Problemi al contorno con condizioni omogenee per le equazioni quasi-ellittiche.

MARIO TROISI (Bari) (*) (**)

Summary. - *We are concerned with non-variational boundary value problems, with omogeneus boundary conditions, for linear partial differential equations of quasi-elliptic type in a bounded domain Ω in R^n.*

It is well known that some of difficulties which arise in treating such problems, in comparison with «regular» elliptic problems, are connected with the presence of angular points in Ω: let us point out with B. PINI [32] *that «a bounded domain for which it is possible to assign a correct boundary value problem for a quasi-elliptic but not elliptic equation always has angular points».*

We suppose Ω is a cartesian product of a finite number of open sets and, in order to overcome the difficulties attached to the presence of angular points in Ω, taking as a model the two previous papers [33], [34] *devoted to elliptic problems with singular data, we investigate the problem within suitable Sobolev weight spaces, connected with the angular points of Ω and included in the ones we have studied in* [35]. *Within such spaces we get existence and uniqueness theorems.*

Per dare, con qualche esempio, un'idea dei problemi che studiamo e dei risultati che otteniamo, assegnamo nel piano il rettangolo $\Omega = \{(x, y) | a < x < b,\ c < y < d\}$, di cui indichiamo con Γ_1 la porzione di frontiera unione dei due lati di equazioni $x = a$ e $x = b$, con Γ_2 la porzione di frontiera unione dei due lati di equazioni $y = c$ e $y = d$.

Indichiamo, inoltre, con $\rho_0(x, y)$ la distanza di (x, y) dai vertici di Ω, con $\rho_1(x, y)$ la distanza di (x, y) da Γ_1, ed assegnamo $k \in \{0, 1\}$, $s \in R^1$ e $f(x, y)$ tale che $\rho_k^s f \in L^2(\Omega)$.

Consideriamo allora il problema consistente nel determinare una soluzione $u(x, y)$ dell'equazione

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = f \text{ in } \Omega \qquad (\lambda = costante),$$

tale che

$$\iint_\Omega \left(|\rho_k^{s-4} u|^2 + \left|\rho_k^s \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|^2 + \left|\rho_k^s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|^2 \right) dxdy < \infty \tag{1}$$

(*) Lavoro eseguito con contributo del C. N. R.

(**) Entrata in Redazione il 30 ottobre 1971.

e che nel caso $k=0$ soddisfi le condizioni

$$u=\frac{\partial u}{\partial x}=0 \text{ su } \Gamma_1, \quad u=0 \text{ su } \Gamma_2,$$

mentre nel caso $k=1$ soddisfi la condizione

$$u=0 \text{ su } \Gamma_2.$$

Dai nostri risultati segue che esiste $\eta_0 \in]\,0,\,1/2\,[$ tale che, se $s \in [2-\eta_0, 2+\eta_0]$, per tale problema vale l'alternativa di FREDHOLM e si ha univoca risolubilità per λ sufficientemente grande.

Indichiamo ancora con $\rho_2(x, y)$ la distanza di (x, y) da Γ_2, con $\rho_3(x, y)$ la distanza di (x, y) da $\partial\Omega$, assegnano $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $s \in R^1$, $f(x, y)$ come sopra, e consideriamo il problema consistente nel determinare una soluzione $u(x, y)$ dell'equazione

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\rho_k^{-4}u=f \text{ in } \Omega \qquad (\lambda = \textit{costante}),$$

che verifichi la (1) e che: nel caso $k=0$ soddisfi le condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \text{ su } \Gamma_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{ su } \Gamma_2,$$

nel caso $k=1$ soddisfi la condizione

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{ su } \Gamma_2,$$

nel caso $k=2$ soddisfi le condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \text{ su } \Gamma_1.$$

Dai nostri risultati segue che, qualunque sia $s \in R^1$, esiste una costante $\lambda_s > 0$ tale che per ogni $\lambda \geq \lambda_s$ detto problema risulta univocamente risolubile.

In generale, siano: $n_1, \dots, n_t$ dei numeri interi positivi tali che $n_1+\dots+n_t=n$, $m_1, \dots, m_n$ dei numeri interi positivi tali che $m_{n_0+\dots+n_{i-1}+1}=\dots=m_{n_0+\dots+n_i}=m^{(i)}$ $(i=1, \dots, t)$, dove $n_0=0$.

Poniamo $m=\sup\{m_1, \dots, m_n\}$, $q_i=m/m_i$, $q=(q_1, \dots, q_n)$, $<\alpha, q>=\alpha_1 q_1+\dots+\alpha_n q_n$.

Assegnamo, per ogni $i \in \{1, \dots, t\}$, un insieme aperto e limitato $\Omega^{(i)}$ di R^{n_i} e un insieme chiuso $S^{(i)}$, eventualmente vuoto, di punti di $\partial\Omega^{(i)}$, con la condizione che, se $S^{(i)} \neq \partial\Omega^{(i)}$, $\partial\Omega^{(i)} - S^{(i)}$ sia una varietà a $n_i - 1$ dimensioni di classe C^∞ e $\Omega^{(i)}$ sia situato «localmente da una stessa parte di $\partial\Omega^{(i)} - S^{(i)}$».

Poniamo $\Omega = \Omega^{(1)} \times \dots \times \Omega^{(t)}$, $\partial_i\Omega = \Omega^{(1)} \times \dots \times \Omega^{(i-1)} \times (\partial\Omega^{(i)} - S^{(i)}) \times \times \Omega^{(i+1)} \times \dots \times \Omega^{(t)}$ $(i = 1, \dots, t)$, $S = \partial\Omega - \bigcup_{i=1}^{t} \partial_i\Omega$, $\rho(x) = \delta$ dist (x, S), dove δ è un'opportuna costante positiva, e indichiamo con $\mathfrak{J}$ l'insieme dei numeri $i \in \{1, \dots, t\}$ per cui $\partial_i\Omega \neq \emptyset$.

Inoltre indichiamo con $L^2_s(\Omega)$, s reale, la classe delle funzioni u tali che $\rho^s u \in L^2(\Omega)$ e *con* $W^m_s(\Omega)$ la classe delle distribuzioni u su Ω tali che $D^\alpha u \in L^2_{s+<\alpha, q>-m}(\Omega)$ per $<\alpha, q> \leq m$.

Assegnamo in Ω un operatore differenziale lineare $A = \sum_{<\alpha, q>\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ di tipo quasi-ellittico e, per ogni $i \in \mathfrak{J}$, *propriamente quasi-ellittico di tipo* ν_i su $\partial_i\Omega$ (cfr. il n. 8, ipotesi $\mathcal{H}_2$)).

Assegnamo inoltre, per ogni $i \in \mathfrak{J}$, un sistema $\{B_{ij}\}_{j=1}^{\nu_i}$ di ν_i operatori differenziali lineari di *frontiera* definiti su $\partial_i\Omega$, della forma

$$B_{ij} = \sum_{<\alpha, q>\leq p_{ij}} b^{(i)}_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad p_{ij} \leq m - m/m^{(i)},$$

e soddisfacenti la *condizione complementare* rispetto ad A su $\partial_i\Omega$ (cfr. il n. 8, ipotesi $\mathcal{H}_4$)).

Studiamo allora il problema

$$Au = f \text{ in } \Omega, \qquad B_{ij}u = 0 \text{ su } \partial_i\Omega,\ j = 1, \dots, \nu_i,\ i \in \mathfrak{J},$$

cercando la soluzione negli spazi $W^m_s(\Omega)$.

I risultati che otteniamo vanno distinti in quelli relativi al caso in cui le condizioni al contorno sono di tipo generale ed in quelli relativi al caso in cui le condizioni al contorno sono del tipo di DIRICHLET, e cioè al caso in cui $B_{ij} = (\partial/\partial n_i)^j$, dove n_i è la normale a $\partial_i\Omega$.

Nel primo caso otteniamo dei teoremi di unicità e di esistenza, richiedendo però che nell'equazione almeno il coefficiente di u sia singolare su S oppure che la quasi-ellitticità di A *degeneri* su S.

Nel secondo caso, e nell'ipotesi che A sia *fortemente quasi-ellittico* in $\overline{\Omega}$, otteniamo ulteriori teoremi di unicità e di esistenza sotto ipotesi meno generali sui coefficienti di A ma in cui viene attenuata od eliminata la precedente ipotesi di singolarità del coefficiente di u.

Rileviamo anche, come in [33], che, sebbene nei problemi considerati nessuna condizione al contorno sia imposta a priori su S, la soluzione può soddisfare su S ad un certo numero di condizioni omogenee del tipo di DIRICHLET, come condizioni naturali derivanti dall'appartenenza della soluzione alla classe $W^m_s(\Omega)$. Infatti dal lemma 7.8 segue che se $u \in W^m_s(\Omega)$ e $D^\alpha u$ è dotata di traccia su S, tale traccia è nulla.

Il lavoro è suddiviso in tre capitoli.

Il Cap. I, di carattere preliminare ed i cui risultati trovano applicazioni nei teoremi esistenziali stabiliti negli altri capitoli, è dedicato a questioni di regolarizzazione per problemi quasi-ellittici nel semispazio ed a questioni concernenti la formula di GREEN nel semispazio per operatori quasi-ellittici.

Nel n. 1 sono introdotti alcuni spazi di distribuzioni che rientrano in spazi più generali studiati da vari Autori, fra i quali ricordiamo L. HÖRMANDER [18], L. R. VOLEVICH-B. P. PANEYAKH [37], A. CAVALLUCCI [10], M. ITANO [19]. Ne vengono richiamati alcuni teoremi di densità, di inclusione e di tracce su iperpiani.

Nei nn. 2 e 3 vengono stabilite delle limitazioni a priori nel semispazio relative ad operatori quasi-ellittici. Tali limitazioni sono analoghe ad altre note nel caso ellittico e contenute, ad es., nei nn. 4.4 e 4.5 del cap. 2 di J. L. LIONS-E. MAGENES [20]. Le loro dimostrazioni si ottengono opportunamente adattando al nostro caso i procedimenti di [20].

Nei nn. 4 e 5 vengono stabiliti dei teoremi di regolarizzazione per operatori quasi-ellittici. La tecnica della dimostrazione del teorema 4.1 di regolarizzazione tangenziale è in parte del tipo di quella utilizzata da T. MATSUZAWA in [21] per dimostrare un altro risultato. La dimostrazione del teorema 5.1 si ottiene adattando al nostro caso un ben noto procedimento relativo al caso ellittico.

Nel n. 6 vengono stabiliti un'opportuna formula di GREEN per il semispazio ed alcuni risultati ad essa connessi. Tali risultati trovano applicazioni al n. 11 nel teorema relativo alla formula di GREEN in un dominio limitato.

Il Cap. II è dedicato allo studio dei problemi al contorno quasi-ellittici in un dominio limitato e nell'ambito degli spazi $W^m_s(\Omega)$.

Nel n. 7 si introducono gli aperti Ω e si approfondisce lo studio degli spazi $W^m_s(\Omega)$, mettendone in luce alcuni teoremi di densità e di immersione, in parte dedotti dai risultati del precedente lavoro [35].

Nel n. 8 vengono precisate le ipotesi sugli operatori che intervengono nel problema e vengono enunciati i risultati, che sono un opportuno teorema di regolarizzazione, un teorema di unicità ed un teorema di esistenza.

Tali risultati costituiscono un'estensione di altri risultati da noi stabiliti nel caso ellittico (cfr. [33] e [34]), e le loro dimostrazioni, che sono date nei nn. 9, 10 e 11, si ottengono con procedimenti analoghi a quelli tenuti in [33], [34] ed utilizzando una limitazione a priori stabilita da T. MATSUZAWA in [21].

Il Cap. III è dedicato ad un ulteriore approfondimento dello studio del problema considerato nel Cap. II nel caso particolare che A sia fortemente quasi-ellittico in $\bar{\Omega}$ e che i dati al contorno siano quelli di DIRICHLET.

Nel n. 12 vengono studiati alcuni spazi funzionali contenuti in quelli considerati al n. 7 e vengono stabilite delle limitazioni a priori relative a funzioni di tali spazi e ad operatori fortemente quasi-ellittici in $\bar{\Omega}$.

Nei nn. 13 e 14 vengono stabiliti dei teoremi di unicità e dei teoremi di esistenza specifici per il problema di Dirichlet e che non rientrano in quelli del Cap. II.

Rileviamo che questi ultimi risultati non solo estendono al caso quasi-ellittico i risultati contenuti nei nn. 6 e 7 di [33], ma sono di questi più generali anche se riferiti ad equazioni ellittiche.

Capitolo I

Problemi quasi-ellittici in un semispazio.

1. - Alcuni spazi di distribuzioni.

Indicheremo con R^n lo spazio reale euclideo a n dimensioni di punto $x=(x_1, \dots, x_n)$ e con R^n_+ il semispazio $\{x \in R^n \mid x_n > 0\}$.

Se $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è una n-pla di interi non negativi, porremo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \; x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n},$$

dove

$$D_{x_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \; k=1, \dots, n, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Porremo anche

$$x = (x', t), \; x' = (x_1, \dots, x_{n-1}), \; t = x_n,$$

$$\alpha = (\alpha', \alpha_n), \; \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \; D_{x'}^{\alpha'} = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}.$$

Denoteremo con $\tilde{u}(\xi)$ la trasformata di Fourier di $u(x)$, con $\hat{u}(\xi', t)$ la la trasformata parziale di Fourier di $u(x) = u(x', t)$ rispetto a x' e con $\hat{g}(\xi')$ la trasformata di Fourier di $g(x')$.

Assegnamo una n-pla di interi positivi $\mathfrak{M} = (m_1, \dots, m_n)$.

Porremo

$$m = \sup \{m_1, \dots, m_n\},\ d = \text{m.c.d. } \{m_1, \dots, m_n\},\ m_0 = m/d,$$

$$q_k = m/m_k (k = 1, \dots, n),\ q = (q_1, \dots, q_n),\ |q| = q_1 + \dots + q_n.$$

Per ogni coppia di punti x, $y \in R^n$ porremo

$$< x, y > = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Inoltre per ogni $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi', \xi_n) \in R^n$ porremo

$$< \xi > = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^{m_k} \right)^{1/m},\quad < \xi' > = \left(\sum_{k=1}^{n-1} |\xi_k|^{m_k} \right)^{1/m}.$$

Si verifica facilmente che, comunque si assegna un numero reale a, si ha

$$\left(\frac{1 + < \xi >^2}{1 + < \eta >^2}\right)^a \leq c(1 + |\xi - \eta|^{2|a|})\ \forall \xi,\ \eta \in R^n, \tag{1.1}$$

dove c è una costante dipendente solo da a, $\mathfrak{M}$ ed n.

Definizione 1.1. - Indicheremo con $H^{s,r}(R^n)$, s e r reali, lo spazio delle distribuzioni temperate u su R^n tali che

$$(1 + < \xi >^2)^{s/2} (1 + < \xi' >^2)^{r/2}\, \tilde{u}(\xi) \in L^2(R^n),$$

munito della norma

$$\|u\|_{H^{s,r}(R^n)} = \left(\int_{R^n} (1 + < \xi >^2)^s (1 + < \xi' >^2)^r |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

Porremo

$$H^s(R^n) = H^{s,0}(R^n).$$

Osserviamo che, in conseguenza della (1.1), gli spazi $H^{s,r}(R^n)$ sopra introdotti rientrano in spazi di distribuzioni più generali studiati da diversi Autori, fra i quali ricordiamo L. Hörmander [18], L. R. Volevich-B. P. Paneyakh [37].

Dai risultati contenuti nei succitati lavori traiamo il seguente

Lemma 1.1. - *$C_0^\infty(R^n)$ è denso in $H^{s,r}(R^n)$. Risulta $H^{s,r}(R^n) = (H^{-s,-r}(R^n))'$* (1). *Se $s_2 \leq s_1$ e $s_2 + r_2 \leq s_1 + r_1$, allora si ha $H^{s_1,r_1}(R^n) \subseteq H^{s_2,r_2}(R^n)$ algebricamente e topologicamente.*

(1) Se E è uno spazio di Banach, indicheremo con E' il duale forte di E.

Osserviamo anche, come si verifica facilmente, che:

LEMMA 1.2. - *Se* $s_1 > s_2 > s_3$, *allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una costante positiva* $c_\varepsilon = c(\varepsilon, s_1, s_2, s_3)$ *tale che si ha*

$$\|u\|_{H^{s_2, r}(R^n)} \leq \varepsilon \|u\|_{H^{s_1, r}(R^n)} + c_\varepsilon \|u\|_{H^{s_3, r}(R^n)} \tag{1.3}$$

per ogni r *reale e per ogni* $u \in H^{s_1, r}(R^n)$.

Sussiste inoltre il seguente

LEMMA 1.3. - *Siano* u *una distribuzione di classe* $H^{s,r}(R^n)$ *ed a supporto compatto,* $\mathfrak{D}$ *un insieme aperto e limitato contenente il supporto di* u *e* $a(x)$ *una funzione di classe* $C^\infty(R^n)$.

Esiste una costante positiva c, *indipendente da* u, *tale che si ha*

$$\|au\|_{H^{s, r}(R^n)} \leq \sup_{x \in \mathfrak{D}} |a(x)| \cdot \|u\|_{H^{s, r}(R^n)} + c\|u\|_{H^{s, r-1}(R^n)}, \tag{1.4}$$

dove, se $r = 0$, *l'ultima norma può essere sostituita dalla norma di* u *in* $H^{s-1}(R^n)$.

Infatti, consideriamo una funzione $\zeta(x) \in C_0^\infty(R^n)$ tale che

$$0 \leq \zeta(x) \leq 1 \ , \ \zeta(x) = 1 \text{ in supp } u, \text{ supp } \zeta \subset \mathfrak{D},$$

e poniamo $b(x) = \zeta(x)a(x)$.

Con ragionamenti analoghi a quelli tenuti da J. PEETRE per stabilire il lemma 2 di [30], si dimostra che esiste una costante c (indipendente da u) tale che

$$\|bu\|_{H^{s, r}(R^n)} \leq \sup_{x \in R^n} |b(x)| \cdot \|u\|_{H^{s, r}(R^n)} + c\|u\|_{H^{s, r-1}(R^n)},$$

dove, se $r = 0$, l'ultima norma può essere sostituita dalla norma di u in $H^{s-1}(R^n)$.

Da quest'ultima relazione si deduce in modo ovvio la tesi.

Denoteremo con $J(\mathfrak{M})$ l'insieme dei numeri razionali k tali che l'equazione

$$< \alpha, q > = k$$

abbia almeno una soluzione $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, con gli α_i interi ≥ 0.

