H l'hyperplan $x_1 = 0$. On désigne par $Q(X, D)$ le transformé de $Q(D)$ et $\Phi_n(X)$ celui de φ_n, on peut supposer les coefficients de Q indépendants de X_1, on écrira

$$Q(X, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(X')\, D^\alpha$$

Soit alors $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$ on a par intégration par parties

$$\text{(VI-8)}\left\{\begin{aligned} \int_{\Omega_0} Q(X, D)\,\Phi_n(X)\,\psi(X)\,dX &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega_0} \Phi_n(X)\cdot(-1)^{|\alpha|} D^\alpha [a_\alpha(X')\psi(X)]\,dX \\ &\quad + \sum_{\lambda=0}^{m-1} \langle_H B_\lambda(X', D)\,\Phi_n, D_1^\lambda\psi\rangle_H \end{aligned}\right.$$

où $\langle\, ,\, \rangle_H$ désigne la dualité $(\mathcal{D}'(H), \mathcal{D}(H))$. D'après les hypothèses faites sur Φ_n, (VI-8) devient

$$\text{(VI-9)} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \langle B_\lambda\, \Phi_n, D_1^\lambda\psi\rangle = 0.$$

Mais pour tout λ, $0 \leq \lambda \leq m-1$, et tout $\beta \in \mathcal{D}(H)$ il existe $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$ tel que $\gamma_0 D_1^\lambda \psi = \beta$ et $\gamma_0 (D_1^k, \psi) = 0$ pour $k \neq \lambda$ et $0 \leq k \leq m-1$. (VI-9) équivaut alors à

(V-10) $\{$ pour tout λ, $0 \leq \lambda \leq m-1$, $\gamma_0 (B_\lambda \Phi_n)$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(H)$.

Posons alors

$$\gamma_0 B_n \Phi_n = \sum_{r+k \leq m-\lambda-1} C_{k,r,\lambda}(X') D'^r \gamma_k \Phi_n$$

on a d'abord

$$\gamma_0 B_{m-1} \Phi_n = a_{m,0,\dots,0}(X') \gamma_0 \Phi_n$$

donc $\gamma_0 \Phi_n$ tend dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$ vers une distribution à support dans l'ensemble des zéros de $a_{m,0\dots0}$.

D'après les propriétés de l'ensemble des points caractéristiques de Γ, (VI-6) et (VI-7) entraînent que cette distribution est nulle, $v_0 = 0$. On a alors

$$\lim_{n\to\infty} C_{1,0,1}(X') \gamma_1 \Phi_n = 0$$

d'où $v_1 = 0$. En itérant le procédé on trouve le résultat annoncé.

On peut, par cette injection identifier $\mathcal{H}$ à un sous espace $H(Q, \Omega, \mathcal{T})$ de $\widetilde{H}(Q, \Omega)$. On munira $H(Q, \Omega, \mathcal{T})$ de la topologie transportée de la topologie induite sur $\mathcal{H}$ par $\widetilde{H} \times \mathcal{T}$.

En particulier si les $\mathcal{T}_i$ sont des Banach, $H(Q, \Omega, \mathcal{T})$ est un Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$|||u||| = \|u\|_{\widetilde{H}} + \Sigma \|v_i\|_{\mathcal{T}_i}.$$

On peut encore remarquer que l'application γ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{T}$ se prolonge par continuité à $H(Q, \Omega, \mathcal{T})$; et que les topologies induites sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par $H(Q, \Omega, \mathcal{T})$, $H(Q, \Omega)$ et $\widetilde{H}(Q, \Omega)$ coïncident.

En particulier $H_0(Q, \Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H(Q, \Omega, \mathcal{T})$. On a encore la proposition :

PROPOSITION VI-7 : *$H_0(Q, \Omega)$ est le noyau de γ dans $H(Q, \Omega, \mathcal{T})$.*

DÉMONSTRATION : Elle est identique à celle de la proposition VI-5. En effet celle-ci est fondée sur : densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $H(Q, \Omega)$, continuité et nullité des traces dans $\Pi \mathcal{D}'(\Gamma)$ et $T \in \mathcal{E}'(\Omega_0) \cap \widetilde{H}(Q, \Omega)$ entraîne $T \in H_0(Q, \Omega_0)$. Toutes ces propriétés sont conservées par passage de $H(Q, \Omega)$ à $H(Q, \Omega, \mathcal{T})$.

