

Problème de Fatou ponctuel et dérivabilité des mesures

par

JEAN BROSSARD

et

LUCIEN CHEVALIER

*Institut Fourier,
Université de Grenoble I
St Martin d'Hères, France*

*Institut Fourier,
Université de Grenoble I
St Martin d'Hères, France*

Cet article a trait au problème suivant, que nous appellerons *problème de Fatou ponctuel* : étant donné une mesure borélienne convenable μ sur \mathbf{R}^{ν} , on considère la fonction harmonique dans le demi-espace $\mathbf{R}_+^{\nu+1} = \mathbf{R}^{\nu} \times \mathbf{R}_+$ définie par l'intégrale de Poisson $u = P(\mu)$. A quelles conditions sur la mesure μ la fonction harmonique u admet-elle une limite non tangentielle au point $(0, 0)$?

Ce problème – ainsi que d'autres, d'ailleurs – fut posé et résolu pour la première fois par P. Fatou dans son célèbre article ([5]) de 1906, dans le cas où $\nu=1$; plus précisément, la condition suffisante obtenue est la *dérivabilité* de la mesure μ au point 0. La méthode utilise de manière essentielle le fait que $\nu=1$, et on ignore toujours si ce résultat est exact en dimension supérieure, du moins si on prend pour définition de la dérivabilité de la mesure μ au point 0 la propriété

(\mathcal{D}) Il existe $L \in \mathbf{R}$ tel que, pour toute boule ouverte B de \mathbf{R}^{ν} , la quantité $\mu(rB)/m(rB)$ admette L comme limite quand r tend vers 0, où m désigne la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^{ν} .

En 1943, L. H. Loomis prouve ([6]), toujours dans le cas où $\nu=1$, l'équivalence entre la dérivabilité en 0 d'une mesure $\mu \geq 0$ et le fait que $P(\mu)$ admette une limite non tangentielle en $(0, 0)$ (donc l'optimalité de la condition (\mathcal{D}) dans ce cas); il donne également un exemple montrant que la réciproque du « théorème de Fatou ponctuel » est fautive en l'absence d'hypothèse sur la mesure.

En ce qui concerne les résultats dans le cas où $\nu > 1$, il est connu depuis un certain temps (cf. par ex. [9], p. 197) que, si le point 0 est un *point de Lebesgue* pour la mesure μ , i.e. si

(\mathcal{L}) Il existe $L \in \mathbf{R}$ tel que, pour toute boule ouverte B de \mathbf{R}^{ν} , la quantité $|\mu - Lm|(rB)/m(rB)$ tende vers 0 quand r tend vers 0,

alors $u = P(\mu)$ admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$.

En outre, W. Ramey et D. Ullrich ont récemment obtenu ([7]), dans cette direction, les résultats suivants, également indépendants de la dimension : si la mesure μ est ≥ 0 , ou de la forme $f \cdot m$, avec $f \in \text{BMO}(\mathbf{R}^{\nu})$, alors la dérivabilité de μ implique l'existence d'une limite non tangentielle pour $u = P(\mu)$ (et cette condition est optimale puisque la réciproque est vraie dans les deux cas). Bien qu'utilisant la même idée générale, les démonstrations de ces deux résultats sont disjointes, et l'une d'elles est basée sur le théorème de Fefferman-Stein identifiant BMO au dual de H^1 .

Des résultats de même type, qui relient la dérivabilité symétrique d'une mesure à la convergence radiale de son intégrale de Poisson, ont également été obtenus (cf. [5], [6], [7], [8]).

L'idée de base de notre article est l'introduction d'une hypothèse nouvelle (\mathcal{H}), qui exprime une condition de bornitude portant sur la mesure $\Delta|\mu|$ (cf. § I). Cette condition permet, en un certain sens, de contrôler l'oscillation de la fonction $u = P(\mu)$ et d'obtenir, essentiellement, les mêmes résultats que dans le cas où la mesure μ est ≥ 0 (cf. § II, théorèmes 1, 2 et 3). Les résultats d'analyse harmonique euclidienne récemment obtenus ([2], [3]) par les auteurs, moyennant certaines hypothèses sur la densité de l'intégrale d'aire, ne sont pas étrangers à cette idée.

Il est très facile de voir (cf. § II, corollaires 1 à 7) que l'hypothèse (\mathcal{H}) est satisfaite dans les trois situations évoquées plus haut; par suite, les théorèmes 1, 2 et 3 contiennent, comme cas particuliers, les résultats antérieurs sur le sujet.

En fait, la démonstration de ces théorèmes utilisant fort peu de propriétés particulières au noyau de Poisson, on peut obtenir avec les mêmes méthodes des résultats beaucoup plus généraux, contenant, entre autres, le cas du noyau de la chaleur; ces extensions font l'objet du § III.

I. Une hypothèse permettant de contrôler l'oscillation d'une fonction harmonique

Pour tout $z = (x, y) \in \mathbf{R}_+^{\nu+1}$, et tout $\theta \in \mathbf{R}^{\nu}$, on pose

$$p_{\theta}(z) = \frac{c_{\nu} y}{(\|x - \theta\|^2 + y^2)^{(\nu+1)/2}}, \quad \text{où } c_{\nu} = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\pi^{(\nu+1)/2}}.$$

On désignera par \mathcal{M} l'ensemble des mesures de Radon μ sur \mathbf{R}^v telles que

$$\int_{\mathbf{R}^v} p_\theta(0, 1) |\mu|(d\theta) < +\infty.$$

Etant donné une fonction harmonique u dans \mathbf{R}_+^{v+1} , et $a \in \mathbf{R}$, on note φ_a le *potentiel de Green* de la mesure $\Delta|u-a|$, i.e. l'application de \mathbf{R}_+^{v+1} dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\varphi_a(z) = \int_{\mathbf{R}_+^{v+1}} \mathcal{G}(z, z') \Delta|u-a|(dz')$$

où \mathcal{G} désigne la fonction de Green de \mathbf{R}_+^{v+1} . Pour alléger les notations, φ_0 sera noté φ .

Enfin, nous introduisons les définitions suivantes : nous dirons qu'une fonction harmonique u vérifie la condition (\mathcal{H}) (resp. (\mathcal{H}')) si le potentiel de Green φ de la mesure $\Delta|u|$ est borné dans un ensemble de la forme $V \cap \mathbf{R}_+^{v+1}$, où V est un voisinage de $(0, 0)$ dans \mathbf{R}^{v+1} (resp. borné dans $\{0\} \times]0, 1[$). Par abus de langage, on dira aussi qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}$ vérifie une de ces conditions si la fonction $u = P(\mu)$ la vérifie.

Comme la densité de l'intégrale d'aire évoquée précédemment, la fonction φ permet d'estimer, en quelque sorte, si la fonction u est « proche » d'une fonction de signe constant (qui oscille « peu » et qui a un « bon » comportement à la frontière). Par exemple, il est facile de voir que φ est identiquement nulle si et seulement si u est de signe constant; on verra également (cf. § II, proposition 2) que φ est bornée dès que u est l'intégrale de Poisson d'une fonction de BMO.

La signification de φ apparaît également sur les expressions suivantes, qui nous seront utiles en plusieurs occasions :

PROPOSITION 1. *Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}$, on a les égalités :*

(*)
$$\varphi = P(|\mu|) - |P(\mu)|;$$

(**)
$$\varphi = 2 \text{Min}(P(\mu^+), P(\mu^-)).$$

Démonstration. L'égalité (*) n'est autre que la *décomposition de Riesz* de la fonction surharmonique $-|u| = -|P(\mu)|$. En effet, l'ouvert \mathbf{R}_+^{v+1} est un sous-ensemble greenien de \mathbf{R}^{v+1} , la fonction $-|u|$ est harmonique, et admet une fonction sous-harmonique minorante, ne serait-ce que $-P(|\mu|)$. Le théorème de décomposition de Riesz ([4], p. 52) est donc applicable, et fournit l'égalité

$$-|u| = G\lambda - v,$$

où $G\lambda$ est le potentiel de Green de la mesure λ associée à $-|u|$, et $-v$ la plus grande fonction harmonique minorante de $-|u|$. Il reste donc à identifier λ à $\Delta|\mu|$ et v à $P(|\mu|)$; pour voir que $\lambda = \Delta|\mu|$, il suffit d'appliquer l'opérateur Δ (au sens des distributions) à l'égalité $-|u| = G\lambda - v$, et d'utiliser des propriétés classiques de la fonction de Green. Le fait que $v = P(|\mu|)$ est une conséquence immédiate du principe du maximum, dans le cas particulier où la mesure μ admet une densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue; le cas général s'en déduit au moyen d'une approximation, par exemple de la manière suivante :