DEFINIZIONE 1.2. - Se $\mathfrak{D}$ è un insieme aperto di R^n, indicheremo $W^{k,p}(\mathfrak{D})$, $k \in J(\mathfrak{M})$ e p reale ≥ 1, lo spazio delle distribuzioni u su $\mathfrak{D}$ tali che $D^\alpha u \in L^p(\mathfrak{D})$ per $< \alpha, q > \leq k$, munito della norma

$$\|u\|_{W^{k, p}(\mathfrak{D})} = \sum_{<\alpha, q> \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathfrak{D})}. \tag{1.5}$$

Porremo $W^k(\mathfrak{D}) = W^{k,2}(\mathfrak{D})$.

LEMMA 1.4. - *Se $k \in J(\mathfrak{M})$, esistono due costanti $c_1(k)$ e $c_2(k)$ tali che si ha per ogni $\xi \in R^n$*

$$c_1(k) < \xi >^{2k} \leq \sum_{<\alpha, q>=k} \xi^{2\alpha} \leq c_2(k) < \xi >^{2k}, \tag{1.6}$$

dove, se k è un multiplo di m_0, si può supporre $c_1(k) > 0$.

Inoltre il sussistere della (1.6) *con $c_1(k) > 0$ e ξ fuori di un compatto di R^n implica che k è un multiplo di m_0.*

Infatti, si stabilisce la (1.6) per ogni $\xi \in R^n$, osservando che $\xi^{2\alpha} \geqslant 0$ e che si ha

$$\xi^{2\alpha} = \left(\prod_{i=1}^{n} (|\xi_i|^{m_i})^{\alpha_i q_i / <\alpha, q>} \right)^{2<\alpha, q>/m} \leq < \xi >^{2<\alpha, q>}. \tag{1.7}$$

Se poi k è multiplo di m_0, i numeri $m_i k/m$ sono interi e quindi il polinomio $\sum_{<\alpha, q>=k} \xi^{2\alpha}$ è minorato dal polinimio $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{2m_i k/m}$ e perciò anche dal primo membro della (1.6) con una costante $c_1(k)$ positiva.

Per dimostrare l'ultima affermazione, osserviamo che, se è verificata la (1.6) con $c_1(k) > 0$ e per ξ fuori di un compatto di R^n, esiste $a > 0$ tale che per ogni $t \in]a, \infty[$ si ha

$$\frac{\sum_{r=0}^{[m_i k/m]} t^{2r}}{t^{2m_i k/m}} \geq c_1(k) > 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

dove $[m_i k/m]$ denota il più grande intero $\leq m_i k/m$.

Ne segue che i numeri $m_i k/m$, $i = 1, \ldots, n$, sono interi e quindi che k è un multiplo di m_0.

LEMMA 1.5. - *I due spazi $W^k(R^n)$ e $H^k(R^n)$ sono isomorfi (algebricamente e topologicamente) se e solo se k è un multiplo di m_0.*

Infatti, osserviamo che, se k è un multiplo di m_0, in conseguenza del lemma 1.4 esiste una costante $c = c(k) > 0$ tale che si ha

$$(1.8) \qquad c^{-1}(1 + <\xi>^2)^k \leq \sum_{<\alpha,\, q> \leq k} \xi^{2\alpha} \leq c(1 + <\xi>^2)^k \qquad \forall\, \xi \in R^n.$$

Osserviamo inoltre che, se è verificata la (1.8), risulta anche verificata la (1.6) con $c_1(k) > 0$ e per $<\xi>$ sufficientemente grande, e quindi, ancora per il lemma 1.4, k risulta un multiplo di m_0.

Da tali osservazioni si deduce la tesi con note considerazioni.

DEFINIZIONE 1.3 - Indicheremo con $H^{s,r}(R^n_+)$, s e r reali, lo spazio delle distribuzioni u su R^n_+ che sono restrizioni a R^n_+ di elementi di $H^{s,r}(R^n)$, munito della norma

$$(1.9) \qquad \|u\|_{H^{s,r}(R^n_+)} = \inf \|U\|_{H^{s,r}(R^n)}, \qquad U = u \quad \text{su} \quad R^n_+.$$

Dal lemma 1.1 si deduce, con note considerazioni (cfr., ad es., il cap. I di L. R. VOLEVICH - B. P. PANEYAKH [37]), il seguente

LEMMA 1.6. - *$C_0^\infty(\overline{R^n_+})$ è denso in $H^{s,r}(R^n_+)$. Se $s_2 \leq s_1$ e $s_2 + r_2 \leq s_1 + r_1$, allora si ha $H^{s_1,r_1}(R^n_+) \subseteq H^{s_2,r_2}(R^n_+)$ algebricamente e topologicamente. $(H^{s,r}(R^n_+))'$ è isomorfo algebricamente e topologicamente al sottospazio $H^{-s,-r}_{\overline{R^n_+}}(R^n)$ di $H^{-s,-r}(R^n)$ costituito dalle $u \in H^{-s,-r}(R^n)$ che hanno supporto contenuto in $\overline{R^n_+}$.*

DEFINIZIONE 1.4. - Indicheremo con $H^s(R^{n-1})$, s reale, lo spazio delle distribuzioni temperate g su R^{n-1} tali che

$$(1 + <\xi'>^2)^{s/2}\hat{g}(\xi') \in L^2(R^{n-1}),$$

munito della norma

$$(1.10) \qquad \|g\|_{H^s(R^{n-1})} = \Big(\int_{R^{n-1}} (1 + <\xi'>^2)^s |\hat{g}(\xi')|^2 d\xi' \Big)^{1/2}.$$

Per ogni numero reale $s > m/2m_n$, denoteremo con l_s il più grande intero $< sm_n/m - 1/2$. Inoltre per ogni $u \in C_0^\infty(\overline{R_+^n})$ porremo

$$\gamma_j u = D_{x_n}^j u(x', 0).$$

Sussiste il seguente

LEMMA 1.7. - *Siano $s > m/2m_n$ e r due numeri reali. L'applicazione $u \to (\gamma_0 u, \dots, \gamma_{l_s} u)$ definita su $C_0^\infty(\overline{R_+^n})$ si prolunga per continuità in un'applicazione, che ancora indichiamo con $u \to (\gamma_0 u, \dots, \gamma_{l_s} u)$, lineare e continua da $H^{s,r}(R_+^n)$ su $\prod_{j=0}^{l_s} H^{s+r-jq_n-q_n/2}(R^{n-1})$.*

Infatti, poniamo

$$k(\xi) = (1 + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2sm_i/m})(1 + <\xi'>^2)^r,$$

$$k_j(\xi') = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi_n^{2j}}{k(\xi)} d\xi_n\right)^{-1}, \qquad j = 0, 1, \dots, l_s.$$

Si verifica facilmente che esiste una costante c tale che si ha

$$c^{-1}(1 + <\xi>^2)^s(1 + <\xi'>^2)^r \leq k(\xi) \leq c(1 + <\xi>^2)^s(1 + <\xi'>^2)^r \qquad \forall \xi \in R^n,$$

$$c^{-1}(1 + <\xi'>^2)^{s+r-jq_n-q_n/2} \leq k_j(\xi') \leq c(1 + <\xi'>^2)^{s+r-jq_n-q_n/2} \qquad \forall \xi' \in R^{n-1}.$$

Da tali relazioni segue, per noti risultati (cfr., ad es.: il teorema 2 e l'osservazione finale del n. 2 di A. CAVALLUCCI [10]; il teorema 1 ed il relativo corollario di M. ITANO [19]), che il lemma sussite con $H^{s,r}(R^n)$ in luogo di $H^{s,r}(R_+^n)$.

Dalla definizione stessa di $H^{s,r}(R_+^n)$ si deduce evidentemente la tesi.

2. - Valutazioni a priori per operatori a coefficienti costanti.

Nel seguito di questo capitolo per comodità porremo $x = (x_1, \dots, x_n) = (y, t)$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (\eta, \tau)$, dove $y = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $\eta = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$.

Assegnamo un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti della forma

$$A(D) = A(D_y,\ D_t) = \sum_{<\mu,\ q> = m} a_\mu D_y^{\mu'} D_t^{\mu_n}, \tag{2.1}$$

sul quale faremo la seguente ipotesi:

α_1) $A(D)$ è ***quasi-ellittico***, cioè risulta

$$A(\xi) = A(\eta,\ \tau) \neq 0 \qquad \forall\ \xi = (\eta,\ \tau) \in R^n - \{0\};$$

inoltre per ogni $\eta \in R^{n-1} - \{0\}$ il numero ν delle radici con parte immaginaria positiva del polinomio, nella variabile complessa z, $A(\eta,\ z)$ è indipendente da η (2).

Indicheremo con $z_1^+(\eta),\ \dots,\ z_\nu^+(\eta)$ le suddette radici e porremo

$$M^+(\eta,\ z) = \prod_{k=1}^{\nu} (z - z_k^+(\eta)). \tag{2.2}$$

Assegnamo inoltre un sistema $\{B_j(D)\}_{j=1}^{\nu}$ di ν operatori differenziali lineari a coefficienti costanti della forma

$$B_j(D) = B_j(D_y,\ D_t) = \sum_{<\mu,\ q> = p_j} b_{j\mu} D_y^{\mu'} D_t^{\mu_n}, \qquad 0 \leq p_j \leq m - q_n, \tag{2.3}$$

supponendo che sia verificata la seguente ipotesi:

α_2) Gli operatori $B_1(D),\ \dots,\ B_\nu(D)$ soddisfano la ***condizione complementare*** (3) rispetto ad $A(D)$, cioè per ogni $\eta \in R^{n-1} - \{0\}$ i polinomi, nella variabile complessa z, $B_1(\eta,\ z),\ \dots,\ B_\nu(\eta,\ z)$ sono linearmente indipendenti modulo $M^+(\eta,\ z)$.

Sussistono i seguenti lemmi:

LEMMA 2.1. - *Se è verificata l'ipotesi α_1), allora la α_2) è condizione necessaria e sufficiente affinchè, per ogni fissato $\eta \in R^{n-1} - \{0\}$, il problema*

(2) Notoriamente, se $n > 2$ l'operatore quasi-ellittico $A(D_y,\ D_t)$ soddisfa senz'altro a tale condizione.

(3) Cfr., ad es., la definizione 3.1 di T. MATSUZAWA [21].

$$A(\eta, D_t)\varphi(t) = 0 \text{ per } t > 0,$$

$$B_j(\eta, D_t)\varphi(t)|_{t=0} = 0, \qquad j = 1, \dots, \nu,$$

abbia in $H^{m_n}(R^1_+)$ *la sola soluzione nulla.*

LEMMA 2.2. - *Se sono verificate le ipotesi* α_1) *e* α_2), *allora per ogni* $\eta \in R^{n-1} - \{0\}$ *l'operatore*

$$\mathcal{S}_\eta : \varphi \to (A(\eta, D_t)\varphi, B_1(\eta, D_t)\varphi|_{t=0}, \dots, B_\nu(\eta, D_t)\varphi|_{t=0}) \tag{2.4}$$

risulta un isomorfismo (algebrico e topologico) di $H^{m_n}(R^1_+)$ *su* $L^2(R^1_+) \times C^\nu$ (4). *Inoltre per ogni* $\varphi \in H^{m_n}(R^1_+)$ *si ha*

$$\|\varphi\|_{H^{m_n}(R^1_+)} \le c(\eta) \|\mathcal{S}_\eta \varphi\|_{L^2(R^1_+)\times C^\nu}, \tag{2.5}$$

dove $\eta \to c(\eta)$ *è una funzione continua in* $R^{n-1} - \{0\}$.

Le dimostrazioni di tali lemmi (che qui per brevità omettiamo) si ottengono con ragionamenti analoghi a quelli tenuti da J. L. LIONS - E. MAGENES (cfr. il n. 4 del cap. 2 di [20]) per dimostrare gli stessi risultati relativamente al caso ellittico, e cioè al caso in cui $m_1 = \dots = m_n = m$.

Osserviamo ora che l'operatore aggiunto $\mathcal{S}^*_\eta$ di $\mathcal{S}_\eta$ è l'operatore lineare e continuo da $L^2(R^1_+) \times C^\nu$ in $(H^{m_n}(R^1_+))' = H^{-m_n}_{\overline{R^1_+}}(R^1)$ definito dalla relazione

$$< \varphi, \overline{\mathcal{S}^*_\eta \Psi} > = < \mathcal{S}_\eta \varphi, \overline{\Psi} > \tag{2.6}$$

per ogni $\varphi \in H^{m_n}(R^1_+)$ e per ogni $\Psi = (\psi, c_1, \dots, c_\nu) \in L^2(R^1_+) \times C^\nu$.

Dal lemma 2.2 si deduce la maggiorazione

$$\|\Psi\|_{L^2(R^1_+)\times C^\nu} \le c(\eta) \|\mathcal{S}^*_\eta \Psi\|_{H^{-m_n}(R^1)} \qquad \forall \Psi \in L^2(R^1_+) \times C^\nu. \tag{2.7}$$

Nel seguito, per ogni funzione $\psi \in L^2(R^n_+)$, $n \ge 1$, indicheremo con ψ_0 il suo prolungamento a $L^2(R^n)$ con valori nulli per $t < 0$, e per ogni distribuzione

(4) Indichiamo con C lo spazio dei numeri complessi.

$\varphi \in H^s(R^n_+)$ indicheremo con φ_1 un suo assegnato prolungamento a $H^s(R^n)$.

Con tali notazioni dalla (2.6) si ha

$$< \varphi, \overline{\mathcal{G}^*_\eta \Psi} > = < A(\eta, D_t)\varphi_1, \overline{\psi_0} > + \sum_{j=1}^{\nu} < B_j(\eta, D_t)\varphi_1|_{t=0}, \overline{c_j} >$$

$$= < A(\eta, D_t)\varphi_1, \overline{\psi_0} > + \sum_{j=1}^{\nu} < B_j(\eta, D_t)\varphi_1, \overline{c_j\delta} >$$

$$= < \varphi_1, \overline{A^*(\eta, D_t)\psi_0} > + \sum_{j=1}^{\nu} < \varphi_1, \overline{B_j^*(\eta, D_t)c_j\delta} >,$$

dove δ denota la misura di Dirac nell'origine, $A^*(\eta, D_t)$ e $B_j^*(\eta, D_t)$ denotano gli operatori *aggiunti formali* rispettivamente di $A(\eta, D_t)$ e $B_j(\eta, D_t)$ (come operatori differenziali in t).

Se ne deduce che per ogni $\Psi = (\psi, c_1, \ldots, c_\nu) \in L^2(R^1_+) \times C^\nu$ risulta

$$\mathcal{G}^*_\eta \Psi = A^*(\eta, D_t)\psi_0(t) + \sum_{j=1}^{\nu} B_j^*(\eta, D_t)c_j\delta. \tag{2.8}$$

Consideriamo ora l'operatore

$$\mathcal{G}: u \to (A(D)u, B_1(D)u|_{t=0}, \ldots, B_\nu(D)u|_{t=0}) \tag{2.9}$$

che, in conseguenza del lemma 1.7, risulta lineare e continuo da $H^m(R^n_+)$ in $L^2(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{m-p_j-q_n/2}(R^{n-1})$.

L'operatore aggiunto $\mathcal{G}^*$ di $\mathcal{G}$ è l'operatore lineare e continuo da $L^2(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$ in $(H^m(R^n_+))' = H^{-m}_{\overline{R^n_+}}(R^n)$ definito dalla relazione

$$< u, \overline{\mathcal{G}^* F} > = < \mathcal{G}u, \overline{F} > \tag{2.10}$$

per ogni $u \in H^m(R^n_+)$ e per ogni $F = (f, g_1, \ldots, g_\nu) \in L^2(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$.

Denotati con $A^*(D)$ e $B_j^*(D)$ gli operatori *aggiunti formali* rispettivamente di $A(D)$ e $B_j(D)$, dalla (2.10) si ha

$$< u, \overline{\mathcal{G}^* F} > = < A(D)u_1, \overline{f_0} > + \sum_{j=1}^{\nu} < B_j(D)u_1|_{t=0}, \overline{g_j} >$$

$$= < A(D)u_1, \overline{f_0} > + \sum_{j=1}^{\nu} < B_j(D)u_1, \overline{g_j(y) \otimes \delta(t)} >$$

$$= < u_1, \overline{A^*(D)f_0} > + \sum_{j=1}^{\nu} < u_1, \overline{B_j^*(D)(g_j(y) \otimes \delta(t))} > .$$

Se ne deduce che per ogni $F = (f, g_1, \ldots, g_\nu) \in L^2(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$ risulta

$$\mathcal{S}^*F = A^*(D)f_0 + \sum_{j=1}^{\nu} B_j^*(D)(g_j(y) \otimes \delta(t)). \tag{2.11}$$

Vogliamo dimostrare il seguente teorema che estende al caso quasi-ellittico la formula (4 27) del cap. 2 di J. L. LIONS - E. MAGENES [20]:

TEOREMA 2.1. - *Se sono verificate le ipotesi* α_1) *e* α_2), *per ogni* $F = (f, g_1, \ldots, g_\nu) \in L^2(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$ *sussiste la limitazione*

$$\| F \|_{L^2(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})} \leq c(\| \mathcal{S}^*F \|_{H^{-m}(R^n)} \tag{2.12}$$

$$+ \| F_0 \|_{H^{-1}(R^n) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+p_j-q_n/2}(R^{n-1})}),$$

dove $F_0 = (f_0, g_1, \ldots, g_\nu)$ *e dove* c *è una costante indipendente da* F.

Infatti (5), dalle (2.7) e (2.8) si ha per $\Psi = (\psi, c_1, \ldots, c_\nu) \in L^2(R_+^1) \times C^\nu$ e per $< \eta > = 1$

$$\int_0^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt + \sum_{j=1}^{\nu} |c_j|^2 \leq k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \tau^2)^{-m_n} | A^*(\eta, \tau) \int_0^{+\infty} e^{-i\tau t} \psi(t) dt$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu} B_j^*(\eta, \tau) c_j |^2 d\tau,$$

dove k_0 è una costante indipendente da η e Ψ.

---

(5) Otterremo la dimostrazione di questo teorema con ragionamenti concettualmente analoghi a quelli tenuti da J. L. LIONS e E. MAGENES per dimostrare l'analogo risultato relativo al caso ellittico (cfr. la dimostrazione della citata formula (4.27) del cap. 2 di [20]).