Le problème de Dirichlet homogène admet donc la même interprétation dans $H(Q, \Omega, \mathcal{T})$ que dans $H(Q, \Omega)$: nullité des traces dès que celles-ci existent. D'autre part on va pouvoir poser un problème inhomogène avec toute-fois une hypothèse supplémentaire pour assurer l'existence des solutions

$$\text{(VI-11)} \qquad \begin{cases} \text{pour toute } f \in \mathcal{T}, \text{ il existe } \varphi_n \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \text{ bornée} \\ \text{dans } \widetilde{H}(Q, \Omega) \text{ telle que } \gamma\varphi_n \text{ tende vers } f \text{ dans } \mathcal{T}. \end{cases}$$

On a alors

Proposition VI-8 : *Sous les hypothéses* (VI-6), (VI-7) *et* (VI-11), *pour toute* $f \in \mathcal{T}$ *et toute* $T \in H'(Q, \Omega)$ *il existe* u *unique dans* $H(Q, \Omega, \mathcal{T})$ *telle que*

$$\text{(VI-12)} \qquad \begin{cases} P(D)\, u = T \\ \quad \gamma u = f. \end{cases}$$

De plus, u *ne dépend pas de l'espace* $\mathcal{T}$, *contenant* f, *choisi.*

Démonstration : *a*) *Unicité* ($\mathcal{T}$ fixé) : supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2, alors $v = u_1 - u_2$ vérifie

$$\text{(VI-13)} \qquad \begin{cases} P(D)\, v = 0 \\ v \in H(Q, \Omega, \mathcal{T}), \gamma\, v = 0 \end{cases}$$

la deuxième ligne de ce système entraîne que $v \in H_0(Q, \Omega)$, donc que $v=0$.

b) *existence :* Soit $f \in \mathcal{T}$ et φ_n vérifiant (VI-11), considérons la solution au sens du paragraphe I-1 du système

$$\text{(VI-14)} \qquad \begin{cases} P(D)\, u_n = T \\ u_n - \varphi_n \in H_0\,(Q, \Omega). \end{cases}$$

Soit alors $v_n = u_n - \varphi_n$, v_n vérifie

$$\text{(VI-15)} \qquad \begin{cases} P(D)\, v_n = T - P(D)\, \varphi_n \\ v_n \in H_0\,(Q, \Omega). \end{cases}$$

D'autre part (φ_n) étant bornée dans $\widetilde{H}(Q, \Omega)$, $P(D)\, \varphi_n$ est bornée dans $H'(Q, \Omega)$, donc (v_n) bornée dans $H_0(Q, \Omega)$. Il existe une sous-suite (v_{n_k}) de (v_n) convergeant faiblement dans $H_0(Q, \Omega)$ vers un élément $v \in H_0(Q, \Omega)$.

La suite (φ_{n_k}) est bornée dans $\widetilde{H}(Q, \Omega)$, on peut donc en extraire une sous-suite (φ_{n_p}) faiblement convergente vers un élément $w \in \widetilde{H}(Q, \Omega)$. (w, f) appartient à l'adhérence de $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \times \gamma\, \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $\widetilde{H}_{\text{faible}} \times \mathcal{T}$, donc à $\mathcal{H}$, donc $w \in H(Q, \Omega, \mathcal{T})$. Alors $u = v + w \in H(Q, \Omega, \mathcal{T})$ et vérifie (VI-12) de façon évidente.

c) indépendance de $\mathcal{T}$: Soit $f \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, on prend $\mathcal{T}'' = \mathcal{T} + \mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ vérifie les hypothèses de la proposition et la solution dans $H(Q, \Omega, \mathcal{T}')$ est aussi solution dans $H(Q, \Omega, \mathcal{T}')$, est aussi solution dans $H(Q, \Omega, \mathcal{T}'')$, de même que celle dans $H(Q, \Omega, \mathcal{T}')$, d'où le résultat d'après *a*) appliqué pour $\mathcal{T}$ ».

Exemple : Soit dans R^2, $P(D) = \dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\mathcal{T} = H'(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, la proposition VI-8 jointe au fait que, visiblement, $H^{(1,1)}(\Omega) \subset H(\square, \Omega, \mathcal{T})$, montre que $H(\square, \Omega, \mathcal{T}) = H^{(1,1)}(\Omega)$, le problème étudié ici est alors celui du paragraphe V-3-1.