Pour tout entier $n > 0$, notons $f_n: \mathbf{R}^v \rightarrow \mathbf{R}$ l'application définie par

$$f_n(\theta) = \int_{\mathbf{R}^v} p_\xi(\theta, 1/n) \mu(d\xi);$$

en appliquant ce qui précède à la fonction surharmonique $-|P(f_n \cdot m)|$, on obtient, pour tout entier $n > 0$ et tout $z = (x, y) \in \mathbf{R}_+^{v+1}$,

$$-|u(x, y + 1/n)| = \int_{\mathbf{R}^v} \mathcal{G}_n(z, z') \Delta|u|(dz') - \int_{\mathbf{R}^v} p_\theta(z) |f_n|(\theta) d\theta,$$

où \mathcal{G}_n est la fonction de Green relative à l'ouvert $\mathbf{R}^v \times]1/n, +\infty[$. On sait que, pour tout $(z, z') \in \mathbf{R}_+^{v+1} \times \mathbf{R}_+^{v+1}$, $\mathcal{G}_n(z, z')$ converge en croissant, lorsque n tend vers l'infini, vers $\mathcal{G}(z, z')$. Les trois termes de l'égalité précédente ont donc une limite lorsque n tend vers l'infini, et on a, pour tout $z \in \mathbf{R}_+^{v+1}$,

$$-|u(z)| = \varphi(z) - \lim \int_{\mathbf{R}^v} p_\theta(z) |f_n|(\theta) d\theta.$$

Par suite, il reste uniquement à vérifier que

$$v'(z) = \lim \int_{\mathbf{R}^v} p_\theta(z) |f_n|(\theta) d\theta \geq \int_{\mathbf{R}^v} p_\theta(z) |\mu|(d\theta).$$

Fixons $z \in \mathbf{R}_+^{v+1}$, et soit $g: \mathbf{R}^v \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue à support compact telle que $|g(\theta)| \leq p_\theta(z)$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}^v$. D'après le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbf{R}^v} p_\theta(z) |f_n|(\theta) d\theta \geq \left| \int_{\mathbf{R}^v} g(\theta) f_n(\theta) d\theta \right| = \left| \int_{\mathbf{R}^v} P(g \cdot m)(\xi, 1/n) \mu(d\xi) \right|.$$

Comme g est continue et à support compact, la suite de fonctions

$$(P(g \cdot m)(\cdot, (1/n)) / p_\theta(\cdot, 1))$$

converge uniformément vers $g/p_0(\cdot, 1)$. Donc, comme $\mu \in \mathcal{M}$,

$$\left| \int_{\mathbf{R}^v} P(g \cdot m)(\xi, 1/n) \mu(d\xi) \right| \text{ converge vers } \left| \int_{\mathbf{R}^v} g(\xi) \mu(d\xi) \right|$$

lorsque n tend vers l'infini.

Par conséquent,

$$v'(z) \geq \left| \int_{\mathbf{R}^v} g(\xi) \mu(d\xi) \right|$$

pour toute fonction g continue à support compact telle que $|g(\theta)| \leq p_\theta(z)$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}^v$, ce qui prouve l'inégalité voulue, et achève la démonstration de l'égalité (*).

L'égalité (**) s'obtient facilement à partir de la précédente, en utilisant le fait que, si a et b sont deux réels, on a $2 \text{Min}(a, b) = a + b - |a - b|$.

Bien évidemment, ces dernières expressions de φ ont un sens lorsqu'on remplace le noyau de Poisson par d'autres noyaux; en particulier, nous aurons à considérer la fonction φ^f définie dans \mathbf{R}_+^{v+1} par l'égalité

$$\varphi^f(z) = \frac{|\mu(B(x, y))|}{m(B(x, y))} - \left| \frac{\mu(B(x, y))}{m(B(x, y))} \right|$$

ainsi que les hypothèses (\mathcal{H}_1) et (\mathcal{H}'_1) obtenues en remplaçant, dans la définition de (\mathcal{H}) et (\mathcal{H}') , la fonction φ par la fonction φ^f . Il n'est pas sans intérêt de comparer ces hypothèses entre elles (cf. § II, proposition 3).

D'autres généralisations sont envisagées dans le § III.

II. Application au problème de Fatou ponctuel

Pour tout réel $a > 0$, on note Γ_a l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}_+$ tels que $\|x\| < ay$. Pour toute fonction réelle u définie dans \mathbf{R}_+^{v+1} , on pose

$$N_a^1(u)(0) = \sup_{z \in \Gamma_a; y < 1} |u(z)|$$

et

$$N_0^1(u)(0) = \sup_{y < 1} |u(0, y)|$$

On dit que u admet une *limite non tangentielle* au point $(0, 0)$ si, pour tout $a > 0$, $u(z)$ tend vers une limite lorsque z tend vers $(0, 0)$ en restant dans Γ_a , et que u est *non tangentiellement bornée* au point $(0, 0)$ si $N_a^1(u)(0)$ est fini pour tout $a > 0$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^v$, et tout $r > 0$, la boule ouverte de centre x et de rayon r sera notée $B(x, r)$. Pour toute mesure de Radon μ sur \mathbf{R}^v , et tout $h > 0$, on pose

$$M^h(\mu)(0) = \sup_{r < h} |\mu|(B(0, r)) / m(B(0, r));$$

$$\tilde{M}^h(\mu)(0) = \sup_{r < h} |\mu(B(0, r))| / m(B(0, r)).$$

Les principaux résultats de ce paragraphe sont les théorèmes 1 et 2, qui relient la dérivabilité d'une mesure μ à la convergence non tangentielle de la fonction $u = P(\mu)$. Nous donnons également (théorème 3) un résultat qui relie la dérivabilité symétrique de μ à la convergence radiale de $P(\mu)$.

THÉORÈME 1. *Soit $\mu \in \mathcal{M}$, et soit $u = P(\mu)$. Si μ vérifie (\mathcal{D}) , et si u vérifie (\mathcal{H}') , alors u admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$.*

Nous établirons en fait le résultat équivalent (cf. proposition 3) obtenu en remplaçant l'hypothèse « u vérifie (\mathcal{H}') » par l'hypothèse « μ vérifie (\mathcal{H}'_1) ». Les résultats suivants seront utilisés dans la démonstration du théorème :

LEMME 1. *Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Pour tout $z = (x, y) \in \mathbf{R}_+^{v+1}$, et tout $r > 0$, on a*

$$u(rz) = \int_{\{\varrho \leq 1\}} \frac{\mu(rB(x, \varrho))}{m(rB(x, \varrho))} \frac{c'_v y \varrho^{v+1}}{(\varrho^2 + y^2)^{(v+3)/2}} d\varrho + \varepsilon(r),$$

où $\varepsilon(r)$ tend vers 0 quand r tend vers 0, avec $c'_v = (v+1)b_v c_v$, où b_v désigne le volume de la boule unité de \mathbf{R}^v .

LEMME 2. *Soit u une fonction harmonique non tangentiellement bornée au point $(0, 0)$. Pour que u admette une limite non tangentielle en ce point, il suffit qu'elle y admette une « limite multiradiale », i.e. qu'il existe $L \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $z \in \mathbf{R}_+^{v+1}$, $u(rz)$ tende vers L quand r tend vers 0.*

Démonstration du théorème 1. La mesure μ étant dérivable au point 0, la quantité $\tilde{M}^h(\mu)(0)$ est finie pour tout $h > 0$; en raison de l'hypothèse (\mathcal{H}'_1) , il en résulte que $M^h(\mu)(0)$ est fini pour tout $h > 0$; mais comme (cf. [9], p. 197) la fonction maximale de Hardy–Littlewood domine les fonctions maximales non tangentielles, il en résulte que

la fonction u est bornée non tangentiellement au point $(0, 0)$. On voit donc, en utilisant le lemme 2, qu'il suffit de prouver que u admet L comme limite multiradiale au point $(0, 0)$. Enfin, en vertu du lemme 1, on est ramené à montrer que, pour tout $z = (x, y) \in \mathbf{R}_+^{v+1}$, l'intégrale

$$\int_{\{r\varrho \leq 1\}} \frac{\mu(rB(x, \varrho))}{m(rB(x, \varrho))} \frac{c'_v y \varrho^{v+1}}{(\varrho^2 + y^2)^{(v+3)/2}} d\varrho$$

tend vers L quand r tend vers 0. Fixons donc $z \in \mathbf{R}_+^{v+1}$; il est clair que, grâce à l'hypothèse de dérivabilité de μ , la quantité

$$f(z, r, \varrho) = 1_{]0, 1/r[}(\varrho) \frac{\mu(rB(x, \varrho))}{m(rB(x, \varrho))} \frac{c'_v y \varrho^{v+1}}{(\varrho^2 + y^2)^{(v+3)/2}}$$

tend vers

$$L \frac{c'_v y \varrho^{v+1}}{(\varrho^2 + y^2)^{(v+3)/2}}$$

quand r tend vers 0, pour tout $\varrho > 0$.