Osserviamo che posto, per ogni $\eta \in R^{n-1} - \{0\}$, $\eta' = (<\eta>^{-q_1}\eta_1, \ldots, <\eta>^{-q_{n-1}}\eta_{n-1})$ si ha $<\eta'> = 1$ e

$$A^*(\eta', \tau) = <\eta>^{-m} A^*(\eta, <\eta>^{q_n}\tau),$$

$$B_j^*(\eta', \tau) = <\eta>^{-p_j} B_j^*(\eta, <\eta>^{q_n}\tau).$$

Se ne deduce che per ogni $\eta \in R^{n-1} - \{0\}$ si ha

$$\int_0^{+\infty} |\psi(<\eta>^{q_n}t)|^2 dt + <\eta>^{-q_n} \sum_{j=1}^{\nu} |c_j|^2 \tag{2.13}$$

$$\leq k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} (<\eta>^{2q_n} + \tau^2)^{-m_n} \Big| A^*(\eta, \tau) \int_0^{+\infty} e^{-i\tau t}\psi(<\eta>^{q_n}t)dt$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu} B_j^*(\eta, \tau) c_j <\eta>^{m-p_j-q_n} \Big|^2 d\tau.$$

Assegnato ora $F = (f, g_1, \ldots, g_\nu) \in L^2(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$, sostituiamo nella (2.13) $\widehat{f}(\eta, t)$ a $\psi(<\eta>^{q_n}t)$ e $\widehat{g}_j(\eta)$ a $c_j <\eta>^{m-p_j-q_n}$. Tenuto allora conto della (2.11) si ha per ogni $\eta \in R^{n-1} - \{0\}$

$$\int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\eta, t)|^2 dt + \sum_{j=1}^{\nu} <\eta>^{2(-m+p_j+q_n/2)} |\widehat{g}_j(\eta)|^2 \tag{2.14}$$

$$\leq k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} (<\eta>^{2q_n} + \tau^2)^{-m_n} |\widehat{\mathfrak{F}^* F}|^2 d\tau.$$

Nel seguito di questa dimostrazione denoteremo con $k_1, \ldots, k_5$ delle costanti indipendenti da F.

Dalla (2.14) si deduce la limitazione

$$\int_{<\eta>\geq 1} d\eta \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\eta, t)|^2 dt + \sum_{j=1}^{\nu} \int_{<\eta>\geq 1} (1 + <\eta>^2)^{-m+p_j+q_n/2} |\widehat{g}_j(\eta)|^2 d\eta \tag{2.15}$$

$$\leq k_1 \| \mathfrak{F}^* F \|^2_{H^{-m}(R^n)}.$$

Inoltre si ha evidentemente

$$\int\limits_{<\eta>\leq 1} (1+<\eta>^2)^{-m+p_j+q_n/2}\,|\widehat{g}_j(\eta)|^2 d\eta \tag{2.16}$$

$$\leq k_2 \|g_j\|^2_{H^{-m+p_j-q_n/2}(R^{n-1})},$$

mentre con le stesse considerazioni tenute in [20] per stabilire la (4.33) del cap. 2, si dimostra che risulta

$$\int\limits_{<\eta>\leq 1} d\eta \int\limits_0^{+\infty} |\widehat{f}(\eta,\ t)|^2 dt \leq k_3 (\|f_0\|^2_{H^{-1}(R^n)} \tag{2.17}$$

$$+ \int\limits_{<\eta>\leq 1} \left\| \frac{\partial^{m_n} \widehat{f}_0(\eta,\ t)}{\partial t^{m_n}} \right\|^2_{H^{-m_n}(R^1)} d\eta).$$

Per maggiorare l'integrale a secondo membro della (2.17), osserviamo che si ha (si tenga presente la (2.11))

$$a\tau^{m_n}\tilde{f}_0(\eta,\ \tau) = A^*(\eta,\ \tau)\tilde{f}_0(\eta,\ \tau) - \sum_{k=0}^{m_n-1} a_k(\eta)\tau^k \tilde{f}_0(\eta,\ \tau)$$

$$= \widetilde{\mathfrak{F}^* F} - \sum_{k=0}^{m_n-1} a_k(\eta)\tau^k \tilde{f}_0(\eta,\ \tau) - \sum_{j=1}^{\nu} B_j^*(\eta,\ \tau)\widehat{g}_j(\eta),$$

dove a è una costante $\neq 0$ e le $a_k(\eta)$ sono delle funzioni continue di η.

Se ne deduce che risulta

$$\int\limits_{<\eta>\leq 1} \left\| \frac{\partial^{m_n} \widehat{f}_0(\eta,\ t)}{\partial t^{m_n}} \right\|^2_{H^{-m_n}(R^1)} d\eta = \int\limits_{<\eta>\leq 1} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\tau^2)^{-m_n} |\tau^{m_n}\tilde{f}_0(\eta,\ \tau)|^2 d\tau \tag{2.18}$$

$$\leq k_4 \Big(\int\limits_{<\eta>\leq 1} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\tau^2)^{-m_n} |\widetilde{\mathfrak{F}^* F}|^2 d\tau$$

$$+ \int\limits_{<\eta>\leq 1} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\tau^2)^{-1} |\tilde{f}_0(\eta,\ \tau)|^2 d\tau + \sum_{j=1}^{\nu} \int\limits_{<\eta>\leq 1} |\widehat{g}_j(\eta)|^2 d\eta \Big)$$

$$\leq k_5(\|\mathfrak{F}^*F\|^2_{H^{-m}(R^n)} + \|f_0\|^2_{H^{-1}(R^n)} + \sum_{j=1}^{\nu} \|g_j\|^2_{H^{-m+p_j-q_n/2}(R^{n-1})}).$$

Dalle (2.15)-(2.18) si deduce la (2.12), e quindi si ha la tesi.

3. - Valutazioni a priori per operatori a coefficienti variabili.

Assegnamo ora un operatore differenziale lineare della forma

$$A(x, D) = \sum_{<\mu, q>\leq m} a_\mu(x) D^\mu, \tag{3.1}$$

a coefficienti $a_\mu(x) \in C_0^\infty(R^n)$ e con la seguente condizione:

β_1) L'operatore a coefficienti costanti

$$A_0(D) = A_0(0, D) = \sum_{<\mu, q>=m} a_\mu(0) D^\mu \tag{3.2}$$

verifica l'ipotesi α_1).

Assegnamo inoltre un sistema $\{B_j(y, D)\}_{j=1}^{\nu}$ di ν operatori differenziali lineari della forma

$$B_j(y, D) = \sum_{<\mu, q>\leq p_j} b_{j\mu}(y)\, D^\mu, \qquad 0 \leq p_j \leq m - q_n, \tag{3.3}$$

a coefficienti $b_{j\mu}(y) \in C_0^\infty(R^{n-1})$ e con la seguente condizione:

β_2) Gli operatori a coefficienti costanti

$$B_{0j}(D) = B_{0j}(0, D) = \sum_{<\mu, q>=p_j} b_{j\mu}(0) D^\mu, \qquad j = 1, \dots, \nu, \tag{3.4}$$

verificano la condizione complementare rispetto all'operatore $A_0(0, D)$.

Chiameremo *parte principale* di $A(x, D)$, l'operatore

$$A_0(x, D) = \sum_{<\mu, q>=m} a_\mu(x) D^\mu$$

e *parte principale* di $B_j(y, D)$, l'operatore

$$B_{j0}(y, D) = \sum_{<\mu, q>=p_j} b_{j\mu}(y) D^\mu.$$

Osserviamo che, in conseguenza del lemma 1.7, l'operatore

$$(3.5)\qquad P : u \to (A(x, D)u,\ B_1(y, D)u|_{t=0},\ \dots,\ B_\nu(y, D)u|_{t=0})$$

risulta, per ogni r reale, lineare e continuo da $H^{m,r}(R^n_+)$ in $H^{0,r}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{m+r-p_j-q_n/2}(R^{n-1})$.

L'operatore aggiunto P^* di P risulta allora lineare e continuo da $H^{0,-r}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m-r+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$ in $(H^{m,r}(R^n_+))' = H^{-m,-r}_{\overline{R^n_+}}(R^n)$ e, con le stesse considerazioni tenute per stabilire la (2.11), si prova che per ogni $F = (f,\ g_1, \dots, g_\nu) \in H^{0,-r}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m-r+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$ si ha

$$(3.6)\qquad P^*F = A^*(x, D)f_0(x) + \sum_{j=1}^{\nu} B_j^*(y, D)(g_j(y) \otimes \delta(t)),$$

dove $A^*(x, D)$ e $B_j^*(y, D)$ denotano gli operatori *aggiunti formali* rispettivamente di $A(x, D)$ e $B_j(y, D)$.

Scriveremo A^* e B_j^* nella forma

$$(3.7)\qquad A^*(x, D) = \sum_{<\mu, q> \le m} a^*_\mu(x) D^\mu,$$

$$(3.8)\qquad B_j^*(y, D) = \sum_{<\mu, q> \le p_j} b^*_{j\mu}(y) D^\mu, \qquad j = 1, \dots, \nu.$$

Per ogni numero reale $\rho > 0$ porremo

$$\Gamma(\rho) = \{x \in R^n \mid |x| < \rho\},$$

$$\Sigma(\rho) = \{x \in R^n \mid |x| < \rho,\ x_n \ge 0\},$$

$$\sigma(\rho) = \{y \in R^{n-1} \mid |y| < \rho\}.$$

Vogliamo dimostrare il seguente

TEOREMA 3.1. - *Se sono verificate le ipotesi* β_1) *e* β_2), *esiste un numero reale* $\rho_1 > 0$ *tale che per ogni* $F = (f,\ g_1, \dots, g_\nu) \in H^{0,r}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+r+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$,

r reale, con f e g_j aventi supporti contenuti in $\Sigma(\rho_1)$ e $\sigma(\rho_1)$ rispettivamente, sussiste la limitazione

$$\|F\|_{H^{0,r}(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{\nu}H^{-m+r+p_j+q_n/2}(R^{n-1})}\leq c(\|P^*F\|_{H^{-m,r}(R^n)} \tag{3.9}$$

$$+\|F\|_{H^{0,r-1}(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{\nu}H^{-m+r-1+p_j+q_n/2}(R^{n-1})}),$$

dove c è una costante indipendente da F e dove, se $r=0$, si può sostituire la norma di f in $H^{0,-1}(R^n_+)$ con la norma di f_0 in $H^{-1}(R^n)$.

Infatti, indichiamo con $A_0^*(x, D)$ e $B_{0j}^*(y, D)$ le parti principali di $A^*(x, D)$ e $B_j^*(y,D)$.

Evidentemente, $A_0^*(0, D)$ e $B_{0j}^*(0, D)$ sono gli operatori aggiunti formali di $A_0(0, D)$ e $B_{0j}(0, D)$.

Introduciamo la distribuzione $\lambda_r(y)$ *su* R^{n-1} tale che

$$\widehat{\lambda_r}(\eta)=(1+<\eta>^2)^{r/2},$$

ed osserviamo che per ogni $F=(f, g_1, \ldots, g_\nu)\in H^{0,r}(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{\nu}H^{-m+r+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$ risulta $\lambda_r * F=(\lambda_r * f, \lambda_r * g_1, \ldots, \lambda_r * g_\nu)\in L^2(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{\nu}H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$ e si ha

$$\|\lambda_r * F\|_{L^2(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{\nu}H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})}=\|F\|_{H^{0,r}(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{\nu}H^{-m+r+p_j+q_n/2}(R^{n-1})}. \tag{3.10}$$

Assegnato allora un vettore F della suddetta classe, dal teorema 2.1 si deduce che si ha

$$\|F\|_{H^{0,r}(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{\nu}H^{-m+r+p_j+q_n/2}(R^{n-1})} \tag{3.11}$$

$$\leq c_1(\|A_0^*(0, D)f_0+\sum_{j=1}^{\nu}B_{0j}^*(0, D)(g_j(y)\otimes\delta(t))\|_{H^{-m,r}(R^n)}$$

$$+\|F_0\|_{H^{-1,r}(R^n)\times\prod_{j=1}^{\nu}H^{-m+r+p_j-q_n/2}(R^{n-1})});$$

qui e nel seguito di questa dimostrazione denotiamo con c_1, c_2, e c_3 delle costanti positive indipendenti da F.

Dalla (3.11) consegue la limitazione

$$\|F\|_{H^{0,r}(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{\nu}H^{-m+r+p_j+q_n/2}(R^{n-1})}\leq c_2(\|P^*F\|_{H^{-m,r}(R^n)} \tag{3.12}$$

$$+\|F_0\|_{H^{-1,r}(R^n)\times\prod_{j=1}^{\nu}H^{-m+r+p_j-q_n/2}(R^{n-1})}+I_1(F)+I_2(F)),$$

dove si è posto

$$I_1(F)=\|(A_0^*(0,D)-A_0^*(x,D))f_0+\sum_{j=1}^{\nu}(B_{0j}^*(0,D)-B_{0j}^*(y,D)(g_j(y)\otimes\delta(t))\|_{H^{-m,r(R^n)}},$$

$$I_2(F)=\sum_{<\mu,q><m}\|D^{\mu}f_0\|_{H^{-m,r}(R^n)}+\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{<\mu,q><p_j}\|D^{\mu}(g_j(y)\otimes\delta(t))\|_{H^{-m,r}(R^n)}.$$

In conseguenza del lemma 1.3, si ha che per ogni $\varepsilon>0$ esiste un numero reale $\rho>0$ tale che, se f e g_j hanno supporti contenuti rispettivamente in $\Sigma(\rho)$ e $\sigma(\rho)$, risulta

$$I_1(F)\leq\varepsilon(\|f_0\|_{H^{0,r}(R^n)}+\sum_{j=1}^{\nu}\|g_j(y)\otimes\delta(t)\|_{H^{-m+p_j,r}(R^n)}) \tag{3.13}$$

$$+c(\varepsilon)(\|f_0\|_{H^{0,r-1}(R^n)}+\sum_{j=1}^{\nu}\|g_j(y)\otimes\delta(t)\|_{H^{-m+p_j,r-1}(R^n)}),$$

dove, se $r=0$, si può sostituire la morma di f_0 in $H^{0,-1}(R^n)$ con la norma di f_0 in $H^{-1}(R^n)$.

Inoltre, in conseguenza del lemma 1.2, si ha per ogni $\varepsilon>0$

$$I_2(F)\leq\varepsilon(\|f_0\|_{H^{0,r}(R^n)}+\sum_{j=1}^{\nu}\|g_j(y)\otimes\delta(t)\|_{H^{-m+p_j,r}(R^n)}) \tag{3.14}$$

$$+c_1(\varepsilon)(\|f_0\|_{H^{-1,r}(R^n)}+\sum_{j=1}^{\nu}\|g_j(y)\otimes\delta(t)\|_{H^{-m+p_j-1,r}(R^n)}).$$

D'altra parte si verifica facilmente che, comunque si assegnano i numeri reali $l>q_n/2$ e k, risulta

$$\|g_j(y)\otimes\delta(t)\|_{H^{-l,k}(R^n)}\leq c_3\|g_j\|_{H^{-l+k+q_n/2}(R^{n-1})}. \tag{3.15}$$

Dalle (3.12)-(3.15) si deduce in modo ovvio la tesi.

4. - Regolarizzazione parziale alla frontiera.

In questo numero indicheremo con $\omega(y)$ un'assegnata funzione reale e non negativa di classe $C_0^\infty(R^{n-1})$ e tale che

$$\int_{R^{n-1}} \omega(y)dy = 1, \qquad \operatorname{supp} \omega(y) = \{y \mid |y| \leq 1\}.$$

Porremo per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni distribuzione $u(y, t)$:

$$\omega_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-(n-1)}\omega(y/\varepsilon), \qquad u_\varepsilon(y, t) = u(y,t) * \omega_\varepsilon(y).$$

Da noti risultati (cfr., ad es., il cap. I di L. Hörmander [18]) segue che se $u \in H^{s,r}(R^n_+)$ [risp. $u \in H^r(R^{n-1})$] allora $u_\varepsilon \in H^{s,k}(R^n_+)$ [risp. $u_\varepsilon \in H^k(R^{n-1})$] per ogni k reale; inoltre riesce

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{H^{s,r}(R^n_+)} = 0 \text{ [risp. } \lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{H^r(R^{n-1})} = 0]. \tag{4.1}$$

Per ogni funzione $\zeta(y, t)$ definita in R^n e per ogni vettore $F = (f(y, t), g_1(y), \ldots, g_\nu(y))$ porremo

$$\dot{\zeta}(y) = \zeta(y, 0), \qquad \zeta F = (\zeta f, \dot{\zeta} g_1, \ldots, \dot{\zeta} g_\nu),$$

$$(\zeta F)_\varepsilon = ((\zeta f)_\varepsilon, (\dot{\zeta} g_1)_\varepsilon, \ldots, (\dot{\zeta} g_\nu)_\varepsilon).$$

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema 4.1. - *Siano verificate le ipotesi* $\beta_1)$, $\beta_2)$ *e sia* $F = (f, g_1, \ldots, g_\nu)$ *un assegnato vettore di classe* $L^2(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$.

Esiste, per ogni intero $k > 0$, *un numero positivo* $\rho_0 \leq \rho_1$ *(dove* ρ_1 *è il numero definito dal teorema* 3.1) *tale che se risulta, per ogni* $\zeta \in C_0^\infty(R^n)$ *e con supporto contenuto in* $\Gamma(\rho)$ *per un* $\rho < \rho_0$,

$$\zeta P^* F \in H^{-m,k}(R^n), \tag{4.2}$$

allora si ha

$$\zeta F \in H^{0,k}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+k+p_j+q_n/2}(R^{n-1}). \tag{4.3}$$

Ragionando per ricorrenza, ci basterà stabilire la (4.3) nell'ipotesi che sussista la (4.2) e che si abbia

$$\zeta F \in H^{0,k-1}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+k-1+p_j+q_n/2}(R^{n-1}). \tag{4.4}$$

In ciò faremo in parte uso della tecnica utilizzata da T. MATSUZAWA per dimostrare il teorema 8.1 di [21].

Fissati $\rho < \rho_0$, $\zeta \in C_0^\infty(R^n)$ ed a supporto contenuto in $\Gamma(\rho)$, consideriamo il vettore $(\zeta F)_\varepsilon$ per $\varepsilon < (\rho_0 - \rho)/2$.

Le funzioni $(\zeta f)_\varepsilon$ e $(\zeta g_j)_\varepsilon$ hanno supporti contenuti rispettivamente in $\Sigma(\rho')$ e $\sigma(\rho')$, dove $\rho' = (\rho + \rho_0)/2$, e quindi per il teorema 3.1 si ha la limitazione

$$\|(\zeta F)_\varepsilon\|_{H^{0,k}(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+k+p_j+q_n/2}(R^{n-1})} \leq c_1\Big(\|P^*(\zeta F)_\varepsilon\|_{H^{-m,k}(R^n)} + \|(\zeta F)_\varepsilon\|_{H^{0,k-1}(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+k-1+p_j+q_n/2}(R^{n-1})}\Big); \tag{4.5}$$

nel corso di questa dimostrazione con $c_1, \ldots, c_6$ indichiamo delle costanti positive indipendenti da ε.