VI-2-2 : *Applications et remarques.*

On va essayer de trouver un problème analogue à celui de l'exemple ci-dessus, d'abord pour n quelconque et un opérateur d'ordre quelconque; puis, avec des précisions supplémentaires pour des opérateurs du quatrième ordre.

Application 1 : Soit Ω un ouvert borné très régulier de R^n et $P(D) = [Q(D)]^2 + R(D)$ un opérateur hyperbolique positif, Q étant strictement hyperbolique homogène d'ordre m, on suppose que $\Gamma = \partial\Omega$ vérifie les hypothèses du dédut du paragraphe et on considère sur Γ l'ouvert U où une normale (intérieure ou extérieure) appartient à $\mathring{\Gamma}(Q)$, et le fermé $F (= \partial U)$ où Γ est caractéristique pour $Q(D)$; F est une variété C^∞ de dimension $n-2$.

A On prend d'abord $\mathcal{T}^{(0)} = \prod_{i=0}^{m-1} H^{m-i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, les hypothèses (VI-6) et (VI-7) sont visiblement satisfaites, on lui associe un espace ${}^{(0)}H(Q, \Omega)$, γ est alors une application continue de ${}^{(0)}H(Q, \Omega)$ dans $\mathcal{T}^{(0)}$. On va montrer que γ est un homomorphisme surjectif, ce qui entraînera (VI-11). Soit $\mathcal{A}_i(\Gamma)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Gamma)$ dont les dérivées d'ordre supérieur à $m-i-1$ sont nulles sur F. On constate que $\prod_{i=0}^{m-i} \mathcal{A}_i(\Gamma)$ est dense dans $\mathcal{T}^{(0)}$ et que $\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{A}_i(\Gamma)$ est contenu dans l'image de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ par γ, (vérification analogue à celle de la proposition V-3). Soient alors $\Phi_0 = (\varphi_0, \dots, \varphi_{m-2}, 0)$ et $\Phi_1 = (0, \dots, 0, \varphi_{m-1})$ dans $\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{A}_i(\Gamma)$ on voit facilement qu'il existe deux fonctions ψ_0 et ψ_1 de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ telles que

$$\begin{cases} \gamma\, \psi_i = \Phi_i & i = 0, 1 \\ \| \psi_i \|_{H^{(m)}(\Omega)} \leq C \| \Phi_i \|_{\mathcal{T}^{(0)}} \end{cases}$$

l'existence de ψ_1 se montrant comme à la proposition V-3. Ce qui, compte tenu de la continuité de γ et de l'inclusion $H^m(\Omega) \subset \widetilde{H}(Q, \Omega)$, montre le résultat cherché.

Ceci nous permet donc de poser un premier problème aux limites à données au bord dans $\mathcal{T}^{(0)}$.

B Soit maintenant $\mathcal{T}^{(1)} = \prod_{i=0}^{m-1} H_0^{m-i-1}(U)$, où les fonctions sont définies sur Γ par prolongement par zéro. $\mathcal{T}^{(1)}$ vérifie (VI-6) mais non (VI-7). Cependant le raisonnement de la proposition VI-6 (seul moment où (VI-7) est utilisé) se prolonge aisément à $\mathcal{T}^{(1)}$, ce qui permet de définir un espace ${}^{(1)}H(Q,\Omega)$. D'autre part (VI-11) se vérifie comme à la proposition III-1.

Finalement on peut donner un problème aux limites à conditions au bord dans

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{(0)} + \mathcal{T}^{(1)} = \prod_{i=0}^{m-1} (H_0^{m-i-1}(U) + H^{m-i-\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

ce qui constitue une interprétation partielle de celui du chapitre I.

REMARQUE : $n = 2$, $Q = \square$, on peut, en utilisant la proposilion V-2, remplacer ce problème par
$\mathcal{T} = [H_0^1(\Gamma \setminus F) + H^{3/2}(\Gamma)] \times L^2(\Gamma)$, il est donc légèrement plus faible que le problème étudié au paragraphe V-3.