D'autre part, pour tout $\varrho > 0$, $B(x, \varrho) \subset B(0, \|x\| + \varrho)$, et par suite

$$\begin{aligned} \frac{|\mu(rB(x, \varrho))|}{m(rB(x, \varrho))} &\leq \frac{|\mu(rB(x, \varrho))|}{|\mu(rB(0, \|x\| + \varrho))|} \frac{|\mu(rB(0, \|x\| + \varrho))|}{m(rB(0, \|x\| + \varrho))} \left(\frac{\|x\| + \varrho}{\varrho} \right)^v \\ &\leq M^{\|x\|+1}(\mu)(0) \left(\frac{\|x\| + \varrho}{\varrho} \right)^v \end{aligned}$$

si $r\varrho \leq 1$ et $0 < r \leq 1$.

Comme on l'a déjà observé, $M^{\|x\|+1}(\mu)(0)$ est fini; par suite, pour tout $r \leq 1$, et tout $\varrho > 0$,

$$|f(z, r, \varrho)| \leq C \frac{(\|x\| + \varrho)^v \varrho y}{(\varrho^2 + y^2)^{(v+3)/2}}$$

où C est une constante finie. Comme, bien évidemment,

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\|x\| + \varrho)^v}{(\varrho^2 + y^2)^{(v+3)/2}} \varrho d\varrho < +\infty$$

le théorème de la convergence dominée de Lebesgue prouve que, lorsque r tend vers 0,

$$\int_0^{+\infty} f(z, r, \varrho) d\varrho \quad \text{tend vers} \quad L \int_0^{+\infty} \frac{c'_v y \varrho^{v+1}}{(\varrho^2 + y^2)^{(v+3)/2}} d\varrho = L.$$

Le théorème sera donc démontré dès qu'on aura prouvé les lemmes 1 et 2.

Démonstration du lemme 1. Fixons $z \in \mathbf{R}_+^{v+1}$ et $r > 0$; il est clair que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}^v$, on a l'égalité

$$p_\theta(rz) = \int_{\|x-\theta/r\|}^{+\infty} \frac{1}{r^v} \frac{(\nu+1) c_\nu y \varrho}{(\varrho^2+y^2)^{(\nu+3)/2}} d\varrho = \int_{\|x-\theta/r\|}^{+\infty} \frac{1}{m(rB(x, \varrho))} \frac{c'_\nu \varrho^{\nu+1} y}{(\varrho^2+y^2)^{(\nu+3)/2}} d\varrho.$$

Donc, en appliquant le théorème de Fubini, on obtient l'égalité

$$(1) \quad u(rz) = \int_0^{+\infty} \frac{\mu(rB(x, \varrho))}{m(rB(x, \varrho))} \frac{c'_\nu \varrho^{\nu+1} y}{(\varrho^2+y^2)^{(\nu+3)/2}} d\varrho.$$

Compte tenu du fait que, si r est assez petit et $r\varrho \geq 1$, on a $B(x, \varrho) \subseteq B(0, 2\varrho)$, il suffit de prouver que l'intégrale

$$I(r) = \int_{\{r\varrho \geq 1\}} \frac{|\mu|(2rB(0, \varrho))}{m(2rB(0, \varrho))} \frac{c'_\nu \varrho^{\nu+1} y}{(\varrho^2+y^2)^{(\nu+3)/2}} d\varrho$$

tend vers 0 lorsque r tend vers 0. Soit f l'application de \mathbf{R}^v dans \mathbf{R}^v définie par $f(x) = x$ si $\|x\| \geq 2$, $f(x) = 2x/\|x\|$ si $0 < \|x\| < 2$ et $f(0) = 0$, et soit ν l'image de $|\mu|$ par f ; il est clair que $\nu(B(0, \varrho)) = |\mu|(B(0, \varrho))$ si $\varrho \geq 2$ et que $\nu(B(0, \varrho)) = 0$ si $\varrho < 2$; par conséquent, $\nu \in \mathcal{M}$; d'autre part on voit, en changeant de variable dans l'intégrale $I(r)$ et en utilisant de nouveau l'égalité (1), que $I(r) = P(\nu)(0, 2ry)$. Il en résulte, comme la mesure ν est nulle dans un voisinage de 0, que cette quantité tend vers 0 quand r tend vers 0, ce qui termine la démonstration du lemme 1.

Démonstration du lemme 2. Posons, pour tout $r > 0$ et tout $z \in \mathbf{R}_+^{v+1}$, $u_r(z) = u(rz)$. Pour montrer que u admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$, il suffit de montrer que la famille (u_r) converge uniformément sur tout compact de \mathbf{R}_+^{v+1} quand r tend vers 0; un tel compact K étant fixé, on choisit $a > 0$ de façon à ce que le cône Γ_a contienne K . Par hypothèse, la fonction u est bornée dans ce cône, donc l'ensemble des restrictions $(u_r|_{\Gamma_a})$ est une famille uniformément bornée de fonctions harmoniques, dont toute sous-famille uniformément convergente sur K converge vers L , en vertu de l'hypothèse de convergence multiradiale; grâce à l'argument de compacité usuel, ceci termine la démonstration.

Voici quelques conséquences du théorème 1 :

COROLLAIRE 1 ([9], p. 197). Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Si le point 0 est une point de

Lebesgue pour la mesure μ , alors la fonction u admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$.

Démonstration. Il est évident que, dans ce cas, la mesure μ est dérivable au point 0, et que $M^h(\mu)(0)$ est fini pour tout $h > 0$; a fortiori, la condition (\mathcal{H}_1) est remplie.

COROLLAIRE 2 (W. Ramey et D. Ullrich [7]). *Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Si la mesure μ est ≥ 0 et dérivable au point 0, alors la fonction u admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$.*

Démonstration. Immédiate, vu que φ est identiquement nulle dans ce cas.

On peut observer que le corollaire 1 découle aussi du corollaire 2, car, en un point de Lebesgue, les mesures μ^+ et μ^- sont toutes deux dérivables.

COROLLAIRE 3 (W. Ramey et D. Ullrich [7]). *Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Si μ est de la forme $f \cdot m$, avec $f \in \text{BMO}(\mathbf{R}^v)$, et si μ est dérivable au point 0, alors la fonction u admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$.*

Démonstration. Dans ce cas encore, on peut appliquer le théorème 1; plus précisément, on a la

PROPOSITION 2. *Avec les notations précédentes, la fonction $f \in \text{BMO}(\mathbf{R}^v)$ si et seulement si*

$$\sup_{(a, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^{v+1}} \varphi_a(z) < +\infty.$$

Plus précisément, on a l'égalité :

$$(2) \quad \|f\|_{\text{BMO}} = \sup_{(a, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^{v+1}} \varphi_a(z),$$

où

$$\|f\|_{\text{BMO}} = \sup_{z \in \mathbf{R}_+^{v+1}} P(|f - P(f)(z)|)(z).$$

Démonstration. Il est classique que $f \in \text{BMO}(\mathbf{R}^v)$ si et seulement si la mesure $f \cdot m \in \mathcal{M}$ et $\|f\|_{\text{BMO}} < +\infty$. La proposition sera donc conséquence de l'égalité (2). Pour tout $(a, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^{v+1}$, l'application de la proposition 1 à la mesure $(f - a) \cdot m$ fournit l'égalité

$$(3) \quad P(|f-a|)(z) = |P(f)(z)-a| + \varphi_a(z);$$

on en déduit immédiatement que

$$(4) \quad \text{pour tout } (a, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^{\nu+1}, \quad \varphi_a(z) \leq P(|f-P(f)(z)|)(z) \leq \|f\|_{\text{BMO}}.$$

D'autre part, on observe que, comme conséquence de l'égalité (3),

$$(5) \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{R}_+^{\nu+1}, \quad \varphi_{P(f)(z)}(z) = P(|f-P(f)(z)|)(z),$$

et il est clair que les propriétés (4) et (5) fournissent l'égalité (2).

Il est à noter que notre démonstration du corollaire 3 n'utilise pas de résultat profond concernant BMO, et montre qu'on utilise fort peu le fait que $f \in \text{BMO}$.