Osserviamo ora che risulta

$$P^*(\zeta F) = \zeta P^* F + \sum_{<\mu, q>\leq m} \sum_{\alpha<\mu} \binom{\mu}{\alpha} a_\mu^* D^{\mu-\alpha}\zeta \cdot D^\alpha f_0 + \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{<\mu, q>\leq p_j} \sum_{\alpha<\mu} \binom{\mu}{\alpha} b_{j\mu}^* D^{\mu-\alpha}\zeta \cdot D^\alpha(g_j(y)\otimes\delta(t)). \tag{4.6}$$

Si verifica facilmente, in conseguenza dell'ipotesi di induzione (4.4) e della (3.15), che, per ogni funzione $\psi \in C_0^\infty(R^n)$ ed a supporto contenuto in una sfera con centro nell'origine e di raggio $< \rho_0$, risulta

$$D^\alpha(\psi f_0) \in H^{-m,k}(R^n) \qquad \text{per } \alpha < \mu, \text{ dove } <\mu, q> \leq m, \tag{4.7}$$

$$D^\alpha((\psi g_j)\otimes\delta) \in H^{-m,k}(R^n) \qquad \text{per } \alpha < \mu, \text{ dove } <\mu, q> \leq p_j. \tag{4.8}$$

Le (4.2), (4.6), (4.7) e (4.8) implicano che si ha

$$P^*(\zeta F) \in H^{-m,\,k}(R^n). \tag{4.9}$$

Inoltre, con ragionamenti analoghi a quelli tenuti da L. HÖRMANDER per stabilire la (2.4.18) di [18], si prova che si ha

$$\| a_\mu^*(\zeta f)_\varepsilon - (a_\mu^* \zeta f)_\varepsilon \|_{H^{0,\,k}(R^n_+)} \leq c_2 \| \zeta f \|_{H^{0,\,k-1}(R^n_+)} \tag{4.10}$$

e (si tenga presente la (3.15))

$$\begin{aligned} \| b_{j\mu}^*((\dot{\zeta g_j}) \otimes \delta)_\varepsilon - (b_{j\mu}^*((\dot{\zeta g_j}) \otimes \delta))_\varepsilon \|_{H^{-m+p_j,\,k}(R^n)} & \\ \leq c_3 \| b_{j\mu}^*(\dot{\zeta g_j})_\varepsilon - (b_{j\mu}^* \dot{\zeta g_j})_\varepsilon \|_{H^{-m+k+p_j+q_n/2}(R^{n-1})} & \\ \leq c_4 \| \dot{\zeta g_j} \|_{H^{-m+k-1+p_j+q_n/2}(R^{n-1})} . & \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dalle (4.4), (4.10) e (4.11) segue che si ha

$$\begin{aligned} \| P^*(\zeta F)_\varepsilon - (P^*(\zeta F))_\varepsilon \|_{H^{-m,\,k}(R^n)} \leq c_5 \Big(1 & \\ + \sum_{<\mu,\,q> \leq m} \; \sum_{\alpha < \mu} \| D^{\mu-\alpha} a_\mu^* \cdot D^\alpha (\zeta f_0)_\varepsilon - (D^{\mu-\alpha} a_\mu^* \cdot D^\alpha (\zeta f_0))_\varepsilon \|_{H^{-m,\,k}(R^n)} & \\ + \sum_{j=1}^{\nu} \; \sum_{<\mu,\,q> \leq p_j} \; \sum_{\alpha < \mu} \| D^{\mu-\alpha} b_{j\mu}^* \cdot D^\alpha ((\dot{\zeta g_j})_\varepsilon \otimes \delta) - (D^{\mu-\alpha} b_{j\mu}^* \cdot D^\alpha ((\dot{\zeta g_j}) \otimes \delta))_\varepsilon \|_{H^{-m,\,k}(R^n)} \Big). & \end{aligned} \tag{4.12}$$

D'altra parte si può scrivere

$$\begin{aligned} \| P^*(\zeta F)_\varepsilon \|_{H^{-m,\,k}(R^n)} \leq \| (P^*(\zeta F))_\varepsilon \|_{H^{-m,\,k}(R^n)} & \\ + \| P^*(\zeta F)_\varepsilon - (P^*(\zeta F))_\varepsilon \|_{H^{-m,\,k}(R^n)} . & \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dalle relazioni precedenti e dalla (4.1) si deduce che esiste un numero $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni numero positivo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ si ha

$$\| (\zeta F)_\varepsilon \|_{H^{0,\,k}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+k+p_j+q_n/2}(R^{n-1})} \leq c_6 , \tag{4.14}$$

e tale relazione implica, per il teorema di BANACH-SAKS, la (4.3). Si ha così la tesi.

5. - Regolarizzazione alla frontiera.

Consideriamo un operatore differenziale lineare $A(x, D)$ della forma (3.1) ed a coefficienti $a_\mu(x)$ di classe $C^\infty(\overline{R^n_+})$.

Sussiste il seguente teorema, dove indichiamo con $\mathcal{H}^s(R^n_+)$, s reale, lo spazio a cui si riduce $H^s(R^n_+)$ quando $m_1 = \ldots = m_n = 2$.

TEOREMA 5.1. - *Siano k un intero > 0 e ρ_0 un numero reale > 0.*
Se riesce $a(x) = a_{(0,\ldots,0,m_n)}(x) \neq 0$ in $\Sigma(\rho_0)$, allora per ogni distribuzione f su R^n_+ tale che

$$\zeta A f \in \mathcal{H}^{-m+(m-m_n+1)k}(R^n_+) \qquad \forall \zeta \in C_0^\infty(\overline{R^n_+}) \text{ con supp } \zeta \subset \Sigma(\rho_0), \tag{5.1}$$

$$D_y^\tau f \in L^2(\Sigma(\rho_0)), \qquad |\tau| \leq (m - m_n + 1)k, \tag{5.2}$$

si ha per $\rho < \rho_0$

$$D_y^\tau D_t^l f \in L^2(\Sigma(\rho)), \qquad |\tau| \leq (m - m_n + 1)(k - l), \qquad l \leq k. \tag{5.3}$$

Supponiamo che la (5.3) sia vera per $l = r$, dove $r \leq k - 1$, e dimostriamo che di conseguenza essa è vera per $l = r + 1$.

Evidentemente, possiamo limitarci a dimostrare che

$$D_t^{r+1} f \in L^2(\Sigma(\rho)) \tag{5.4}$$

e che se si ha, per un generico intero positivo $h \leq (m - m_n + 1)(k - r - 1)$,

$$D_y^\tau D_t^{r+1} f \in L^2(\Sigma(\rho)), \qquad |\tau| \leq h - 1, \tag{5.5}$$

allora si ha anche

$$D_y^\tau D_t^{r+1} f \in L^2(\Sigma(\rho)), \qquad |\tau| = h. \tag{5.6}$$

Otterremo tale dimostrazione facendo uso di una tecnica che generalizza un noto procedimento relativo al caso ellittico (cfr., ad es., la dimostrazione del lemma 9.5 di S. AGMON [2]).

Osserviamo che, comunque si assegna una n — pla di interi non negativi α, si può scrivere

$$aD_t^{m_n} D^\alpha f = D^\alpha A f - \sum_{\substack{<\mu, q> \leq m \\ \mu_n < m_n}} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} a_\mu \cdot D^\mu D^\beta f$$

$$- \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} a \cdot D_t^{m_n} D^\beta f.$$

Ne segue che per ogni funzione $\varphi \in C_0^\infty(R_+^n)$ si ha

$$< aD^\alpha f, \overline{D_t^{m_n}\varphi} > = \sum_{j=1}^{m_n} \binom{m_n}{j} < D_t^j a \cdot D_t^{m_n - j} D^\alpha f, \overline{\varphi} > \tag{5.7}$$

$$+ < D^\alpha A f, \overline{\varphi} > - \sum_{\substack{<\mu, q> \leq m \\ \mu_n < m_n}} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} < D^{\alpha-\beta} a_\mu \cdot D^\mu D^\beta f, \overline{\varphi} >$$

$$- \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} < D^{\alpha-\beta} a \cdot D_t^{m_n} D^\beta f, \overline{\varphi} > .$$

Dalla (5.7) scritta per $\alpha = (0, \ldots, 0, r)$ si deduce evidentemente che esiste una costante M tale che si ha

$$|(aD_t^r f, D_t^{m_n}\varphi)| \leq M \sum_{|\mu| \leq m_n - 1} \| D^\mu \varphi \|_{L^2(\Sigma(\rho))} \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Sigma(\rho) - \partial\Sigma(\rho)), \tag{5.8}$$

dove il simbolo (,) denota il prodotto scalare in $L^2(\Sigma(\rho))$.

La (5.8) implica, per noti risultati (cfr., ad es., il lemma 9.3 di S. AGMON [2]), che $D_t(aD_t^r f) \in L^2(\Sigma(\rho'))$ per ogni $\rho' < \rho$.

Resta così dimostrato che sussiste la (5.4).

Per stabilire poi la (5.6), consideriamo la (5.7) scritta con $|\alpha'| = h$ e $\alpha_n' = r$. Da tale relazione, usufruendo delle ipotesi, si deduce facilmente che esiste una costante M_1 tale che si ha

$$|(aD_y^{\alpha'} D_t^r f, D_t^{m_n}\varphi)| \leq M_1 \sum_{|\mu| \leq m_n - 1} \| D^\mu \varphi \|_{L^2(\Sigma(\rho))} \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma(\rho) - \partial\Sigma(\rho)). \tag{5.9}$$

Dalla (5.9) si deduce, come nel caso precedente, che $D_t(aD_y^{\alpha'} D_t^r f) \in L^2(\Sigma(\rho'))$ per ogni $\rho' < \rho$, e quindi, come volevasi, che sussiste la (5.6). Si ha così la tesi.

Consideriamo ancora gli operatori $A(x, D)$ e $B_j(y, D)$ definiti al n. 3. Dai teoremi 4.1 e 5.1 consegue ovviamente il seguente

COROLLARIO 5.1. - *Siano verificate le ipotesi* β_1), β_2) *e sia* $F=(f, g_1, \dots, g_\nu)$ *un vettore di classe* $L^2(R^n_+)\times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$ *e tale che*

$$P^*F \in C^\infty(\overline{\Gamma(\rho_0)}) \text{ per un } \rho_0 > 0.$$

Esiste, per ogni intero $k \geq 0$, *un numero positivo* $\rho < \rho_0$ *tale che si ha*

$$D^\alpha f \in L^2(\Sigma(\rho)), \qquad |\alpha| \leq k,$$

$$D_y^\tau g_j \in L^2(\sigma(\rho)), \qquad |\tau| \leq k, \qquad j=1, \dots, \nu.$$

Richiamiamo ora le seguenti definizioni (cfr. T. MATSUZAWA [21], [22] e C. PARENTI [29] ([6])):

DEFINIZIONE 5.1. - Si dice che l'operatore $A(x, D)$ è *propriamente quasi-ellittico di tipo* ν su un sottinsieme $\mathfrak{D}$ di $\{x \in R^n \mid x_n = 0\}$, se per ogni $x_0 \in \mathfrak{D}$ l'operatore a coefficienti costanti $A_0(x_0, D)$ verifica l'ipotesi α_1) con ν indipendente anche da x_0.

DEFINIZIONE 5.2. - Se $A(x, D)$ è propriamente quasi-ellittico di tipo ν su $\mathfrak{D}$, si dice che gli operatori $B_1(y, D), \dots, B_\nu(y, D)$ verificano la *condizione complementare* rispetto ad $A(x, D)$ su $\mathfrak{D}$, se per ogni $x_0=(y_0, 0) \in \mathfrak{D}$ gli operatori a coefficienti costanti $B_{01}(y_0, D), \dots, B_{0\nu}(y_0, D)$ verificano la condizione complementare rispetto ad $A_0(x_0, D)$.

OSSERVAZIONE 5.1. - Se $\mathfrak{D}$ è connesso e $A(x, D)$ è quasi-ellittico in $\mathfrak{D}$, dalla continuità dei coefficienti segue evidentemente che $A(x, D)$ risulta propriamente quasi-ellittico su $\mathfrak{D}$ se, per un particolare punto $x_0 \in \mathfrak{D}$, l'operatore $A_0(x_0, D)$ soddisfa l'ipotesi α_1). È inoltre noto (cfr., ad es., A. CAVALLUCCI a pag. 146 di [8] ed il lemma 1 di [9]) che, nel caso $n > 2$ e se $\mathfrak{D}$ è connesso, ogni operatore quasi-ellittico in $\mathfrak{D}$ è anche propriamente quasi-ellittico su $\mathfrak{D}$.

([6]) Avvertiamo che è stato possibile prendere visione del lavoro [29] di C. PARENTI solo a stesura ultimata del presente lavoro.

Dalla *ipoellitticità* degli operatori quasi-ellittici e dal corollario 5.1 si deduce con note considerazioni il seguente

COROLLARIO 5.2. - *Assegnato un numero reale $\rho_0 > 0$, supponiamo che $A(x, D)$ sia quasi-ellittico in $\Sigma(\rho_0)$, propriamente quasi-ellittico di tipo ν su $\sigma(\rho_0)$ e che gli operatori $B_1(y, D), \ldots, B_\nu(y, D)$ verifichino la condizione complementare rispetto ad $A(x, D)$ su $\sigma(\rho_0)$.*

Allora per ogni $F = (f, g_1, \ldots, g_\nu) \in L^2(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{\nu} H^{-m+p_j+q_n/2}(R^{n-1})$ e tale che

$$P^*F \in C^\infty(\overline{\Gamma(\rho_0)}),$$

si ha per $\rho < \rho_0$

$$f \in C^\infty(\overline{\Sigma(\rho)}), \qquad g_j \in C^\infty(\overline{\sigma(\rho)}) \qquad (j = 1, \ldots, \nu).$$

6. - La formula di Green.

In questo numero per ogni $x \in R^n$ porremo ancora $x = (y, t)$, dove $y \in R^{n-1}$ e $t \in R^1$.

Indicheremo con σ un insieme aperto e connesso di R^{n-1}, contenente l'origine, e con Σ l'insieme $\{(y, t) | y \in \sigma \text{ e } 0 \leq t < 1\}$.

Inoltre indicheremo con $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ un'assegnata n-pla di numeri reali positivi, con $\delta(y, t)$ un'assegnata funzione di classe $C^0(\overline{\Sigma})$ e positiva in Σ; porremo $\tau' = (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ e $\delta_0(y) = \delta(y, 0)$.

Assegnamo in Σ un operatore differenziale lineare della forma

$$L = L(x, D) = \sum_{<\mu, q> \leq m} l_\mu(x) D^\mu. \tag{6.1}$$

DEFINIZIONE 6.1. - Diremo che L è un operatore quasi-ellittico di classe (r, s), dove $r \in J(\mathfrak{M})$ e $s \in R^1$, se:

1) le derivate $D^\alpha l_\mu \in C^0(\Sigma)$ per $< \alpha, q > \leq < \mu, q > + r$, ed esiste una costante M tale che si abbia per $< \alpha, q > \leq < \mu, q > + r$ e per $x \in \Sigma$

$$| \delta^{s+<\alpha, \tau> - <\mu, \tau>} D^\alpha l_\mu | \leq M;$$

2) L è quasi-ellittico in Σ;

3) la funzione $\delta^{s - m_n \tau_n} l_{(0, \ldots, 0, m_n)}$ è continua e $\neq 0$ su $\overline{\Sigma} \cap \{t = 0\}$.

Assegnamo inoltre un sistema di operatori differenziali *tangenziali* definiti su $\Sigma \cap \{t = 0\}$ e della forma

$$\Theta_{jk} = \sum_{<\eta, q'> \leq q_n(j-k)} \Theta_{j\eta k}(y) D_y^\eta, \qquad k = 0, \ldots, j \text{ e } j = 0, \ldots, m_n - 1, \tag{6.2}$$

avendo posto $q' = (q_1, \ldots, q_{n-1})$ e, per ogni $(n-1)$-pla di interi non negativi $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$, $< \eta, q' > = \eta_1 q_1 + \ldots + \eta_{n-1} q_{n-1}$.

DEFINIZIONE 6.2. - Diremo che gli operatori Θ_{jk} costituiscono un sistema di classe (r, s), dove $r \in J(\mathfrak{M})$ e $s \in R^1$, se:

a) le derivate $D_y^\beta \Theta_{j\eta k}(y) \in C^0(\sigma)$ per $< \beta, q' > \leq q_n(m_n - j) + r$, ed esiste una costante M_0 tale che si abbia per $< \beta, q' > \leq q_n(m_n - j) + r$ e per $y \in \sigma$

$$| \delta_0^{s + <\beta, \tau'> - <\eta, \tau'> + \tau_n(j-k)} D_y^\beta \Theta_{j\eta k} | \leq M_0 ;$$

b) le funzioni $\delta_0^s \Theta_{jj}$ sono continue e $\neq 0$ su $\bar{\sigma}$.

Sia poi $\{F_j\}_{j=0}^{m_n-1}$ un sistema di m_n operatori differenziali lineari di *frontiera* definiti su $\Sigma \cap \{t = 0\}$ e della forma

$$F_j = \sum_{<\eta, q'> + kq_n \leq jq_n} F_{j\eta k}(y) D_y^\eta D_t^k = \sum_{k=0}^{j} F_{jk} D_t^k, \qquad j = 0, \ldots, m_n - 1. \tag{6.3}$$

DEFINIZIONE 6.3. - Diremo che $\{F_j\}_{j=0}^{m_n-1}$ è un sistema di DIRICHLET di classe (r, s), se gli operatori tangenziali F_{jk} costituiscono un sistema di classe (r, s).

LEMMA 6.1. - *Se* $\{F_j\}_{j=0}^{m_n-1}$ *è un sistema di Dirichlet di classe* (r, s), *esiste un sistema* Φ_{jk}, $0 \leq k \leq j \leq m_n - 1$, *di operatori tangenziali di classe* $(r, -s)$ *tale che si ha*

$$D_t^j = \sum_{k=0}^{j} \Phi_{jk} F_k, \qquad j = 0, \ldots, m_n - 1. \tag{6.4}$$

La dimostrazione di questo lemma è analoga alla dimostrazione del lemma 4.1 di [34], a cui rinviamo.