APPLICATION 2 : On va maintenant donner des précisions dans le cas où $Q(D) = \square$, mais n quelconque. Auparavant on va utiliser un résultat de Hörmander ([19] th. 2. 2. 8) pour caractériser complètement les traces des fonctions de $H_0(\square, \Omega)$ sur les hyperplans $x_1 = a$, $x_n = a$, $x_1 + x_2 = a$, ainsi que, dans les deux premiers cas, les traces de leurs dérivées normales. Il faut pour cela calculer les cinq intégrales :

$$I_1 = \int \frac{dt}{(t^2 - \xi^2)^2 + 4\,t^2 + 4\,\xi^2 + 4n}\,; \quad I_2 = \int \frac{dt}{(t^2 - \xi^2 + \eta^2)^2 + 4(t^2 + \xi^2 + \eta^2) + 4n}$$

$$I_3 = \int \frac{t^2\,dt}{(t^2 - \xi^2) + 4\,t^2 + 4\,\xi^2 + 4n}\,; \quad I_4 = \int \frac{t^2\,dt}{(t^2 - \xi^2 + \eta^2)^2 + 4(t^2 + \xi^2 + \eta^2) + 4n}$$

$$I_5 = \int \frac{dt}{(t\,\xi - \eta^2)^2 + t^2 + \xi^2 + 4\,\eta^2 + 4\,n - 7}\,.$$

On trouve:

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\,\frac{[(\xi^4 + 4\,\xi^2 + 4\,n)^{1/2} + \xi^2 - 2]^{1/2}}{(2\,\xi^2 + n - 1)^{1/2}\,(\xi^4 + 4\,\xi^2 + 4\,n)^{1/2}}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{2}\,\frac{\{[(\xi^2 - \eta^2)^2 + 4\,\xi^2 + 4\,\eta^2 + 4\,n]^{1/2} + \xi^2 - \eta^2 - 2\}^{1/2}}{(2\,\xi^2 + n - 1)^{1/2}\,[(\xi^2 - \eta^2)^2 + 4\,\xi^2 + 4\,\eta^2 + 4\,n]^{1/2}}$$

$$I_3 = I_1 \times (\xi^4 + 4\,\xi^2 + 4\,n)^{1/2}$$

$$I_4 = I_2 \times [(\xi^2 - \eta^2)^2 + 4\,\xi^2 + 4\,\eta^2 + 4\,n]^{1/2}$$

$$I_5 = \pi\,\frac{1}{[\xi^4 + \eta^4 + 4\,\xi^2\,\eta^2 + (4\,n - 6)\,\xi^2 + 4\,\eta^2 + 4\,n - 7]^{1/2}}$$

ce qui a comme conséquences

— d'abord que, comme nous l'avons montré au chapitre III, γ est un homomorphisme de $H_0(\square, \Omega)$ sur

$$H_0^1(\{x_1 = a\} \cap \Omega) \times L^2(\{x_1 = a\} \cap \Omega)$$

— puis que γ_0 est un homomorphisme de $H_0(\square, \Omega)$ sur $H_0^1(\{x_1 + x_2 = a\} \cap \Omega)$.

Mais on voit également que tout ce que l'on peut dire de simple sur les traces sur $x_n = a$ est que l'espace des traces des fonctions est compris entre H_0^1 et $H_0^{3/4}$; et que l'espace des traces des dérivées normales est compris entre $H^{1/2}$ et L^2.

Ces considérations amènent à prendre comme meilleure interprétation partielle « simple » du problème inhomogène posé au chapitre I, dans ce cas, les conditions au bord dans $\mathcal{T} = H^1(\Gamma) \times (L^2(U) + H^{1/2}(\Gamma))$. On vérifie que c'est possible par des méthodes analogues aux précédentes.

Remarque : On aurait pu espérer à priori faire une théorie analogue à celle de ce paragraphe VI-2 en prenant l'espace

$$\underline{H}(Q, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\,;\; Q(D)\,u \in L^2(\Omega)\}$$

domaine maximal de l'opérateur Q dans L^2, muni de la norme

$$|||\,u\,||| = \|\,u\,\|_{L^2} + \|\,Q(D)\,u\,\|_{L^2}$$

au lieu de l'espace $\widetilde{H}(Q, \Omega)$ (dans lequel les fonctions sont supposées à priori dans $H^{m-1}(\Omega)$). En effet d'après des résultats non publiés de C. Goulaouic et P. Grisvard généralisant ceux de [14], on a un théorème de traces dans $\underline{H}(Q(\Omega)$. Mais les espaces de traces ne vérifient pas (VI-6).