Le résultat suivant précise les relations entre les hypothèses (\mathcal{H}') et (\mathcal{H}_1) :

PROPOSITION 3. *Toute mesure $\mu \in \mathcal{M}$ vérifiant (\mathcal{H}') (resp. (\mathcal{H})) vérifie aussi (\mathcal{H}_1) (resp. (\mathcal{H}_1)); inversement, si $\tilde{M}^1(\mu)(0)$ est fini, l'hypothèse (\mathcal{H}_1) implique l'hypothèse (\mathcal{H}') .*

Démonstration. La première assertion résulte de l'estimation précise suivante :

LEMME 3. *Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}$, et tout $z \in \mathbf{R}_+^{\nu+1}$, on a*

$$\varphi^I(z) \leq \frac{2}{b_\nu c_\nu} \varphi(z).$$

Démonstration du lemme 3. Si on pose, pour tout $z \in \mathbf{R}_+^{\nu+1}$,

$$I(\mu_+)(z) = \mu_+(B(x, y))/m(B(x, y))$$

et

$$I(\mu_-)(z) = \mu_-(B(x, y))/m(B(x, y)),$$

on a

$$\varphi^I = 2 \text{Min}(I(\mu_+), I(\mu_-)).$$

Compte tenu de l'égalité (**) (proposition 1), il suffit donc de vérifier que, pour toute mesure positive $\nu \in \mathcal{M}$, et tout $z \in \mathbf{R}_+^{\nu+1}$,

$$P(\nu)(z) \geq (b_\nu c_\nu / 2) (\nu(B(x, y))/m(B(x, y))),$$

ce qui est immédiat.

Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit de remarquer qu'on a les inégalités suivantes, où C est une constante universelle et $v=P(|\mu|)$:

$$N_0^1(\varphi)(0) \leq N_0^1(v)(0) \leq CM^1(\mu)(0) \leq C(\tilde{M}^1(\mu)(0) + N_0^1(\varphi^f)(0)).$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.

L'exemple suivant montre que, en l'absence d'hypothèse supplémentaire sur la mesure, la condition (\mathcal{H}_f) peut être remplie sans que la condition (\mathcal{H}') le soit.

Soient a et b deux nombres réels tels que $b < a < 1$. On définit une suite (r_n) de nombres réels positifs en posant

$$\begin{aligned} r_0 &= 1; \\ r_n &= r_{n-1} a^n \text{ si } n \text{ est un entier pair } \geq 2; \\ r_n &= r_{n-1} b^n \text{ si } n \text{ est un entier impair.} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera S_n la sphère de centre 0 et de rayon r_n dans \mathbb{R}^v ; soit μ une mesure borélienne satisfaisant aux conditions suivantes :

μ_+ (resp. μ_-) est portée par la réunion des sphères S_n d'indice pair (resp. impair);

Si B désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbb{R}^v , et b_v son volume, on a $\mu_+(r_n B)$ (resp. $\mu_-(r_n B) = b_v(r_{n-1})^v$ si n est pair (resp. impair).

On a $\varphi^f(z) \leq ((2-a)/(1-a))^v$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{v+1}$:

Soit $r > 0$; il existe un entier n et un seul tel que $r_{n-1} \leq r < r_{n-2}$; si n est pair (resp. impair), on a

$$\frac{\mu_+(rB)}{m(rB)} \left(\text{resp. } \frac{\mu_-(rB)}{m(rB)} \right) \leq \frac{\mu_+(r_n B)}{m(r_{n-1} B)} \left(\text{resp. } \frac{\mu_-(r_n B)}{m(r_{n-1} B)} \right) \leq 1.$$

Par conséquent, il résulte de l'expression de φ^f utilisée dans le lemme 3 que $\varphi^f(0, y) \leq 1$ pour tout $y > 0$. D'autre part, si la boule $B(x, y)$ rencontre au plus une des sphères S_n , il est clair que $\varphi^f(x, y) = 0$; dans le cas contraire on a nécessairement, pour au moins un entier n

$$\|x\| \leq r_{n-1} \text{ et } 2y \geq r_{n-1} - r_n,$$

donc

$$\frac{\|x\|}{y} \leq 2 \frac{r_{n-1}}{r_{n-1} - r_n} \leq \frac{2}{1-a^n} < \frac{2}{1-a},$$

ce qui prouve que $(x, y) \in \Gamma_a$, avec $\alpha = 1/(1-a)$. Mais, dans ce cas,

$$\varphi^l(x, y) \leq \varphi^l(0, \|x\|+y) ((\|x\|+y)/y)^\nu \leq (1+\alpha)^\nu,$$

d'où le résultat.

On a $\sup_{y>0} \varphi(0, y) = +\infty$:

Posons $v_+ = P(\mu_+)$ et $v_- = P(\mu_-)$; il suffit de montrer que les deux suites $(v_+(0, r_{2n}))$ et $(v_-(0, r_{2n}))$ tendent vers l'infini; on désignera par C un nombre >0 , dépendant seulement de a , b et ν , dont la valeur change d'une ligne à l'autre. D'après l'égalité (1) (évidemment valable lorsque les boules sont fermées), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_+(0, r_n) \geq C \int_1^{+\infty} \frac{\mu_+(r_n \varrho B)}{(r_n \varrho)^\nu} \frac{\varrho^{\nu+1}}{(\varrho^2+1)^{(\nu+3)/2}} d\varrho.$$

Donc, si n est pair,

$$v_+(0, r_n) \geq C \int_1^{+\infty} (r_n a^{-n})^\nu r_n^{-\nu} \frac{\varrho}{(\varrho^2+1)^{(\nu+3)/2}} d\varrho \geq C a^{-n\nu}.$$

D'autre part,

$$v_-(0, r_n) \geq C \int_{r_{n-1}/r_n}^{+\infty} \frac{\mu_-(r_n \varrho B)}{(r_n \varrho)^\nu} \frac{\varrho^{\nu+1}}{(\varrho^2+1)^{(\nu+3)/2}} d\varrho.$$

Donc, si n est pair

$$v_-(0, r_n) \geq C \int_{a^{-n}}^{+\infty} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^\nu b^{-\nu(n-1)} \frac{\varrho}{(\varrho^2+1)^{(\nu+3)/2}} d\varrho \geq C \left(\frac{a}{b^\nu}\right)^n.$$

Par suite

$$\varphi(0, r_{2n}) \geq C \text{Min}((a^{-\nu})^n, (ab^{-\nu})^n),$$

et le résultat est établi.

Contrairement à ce qui se passe dans les cas étudiés dans [7], on n'a pas, sous la seule hypothèse (\mathcal{H}') , équivalence entre la dérivabilité de la mesure μ au point 0 et l'existence d'une limite non tangentielle pour la fonction $u = P(\mu)$ au point $(0, 0)$, comme le montre le résultat suivant :

PROPOSITION 4. *Il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}$, non dérivable au point 0, telle que la*

fonction $u=P(\mu)$ vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}') et admette une limite non tangentielle au point $(0, 0)$.

Démonstration. Nous considérerons uniquement le cas où $\nu=1$, car il est facile d'en déduire un exemple dans le cas général.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, δ_x désignera la mesure de Dirac au point x . Etant donné $0 < a < 1$, nous considérons la mesure

$$\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n (\delta_{a^n} - \delta_{a^{k_n}}), \quad \text{où } k_n = 1 + a^{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Dans tout ce qui suit, on désigne par C un nombre dépendant seulement de z et a , et qui change de place en place.

La condition (\mathcal{H}') est remplie :

Soit $v=P(|\mu|)$. Compte tenu de l'égalité $v=|u|+\varphi$, il suffit de prouver que la fonction v est bornée dans l'ensemble $\{0\} \times]0, 1]$; pour cela, il suffit d'établir la bornitude dans $]0, 1]$ de l'application

$$y \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n y}{a^{2n} + y^2}$$

propriété qui résulte des inégalités suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n y}{a^{2n} + y^2} \leq \sum_{n=0}^k ya^{-n} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} y^{-1} a^n \leq C(ya^{-k} + y^{-1} a^k) \leq C$$

si $a^{k+1} \leq y < a^k$.

La fonction $u=P(\mu)$ admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$:

Il suffit de montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$ vérifiant $\|z\| \leq 1/2$, on a $|u(rz)| \leq rC$ pour tout $r < 1$. En effet, il en résultera que la fonction u admet 0 comme limite multiradiale au point $(0, 0)$; comme $N_0^1(v)(0)$ est fini, $M^1(\mu)(0)$ l'est aussi, donc la fonction u est non tangentiellement bornée au point $(0, 0)$; par conséquent, l'existence d'une limite non tangentielle découlera du lemme 2. Soit $z=(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, vérifiant $\|z\| \leq 1/2$, et soit $r < 1$; par définition,

$$u(rz) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(rz),$$

où

$$u_n(rz) = c_1 \frac{rya^{4n}(a^{3n}+2a^n-2rx)}{((rx-a^n)^2+r^2y^2)((rx-a^nk_n)^2+r^2y^2)}.$$

Soit k l'unique entier tel que $a^{k+1} \leq r < a^k$; en utilisant les inégalités

$$|(a^{3n}+2a^n-2rx)| \leq Ca^n \quad \text{si } n \leq k;$$

$$|(a^{3n}+2a^n-2rx)| \leq C \quad \text{si } n \geq k$$

et

$$a^nk_n - rx \geq a^n - rx \geq a^n/2 \quad \text{si } n \leq k,$$

on obtient

$$(6) \quad \text{pour } n \leq k, \quad 0 < r < 1 \text{ et } \|z\| \leq 1/2, \quad |u_n(rz)| \leq Cra^n$$

et

$$(7) \quad \text{pour } n > k, \quad 0 < r < 1 \text{ et } \|z\| \leq 1/2, \quad |u_n(rz)| \leq Cra^{4(n-k)}.$$

Il résulte immédiatement des assertions (6) et (7) que, pour $0 < r < 1$ et $\|z\| \leq 1/2$, on a $|u(rz)| \leq Cr$, qui est la majoration cherchée.