LEMMA 6.2. - *Supponiamo che* $\{F_j\}_{j=0}^{m_n-1}$ *sia un sistema di Dirichlet di classe* (r, s), *per un* $r \in J(\mathfrak{M})$ *e per un* $s \in R^1$, *e che i coefficienti di* F_j *siano di classe* $C^\infty(\sigma)$.

Allora comunque si assegnano le funzioni $\varphi_j \in C_0^\infty(\sigma)$, $j = 0, \ldots, m_n - 1$, *esiste* $v \in C_0^\infty(\Sigma)$ *tale che si ha*

$$F_j v = \varphi_j \text{ per } t = 0, \qquad j = 0, \ldots, m_n - 1. \tag{6.5}$$

Applicando un noto procedimento (cfr., ad es., la dimostrazione del lemma 2.2 del cap. 2 di J. L. LIONS-E. MAGENES [20]), poniamo

$$\psi_k = \sum_{h=0}^{k} \Phi_{kh}\varphi_h, \qquad k = 0, \ldots, m_n - 1,$$

dove i Φ_{kh} sono definiti dal lemma 6.1.

Siccome, nelle ipotesi poste, i coefficienti degli operatori Φ_{kh} sono di classe $C^\infty(\sigma)$ (cfr. la (4.7) di [34] che fornisce le espressioni dei Φ_{kh}), si ha che, se le $\varphi_j \in C_0^\infty(\sigma)$, le $\psi_k \in C_0^\infty(\sigma)$.

Ne segue, per noti risultati, che esiste $v \in C_0^\infty(\Sigma)$ tale che

$$D_t^k v = \psi_k \text{ per } t = 0, \qquad k = 0, \ldots, m_n - 1.$$

Si ha allora

$$F_j v = \sum_{k=0}^{j} F_{jk} D_t^k v = \sum_{h=0}^{j} \Big(\sum_{k=h}^{j} F_{jk}\Phi_{kh}\Big)\varphi_h. \tag{6.6}$$

D'altra parte, in conseguenza delle (6.3) e (6.4), si ha

$$\sum_{k=h}^{j} F_{jk}\Phi_{kh} = \delta_{jh}, \qquad 0 \leq h \leq j \leq m_n - 1. \tag{6.7}$$

Dalle (6.6) e (6.7) segue la (6.5), e quindi si ha la tesi.

Sussiste inoltre il seguente lemma che costituisce una generalizzazione del lemma 4.2 di [34]:

LEMMA 6.3. - *Supponiamo che* L *sia un operatore quasi-ellittico di classe* (r, s') *e che* $\{F_j\}_{j=0}^{m_n-1}$ *sia un sistema di Dirichlet di classe* $(r + q_n(m_n - 1), s'')$.

Esiste un sistema di Dirichlet $\{G_j\}_{j=0}^{m_n-1}$ *di classe* $(r, s'-s''-m_n\tau_n)$ *tale che per ogni coppia di funzioni* u *e* v, *una di classe* $C^\infty(\Sigma)$ *e l'altra di classe* $C_0^\infty(\Sigma)$, *sussiste la formula di Green*

$$(6.8)\qquad \int_\Sigma Lu\cdot\bar{v}dydt-\int_\Sigma u\cdot\overline{L^*v}dydt=\sum_{j=0}^{m_n-1}\int_\sigma[F_ju\cdot\overline{G_{m_n-j-1}v}]_{t=0}dy,$$

dove L^* *denota l'operatore aggiunto formale di* L.

Infatti, assegnate le funzioni u e v, una di classe $C^\infty(\Sigma)$ e l'altra di classe $C_0^\infty(\Sigma)$, con delle integrazioni per parti si prova che si ha

$$(6.9)\qquad \int_\Sigma Lu\cdot\bar{v}dydt=\int_\Sigma u\cdot\overline{L^*v}dydt+\sum_{j=0}^{m_n-1}\int_\sigma[D_t^ju\cdot\overline{N_jv}]_{t=0}dy,$$

dove

$$(6.10)\qquad N_jv=i\sum_{k=j}^{m_n-1}\sum_{<\eta,q'>\le q_n(m_n-k-1)}D_t^{k-j}D_y^\eta(\bar{l}_{(\eta,k+1)}(y,t)v(y,t)).$$

Consideriamo gli operatori tangenziali Φ_{jk} definiti dal lemma 6.1. Indichiamo con Φ_{jk}^* l'operatore *aggiunto formale* di Φ_{jk} e poniamo

$$(6.11)\qquad G_j=\sum_{h=m_n-j-1}^{m_n-1}\Phi^*_{h,m_n-j-1}N_h,\qquad j=0,\ldots,m_n-1.$$

Si verifica facilmente che gli operatori G_j definiti dalla (6.11) soddisfano le condizioni richieste dal lemma.

Assegnamo ora gli interi $p_1,\ldots,p_\nu, r_1,\ldots,r_{m_n-\nu}$ tali che $\{p_1,\ldots,p_\nu,r_1,\ldots,r_{m_n-\nu}\}=\{0,1,\ldots,m_n-1\}$, e, supponendo verificate le condizioni del lemma 6.3, poniamo

$$B_j(y,D)=F_{p_j},\qquad C_j(y,D)=F_{r_j},$$

$$B_j'(y,D)=G_{m_n-r_j-1},\qquad C_j'(y,D)=-G_{m_n-p_j-1}.$$

Con tali posizioni, dalla (6.8) si ha per ogni coppia di funzioni u e v di classe $C_0^\infty(\overline{R_+^n})$ ed a supporto compatto in Σ

$$\int_{R_+^n} Lu \cdot \bar{v}dydt - \int_{R_+^n} u \cdot \overline{L^* v}dydt = \sum_{j=1}^{m_n-\nu} \int_{R^{n-1}} [C_j u \cdot \overline{B_j' v}]_{t=0}dy \tag{6.12}$$

$$- \sum_{j=1}^{\nu} \int_{R^{n-1}} [B_j u \cdot \overline{C_j' v}]_{t=0}dy.$$

Osserviamo che se l'operatore $L(x, D)$ è propriamente quasi-ellittico di tipo ν su σ, allora l'operatore $L^*(x, D)$ è propriamente quasi-ellittico di tipo $m_n - \nu$ su σ.

Sussiste il seguente

LEMMA 6.4. - *Siano verificate le ipotesi del lemma* 6.3 *ed inoltre* $L(x, D)$ *sia propriamente quasi-ellittico di tipo* ν *su* σ.

Allora gli operatori $B_1(y, D), \ldots, B_\nu(y, D)$ *verificano la condizione complementare rispetto a* $L(x, D)$ *su* σ *se e solo se gli operatori* $B_1'(y, D), \ldots, B_{m_n-\nu}'(y, D)$ *verificano la condizione complementare rispetto a* $L^*(x, D)$ *su* σ.

La dimostrazione di questo lemma si ottiene adattando al nostro caso un noto procedimento utilizzato per dimostrare un risultato analogo nel caso ellittico, ed esposto, ad es., nel n. 4.3 del cap. 2 di J. L. LIONS-E. MAGENES [20].

Ne diamo un accenno di dimostrazione, allo scopo di indicare alcuni accorgimenti di carattere formale che rendono possibile l'applicazione al nostro caso di detto procedimento relativo al caso ellittico.

Siano L_0, L_0^*, B_{0j}, ... le parti principali rispettivamente di L, L^*, B_j, ...

Possiamo evidentemente limitarci a dimostrare che gli operatori $B_{01}(0, D)$, ..., $B_{0\nu}(0, D)$ verificano la condizione complementare rispetto a $L_0(0, D)$ se e solo se gli operatori $B_{01}'(0, D), \ldots, B_{0,m_n-\nu}'(0, D)$ verificano la condizione complementare rispetto a $L_0^*(0, D)$.

Poniamo, per λ reale > 1,

$$w_\lambda(y, t) = w(\lambda^{q_1}y_1 . \ldots, \lambda^{q_{n-1}}y_{n-1}, \lambda^{q_n}t).$$

Osserviamo che se le funzioni u e v sono di classe $C_0^\infty(\overline{R_+^n})$ ed a supporto compatto in Σ, u_λ e v_λ sono ancora funzioni di classe $C_0^\infty(\overline{R_+^n})$ ed a supporto compatto in Σ.

Applicando allora la (6.12) a u_λ e v_λ, operando nella formula così ottenuta il cambiamento di variabili $y_i' = \lambda^{q_i} y_i$, $t' = \lambda^{q_n} t$ e passando al limite per $\lambda \to \infty$ si ottiene la formula

$$(6.13) \qquad \int_{R^n_+} L_0(0, D)u(y, t) \cdot \overline{v(y, t)}\, dydt - \int_{R^n_+} u(y, t) \cdot \overline{L_0^*(0, D)v(y, t)}\, dydt$$

$$= \sum_{j=1}^{\frac{m}{n}-\nu} \int_{R^{n-1}} C_{0j}(0, D)u(y, t)\,|_{t=0} \cdot \overline{B'_{0j}(0, D)v(y, t)}\,|_{t=0}\, dy$$

$$- \sum_{j=1}^{\nu} \int_{R^{n-1}} B_{0j}(0, D)u(y, t)\,|_{t=0} \cdot \overline{C'_{0j}(0, D)v(y, t)}\,|_{t=0}\, dy,$$

nell'ipotesi che u e v siano di classe $C_0^\infty(\overline{R^n_+})$ ed a supporto compatto in Σ.

Se poi u e v sono delle funzioni qualunque di classe $C_0^\infty(\overline{R^n_+})$, per λ sufficientemente grande u_λ e v_λ hanno supporto compatto in Σ. Applicando allora la (6.13) a tali funzioni u_λ, v_λ ed operando il cambiamento di variabili $y_i' = \lambda^{q_i} y_i$, $t' = \lambda^{q_n} t$, si deduce che la (6.13) sussiste per ogni $u, v \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$.

Tenendo allora presenti i lemmi 2.1 e 2.2, si ottiene la tesi ripetendo i ragionamenti tenuti nel cap. 2 di [20] per dedurre dalla (4.20) la tesi del teorema 2.2.

CAPITOLO II

Problemi quasi-ellittici in un dominio limitato.

7. - Preliminari; spazi di Sobolev con peso.

Nel seguito indicheremo con $n_1, \ldots, n_t$ dei numeri interi positivi tali che

$$n_1 + \ldots + n_t = n.$$

Supporremo che sia

$$m_{n_0+\dots+n_{i-1}+1} = \dots = m_{n_0+\dots+n_i} = m^{(i)}, \qquad i = 1, \dots, t,$$

dove $n_0 = 0$, e porremo

$$q^{(i)} = \frac{m}{m^{(i)}}, \qquad i = 1, \dots, t.$$

Inoltre indicheremo con $R^{(i)}$, $i = 1, \dots, t$, lo spazio reale euclideo a n_i dimensioni di punto $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)})$, e per ogni $x \in R^n$ porremo $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(t)})$, dove $x^{(i)} \in R^{(i)}$.

Se $\mathfrak{D}$ è un insieme misurabile di R^n, per ogni $u \in L^p(\mathfrak{D})$ porremo

$$|u|_{p,\mathfrak{D}} = \|u\|_{L^p(\mathfrak{D})}.$$

Sussiste il seguente lemma contenuto nel corollario I di [35]:

LEMMA 7.1. - *Sia $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(1)} \times \dots \times \mathfrak{D}^{(t)}$, dove $\mathfrak{D}^{(i)}$, $i = 1, \dots, t$, è un insieme aperto e limitato di $R^{(i)}$, dotato della proprietà di cono, e sia p un numero reale > 1.*

Per ogni distribuzione u su $\mathfrak{D}$ tale che $u \in L^p(\mathfrak{D})$, $D_{x_k}^{m_k} u \in L^p(\mathfrak{D})$, $k = 1, \dots, n$, per ogni n-pla di interi non negativi α tale che $< \alpha, q > < m$ e per ogni $a \in [< \alpha, q > /m, 1]$ sussiste la limitazione

$$|D^\alpha u|_{p',\mathfrak{D}} \leq c[(\sum_{k=1}^{n} |D_{x_k}^{m_k} u|_{p,\mathfrak{D}})^a \cdot |u|_{p,\mathfrak{D}}^{1-a} + |u|_{p,\mathfrak{D}}], \tag{7.1}$$

essendo: c una costante indipendente da u, p' un numero $\geq p$ e tale che

$$\frac{1}{p'} \geq \frac{1}{p} - \frac{am - < \alpha, q >}{|q|},$$

dove va escluso il segno di uguaglianza nei seguenti due casi: 1) $< \alpha, q > \leq m - |q|/p$ e $a = 1$; 2) $m = |q|/p$ e $a \neq < \alpha, q > /m$.

Assegnamo, per ogni $i \in \{1, \dots, t\}$, un insieme aperto e limitato $\Omega^{(i)}$ di $R^{(i)}$ e un insieme chiuso $S^{(i)}$, eventualmente vuoto, di punti di $\partial\Omega^{(i)}$, supponendo che sia verificata la seguente condizione:

a_0) Se $S^{(i)} \neq \partial\Omega^{(i)}$, esiste un ricoprimento di $\partial\Omega^{(i)} - S^{(i)}$ costituito da un numero finito $I_1^{(i)}, \dots, I_{r_i}^{(i)}$ di aperti di $R^{(i)}$, disgiunti da $S^{(i)}$ e tali che ad ogni $I_k^{(i)}$ sia possibile associare un omeomorfismo $x \to \alpha_k^{(i)}(x)$ di classe C^∞ di $\overline{I_k^{(i)}}$ sul cilindro $\{y \in R^{(i)} \mid y_1^2 + \dots + y_{n_i-1}^2 \leq 1,\ -1 \leq y_{n_i} \leq 1\}$, il quale trasformi $I_k^{(i)} \cap \Omega^{(i)}$ nell'insieme $\{y \in R^{(i)} \mid y_1^2 + \dots + y_{n_i-1}^2 < 1, 0 < y_{n_i} < 1\}$ e $I_k^{(i)} \cap (\partial\Omega^{(i)} - S^{(i)})$ nell'insieme $\{y \in R^{(i)} \mid y_1^2 + \dots + y_{n_i-1}^2 < 1,\ y_{n_i} = 0\}$; inoltre sia soddisfatta la seguente condizione di compatibilità: se $I_h^{(i)} \cap I_k^{(i)} \neq \emptyset$, esiste un omeomorfismo $\beta_{hk}^{(i)}$ di classe C^∞ ed a jacobiano positivo di $\alpha_h^{(i)}(I_h^{(i)} \cap I_k^{(i)})$ su $\alpha_k^{(i)}(I_h^{(i)} \cap I_k^{(i)})$ tale che

$$\alpha_k^{(i)}(x) = \beta_{hk}^{(i)}(\alpha_h^{(i)}(x)) \qquad \forall\, x \in I_h^{(i)} \cap I_k^{(i)}.$$

Riprendendo alcune notazioni definite nell'introduzione, poniamo

$$\Omega = \Omega^{(1)} \times \dots \times \Omega^{(t)},$$

$$\partial_i\Omega = \Omega^{(1)} \times \dots \times \Omega^{(i-1)} \times (\partial\,\Omega^{(i)} - S^{(i)}) \times \Omega^{(i+1)} \times \dots \times \Omega^{(t)}, \qquad i = 1, \dots, t,$$

$$S = \partial\,\Omega - \bigcup_{i=1}^{t} \partial_i\,\Omega,$$

e indichiamo con $\mathfrak{J}$ l'insieme dei numeri $i \in \{1, \dots, t\}$ tali che $\partial_i\,\Omega \neq \emptyset$.

OSSERVAZIONE 7.1. - La condizione sopra imposta agli insiemi $\Omega^{(i)}$ implica, evidentemente, l'esistenza di un ricoprimento di $\partial_i\Omega$ costituito da un numero finito $\mathcal{U}_{i1}, \dots, \mathcal{U}_{ih_i}$ di aperti di R^n, disgiunti da $\partial\Omega - \partial_i\Omega$ e tali che ad ogni $\mathcal{U}_{ik}$ si possa associare un omeomorfismo $x \to \theta_{ik}(x)$ di classe C^∞ di $\mathcal{U}_{ik}$ su un insieme aperto e connesso Γ di R^n, contenuto nell'insieme $\{y = (y^{(1)}, \dots, y^{(t)}) \in R^n \mid |y^{(j)}| < 1,\ j = 1, \dots, t\}$ e contenente l'origine, in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

r_1) θ_{ik} trasforma $\mathcal{U}_{ik} \cap \Omega$ nell'insieme $\Sigma^{(i)} = \{y = (y^{(1)}, \dots, y^{(t)}) \in R^n \mid y_{n_i}^{(i)} > 0\} \cap \Gamma$ e $\mathcal{U}_{ik} \cap \partial_i\Omega$ nell'insieme $\sigma^{(i)} = \{y = (y^{(1)}, \dots, y^{(t)}) \in R^n \mid y_{n_i}^{(i)} = 0\} \cap \Gamma$;

r_2) posto $y = \theta_{ik}(x)$, riesce $\partial y_h^{(r)} / \partial x_j^{(s)} = 0$ per $r \neq s$ e $\partial y_h / \partial x_h > 0$ (7);

r_3) è soddisfatta una condizione di compatibilitá del tipo di quella descritta nell'ipotesi a_0).

---

(7) Osserviamo che tale condizione implica che la trasformazione $y = \theta_{ik}(x)$ risulta, nel senso di A. CAVALLUCCI [9], ***stabile*** per ogni polinomio quasi-ellittico della forma $P(\xi) = \sum_{<\alpha, q> \leq m} \alpha_\alpha \xi^\alpha$ e quindi che $\partial_i\Omega$ risulta, ancora nel senso di [9], una superficie ***normale*** per $P(\xi)$.

Indicheremo:

con $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega)$, $k \in J(\mathfrak{M})$ e p reale ≥ 1, la classe delle funzioni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ([8]) ed a supporto compatto in $\bar{\Omega} - S$;

con $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\bar{\Omega})$ la classe delle funzioni $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ ed a supporto compatto in $\bar{\Omega} - S$; cioè porremo $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\bar{\Omega}) = C_0^{\infty}(\bar{\Omega} - S)$.

LEMMA 7.2. - *Qualunque siano $k \in J(\mathfrak{M})$ e p reale ≥ 1, $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\bar{\Omega})$ è denso in $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega)$.*

Infatti, sia u una funzione di classe $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega)$ e sia T il suo supporto.