D'autre part, l'interprétation du problème de Dirichlet homogène (VI-5) et les propositions V-3 et VI-5 ne sont plus exactes lorsqu'on remplace $H(Q, \Omega)$ par $\underline{H}(Q, \Omega)$. L'unicité de la solution peut être en défaut comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE : Si $Q = \dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$, $\Omega = \{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 < 1\}$ et $u = \operatorname{Log}|x| - \operatorname{Log}(1 - y^2)$, $u \in \underline{H}(Q, \Omega)$. En effet $Q(D)\,u = 0$ et $u \in L^2(\Omega)$. D'autre part $Q^2(D)\,u$ est évidemment nul et un calcul direct montre que $\gamma\, u = 0$.

On peut enfin remarquer que la démonstration de la proposition VI-7, calquée sur celle de la proposition VI-5, ne serait plus valable si l'on remplaçait $\widetilde{H}(Q, \Omega)$ par $\underline{H}(Q, \Omega)$ puisque l'on utilisait explicitement le fait que les dérivées d'ordre inférieur ou égal à $m - 1$ d'une fonction étaient dans L^2 ce qui, comme le montre également l'exemple ci-dessus n'est pas nécessairement vérifié.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUTHIER M. : *Espaces de Sobolev associés à une seule dérivée partielle.* C. R. Ac. Sc. Paris 262 (1966) p. 1158-1161.

[2] AUTHIER M. : *Sur le problème de Dirichlet pour des operatéurs hyperboliques positifs, dans certains ouverts non bornés,* C. R. Ac. Sc. Paris 268 (1969) p. 1386-1389.

[3] BARDOS C. : Thèse Paris (1969).

[4] BEREZANSKII Y. M. : *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint operators.* A. M. S. Transl. of Math. Monogr. n^0 17 - 1968.

[4bis] BEREZANSKII Y. M. : *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation des cordes vibrantes (en russe).* Usp. Mat. Nauk 15 (1960).

[5] BOURGIN D. G - DUFFIN R. : *The Dirichlet problem for the vibrating string equation.* Bull A. M. S. 45 (1939) p. 851-859.

[5bis] BORMAN J. : *On the propagation of analyticity of solutions of différential equations with constant coefficients.* Arkiv f. Mat. 5 (1964) p. 271-279.

[6] BROWDER F. E. : *A remark on the Dirichlet problem for non elliptic self-adjoint partial differential operators.* Rend. Circ. Mat. Palermo 6 (1957) p. 249-253.

[7] BROWDER F. E. : *On the Dirichlet problem for linear non elliptic partial differential equations.* Rend. Circ. Mat. Palermo 7 (1958) p. 303-308.

[8] BROWDER F. E. : *Non linear equations of evolutions.* Ann. of Math. 80 (1964) p. 485-523.

[9] CHAILLOU J. : *Sur les ensembles bornés de distributions polynomes inversibles et d'inverse borné, et sur les hypersurfaces hyperboliques.* Thèse - Paris (1969).

[10] DIONNE P. : *Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés* J. An. Math. Jerusalem 10 (1963) p. 1-90.

[11] FRIEDMANN A. - LITTMAN W. : *Partially characteristic boundary problems for hyperbolic equations.* J. of Math. and Mech. 12 (1963) p. 213-224.

[12] GÅRDING L. : *Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients.* Acta Math. 85 (1950) p. 1-62.

[13] GÅRDING L. *Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques.* Coll. Inst. C. N. R. S. (1956) p. 71-89.

[14] GOULAOUIC CH. - GRISVARD P. : C. R. Ac. Sc. Paris 268 (1969) p. 1537-1539.

[15] GRUBB G. : *A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator.* Ann. Sc. N. Sup. Pisa 22 (1968) p. 425-513.

[16] HADAMARD J. : *Le problème de Dirichlet pour les équations hyperboliques* J. Chinese Math. Soc. 2 (1937) p. 6-20.

[17] HADAMARD J. : *On the Dirichlet problem in the hyperbolic case.* Proc. Nat. As. Sc. USA 28 (1942) p. 258-263.

[18] HADAMARD J.: *Sur le cas anormal de l'équation des ondes pour le problème de Cauchy.* 1948 - Interscience New-York [repris dans: *Oeuvres* C. N. R. S. (1968) t. 3 p. 1679-84].

[19] HÖRMANDER L. *Linear Partial Differential Operators.* Springer - Berlin - 1963.