La mesure μ n'est pas dérivable au point 0 :

Pour $b > 0$, soit B_b la boule ouverte $B(1/2 + 1/2a, b/2a - b/2)$. Un calcul immédiat montre que, pour tout entier n assez grand,

$$\frac{\mu(a^n B_1)}{m(a^n B_1)} = \frac{-a}{1-a}, \quad \text{tandis que } \frac{\mu(a^n B_b)}{m(a^n B_b)} = 0 \quad \text{si } b < 1.$$

D'où le résultat.

Néanmoins, si on renforce convenablement l'hypothèse (\mathcal{H}'), on obtient la réciproque partielle suivante du théorème 1 :

THÉORÈME 2. *Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Si la fonction u vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}) et admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$, alors la mesure μ est dérivable au point 0.*

Démonstration. Quitte à ajouter à la mesure μ un multiple convenable de la mesure

de Lebesgue, on peut supposer que la fonction u admet 0 comme limite non tangentielle au point $(0, 0)$ (l'hypothèse (\mathcal{H}) n'est pas altérée par cette opération, cf. remarque 1). La démonstration s'appuie sur le résultat suivant, qui peut être considéré comme une « réciproque faible » du théorème 1, dans laquelle les fonctions continues à support compact remplacent les fonctions indicatrices de boules ouvertes :

LEMME 4. Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Si la fonction u vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}') et admet une limite non tangentielle égale à 0 au point $(0, 0)$, alors, pour toute fonction f continue et à support compact dans \mathbf{R}^v , l'intégrale

$$\frac{1}{r^v} \int_{\mathbf{R}^v} f\left(\frac{x}{r}\right) \mu(dx)$$

tend vers 0 quand r tend vers 0.

Admettons provisoirement ce résultat. Si la mesure μ n'est pas dérivable au point 0, il existe un nombre $c > 0$, une boule ouverte B de \mathbf{R}^v , et une suite (r_n) de nombres positifs qui converge vers 0, tels que

$$(8) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad r_n^{-v} |\mu(r_n B)| \geq c.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des points b_1, \dots, b_N de la frontière ∂B de B tels que

$$\partial B \subseteq C_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N B(b_i, \varepsilon)$$

avec $N \leq C\varepsilon^{1-v}$, où C est une constante ne dépendant que de v et B .

Soit maintenant f une fonction continue telle que

$$1_B \leq f \leq 1_{B \cup C_\varepsilon}.$$

Compte tenu de (8), et d'après le lemme 4,

$$\frac{1}{r_n^v} \left| \int_{\mathbf{R}^v} \left(f\left(\frac{x}{r_n}\right) - 1_B\left(\frac{x}{r_n}\right) \right) \mu(dx) \right| \geq \frac{c}{2} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Et donc, comme

$$|f - 1_B| \leq 1_{C_\varepsilon}$$

$$\frac{c}{2} \leq r_n^{-v} \int_{\mathbf{R}^v} 1_{C_\varepsilon}\left(\frac{x}{r_n}\right) |\mu|(dx) = r_n^{-v} |\mu|(r_n C_\varepsilon) \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Par suite, pour l'un au moins des points b_i ,

$$|\mu|(r_n B(b_i, \varepsilon)) \geq (c/2N) r_n^\nu \geq (c/2C) \varepsilon^{\nu-1} r_n^\nu$$

pour une infinité d'indices n . Quitte à extraire une sous-suite, on a donc trouvé une boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ telle que

$$(9) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad |\mu|(r_n B(x, \varepsilon)) \geq (c/2C) \varepsilon^{\nu-1} r_n^\nu.$$

Soient $z=(x, \varepsilon)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_n=r_n z$. En posant $v=P(|\mu|)$, et en utilisant (9), on obtient

$$v(z_n) \geq \int_{r_n B(x, \varepsilon)} p_\theta(z_n) |\mu|(d\theta) \geq \frac{1}{2(r_n \varepsilon)^\nu} |\mu|(r_n B_\varepsilon) \geq \frac{c}{4C\varepsilon} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite (z_n) tend vers $(0, 0)$ en restant dans un cône Γ_a ; par conséquent, la suite $(v(z_n))$ converge vers 0 et donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{z \rightarrow 0} v(z) \geq c/(4C\varepsilon),$$

ce qui contredit l'hypothèse (\mathcal{H}) .

Démonstration du lemme 4. Il suffit d'adapter un argument standard, déjà utilisé dans [7] dans le cas de mesures ≥ 0 , après avoir remarqué que

$$N_0^1(v)(0) \leq N_0^1(|\mu|)(0) + N_0^1(\varphi)(0) < +\infty$$

où $v=P(|\mu|)$. Par ailleurs, nous établirons au § III un résultat plus général (lemme 6).

Il est à noter que les hypothèses du théorème 2 permettent en fait d'obtenir un résultat plus fort que la dérivabilité au sens de la propriété (\mathcal{D}) ; plus précisément, convenons de dire qu'une mesure borélienne μ est *fortement dérivable au point* $(0, 0)$ si la condition suivante est remplie :

(\mathcal{D}_f) Il existe $L \in \mathbf{R}$ tel que, pour toute suite (x_n, y_n) de points de $\mathbf{R}_+^{\nu+1}$ qui converge vers $(0, 0)$ en restant dans un cône Γ_a , le rapport $\mu(B(x_n, y_n))/m(B(x_n, y_n))$ tend vers L quand n tend vers l'infini.

Nous pouvons alors énoncer la

PROPOSITION 5. *Soit μ une mesure borélienne vérifiant la condition (\mathcal{H}_f) . Si μ vérifie la propriété (\mathcal{D}) , alors elle vérifie la propriété (\mathcal{D}_f) .*

Démonstration. Supposons, ce qui est loisible, que la dérivée en 0 de la mesure μ est nulle. Si la propriété $(\mathcal{D}_\varepsilon)$ est en défaut, il existe $a > 0$, une suite (x_n, y_n) de points de Γ_a qui converge vers le point $(0, 0)$, et $c > 0$, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n^{-\nu} |\mu(y_n B(t_n, 1))| \geq c,$$

où $t_n = x_n / y_n$. Par compacité, on peut supposer que la suite (t_n) converge vers un point $t \in \mathbb{R}_+^{\nu+1}$. Etant donné $\varepsilon > 0$, on recouvre la frontière de la boule $B(t, 1)$ par une union C_ε de boules $B(b_1, \varepsilon), \dots, B(b_N, \varepsilon)$, où N est choisi $\leq C\varepsilon^{1-\nu}$, C ne dépendant que de ν . Il est clair que, pour n assez grand,

$$y_n B(t_n, 1) \Delta y_n B(t, 1) \subset y_n C_\varepsilon,$$

où Δ désigne l'opérateur de différence symétrique. Compte tenu de la propriété (\mathcal{D}) , la suite $(y_n^{-\nu} |\mu(y_n B(t, 1))|)$ converge vers 0; par conséquent, pour n assez grand,

$$y_n^{-\nu} |\mu(y_n C_\varepsilon)| \geq c/2.$$

En procédant comme dans la démonstration du théorème 2, on voit facilement que ceci est en contradiction avec l'hypothèse (\mathcal{H}_1) .

Ce fait a été observé, dans le cas particulier d'une mesure ≥ 0 , dans [7].

Comme précédemment, le théorème 2 a comme conséquences immédiates les résultats suivants :

COROLLAIRE 4. (L. H. Loomis [6]; W. Ramey et D. Ullrich [7]). *Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Si la mesure μ est ≥ 0 , et si la fonction u admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$, alors la mesure μ est dérivable au point $(0, 0)$.*

COROLLAIRE 5. (W. Ramey et D. Ullrich [7]). *Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Si μ est de la forme $f \cdot m$, avec $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^\nu)$, et si la fonction u admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$, alors la mesure μ est dérivable au point $(0, 0)$.*

Avant d'aborder l'étude de la convergence radiale, rappelons quelques définitions. Etant donné une mesure de Radon μ sur \mathbb{R}^ν , on dit que μ admet une dérivée symétrique au point 0 si

(\mathcal{D}_s) Pour toute boule ouverte B de \mathbb{R}^ν , centrée en 0, la quantité $\mu(rB)/m(rB)$ tend vers une limite quand r tend vers 0.