Consideriamo gli aperti $\mathcal{U}_{ih}$ definiti nell'osservazione 7.1 e due aperti $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$ di R^n tali che

$$\bar{\mathcal{U}}_0 \subset \Omega, \quad S \subset \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_1 \cap \bar{\Omega} \subset \bar{\Omega} - T$$

e tali inoltre che gli insiemi $\mathcal{U}_{ih}(h = 1, \ldots, h_i, \; i \in \mathfrak{I})$, $\mathcal{U}_0$ e $\mathcal{U}_1$ costituiscano un ricoprimento di $\bar{\Omega}$.

Assegnamo quindi una partizione dell'unità su $\bar{\Omega}$ relativa al suddetto ricoprimento e costituita di funzioni α_{ih}, α_0, α_1 di classe $C_0^{\infty}(R^n)$ e tali che

$$\operatorname{supp} \alpha_{ih} \subset \mathcal{U}_{ih}, \qquad \operatorname{supp} \alpha_0 \subset \mathcal{U}_0, \qquad \operatorname{supp} \alpha_1 \subset \mathcal{U}_1 .$$

Facendo uso dell'*operatore regolarizzante* definito al n. 1.3 del cap. 2 di J. NEČAS [26] (cfr. anche il n. 1.2 di L. HÖRMANDER [18] e il n. 1 di S. AGMON [2]) e tenendo conto dell'osservazione 7.1, con note considerazioni (cfr., ad es., la dimostrazione del teorema 3.1 del cap. 2 di [26]) si dimostra che, per ogni i ed h, esiste una successione $\{u_{ihn}\}$ di funzioni di classe $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\bar{\Omega})$ ed aventi supporto contenuto in $\mathcal{U}_{ih} \cap \bar{\Omega}$ convergente ad $\alpha_{ih} u$ in $W^{k,p}(\Omega)$, ed esiste una sucessione $\{u_{0n}\}$ di funzioni di classe $C_0^{\infty}(\Omega)$ convergente ad $\alpha_0 u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.

Posto allora

$$u_n = \sum_{i \in \mathfrak{I}} \sum_{h=1}^{h_i} u_{ihn} + u_{0n},$$

si ha evidentemente che $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\bar{\Omega})$ e che la successione $\{u_n\}$ converge ad u in $W^{k,p}(\Omega)$. Ne segue la tesi.

([8]) Per la definizione di $W^{k,p}(\Omega)$ cfr. il n. 1 (def. 1.2).

Indicheremo: con $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ un'assegnata n-pla di numeri reali > 1 e tali che

$$\tau_{n_0+\ldots+n_{i-1}+1} = \ldots = \tau_{n_0+\ldots+n_i} = \tau^{(i)}, \qquad i = 1, \ldots, t,$$

con d un assegnato numero reale > 1 e $\geq \frac{1}{\sqrt{t}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} \operatorname{dist}(x, S)$, e porremo per ogni $x_0 \in \bar{\Omega}$

$$\rho(x_0) = \frac{1}{d\sqrt{t}} \operatorname{dist}(x_0, S),$$

$$Q(x_0) = \{ x \in R^n \,|\, |x^{(i)} - x_0^{(i)}| < \rho^{\tau^{(i)}}(x_0),\ i = 1, \ldots, t \},$$

$$I(x_0) = \Omega \cap Q(x_0), \qquad \Gamma(x_0) = \partial\Omega \cap Q(x_0).$$

Si verifica facilmente che riesce

$$|\rho(x') - \rho(x'')| \leq \frac{1}{d\sqrt{t}} |x' - x''| \qquad \forall\, x', x'' \in \Omega, \tag{7.2}$$

$$\frac{d-1}{d} \rho(x_0) < \rho(x) < \frac{d+1}{d} \rho(x_0) \qquad \forall\, x \in I(x_0), \tag{7.3}$$

$$\overline{\Gamma(x_0)} \cap S = \emptyset. \tag{7.4}$$

Dalla (7.4) si deduce che, posto

$$\Gamma_i(x_0) = \partial_i\Omega \cap Q(x_0), \qquad i \in \mathfrak{J},$$

si ha

$$\Gamma(x_0) = \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \Gamma_i(x_0). \tag{7.5}$$

Nel seguito, se z è un punto di R^n, porremo

$$\rho^\tau(x_0) z = (\rho^{\tau_1}(x_0) z_1, \ldots, \rho^{\tau_n}(x_0) z_n).$$

Per ogni sottoinsieme $\mathfrak{D}$ di $\overline{I(x_0)}$, indicheremo con $\mathfrak{D}^*$ l'insieme (dei punti ξ) trasformato di $\mathfrak{D}$ mediante la sostituzione

$$x - x_0 = \rho^{\tau}(x_0)(\xi - x_0) \tag{7.6}$$

e, per ogni funzione $v(x)$ definita in $\mathfrak{D}$, porremo

$$v^*(x_0, \xi) = v[x_0 + \rho^{\tau}(x_0)(\xi - x_0)]. \tag{7.7}$$

OSSERVAZIONE 7.2. - Facendo uso dell'osservazione 7.1, si verifica facilmente (⁹) che, assegnati comunque $i \in \mathfrak{J}$ e $x_0 \in \Omega$ tali che $\Gamma_i(x_0) \neq \emptyset$, esistono un intero positivo p_i, indipendente da x_0, e un ricoprimento di $\Gamma_i^*(x_0)$ formato da p_i aperti di R^n: $\mathcal{O}_{i1}, \ldots, \mathcal{O}_{ip_i}$ tali che ad ogni $\mathcal{O}_{ik}$ si possa associare un omeomorfismo $\xi \to \varphi_{ik}(\xi)$ di classe C^∞ di $\mathcal{O}_{ik} \cap I^*(x_0)$ su $\Sigma^{(i)}$ in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

s_1) φ_{ik} trasforma $\mathcal{O}_{ik} \cap \Gamma_i^*(x_0)$ su $\sigma^{(i)}$;

s_2) posto $z = \varphi_{ik}(\xi)$, riesce $\partial z_h^{(r)}/\partial \xi_j^{(s)} = 0$ per $r \neq s$ e $\partial z_h/\partial \xi_h > 0$;

s_3) i moduli di continuità delle funzioni $\varphi_{ik}(\xi)$ e $\overset{-1}{\varphi_{ik}}(z)$ ed i moduli di continuità delle derivate delle componenti di $\varphi_{ik}(\xi)$ e $\overset{-1}{\varphi_{ik}}(z)$ sono indipendenti da x_0;

s_4) i massimi moduli delle funzioni $\rho^{\tau}(x_0)\varphi_{ik}(\xi)$ e $\rho^{\tau}(x_0)\overset{-1}{\varphi_{ik}}(z)$ ed i massimi moduli delle derivate delle componenti di $\varphi_{ik}(\xi)$ e $\overset{-1}{\varphi_{ik}}(z)$ sono limitati da una costante indipendente da x_0.

Indicheremo con $L_s^p(\Omega)$, s reale e $0 < p \leq \infty$, lo spazio delle funzioni $u(x)$ tali che $\rho^s u \in L^p(\Omega)$, munito della norma

$$|u|_{p,s} = \|\rho^s u\|_{L^p(\Omega)},$$

Vogliamo richiamare, per comodità, i seguenti tre lemmi, contenuti rispettivamente nel lemma 4.1, nel lemma 4.2 e nel corollario II di [35] e dove poniamo $d_0 = d/(d-1)$:

LEMMA 7.3. - *Siano $p > 0$ e s due numeri reali. Per ogni funzione $u(x)$ tale che $\rho^s(x_0)|u|_{p, I(x_0)} \in L^p(\Omega)$ si ha*

(⁹) Si tenga anche conto dell'osservazione 1.1 di [34].

$$(7.8) \qquad \int_\Omega (\rho^s(x_0)\,|\,u\,|_{p,\,I(x_0)})^p dx_0 \geq c d_0^{-|s|p}\,|\,u\,|^p_{p,\,s+|\tau|/p},$$

dove c è una costante positiva indipendente da u, s e p.

LEMMA 7.4. - *Siano $p > 0$ e s due numeri reali. Per ogni funzione $u(x) \in L^p_{s+|\tau|/p}(\Omega)$ si ha*

$$(7.9) \qquad \int_\Omega (\rho^s(x_0)\,|\,u\,|_{p,\,I(x_0)})^p dx_0 \leq c d_0^{|s|p}\,|\,u\,|^p_{p,\,s+|\tau|/p},$$

dove c è una costante indipendente da u, s e p.

LEMMA 7.5. - *Siano $p > 1$ e s due numeri reali.*

Per ogni distribuzione u su Ω tale che $u \in L^p_s(\Omega)$, $D^{m_k}_{x_k} u \in L^p_{s+m_k\tau_k}(\Omega)(k = 1, \ldots, n)$, per ogni n-pla di interi non negativi α tale che $< \alpha, q > < m$ e per ogni $a \in [< \alpha, q >/m, 1]$ sussiste la limitazione

$$(7.10) \qquad |\,D^\alpha u\,|_{p',\,s+<\alpha,\,\tau>+|\tau|(1/p-1/p')} \leq c[(\sum_{k=1}^n |\,D^{m_k}_{x_k} u\,|_{p,\,s+m_k\tau_k})^a \cdot |\,u\,|^{1-a}_{p,\,s} + |u|_{p,\,s}],$$

dove p' è il numero definito nel lemma 7.1 e c è una costante indipendente da u.

Indicheremo con $W^{k,p}_s(\Omega)$, $k \in J(\mathfrak{M})$, p reale ≥ 1 e s reale, lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $D^\alpha u \in L^p_{s+<\alpha,\tau>-k}(\Omega)$ per $<\alpha,\ q> \leq k$, munito della norma

$$(7.11) \qquad \|u\|_{W^{k,p}_s(\Omega)} = \sum_{<\alpha,q>\leq k} |\,D^\alpha u\,|_{p,\,s+<\alpha,\,\tau>-k}\,.$$

Porremo $W^k_s(\Omega) = W^{k,2}_s(\Omega)$.

Osserviamo che riesce $W^{0,p}_s(\Omega) = L^p_s(\Omega)$ e che per ogni $k \in J(\mathfrak{M})$ e $< m$ si ha $W^{m,p}_s(\Omega) \subset W^{k,p}_{s+k-m}(\Omega)$ algebricamente e topologicamente.

Sussiste inoltre il seguente

LEMMA 7.6. - *Siano assegnati i numeri reali s, k e p, di cui $k \in J(\mathfrak{M})$ e $< m$ e $p > 1$.*

Per ogni $\beta > s + k - m$, l'iniezione di $W^{m,p}_s(\Omega)$ in $W^{k,p}_\beta(\Omega)$ è completamente continua.

Poggiando sul lemma 7.5, con ragionamenti analoghi a quelli tenuti per dimostrare il lemma 1.5 di [33], si prova che la tesi è vera per $k=0$, e cioè che per ogni $\beta > s-m$ l'iniezione di $W_s^{m,p}(\Omega)$ in $L_\beta^p(\Omega)$ è completamente continua.

Supposto ora $k>0$, osserviamo che, ancora in conseguenza del lemma 7.5, si ha per ogni $\varepsilon>0$ e per ogni $u\in W_s^{m,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{W_\beta^{k,p}(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{W_s^{m,p}(\Omega)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_{\beta-k}^p(\Omega)}. \tag{7.12}$$

D'altra parte, siccome per ipotesi $\beta - k > s - m$, da quanto premesso si ha che l'iniezione di $W_s^{m,p}(\Omega)$ in $L_{\beta-k}^p(\Omega)$ è completamente continua, e quindi da ogni successione $\{u_n\}$ limitata in $W_s^{m,p}(\Omega)$:

$$\|u_n\|_{W_s^{m,p}(\Omega)} \leq M \qquad \forall n,$$

se ne può estrarre una convergente in $L_{\beta-k}^p(\Omega)$.

Osservando allora che, in conseguenza della (7.12), la relazione

$$\|u_i - u_j\|_{L_{\beta-k}^p(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{c(\varepsilon)}$$

implica che si ha

$$\|u_i - u_j\|_{W_\beta^{k,p}(\Omega)} \leq (2M+1)\varepsilon,$$

si ottiene evidentemente la tesi.

Per ogni $\varepsilon>0$ sufficientemente piccolo, indicheremo con $\delta_\varepsilon(x)$ una funzione di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$ e tale che

$$\delta_\varepsilon(x)\begin{cases} =1 \text{ se } \rho(x)\geq 2\varepsilon \\ =0 \text{ se } \rho(x)\leq\varepsilon, \end{cases} \tag{7.13}$$

$$|D^\alpha\delta_\varepsilon(x)| \leq c_\alpha \rho^{-|\alpha|}(x) \qquad \forall x\in\bar{\Omega}, \tag{7.14}$$

dove c_α è una costante dipendente solo da Ω, S e α.

LEMMA 7.7. - *Per ogni $u\in W_s^{k,p}(\Omega)$, $k\in J(\mathfrak{M})$, p reale ≥ 1 e s reale, si ha*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\delta_\varepsilon u - u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)} = 0. \tag{7.15}$$

Infatti, osserviamo che riesce

$$\|\delta_\varepsilon u - u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)} = \sum_{<\alpha,q>\leq k} |D^\alpha[(1-\delta_\varepsilon)u]|_{p,\, s+<\alpha,\tau>-k}$$

$$\leq c_1 \Big(\sum_{<\alpha,q>\leq k} |(1-\delta_\varepsilon)D^\alpha u|_{p,\, s+<\alpha,\tau>-k}$$

$$+ \sum_{<\alpha,q>\leq k} \sum_{\beta<\alpha} |D^{\alpha-\beta}\delta_\varepsilon \cdot D^\beta u|_{p,\, s+<\alpha,\tau>-k} \Big),$$

dove c_1 è una costante indipendente da u e ε.

Tenuto conto delle (7.13), (7.14) ed osservando che per $\beta \leq \alpha$ riesce

$$s + <\alpha, \tau> - k - |\alpha - \beta| \geq s + <\beta, \tau> - k, \tag{7.16}$$

dalla precedente relazione con note considerazioni si deduce la tesi.

Dimostriamo inoltre il seguente

LEMMA 7.8. - *Qualunque siano $k \in J(\mathfrak{M})$, p reale ≥ 1 e s reale, $\mathring{C}^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $W_s^{k,p}(\Omega)$.*

Infatti, sia u una funzione di classe $W_s^{k,p}(\Omega)$.

Cominciamo con l'osservare che, tenuto conto della (7.14), si ha

$$\|\delta_\varepsilon u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)} \leq c_1 \sum_{<\alpha,q>\leq k} \sum_{\beta\leq\alpha} |D^{\alpha-\beta}\delta_\varepsilon \cdot D^\beta u|_{p,\, s+<\alpha,\tau>-k}$$

$$\leq c_2 \sum_{<\alpha,q>\leq k} \sum_{\beta\leq\alpha} |D^\beta u|_{p,\, s+<\alpha,\tau>-k-|\alpha-\beta|},$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti indipendenti da u e ε.

Tenuto quindi conto della (7.16), si deduce che esiste una costante c indipendente da u e ε tale che si ha

$$\|\delta_\varepsilon u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)} \leq c\|u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)}. \tag{7.17}$$

Inoltre, siccome $\delta_\varepsilon u \in \mathring{W}^{k,p}(\Omega)$, dal lemma 7.2 segue che, per ogni ε, esiste una successione $\{u_n^{(\varepsilon)}\}$ di funzioni di classe $\mathring{C}^\infty(\overline{\Omega})$ convergente a $\delta_\varepsilon u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.

D'altra parte, tenendo presente la definizione di $\delta_\varepsilon(x)$, è subito visto che riesce

$$\|\delta_\varepsilon u_n^{(\varepsilon)} - \delta_\varepsilon^2 u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)} \leq c(\varepsilon)\|\delta_\varepsilon u_n^{(\varepsilon)} - \delta_\varepsilon^2 u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

$$\leq c'(\varepsilon)\|u_n^{(\varepsilon)} - \delta_\varepsilon u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

dove $c(\varepsilon)$ e $c'(\varepsilon)$ sono due costanti indipendenti da u e n.

Consegue che, fissato ε, la successione $\{\delta_\varepsilon u_n^{(\varepsilon)}\}$ converge a $\delta_\varepsilon^2 u$ in $W_s^{k,p}(\Omega)$, e quindi esiste n_ε tale che si ha

$$\|\delta_\varepsilon u_{n_\varepsilon}^{(\varepsilon)} - \delta_\varepsilon^2 u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{7.18}$$

Posto $u_\varepsilon = \delta_\varepsilon u_{n_\varepsilon}^{(\varepsilon)}$, si ha per le (7.17) e (7.18)

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)} \leq \|u_\varepsilon - \delta_\varepsilon^2 u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)}$$

$$+ \|\delta_\varepsilon^2 u - \delta_\varepsilon u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)} + \|\delta_\varepsilon u - u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)}$$

$$\leq \varepsilon + (1 + c)\|\delta_\varepsilon u - u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)}.$$

Da quest'ultima relazione e dal lemma 7.7 segue

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e quindi si ha la tesi.

Richiamiamo anche il seguente risultato contenuto nel teorema 2.3 del cap. 6 di J. NEČAS [26]:

LEMMA 7.9. - *Siano*: $\mathfrak{D}$ *un insieme aperto, limitato ed a frontiera «localmente lipschitziana»* [10] *di uno spazio reale euclideo* R^N; $\sigma(x)$ *una funzione di classe* $C^0(\overline{\mathfrak{D}})$, *positiva in* $\mathfrak{D}$ *e tale che si abbia in coordinate locali* (x'_r, x_{rN}) [11]

$$c_1\sigma(x) \leq x_{rN} - a_r(x'_r) + \chi_r(x'_r) \leq c_2\sigma(x), \tag{7.19}$$

---

[10] Cioè $\Omega \in \mathfrak{N}\mathfrak{T}^{(0),1}$ nel senso di J. NEČAS [26] (cfr. in [26] il n. 1.3 del cap. 1 e il n. 1.1 del cap. 2).

[11] Facciamo uso delle notazioni di J. NEČAS [26] (cfr. i riferimenti citati nella nota [10]) e la (2.1) del cap. 6 di [26]).

dove c_1 *e* c_2 *sono due costanti positive,* $\chi_r(x'_r)$ *è una funzione definita in* Δ_r *e tale che* $0 \leq \chi_r(x'_r) \leq$ *cost.*

Allora, fissati i numeri reali $p > 1$ *e* $s_0 < 1 - 1/p$, *per ogni* $s \leq s_0$ *e per ogni* $u \in C^1(\bar{\mathfrak{D}})$ *tale che* $u = 0$ *su* $\partial\mathfrak{D}$, $D_{x_k}u \in L^p_s(\mathfrak{D})(k = 1, \dots, N)$, *sussiste la limitazione*

$$\int_{\mathfrak{D}} |\sigma^{s-1}u|^p dx \leq c \sum_{h=1}^{N} \int_{\mathfrak{D}} |\sigma^s D_{x_k} u|^p dx, \tag{7.20}$$

dove c *è una costante indipendente da* u *e* s.