[20] HÖRMANDER L.: *On the theory of general partial differential operators.* Acta. Math. 94 (1955) p. 161-248.

[21] KAKITA T.: *Hyperbolic convolution operators.* Canad. J. of Math. 17 (1965) p. 559-582.

[21bis] KOHN J. - NIRENBERG L.: *Non coercive boundary problems.* Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) p. 443-492.

[22] KRÉE P.: *Sur les multiplicateors dans $\mathcal{F} L^p$.* Ann. Inst. Fourier 16 (1966) p. 31-89.

[22 bis] KUMANO-GO H.: *On propagation of regularity in space variables for the solutions of differential equations with constant coefficients.* Proc. Jap. Acad. 42 (1966) p. 204-209.

[22ter] KUMANO-GO H. - SHINKAI K.: *The characterization of differential operators with respect to characteristic Cauchy problem.* Osaka J. of Math. 3 (1966) p. 155-162.

[23] LAX A.: *On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics.* Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956) p. 135-169.

[24] LAX P. D. - PHILLIPS R. S.: *Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential equations.* Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960) p. 427-455.

[25] LERAY J.: *Hyperbolic differential equations.* Princeton (1952).

[26] LIONS J. L.: *On elliptic partial differential equations.* Tata Inst. Bombay (1957).

[27] LIONS J. L. - MAGENES E.: *Problèmes aux limites non-homogènes et applications.* 2 vol - Dunod - Paris (1968).

[28] LITTMAN W.: *The wave operator and L^p norms.* J. of Math. and Mech. 12 (1963) p. 55-68.

[29] LITTMAN W.: *Remarks on the Dirichlet problem for general linear partial differential equations.* Comm. Pure and Appl. Math. 11 (1958) p. 145-151.

[30] LOUHIVAARA I. S.: *Über das Dirichletsche Problem für die selbstadjungierten lin. part. Differentialgleichungen* 2$^{\text{nd}}$ *Ordnung.* Rend. Circ. Mat. Palermo 5 (1956) p. 260-274.

[31] LOJASIEWICZ S.: *Sur le problème de division.* Studia Mat. 18 (1959) p. 87-136.

[32] MOREL H.: *Introduction de poids dans l'étude de problèmes aux limites* Ann. Inst. Fourier 12 (1962) p. 299-414.

[33] PEYSER G: *Energy inequalities for hyperbolic equations in several variables with multiple characteristics and constant coefficients.* Trans. A. M. S. 108 (1963) p. 478-490.

[34] PHILLIPS R. S.: *Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations.* Trans. A. M. S. 90 (1959) p. 193-254.

[35] PHILLIPS R. S.: *Semi-groups of contraction operators.* Cours CIME-Varenna.

[36] SCHECHTER M.: *Negative norms and boundary problems.* Ann. of Math. 72 (1960) p. 581-593.

[37] SCHECHTER M.: *Some unusual boundary value problems* Proc. of 4$^{\text{th}}$ symp. in pure Math. A. M. S. Berkeley (1960).

[38] SCHWARTZ L.: *Théorie des Distributions.* Hermann, Paris (1967).

[39] SCHWARTZ L.: *Sous espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés.* J. Ann. Math. Jérusalem **13** (1964) p. 115-256.

[39bis] SHINKAI K.: *A note on regularity of null solutions.* Proc. Jap. Acad. **43** (1967) p. 134-137.

[40] STRICHARTZ R.: *Sobolev inequalities and extension theorems for functions with certain L^p derivatives.* Sémin. Orsay (1967) multigraphié.

[41] TALENTI G.: *Una diseguaglianza integrale.* Boll. U. M. I. **21** (1966) p. 25-34.

[42] TALENTI G.: *Sopra una diseguaglianza integrale.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **21** (1967) p. 167-188.

[43] TRÈVES F.: *Relations de domination entre opérateurs différentiels.* Acta Math. **101** (1959) p. 1-139.

[44] TRÈVES F. - ZERNER M.: *Zones d'analyticité des solutions élémentaires.* Bull S. M. F. **95** (1967) p. 155-192.

[45] YOSIDA K.: *Functional analysis.* Springer, Berlin (1965).

[46] ZERNER M.: *Solutions singulieresd'équations aux dérivées partielles.* Bull. S. M. F. **91** (1963) p. 203-226.

Departement de Mathématiques,
Université de REIMS, France.