Si de plus, $\mu \in \mathcal{M}$, on dit que la fonction $u = P(\mu)$ admet une limite radiale au point

(0, 0) si

(\mathcal{L}_r) $u(0, y)$ tend vers une limite quand y tend vers 0.

L'implication $(\mathcal{D}_s) \Rightarrow (\mathcal{L}_r)$, due à P. Fatou ([5]) dans le cas où $\nu=1$, s'étend sans difficulté en dimension supérieure (par exemple, en utilisant le lemme 1 et le théorème de convergence dominée). Le théorème 3 nous permet d'obtenir la réciproque sous des hypothèses plus générales que celles connues auparavant, avec une démonstration unifiée et plus simple (cf. corollaires 6 et 7).

Etant donné une application $f: \mathbf{R}^\nu \rightarrow \mathbf{R}$, continue et à support compact, on note f_{ra} la fonction radiale associée à f , définie par

$$f_{ra}(x) = \int_S f(\|x\|t) \sigma(dt)$$

où S désigne la sphère unité de \mathbf{R}^ν et σ désigne la mesure de surface normalisée sur S .

On dira qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}$ est *radiale* (resp. *antiradiale*) si, pour toute fonction f continue et à support compact,

$$\int_{\mathbf{R}^\nu} f(x) \mu(dx) = \int_{\mathbf{R}^\nu} f_{ra}(x) \mu(dx)$$

(resp. $\int_{\mathbf{R}^\nu} f(x) \mu(dx) = 0$ pour toute fonction f continue, à support compact et radiale).

De façon évidente, toute mesure $\mu \in \mathcal{M}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\mu = \mu_{ra} + \mu_{ar}$, où μ_{ra} est radiale, μ_{ar} antiradiale, et toutes deux appartiennent à \mathcal{M} . Il est également clair que toute mesure antiradiale vérifie les deux propriétés (\mathcal{D}_s) et (\mathcal{L}_r) . Par conséquent, le problème de l'implication $(\mathcal{D}_s) \Rightarrow (\mathcal{L}_r)$ pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}$ est équivalent au même problème pour la mesure μ_{ra} .

Inversement, la condition (\mathcal{H}) ne résiste en général pas à l'opération $\mu \rightarrow \mu_{ra}$ (contrairement aux conditions plus fortes « $\mu \geq 0$ » et « $\mu = f \cdot m$ avec $f \in \text{BMO}$ »); on peut le voir directement, ou comme conséquence du théorème et du contre-exemple qui suivent.

Ces remarques, et le théorème 2, ont suggéré le résultat suivant :

THÉORÈME 3. *Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Si la partie radiale μ_{ra} de la mesure μ vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}) , et si la fonction u admet une limite radiale au point $(0, 0)$, alors la mesure μ admet une dérivée symétrique au point 0.*

Démonstration. La première étape consiste à prouver que la fonction $u_{ra} = P(\mu_{ra})$ admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$. Nous utiliserons le

LEMME 5. Soit u une fonction harmonique dans \mathbf{R}_+^{v+1} , telle que, pour tout $y > 0$, la fonction $x \rightarrow u(x, y)$ soit radiale. Si la fonction u admet une limite radiale au point $(0, 0)$, et si elle est bornée non tangentiellement en ce point, alors elle admet une limite non tangentielle en ce point.

Admettons provisoirement ce résultat; la proposition 1 fournit l'égalité

$$v_{\text{ra}} = |u_{\text{ra}}| + \varphi,$$

où φ est le potentiel de Green de la mesure $\Delta|u_{\text{ra}}|$ et $v_{\text{ra}} = P(|\mu_{\text{ra}}|)$. Il résulte de nos hypothèses que les fonctions u_{ra} et φ sont bornées sur le rayon $\{0\} \times]0, 1[$, donc il en est de même pour v_{ra} . Comme v_{ra} est une fonction harmonique ≥ 0 , il en résulte qu'elle est bornée non tangentiellement au point $(0, 0)$, et a fortiori, u_{ra} l'est aussi; le lemme précédent est donc applicable à cette fonction, qui admet ainsi une limite non tangentielle en ce point, que nous noterons L . Comme la mesure μ_{ra} vérifie de plus l'hypothèse (\mathcal{H}) , le théorème 2 prouve qu'elle vérifie la propriété (\mathcal{D}) , et a fortiori la propriété (\mathcal{D}_s) ; le théorème est donc démontré.

Démonstration du lemme 5. Soit L la limite radiale de la fonction u au point $(0, 0)$. Pour tout $r > 0$, notons u_r l'application $z \rightarrow u(rz)$ de \mathbf{R}_+^{v+1} dans \mathbf{R} . Nous allons montrer que, d'une part, la famille constituée par les fonctions harmoniques u_r est uniformément bornée sur tout compact, et que, d'autre part, si (r_n) est une suite de nombres > 0 qui converge vers 0, telle que la sous-suite (u_{r_n}) converge uniformément sur tout compact, alors la limite de cette sous-suite est égale à L ; il en résultera, grâce à l'argument usuel de compacité, la conclusion souhaitée. Le premier point résulte évidemment du fait que la fonction u est bornée non tangentiellement. Pour établir le second, observons que la limite u' de la sous-suite (u_{r_n}) est une fonction harmonique et que, pour tout $y > 0$, l'application $x \rightarrow u'(x, y)$ est radiale et égale à L en 0; il est facile d'en déduire, par exemple en utilisant l'analyticité de u' , que $u'(z) = L$ pour tout $z \in \mathbf{R}_+^{v+1}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

COROLLAIRE 6 (L. H. Loomis [6], W. Rudin [8]). Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Si la mesure μ est ≥ 0 , et si la fonction u admet une limite radiale au point $(0, 0)$, alors la mesure μ admet une dérivée symétrique au point 0.

Démonstration. Il suffit d'observer que, si $u_{\text{ra}} = P(\mu_{\text{ra}})$, la mesure $\Delta|u_{\text{ra}}|$ est nulle.

COROLLAIRE 7 (W. Ramey et D. Ullrich [7]). Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $u = P(\mu)$. Si la mesure

μ est de la forme $f \cdot m$, avec $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, et si la fonction u admet une limite radiale au point $(0, 0)$, alors la mesure μ admet une dérivée symétrique au point 0.

Démonstration. Il est immédiat que la fonction radiale f_{ra} associée à f appartient aussi à BMO, et que $\mu_{ra} = f_{ra} \cdot m$. Donc, d'après la proposition 2, la mesure μ_{ra} vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}).

Le but de ce qui suit est de prouver l'existence (dans le cas où $\nu=1$, mais il est facile d'étendre ce résultat en toute dimension) d'une mesure μ vérifiant l'hypothèse (\mathcal{H}), telle que la fonction $u=P(\mu)$ admette une limite radiale au point $(0, 0)$, et n'admettant pas de dérivée symétrique au point 0.

Etant donné $0 < a < 1/2$, on pose

$$\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n (\delta_{a^n} - \delta_{-a^n k_n}), \quad \text{où } k_n = 1 + a^{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction $u=P(\mu)$ admet une limite radiale au point $(0, 0)$:

En effet, on voit facilement que, pour tout $y > 0$, on a $0 \leq u(0, y) \leq Cy/(1-a)$, où C est une constante.

La mesure μ n'admet pas de dérivée symétrique :

Pour tout n , $a^{n+1} < a^{n+1} k_{n+1} < a^n$; par conséquent, si on pose

$$h(r) = \mu(B(0, r)) / m(B(0, r)),$$

on a $h(a^n) = 0$, et $h(r) = 1/2$ pour $a^n < r < a^n k_n$, pour tout n , d'où le résultat.

La mesure μ vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}) :

Soient $v_+ = P(\mu_+)$ et $v_- = P(\mu_-)$; d'après la proposition 1, le potentiel de Green φ de la mesure $\Delta|\mu|$ admet l'expression

$$\varphi = 2\text{Min}(v_+, v_-).$$

D'autre part, le support de la mesure μ_+ étant inclus dans $[0, +\infty[$,

$$v_+(x, y) \leq v_+(0, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ tel que } x \leq 0;$$

et pour une raison analogue,

$$v_-(x, y) \leq v_-(0, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ tel que } x \geq 0.$$

Donc, dans tous les cas,

$$\varphi(x, y) \leq v(0, y), \quad \text{où } v = P(|\mu|).$$

Il suffit donc de montrer que la quantité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n y}{a^{2n} + y^2} \text{ reste bornée pour } 0 < y \leq 1,$$

ce qui a été établi au cours de la démonstration de la proposition 4.