OSSERVAZIONE 7.3. - Si verifica facilmente che, se Ω ha frontiera «localmente lipschitziana», la funzione $\sigma(x) = \rho(x)$ verifica le ipotesi del lemma 7.9 con $\mathfrak{D} = \Omega$ e $\chi_r(x'_r) = \rho(\dot{x})$, dove $\dot{x} = (x'_r, a_r(x'_r))$. Inoltre se $t = 2$, $S^{(2)} = \emptyset$ e $\Omega^{(1)}$ ha frontiera «localmente lipschitziana», fissato $y \in \Omega^{(2)}$, la funzione $\sigma(x) = \rho(x, y)$ definita in $\overline{\Omega^{(1)}}$ verifica le ipotesi del lemma 7.9 con $\mathfrak{D} = \Omega^{(1)}$, $\chi_r(x'_r) = \sigma(\dot{x})$ (dove $\dot{x} = (x'_r, a_r(x'_r))$) e con le costanti indipendente da y.

8. - Problemi quasi-ellittici: ipotesi e risultati.

Assegnamo in Ω un operatore differenziale lineare della forma

$$A = A(x, D) = \sum_{<\mu, q> \leq m} a_\mu(x) D^\mu, \tag{8.1}$$

di cui indicheremo con A_0 la *parte principale*:

$$A_0 = A_0(x, D) = \sum_{<\mu, q> = m} a_\mu(x) D^\mu. \tag{8.2}$$

Supporremo che siano verificate le seguenti ipotesi:

$\mathcal{H}_1$) Esiste un numero reale χ tale che le funzioni $\rho^{\chi - <\mu, \tau>}(x) a_\mu(x)$ siano continue in $\bar{\Omega}$ per $<\mu, q> = m$, misurabili e limitate in Ω per $<\mu, q> < m$; inoltre è soddisfatta la seguente condizione di *quasi-ellitticità*:

$$\sum_{<\mu, q> = m} \rho^{\chi - <\mu, \tau>}(x) a_\mu(x) \xi^\mu \neq 0 \qquad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \forall \xi \in R^n - \{0\}; \tag{8.3}$$

$\mathcal{H}_2$) Per ogni $i \in \mathfrak{J}$, A e *propriamente quasi-ellittico di tipo* ν_i su $\partial_i\Omega$, cioé per $x \in \partial_i\Omega$, per ogni vettore reale $\xi \neq 0$ tangente a $\partial_i\Omega$ in x e per ogni vettore reale $\xi' \neq 0$ normale a $\partial_i\Omega$ in x, il polinomio $A_0(x, \xi + z\xi')$, nella variabile complessa z, ha esattamente ν_i radici con parte immaginaria positiva ([12]).

Se $w^{(i)}(x)$ è una funzione definita su $\partial_i\Omega$ e θ_{ik} è uno degli omeomorfismi che intervengono nella definizione 7.1, porremo per ogni $y \in \sigma^{(i)}$

$$w^{(i,k)}(y) = w^{(i)}[\theta_{ik}^{-1}(y)]. \tag{8.4}$$

Assegnamo inoltre, per ogni $i \in \mathfrak{J}$, un sistema $\{B_{ij}\}_{j=1}^{\nu_i}$ di ν_i operatori differenziali lineari di *frontiera* definiti su $\partial_i\Omega$ e della forma

$$B_{ij} = B_{ij}(x, D) = \sum_{<\mu, q> \leq p_{ij}q^{(i)}} b_{j\mu}^{(i)}(x) D^\mu, \qquad p_{ij} \leq m^{(i)} - 1, \tag{8.5}$$

di cui indicheremo con B_{0ij} la *parte principale*:

$$B_{0ij} = B_{0ij}(x, D) = \sum_{<\mu, q> = p_{ij}q^{(i)}} b_{j\mu}^{(i)}(x) D^\mu. \tag{8.6}$$

Supporremo che siano verificate le seguenti ipotesi:

$\mathcal{H}_3$) I coefficienti $b_{j\mu}^{(i)}(x)$ sono di classe $C^\infty(\partial_i\Omega)$; inoltre esistono dei numeri reali $\gamma_i (i \in \mathfrak{J})$ tali che le funzioni $\rho^{\gamma_i + p_{ij}\tau^{(i)} - <\mu, \tau>}(x) b_{j\mu}^{(i)}(x) \in C^0(\overline{\partial_i\Omega})$ per $< \mu, q > = p_{ij}q^{(i)}$ e tali che si abbia per $< \mu, q > \leq p_{ij}q^{(i)}$, per ogni $y \in \sigma^{(i)}$ e per ogni β

$$|(\rho^{(i,k)}(y))^{\gamma_i + p_{ij}\tau^{(i)} + <\beta, \tau> - <\mu, \tau>} D_y^\beta b_{j\mu}^{(i,k)}(y)| \leq M_\beta, \tag{8.7}$$

dove M_β è una costante indipendente da y;

$\mathcal{H}_4$) Per ogni $i \in \mathfrak{J}$, gli operatori $B_{i1}, \ldots, B_{i\nu_i}$ soddisfano la *condizione complementare* rispetto ad A su $\partial_i\Omega$, cioè per ogni $x \in \partial_i\Omega$, per ogni vettore reale $\xi \neq 0$ tangente a $\partial_i\Omega$ in x e per ogni vettore reale $\xi' \neq 0$ normale a $\partial_i\Omega$ in x, i polinomi $B_{0i1}(x, \xi + z\xi'), \ldots, B_{0i\nu_i}(x, \xi + z\xi')$, nella variabile complessa z, sono linearmente indipendenti modulo il polinomio $\prod_{k=1}^{\nu_i} (z - z_k^+(x, \xi, \xi'))$, dove

([12]) Osserviamo che, nel caso $n > 2$, da quanto rilevato nell'osservazione 5.1 segue che, se $\partial_i\Omega$ è un insieme connesso, ogni operatore quasi-ellittico su $\partial_i\Omega$ è propriamente quasi-ellittico su $\partial_i\Omega$.

le $z_k^+(x, \xi, \xi')$ sono le radici con parte immaginaria positiva di $A_0(x, \xi + z\xi')$.

Nel seguito, assegnato comunque $x_0 \in \Omega$, porremo

$$\tilde{A} = \tilde{A}(x_0, \xi, D) = \sum_{<\mu, q> \leq m} \rho^{\chi - <\mu, \tau>}(x_0) a_\mu^*(x_0, \xi) D^\mu \tag{8.8}$$

e, se $\Gamma_i(x_0) \neq \emptyset$,

$$\tilde{B}_{ij} = \tilde{B}_{ij}(x_0, \xi, D) = \sum_{<\mu, q> \leq p_{ij} q^{(i)}} \rho^{\gamma_i + p_{ij}\tau^{(i)} - <\mu, \tau>}(x_0) b_{j\mu}^{(i)*}(x_0, \xi) D^\mu . \tag{8.9}$$

OSSERVAZIONE 8.1. - Sia $\sigma(x)$ una funzione di classe $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ e tale che si abbia

$$c_1 \rho(x) \leq \sigma(x) \leq c_2 \rho(x) \qquad \forall x \in \bar{\Omega}, \tag{8.10}$$

dove c_1 e c^2 sono due costanti positive indipendenti da x.

Dalla lipschitzianità di $\sigma(x)$ e dalle (7.3), (8.10) segue che per ogni numero reale s la funzione $(\sigma^*(x_0, \xi)/\rho(x_0))^s$ risulta continua rispetto a ξ in $\overline{I^*(x_0)}$ uniformemente al variare di x_0 in Ω.

OSSERVAZIONE 8.2. - Tenendo conto dell'osservazione 8.1 ed osservando che si può scrivere

$$\rho^{\chi - <\mu, \tau>}(x_0) = \left(\frac{\rho^*(x_0, \xi)}{\rho(x_0)}\right)^{<\mu, \tau> - \chi} \cdot \rho^{*\chi - <\mu, \tau>}(x_0, \xi),$$

$$\rho^{\gamma_i + p_{ij}\tau^{(i)} - <\mu, \tau>}(x_0) = \left(\frac{\rho^*(x_0, \xi)}{\rho(x_0)}\right)^{<\mu, \tau> - \gamma_i - p_{ij}\tau^{(i)}} \cdot \rho^{*\gamma_i + p_{ij}\tau^{(i)} - <\mu, \tau>}(x_0, \xi),$$

si verifica facilmente che, se sono soddisfatte le ipotesi $\mathcal{H}_1) - \mathcal{H}_4)$, fissato uno degli omeomorfismi φ_{ik} definiti nell'osservazione 7.2, mediante φ_{ik} l'operatore $\tilde{A}$ e il sistema $\{\tilde{B}_{ij}\}_{j=1}^{\nu_i}$ vengono trasformati in un operatore $\mathring{A}$ della forma

$$\mathring{A} = \sum_{<\mu, q> \leq m} \mathring{a}_\mu(x_0, z) D^\mu$$

e in un sistema $\{\mathring{B}_{ij}\}_{j=1}^{\nu_i}$ di operatori della forma

$$\mathring{B}_{ij} = \sum_{<\mu, q> \leq p_{ij} q^{(i)}} \mathring{b}_{j\mu}^{(i)}(x_0, z') D^\mu ,$$

dove $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$, soddisfacenti le seguenti condizioni:

t_1) i coefficienti $\overset{\circ}{a}_\mu(x_0, z)$ hanno moduli limitati in $\Sigma^{(i)}$ da una costante indipendente da x_0; inoltre i coefficienti $\overset{\circ}{a}_\mu(x_0, z)$ per $<\mu, q> = m$ sono continui in $\overline{\Sigma^{(i)}}$ ed hanno moduli di continuità indipendenti da x_0;

t_2) i coefficienti $\overset{\circ}{b}{}^{(i)}_{j\mu}(x_0, z)$ sono di classe $C^\infty(\overline{\sigma^{(i)}})$ ed i loro massimi moduli e quelli delle loro derivate sono limitati da una costante indipendente da x_0; inoltre i coefficienti $\overset{\circ}{b}{}^{(i)}_{j\mu}(x_0, z)$ per $<\mu, q> = p_{ij}q^{(i)}$ hanno moduli di continuità indipendenti da x_0;

t_3) è verificata la condizione di quasi-ellitticità:

$$\left| \sum_{<\mu, q>=m} \overset{\circ}{a}_\mu(x_0, z)\xi^\mu \right| \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{m_i},$$

dove α_0 è una costante positiva indipendente da z, ξ e x_0;

t_4) $\overset{\circ}{A}$ è propriamente quasi-ellittico di tipo ν_i su $\overline{\sigma^{(i)}}$ e gli operatori $\overset{\circ}{B}_{i1}, \dots, \overset{\circ}{B}_{i\nu_i}$ verificano la condizione complementare rispetto ad $\overset{\circ}{A}$ su $\overline{\sigma^{(i)}}$.

Sussiste il seguente teorema di *regolarizzazione*:

TEOREMA 8.1. - *Siano verificate le ipotesi* a_0), $\mathcal{H}_1) - \mathcal{H}_4$) *e sia s un assegnato numero reale.*

Per ogni funzione $u \in L^2_s(\Omega)$ e tale che

(8.11) $$u \in W^m(T) \qquad \forall \text{ compatto } T \subset \overline{\Omega} - S,$$

(8.12) $$Au \in L^2_{s+\chi}(\Omega),$$

(8.13) $$B_{ij}u = 0 \text{ su } \partial_i\Omega \ \text{[13]}, \qquad j = 1, \dots, \nu_i, \ i \in \mathfrak{J}.$$

si ha che $u \in W^m_{s+m}(\Omega)$ e sussiste la limitazione

(8.14) $$\|u\|_{W^m_{s+m}(\Omega)} \leq c(\|Au\|_{L^2_{s+\chi}(\Omega)} + \|u\|_{L^2_s(\Omega)}),$$

dove c è una costante indipendente da u.

---

(13) Qui e nel seguito l'annullarsi dei dati su $\partial_i\Omega$ va inteso localmente nel senso del teorema di tracce enunciato al n. 1 (cfr. il lemma 1.7).

La dimostrazione di questo teorema sarà data al successivo n. 9.

Consideriamo ora il problema

$$(8.15)\qquad u \in W^m_s(\Omega), \qquad s \text{ reale},$$

$$(8.16)\qquad Au + \lambda\sigma^{-\chi}u = f \text{ in } \Omega, \qquad f \in L^2_{s+\chi-m}(\Omega),$$

$$(8.17)\qquad B_{ij}u = 0 \text{ su } \partial_i\Omega, \qquad j = 1, \dots, \nu_i,\ i \in \mathcal{J},$$

dove λ è un numero complesso, χ è il numero definito nell'ipotesi $\mathcal{H}_1$) e $\sigma(x)$ è una funzione di classe $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ e soddisfacente la (8.10).

Associamo ad x il punto (x, y), dove y è una variabile reale, e poniamo $D_x = D$, $D_y = -i\partial/\partial y$.

Inoltre associamo ad $A(x, D_x) = A(x, D)$ l'operatore

$$(8.18)\qquad \mathfrak{L}_{\theta,l} = \mathfrak{L}_{\theta,l}(x, D_x, D_y) = A(x, D_x) + e^{i\theta}D_y^l,$$

dove θ è un numero reale e l è un intero positivo.

Stabiliremo un teorema di unicità per il problema (8.15)-(8.17), supponendo che siano verificate le ipotesi del teorema 8.1 di regolarizzazione e la seguente ulteriore ipotesi:

$\mathcal{H}_5$) Esistono θ e l tali che sia verificata la seguente condizione di quasi-ellitticità:

$$\sum_{<\mu,q>=m} \rho^{\chi-<\mu,\tau>}(x)a_\mu(x)\xi^\mu + e^{i\theta}\eta^l \neq 0 \qquad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \forall(\xi, \eta) \in R^{n+1} - \{0\},$$

e gli operatori $B_{i1}(x, D_x), \dots, B_{i\nu_i}(x, D_x)$ verifichino la condizione complementare rispetto a $\mathfrak{L}_{\theta,l}(x, D_x, D_y)$ su $\partial_i\Omega \times R^1$ [14].

TEOREMA 8.2. - *Siano verificate le ipotesi* a_0) *e* $\mathcal{H}_1) - \mathcal{H}_5$).

Allora, fissato s, *esiste una costante* $\gamma_0 > 0$, *indipendente da* s, *tale che per ogni* λ, *con* $|\lambda| \geq \gamma_0 d_0^{2l|s|}$ [15] *e arg* $\lambda = \theta$, *una eventuale soluzione* u *del problema* (8.15)-(8.17) *soddisfa la limitazione*

$$(8.19)\qquad \|u\|_{W^m_s(\Omega)} \leq c\, d_0^{2|s|}\|f\|_{L^2_{s+\chi-m}(\Omega)},$$

dove c *è una costante indipendente da* u, f, s *e* λ.

---

(14) Osserviamo che, essendo $n+1>2$, in conseguenza dell'ipotesi $\mathcal{H}_2$), dell'ipotesi di quasi-ellitticità di $\mathfrak{L}_{\theta,l}$ e di quanto rilevato nell'osservazione 5.1, si ha che $\mathfrak{L}_{\theta,l}(x, D_x, D_y)$ riesce, per ogni $i \in \mathcal{J}$, propriamente quasi-ellittico di tipo ν_i su $\partial_i\Omega \times R^1$.

(15) d_0 è la costante che figura nei lemmi 7.3 e 7.4.

La dimostrazione di questo teorema di unicità sarà data al n. 10.

Volendo ora passare ad enunciare un teorema di esistenza per il problema (8.15)-(8.17), poniamo la seguente

DEFINIZIONE 8.1. - Fissato $i \in \mathfrak{J}$, diremo che un sistema $\{B_j\}_{j=1}^{r}$ di r operatori differenziali lineari di *frontiera* della forma

$$B_j = \sum_{<\mu,\, q> \leq p_j} b_{j\mu}(x) D^{\mu} \tag{8.20}$$

e con i coefficienti $b_{j\mu}(x)$, per $<\mu, q> = p_j$, definiti su una porzione Γ di $\overline{\partial_i \Omega}$, è *normale* su Γ, se si ha $p_j \neq p_k$ per $j \neq k$ e

$$\sum_{<\mu,\, q> = p_j} b_{j\mu}(x) \xi^{\mu} \neq 0 \tag{8.21}$$

per ogni $x \in \Gamma$ e per ogni vettore $\xi \in R^n - \{0\}$ normale a Γ in x.

Aggiungiamo allora alle ipotesi del teorema 8.2 di unicità le seguenti ipotesi:

$\mathcal{H}_6$) I coefficienti $a_{\mu}(x) \in C^{\infty}(\overline{\Omega} - S)$ e le derivate $D^{\alpha} a_{\mu}(x) \in L^{\infty}_{\chi + <\alpha,\, \tau> - <\mu,\, \tau>}(\Omega)$;

$\mathcal{H}_7$) Per ogni $i \in \mathfrak{J}$, il sistema $\{B_{i1}^{(\gamma_i, \tau)}, \ldots, B_{i\nu_i}^{(\gamma_i, \tau)}\}$, dove

$$B_{ij}^{(\gamma_i, \tau)} = \sum_{<\mu,\, q> \leq p_{ij} q^{(i)}} \rho^{\gamma_i + p_{ij} \tau^{(i)} - <\mu,\, \tau>}(x) b_{j\mu}^{(i)}(x) D^{\mu}, \tag{8.22}$$

è *normale* su $\overline{\partial_i \Omega}$;

$\mathcal{H}_8$) Esiste una successione $\{\sigma_k(x)\}$ di funzioni di classe $C^{\infty}(\overline{\Omega} - S) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ e tali che

$$c_1 \rho(x) \leq \sigma_k(x) \leq c_2 \rho(x) \qquad \forall x \in \overline{\Omega},$$

$$|\sigma_k(x') - \sigma_k(x'')| \leq c_3 |x' - x''| \qquad \forall x',\, x'' \in \overline{\Omega},$$

con c_1, c_2 e c_3 costanti positive indipendenti da k, convergente a $\sigma(x)$ in $C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

TEOREMA 8.3. - *Siano verificate le ipotesi* a_0) *e* $\mathcal{H}_1) - \mathcal{H}_8)$.

Allora, fissato s, *esiste una costante* $\lambda_0 > 0$ *tale che per ogni* λ, *con* $|\lambda| \geq \lambda_0$ *e* $\arg \lambda = \theta$, *e per ogni* $f \in L^2_{s+\chi-m}(\Omega)$ *il problema* (8.15)-(8.17) *è univocamente risolubile.*

Questo teorema di esistenza sarà dimostrato al n. 11.