On peut remarquer que, pour l'essentiel, la partie radiale de cette mesure μ est la mesure considérée dans la proposition 4.

Remarques. (1) Les hypothèses (\mathcal{H}) et (\mathcal{H}') ne sont pas modifiées si on remplace, dans leur définition, φ par φ_a , où a est un réel quelconque; il est en effet facile de vérifier, en utilisant l'égalité (*) que, pour tout $z \in \mathbf{R}_+^{v+1}$, et quels que soient les réels, a et b ,

$$|\varphi_a(z) - \varphi_b(z)| \leq 2|a - b|.$$

(2) Les hypothèses (\mathcal{H}) et (\mathcal{H}') sont vraiment locales, en ce sens que, si deux mesures $\mu_i \in \mathcal{M}$ ($i=1, 2$) coïncident sur un voisinage de 0 dans \mathbf{R}^v , et si l'une d'elles vérifie (\mathcal{H}) ou (\mathcal{H}') , l'autre aussi. En effet, si $(v_i)_+ = P((\mu_i)_+)$ et $(v_i)_- = P((\mu_i)_-)$, les quantités $(v_1)_+(z) - (v_2)_+(z)$ et $(v_1)_-(z) - (v_2)_-(z)$ tendent vers 0 quand z tend vers 0, et on conclut au moyen de l'égalité (**).

III. Noyaux subordonnés et problème de Fatou généralisé

L'objet de ce paragraphe est d'indiquer brièvement comment les idées utilisées dans le § II permettent, non seulement d'établir des résultats nouveaux dans le cadre des fonctions harmoniques, mais aussi de démontrer, du même coup, des résultats concernant des extensions de mesures au moyen de noyaux plus généraux. Néanmoins, nous n'avons pas cherché la plus grande généralité et les hypothèses simplificatrices sont nombreuses.

On dira qu'une application $k: \mathbf{R}_+^{v+1} \rightarrow \mathbf{R}_+$ est un *noyau régulier* s'il existe une application $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, intégrable, bornée et décroissante, vérifiant la condition suivante :

$$(i) \quad 0 < c(f) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{v-1} dt < +\infty;$$

telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}_+^{v+1}$,

$$k(x, y) = \gamma_k \frac{1}{y^v} f\left(\frac{\|x\|}{y}\right),$$

où γ_k est la constante de normalisation $1/s_v c(f)$, s_v désignant la surface de la sphère unité de \mathbf{R}^v . Il résulte de la décroissance de f et de la positivité de $c(f)$ que la propriété

(ii) il existe deux nombres $a > 0$ et $A > 0$ tels que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}_+$, et tout $\eta \in \mathbf{R}$ vérifiant $|\eta| < 1$, $f(|\xi - \eta|) \leq Af(\xi/a)$;

est satisfaite (à un détail près, cette propriété apparaît dans [9], p. 198). De nombreux noyaux utilisés en analyse sont de cette forme, ou s'y ramènent par changement de variable sur la deuxième coordonnée. Les principaux exemples que nous avons en vue sont les suivants :

- le noyau i associé à la fonction $f = 1_{[0,1]}$;
- le noyau p associé à la fonction $t \mapsto (1+t^2)^{-(v+1)/2}$ (noyau de Poisson, noté p_0 dans les §§ I et II);
- le noyau q associé à la fonction $t \mapsto \exp(-t^2/4)$ (noyau de la chaleur « homogénéisé »).

Etant donné un noyau k , on désignera par $\mathcal{M}(k)$ l'ensemble des mesures de Radon μ sur \mathbf{R}^v telles que

$$\int_{\mathbf{R}^v} k(x-\theta, y) |\mu|(d\theta) < +\infty \quad \text{pour tout } z = (x, y) \in \mathbf{R}_+^{v+1}.$$

Une telle mesure μ admet une extension à \mathbf{R}_+^{v+1} au moyen du noyau k , qu'on notera au moyen de la lettre capitale correspondante, définie par l'égalité

$$K(\mu)(z) = \int_{\mathbf{R}^v} k(x-\theta, y) \mu(d\theta) \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{R}_+^{v+1}.$$

Par exemple, si $\mu \in \mathcal{M}(i)$, on a

$$I(\mu)(z) = \int_{\mathbf{R}^v} i(x-\theta, y) \mu(d\theta) = \frac{\mu(B(x, y))}{m(B(x, y))} \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{R}_+^{v+1},$$

en accord avec les notations introduites dans les §§ I et II.

Nous posons

$$\varphi^K = (K(|\mu|) - |K(\mu)|),$$

et nous définissons les hypothèses (\mathcal{H}'_K) et (\mathcal{H}_K) comme dans le § I, en remplaçant φ par φ^K .

Etant donné deux noyaux réguliers k_1 et k_2 , on dira que k_1 est *subordonné* à k_2 , et on notera $k_1 \ll k_2$, s'il existe une famille $\{\nu_y; y \in \mathbf{R}_+\}$ de mesures de probabilité sur \mathbf{R}_+ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}_+^{v+1}$,

$$k_1(x, y) = \int_0^{+\infty} k_2(x, t) \nu_y(dt).$$

La notion de subordination a été introduite par S. Bochner ([1], chapter 4), dans un contexte un peu différent. L'égalité (1) du § II montre que $p \ll i$, et on vérifie aussi simplement que $q \ll i$; d'autre part, il est classique que $p \ll q$, etc. Notons que, comme conséquence immédiate du théorème de Fubini, on a $\mathcal{M}(k_1) \subset \mathcal{M}(k_2)$ dès que $k_1 \ll k_2$. Nous pouvons alors énoncer le

THÉORÈME 4. *Soient k_1 et k_2 deux noyaux réguliers tels que $k_1 \ll k_2$, $\mu \in \mathcal{M}(k_1)$ et $u_i = K_i(\mu)$ ($i=1, 2$). Si l'hypothèse (\mathcal{H}'_{K_2}) est satisfaite, et si la fonction u_2 admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$, alors la fonction u_1 aussi.*

Démonstration. On vérifie aisément que, si une mesure $\lambda \in \mathcal{M}(k_i)$ est nulle dans un voisinage de 0, alors $K_i(\lambda)(z)$ tend vers 0 lorsque z tend vers 0 ($i=1, 2$). Les hypothèses et la conclusion du théorème ne sont donc pas altérées si on remplace la mesure μ par la mesure $1_{B(0,1)} \cdot \mu$, et par conséquent on peut supposer que $|\mu|(\mathbf{R}^v)$ est fini.

En utilisant l'hypothèse de subordination et un argument d'homogénéité, on obtient l'existence d'une mesure de probabilité ν sur \mathbf{R}_+ , indépendante de μ , telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}_+^{v+1}$,

$$(10) \quad u_1(x, y) = \int_0^{+\infty} u_2(x, \varrho y) \nu(d\varrho).$$

Soit L la limite non tangentielle de la fonction u_2 au point $(0, 0)$, et soit (x_n, y_n) une suite de points de \mathbf{R}_+^{v+1} qui converge vers $(0, 0)$ en restant dans un cône Γ_a ; pour tout $\varrho > 0$, la suite $(x_n, \varrho y_n)$ converge alors vers $(0, 0)$ en restant dans le cône $\Gamma_{a/\varrho}$ et donc, par hypothèse, $u_2(x_n, \varrho y_n)$ tend vers L quand n tend vers l'infini. D'autre part, si on pose $v_2 = K_2(|\mu|)$, on a, pour tout entier n assez grand :

– si $\varrho y_n \geq 1$, $|u_2(x_n, \varrho y_n)| \leq v_2(x_n, \varrho y_n) \leq \sup_{t \geq 0} f_2(t) |\mu|(\mathbf{R}^v) < +\infty$;

– si $1 \leq \varrho \leq 1/y_n$, $(x_n, \varrho y_n)$ reste dans le cône Γ_a^1 , donc $|u_2(x_n, \varrho y_n)|$ est borné, en vertu de l'hypothèse de convergence non tangentielle;

– si $\varrho < 1$, $|u_2(x_n, \varrho y_n)| \leq v_2(x_n, \varrho y_n) \leq \varrho^{-v} v_2(x_n, y_n) \leq \varrho^{-v} N_a^1(v_2)$.

Par conséquent, il existe une constante finie C telle qu'on ait, pour tout entier n assez

grand, et tout $\varrho > 0$:

$$|u_2(x_n, \varrho y_n)| \leq C + \varrho^{-\nu} N_a^1(v_2) = h(\varrho).$$

Il est donc clair que, si

$$(11) \quad \int_0^{+\infty} h(\varrho) \nu(d\varrho) < +\infty,$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet d'achever la démonstration. Mais (11) résulte de la finitude de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \varrho^{-\nu} \nu(d\varrho)$$

(qu'on obtient comme conséquence de l'égalité (10), en prenant $\mu = \delta_0$ et $(x, y) = (0, 1)$), et de la finitude de $N_a^1(v_2)$, qui reste à établir. Pour cela, on observe que, comme $v_2 \geq 0$, on a une estimation de la forme

$$N_a^1(v_2)(0) \leq A_a N_0^1(v_2)(0),$$

où A_a est un nombre qui ne dépend que de a et k_2 (en raison des hypothèses faites sur le noyau k_2 , la démonstration est essentiellement la même que dans le cas du noyau de Poisson). D'autre part,

$$N_0^1(v_2)(0) \leq N_0^1(u_2)(0) + N_0^1(\varphi^{K_2})(0),$$

quantité finie en raison de la convergence radiale de la fonction u et de l'hypothèse (\mathcal{H}'_{K_2}) .

Le résultat suivant étend le théorème 2 :

THÉORÈME 5. Soient k_1 et k_2 deux noyaux réguliers, $\mu \in \mathcal{M}(k_1) \cap \mathcal{M}(k_2)$ et $u_i = K_i(\mu)$ ($i=1, 2$). Si l'hypothèse (\mathcal{H}'_{K_2}) est satisfaite, et si la fonction u_2 admet une limite non tangentielle au point $(0, 0)$, alors la fonction u_1 aussi.

Démonstration. La première et principale étape consiste à établir le théorème dans le cas particulier où $k_2 = i$, auquel cas il faut montrer que la mesure μ vérifie la propriété (\mathcal{D}_i) . Mais, l'hypothèse (\mathcal{H}_i) étant satisfaite (résultat analogue au lemme 3), il suffit, grâce à la proposition 5, de prouver que μ vérifie la propriété (\mathcal{D}) . On reprend alors l'idée générale de la preuve du théorème 2, le rôle du lemme 4 étant tenu par l'extension suivante :

LEMME 6. Soient k un noyau régulier, $\mu \in \mathcal{M}(k)$ et $u = K(\mu)$. Si l'hypothèse (\mathcal{H}'_K) est satisfaite, et si la fonction u admet 0 comme limite non tangentielle au point $(0, 0)$, alors, pour toute fonction h continue et à support compact dans \mathbf{R}^v , l'intégrale

$$\frac{1}{r^v} \int_{\mathbf{R}^v} h\left(\frac{x}{r}\right) \mu(dx)$$

tend vers 0 quand r tend vers 0.

Démonstration. On commence par se ramener au cas où $|\mu|(\mathbf{R}^v)$ est fini. On se donne ensuite une fonction h continue et à support compact, et une boule $B = B(0, R)$ contenant le support de h ; on désignera par C un nombre qui ne dépend que de v, k et h , susceptible de changer de place en place. On a

$$\int_{\mathbf{R}^v} h(x) \mu(d(rx)) = I_1(r, y) + I_2(r, y) + I_3(r, y),$$

où

$$I_1(r, y) = \int_{2B} (h(x) - K(h)(x, y)) \mu(d(rx));$$

$$I_2(r, y) = \int_{2B^c} (-K(h)(x, y)) \mu(d(rx));$$

$$I_3(r, y) = \int_{\mathbf{R}^v} K(h)(x, y) \mu(d(rx));$$

On a évidemment, pour r assez petit, $|I_1(r, y)| \leq s(y) N_0^1(I(|\mu|))(0)$, où

$$s(y) = \sup_{x \in 2B} |h(x) - K(h)(x, y)|;$$

pour des raisons élémentaires, $s(y)$ tend vers 0 quand y tend vers 0, et

$$N_0^1(I(|\mu|))(0) \leq CN_0^1(K(|\mu|))(0) \text{ (cf. lemme 3).}$$

En raison des hypothèses faites, cette dernière quantité est finie, car $K(|\mu|) = \varphi^K + |K(\mu)|$. Par conséquent, $I_1(r, y)$ tend vers 0 quand y tend vers 0, uniformément par rapport à r .

Nous allons démontrer qu'il en est de même pour l'intégrale $I_2(r, y)$; comme la fonction f qui intervient dans la définition du noyau k est décroissante, on a, pour $y > 0$

et $\|x\| \geq 2R$, $K(h)(x, y) \leq Cy^{-\nu} f(\|x\|/2y)$; par suite,

$$|I_2(r, y)| \leq C \int_{2B^c} y^{-\nu} f\left(\frac{\|x\|}{2y}\right) |\mu|(d(rx)).$$

D'autre part,

$$\int_{2B^c} y^{-\nu} f\left(\frac{\|x\|}{2y}\right) |\mu|(d(rx)) = (ry)^{-\nu} \int_0^{+\infty} |\mu|(rF_{y,\lambda}) d\lambda,$$

où $F_{y,\lambda}$ désigne l'ensemble des points $x \in \mathbf{R}^{\nu}$ tels que $f(\|x\|/2y) > \lambda$ et $\|x\| \geq 2R$. Il est clair que $F_{y,\lambda}$ est vide si $\lambda \geq f(R/y)$, et inclus dans la boule $yB(0, R(\lambda))$ dans le cas contraire, où $R(\lambda) = \sup\{t \in \mathbf{R}_+; f(t) > \lambda\}$. Par conséquent,

$$|I_2(r, y)| \leq C \int_0^{f(R/y)} \frac{|\mu|(ryB(0, R(\lambda)))}{m(ryB(0, R(\lambda)))} m(B(0, R(\lambda))) d\lambda.$$

Comme

$$\frac{|\mu|(ryB(0, R(\lambda)))}{m(ryB(0, R(\lambda)))} \leq C|\mu|(\mathbf{R}^{\nu}) + M^1(\mu)(0),$$

et que $M^1(\mu)(0) = N_0^1(I(|\mu|))(0) < +\infty$, on a

$$\begin{aligned} |I_2(r, y)| &\leq C \int_0^{f(R/y)} m(\{x \in \mathbf{R}^{\nu}; f(\|x\|) > \lambda\}) d\lambda \\ &= C \int_0^{+\infty} \min\{f(R/y), f(t)\} t^{\nu-1} dt, \end{aligned}$$

d'où résulte, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, le fait que $I_2(r, y)$ tend vers 0 quand y tend vers 0, uniformément par rapport à r .

Il reste donc à démontrer que, pour tout $y > 0$, l'intégrale $I_3(r, y)$ tend vers 0 quand r tend vers 0. Par le théorème de Fubini, on obtient l'égalité

$$I_3(r, y) = \int_{\mathbf{R}^{\nu}} h(x) K(\mu)(rx, ry) dx.$$

Puisque la fonction $u = K(\mu)$ admet 0 comme limite non tangentielle au point $(0, 0)$, la famille des applications $z \rightarrow u(rz)$ converge vers 0 uniformément sur tout compact, et en particulier sur $\text{supp}(h) \times \{y\}$. D'où le résultat.

Revenons à la démonstration du théorème 5; la deuxième étape consiste simple-

ment à appliquer le théorème 4 au couple de noyaux $(k_1, k_2) = (k_1, i)$, après avoir observé que tout noyau régulier est subordonné au noyau i ; en effet, si k est un tel noyau, et si f est la fonction qui intervient dans sa définition, on a

$$k(x, y) = \frac{1}{vc(f)} \int_0^{+\infty} i(x, t) t^\nu m_f(d(yt)) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbf{R}_+^{\nu+1},$$

où m_f est la mesure de Lebesgue–Stieltjes associée à la fonction f .

Bibliographie

- [1] BOCHNER, S., *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*. Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1960.
- [2] BROSSARD, J., Densité de l'intégrale d'aire dans $\mathbf{R}_+^{\nu+1}$ et limites non tangentielles. *Invent. Math.*, 93 (1988), 297–308.
- [3] BROSSARD, J., & CHEVALIER, L. Classe $L \log L$ et densité de l'intégrale d'aire dans $\mathbf{R}_+^{\nu+1}$. *Ann. of Math.*, 128 (1988), 603–618.
- [4] DOOB, J. L., *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 262. Springer-Verlag New York Inc., 1984.
- [5] FATOU, P., Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Math.*, 33 (1906), 335–400.
- [6] LOOMIS, L. H., The converse of the Fatou theorem for positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 53 (1943), 239–250.
- [7] RAMEY, W. & ULLRICH, D., On the behavior of harmonic functions near a boundary point. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 305 (1988), 207–220.
- [8] RUDIN, W., Tauberian theorems for positive harmonic functions. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 81 (1978), 376–384.
- [9] STEIN, E. M., *Singular Integral and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

Reçu le 5 avril, 1989