Supponiamo in particolare che A verifichi la seguente condizione di *forte quasi-ellitticità*:

$$(8.23) \qquad Re \sum_{<\mu,\, q>=m} \rho^{\chi-<\mu,\,\tau>}(x) a_\mu(x) \xi^\mu > 0 \qquad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \forall \xi \in R^n - \{0\}.$$

In tal caso, da noti risultati (cfr. G. C. BAROZZI [5]) segue che gli interi $m_1, \ldots, m_n$ sono pari e che è soddisfatta la condizione $\mathcal{H}_2$) di *quasi-ellitticità propria* con $\nu^{(i)} = m^{(i)}/2$.

Considerando allora il problema di DIRICHLET

$$(8.24) \qquad \begin{aligned} & u \in W^m_s(\Omega), \qquad s \text{ reale}, \\ & Au + \lambda\sigma^{-\chi}u = f \text{ in } \Omega, \; f \in L^2_{s+\chi-m}(\Omega), \\ & \frac{\partial^j u}{\partial \boldsymbol{n}_i^j} = 0 \text{ su } \partial_i\Omega, \qquad j = 0, \ldots, \frac{m^{(i)}}{2} - 1, \; i \in \mathfrak{I}, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{n}_i$ denota la normale a $\partial_i\Omega$ orientata, ad es., verso l'interno di Ω, si ha:

COROLLARIO 8.1. - *Supponiamo che i coefficienti* $a_\mu(x)$ *verifichino le ipotesi* $\mathcal{H}_1$), $\mathcal{H}_6$) *e che siano soddisfatte la condizione* (8.23) *di quasi-ellitticità forte e le ipotesi* a_0), $\mathcal{H}_8$).

Allora, fissato s, *esiste una costante* $\lambda_0 > 0$ *tale che per ogni* λ, *con* $Re\,\lambda \geq \lambda_0$, *e per ogni* $f \in L^2_{s+\chi-m}(\Omega)$ *il problema* (8.24) *è univocamente risolubile.*

La tesi consegue dal teorema 8.3 osservando che, se è verificata la condizione (8.23) di forte quasi-ellitticità e $B_{ij} = (\partial/\partial \boldsymbol{n}_i)^j$, l'ipotesi $\mathcal{H}_5$) è soddisfatta per $l = m$ e per ogni $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

9. - Dimostrazione del teorema 8.1.

Premettiamo un lemma.

Per ogni numero reale $r > 0$, porremo

$$\Gamma_r = \{ x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(t)}) \in R^n \mid | x^{(i)} | < r, \ i = 1, \ldots, t \},$$

$$\Sigma_r = \{ x \in \Gamma_r \mid x_n \geq 0 \},$$

$$\sigma_r = \{ x \in \Gamma_r \mid x_n = 0 \},$$

e indicheremo con Q_r l'uno o l'altro dei due insiemi Γ_r e Σ_r.

Fissato $r_0 > 0$, assegnamo in Q_{r_0} un operatore differenziale lineare della forma

$$A = A(x, D) = \sum_{<\mu, q> \leq m} a_\mu(x) D^\mu, \tag{9.1}$$

supponendo che siano verificate le seguenti ipotesi:

$\mathcal{E}_1$) I coefficienti $a_\mu(x)$ sono continui in $\overline{Q}_{r_0}$ per $<\mu, q> = m$, misurabili e limitati in Q_{r_0} per $<\mu, q> < m$;

$\mathcal{E}_2$) A è quasi-ellittico in $\overline{Q}_{r_0}$ e, nel caso $Q_{r_0} = \Sigma_{r_0}$, propriamente quasi-ellittico di tipo ν su $\bar{\sigma}_{r_0}$.

Inoltre, se $Q_{r_0} = \Sigma_{r_0}$, assegnamo su σ_{r_0} un sistema $\{ B_j \}_{j=1}^{\nu}$ di ν operatori differenziali lineari di *frontiera* della forma (8.20) e soddisfacenti le seguenti ipotesi:

$\mathcal{E}_3$) Risulta $p_j \leq m - q_n$ e i coefficienti $b_{j\mu}(x) \in C^\infty(\bar{\sigma}_{r_0})$;

$\mathcal{E}_4$) $B_1, \ldots, B_\nu$ verificano la condizione complementare rispetto ad A su $\bar{\sigma}_{r_0}$.

Indicheremo con $V(\Sigma_{r_0})$ la classe delle funzioni $u \in W^m(\Sigma_{r_0})$ e tali che

$$B_j u = 0 \quad \text{su} \quad \sigma_{r_0}, \qquad j = 1, \ldots, \nu, \tag{9.2}$$

e con $V(\Gamma_{r_0})$ lo spazio $W^m(\Gamma_{r_0})$.

LEMMA 9.1. - *Nelle ipotesi sopra poste, per ogni $u \in V(Q_{r_0})$ sussiste la limitazione*

$$\sum_{<\alpha, q> = m} | D^\alpha u |_{2, Q_r} \leq c(| Au |_{2, Q_{r_0}} + | u |_{2, Q_{r_0}}), \tag{9.3}$$

dove $r < r_0$ e dove c è una costante indipendente da u.

Infatti, assegnati tre numeri positivi $r<r'<r''<r_0$, con $r'-r=r''-r'<1$, consideriamo due funzioni $\zeta(x)$ e $\varphi(x)$ di classe $C_0^\infty(R^n)$, tali che

$$(9.4)\qquad \zeta(x)\begin{cases}=1 & \text{se}\quad x\in\Gamma_r\\ =0 & \text{se}\quad x\in R^n-\Gamma_{r'},\end{cases}\qquad \varphi(x)\begin{cases}=1 & \text{se}\quad x\in\Gamma_{r'}\\ =0 & \text{se}\quad x\in R^n-\Gamma_{r''}\end{cases}$$

e tali inoltre che si abbia

$$(9.5)\qquad |D^\alpha\zeta(x)|\le M_\alpha(r'-r)^{-|\alpha|},\qquad |D^\alpha\varphi(x)|\le M_\alpha(r''-r')^{-|\alpha|},$$

dove M_α è una costante dipendente solo da α.

Sia ora u una funzione di classe $V(Q_{r_0})$.

Nel caso $Q_{r_0}=\Gamma_{r_0}$, con ben note considerazioni si dimostra che sussiste la limitazione ([16])

$$(9.6)\qquad \sum_{<\alpha,\,q>\le m}|D^\alpha(\zeta u)|_{2,\,\Gamma_{r_0}}\le c_1(|A(\zeta u)|_{2,\,\Gamma_{r_0}}+|\zeta u|_{2,\,\Gamma_{r_0}}).$$

Nel caso $Q_{r_0}=\Sigma_{r_0}$, associamo ad u le funzioni

$$v(x)\begin{cases}=\varphi(x)u(x) & \text{se}\quad x\in\Sigma_{r_0}\\ =0 & \text{se}\quad x\in R^n_+-\Sigma_{r_0},\end{cases}$$

$$v_1(x)\begin{cases}=v(x) & \text{se}\quad x_n>0\\ =\sum\limits_{j=1}^{m_n}\lambda_j v(x',\,-jx_n) & \text{se}\quad x_n<0,\end{cases}$$

dove *i* λ_j sono dei numeri reali tali che

$$\sum_{j=1}^{m_n}\lambda_j(-j)^k=1,\qquad k=0,\,\dots,\,m_n-1.$$

Evidentemente si ha che $v\in H^m(R^n_+)$ e $v_1\in H^m(R^n)$, dove gli H^m sono gli spazi definiti al n. 1.

([16]) Nel corso di questa dimostrazione indichiamo con c_1, ..., c_{14} delle costanti positive indipendenti da r, r', r'' e u.

Allora dai risultati di T. MATSUZAWA [21] si deduce, ancora con note considerazioni, che sussiste la limitazione

$$\sum_{<\alpha, q>\leq m} |D^{\alpha}(\zeta u)|_{2, \Sigma_{r_0}} \leq c_2 (|A(\zeta u)|_{2, \Sigma_{r_0}} + \sum_{j=1}^{\nu} \| B_j(\zeta v_1) \|_{H^{m-p_j-q_n/2}(R^{n-1})} + |\zeta u|_{2, \Sigma_{r_0}}). \tag{9.7}$$

Osserviamo ora che si ha

$$|A(\zeta u)|_{2, Q_{r_0}} \leq |\zeta A u|_{2, Q_{r_0}} + c_3 \sum_{<\mu, q>\leq m} \sum_{\alpha<\mu} |D^{\mu-\alpha}\zeta \cdot D^{\alpha} u|_{2, Q_{r_0}} \leq |\zeta A u|_{2, Q_{r_0}} + c_4 (r'-r)^{-m} \sum_{<\alpha, q><m} |D^{\alpha}(\varphi u)|_{2, Q_{r_0}}. \tag{9.8}$$

D'altra parte, in conseguenza del lemma 7.1, si ha

$$\sum_{<\alpha, q><m} |D^{\alpha}(\varphi u)|_{2, Q_{r_0}} \leq c_5[(\sum_{<\alpha, q>=m} |D^{\alpha}(\varphi u)|_{2, Q_{r_0}})^{a_0} \cdot |\varphi u|_{2, Q_{r_0}}^{1-a_0} + |\varphi u|_{2, Q_{r_0}}] \leq c_6[(r''-r')^{-m}(\sum_{<\alpha, q>\leq m} |D^{\alpha} u|_{2, Q_{r''}})^{a_0} \cdot |u|_{2, Q_{r''}}^{1-a_0} + |u|_{2, Q_{r''}}], \tag{9.9}$$

dove

$$a_0 = \sup_{<\alpha, q>\leq m} \frac{<\alpha, q>}{m}.$$

Dalle (9.8) e (9.9) segue che risulta

$$|A(\zeta u)|_{2, Q_{r_0}} \leq c_7 (|Au|_{2, Q_{r''}} + (r''-r)^{-m} |u|_{2, Q_{r''}} + (r''-r)^{-2m} (\sum_{<\alpha, q>\leq m} |D^{\alpha} u|_{2, Q_{r''}})^{a_0} \, |u|_{2, Q_{r''}}^{1-a_0}). \tag{9.10}$$

Inoltre, in conseguenza delle (9.2) e dei lemmi 1.7, 1.3, si ha

$$\| B_j(\zeta v_1) \|_{H^{m-p_j-q_n/2}(R^{n-1})} \leq c_8 \sum_{<\mu, q>\leq p_j} \sum_{\alpha<\mu} \| D^{\mu-\alpha}\zeta \cdot D^{\alpha} v_1 \|_{H^{m-p_j}(R^n)} \leq c_9 (r'-r)^{-p_j} \sum_{<\alpha, q><p_j} \| D^{\alpha} v_1 \|_{H^{m-p_j}(R^n)}. \tag{9.11}$$

Con ragionamenti analoghi a quelli tenuti da E. GIUSTI per stabilire il lemma 4.II della parte I di [16], si dimostra che, se $<\alpha, q> < p_j$, si ha per ogni $\eta > 0$

$$\| D^{\alpha} v_1 \|_{H^{m-p_j}(R^n)} \leq c_{10}(\eta^{-p_j+<\alpha, q>} \sum_{<\mu, q>=m} | D^{\mu} v_1 |_{2, R^n}$$

$$+ (1 + \eta^{m-p_j+<\alpha, q>}) | v_1 |_{2, R^n}),$$

da cui, posto

$$\eta = (\sum_{<\mu, q>=m} | D^{\mu} v_1 |_{2, R^n})^{1/m} \cdot | v_1 |_{2, R^n}^{-1/m},$$

si ricava

$$\| D^{\alpha} v_1 \|_{H^{m-p_j}(R^n)} \leq c_{11} (| v_1 |_{2, R^n} \tag{9.12}$$

$$+ (\sum_{<\mu, q>=m} | D^{\mu} v_1 |_{2, R^n})^{1-(p_j-<\alpha, q>)/m} \cdot | v_1 |_{2, R^n}^{(p_j-<\alpha, q>)/m}.$$

Se poniamo

$$b_j = \sup_{<\alpha, q> < p_j} \left(1 - \frac{p_j - <\alpha, q>}{m}\right), \qquad b_0 = \sup \{ b_1, \ldots, b_\nu \},$$

dalle (9.11) e (9.12) si deduce che riesce

$$\sum_{j=1}^{\nu} \| B_j(\zeta v_1) \|_{H^{m-p_j-q_n/2}(R^{n-1})} \leq c_{12}(r' - r)^{-m}(| \varphi u |_{2, Q_{r_0}} \tag{9.13}$$

$$+ (\sum_{<\alpha, q>=m} | D^{\alpha}(\varphi u) |_{2, Q_{r_0}})^{b_0} \cdot | \varphi u |_{2, Q_{r_0}}^{1-b_0})$$

$$\leq c_{13}(r' - r)^{-2m} (| u |_{2, Q_{r''}} + (\sum_{<\alpha, q> \leq m} | D^{\alpha} u |_{2, Q_{r''}})^{b_0} \cdot | u |_{2, Q_{r''}}^{1-b_0}).$$

Dalle (9.6), (9.7), (9.10), (9.13) e dal lemma 7.1 segue che, denotato con γ il più grande dei due numeri a_0 e b_0, si ha

$$(r'' - r)^{2m} \sum_{<\alpha, q>=m} | D^{\alpha} u |_{2, Q_r} \leq c_{14} (| Au |_{2, Q_{r''}} + | u |_{2, Q_{r''}} \tag{9.14}$$

$$+ (\sum_{<\alpha, q>=m} | D^{\alpha} u |_{2, Q_{r''}})^{\gamma} \cdot | u |_{2, Q_{r''}}^{1-\gamma}).$$

Da quest'ultima relazione e da un lemma di crescenza di C. MIRANDA (cfr. il lemma 3.1 di [23]) si deduce la tesi.

DIMOSTRAZIONE del teorema 8.1. - Fissato comunque $x_0 \in \Omega$ ed assegnata una funzione $u(x)$ soddisfacente le ipotesi poste, consideriamo la funzione $u^*(x_0, \xi)$ definita in $I^*(x_0)$ dalla (7.7).

Cominciamo col dimostrare che esiste una costante c_0, indipendente da u e x_0, tale che si ha

$$\sum_{<\alpha, q>=m} | D^\alpha u^* |_{2, I^*_{1/2}(x_0)} \leq c_0 (| \tilde{A} u^* |_{2, I^*(x_0)} + | u^* |_{2, I^*(x_0)}), \tag{9.15}$$

dove $\tilde{A}$ è l'operatore definito dalla (8.8) e

$$I_{1/2}(x_0) = \Omega \cap \left\{ x \in R^n \,\middle|\, | x^{(i)} - x_0^{(i)} | < \frac{1}{2} \rho^{\tau^{(i)}}(x_0),\ i = 1, \ldots, t \right\}.$$

Dall'ipotesi $\mathcal{H}_1$) e dalle (7.2), (7.3) si deduce che $\tilde{A}$ è quasi-ellittico in $\overline{I^*(x_0)}$ e che i suoi coefficienti

$$\rho^{\chi - <\mu, \tau>}(x_0) a^*_\mu(x_0, \xi) = \left(\frac{\rho^*(x_0, \xi)}{\rho(x_0)} \right)^{<\mu, \tau> - \chi} \rho^{*\chi - <\mu, \tau>}(x_0, \xi) a^*(x_0, \xi)$$

per $<\mu, q> = m$ sono continui rispetto a ξ in $\overline{I^*(x_0)}$ uniformemente al variare di x_0 in Ω [17] e per $<\mu, q> < m$ hanno moduli limitati rispetto a ξ in $I^*(x_0)$ da una costante indipendente da x_0.

Pertanto, se $\Gamma(x_0) = \emptyset$, la (9.15) si ottiene come conseguenza del lemma 9.1 applicato relativamente al caso in cui $Q_{r_0} = \Gamma_{r_0} = I^*(x_0)$.

Consideriamo allora il caso che sia $\Gamma(x_0) \neq \emptyset$. In tal caso la funzione $u^*(x_0, \xi)$ soddisfa le condizioni

$$\tilde{B}_{ij} u^* = 0 \quad \text{su} \quad \Gamma_i^*(x_0), \qquad j = 1. \ldots, \nu_i, \tag{9.16}$$

per quei valori di i per cui $\Gamma_i(x_0) \neq \emptyset$, dove gli operatori $\tilde{B}_{ij}$ sono definiti dalla (8.9).

---

[17] Si tenga presente l'osservazione 8.1.

Procedendo come nella dimostrazione del teorema 2.1 di [34], consideriamo un ricoprimento di $I^*_{1/2}(x_0)$ mediante un numero finito $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_r$ di aperti di R^n in modo che ogni $\mathcal{C}_k$ soddisfi una delle seguenti condizioni:

1) $\overline{\mathcal{C}}_k \subset I^*(x_0)$;

1') $\mathcal{C}_k$ è contenuto in uno degli aperti $\mathcal{O}_{ih}$ definiti nel corso dell'osservazione 7.2.

Se $\overline{\mathcal{C}}_k \subset I^*(x_0)$, ancora come conseguenza del lemma 9.1 applicato relativamente al caso in cui $Q_{r_0} = \Gamma_{r_0}$, si ottiene la limitazione

$$\sum_{<\alpha,\, q>=m} | D^\alpha u^* |_{2,\, \mathcal{C}_k} \leq c'(| \tilde{A} u^* |_{2,\, I^*(x_0)} + | u^* |_{2,\, I^*(x_0)}), \tag{9.17}$$

dove c' è una costante indipendente da u e da x_0.

Nel caso 1') si ottiene ancora la (9.17) trasformando l'insieme $\mathcal{O}_{ih} \cap I^*(x_0)$ sull'insieme $\Sigma^{(i)}$ mediante l'omeomorfismo φ_{ih}, tenendo presente le proprietà di φ_{ih}, tenendo conto dell'osservazione 8.2 e facendo uso del lemma 9.1 relativamente al caso in cui $Q_{r_0} = \Sigma_{r_0}$.

La (9.17) valida per $k = 1, \ldots, r$ implica la (9.15).

Operando ora in (9.15) il cambiamento di variabili (7.6) si ha

$$\sum_{<\alpha,\, q>=m} \rho^{<\alpha,\tau>-|\tau|/2}(x_0) \,| D^\alpha u |_{2,\, I_{1/2}(x_0)} \leq c_0(\rho^{\chi-|\tau|/2}(x_0) \,| A u |_{2,\, I(x_0)} + \rho^{-|\tau|/2}(x_0) \,| u |_{2,\, I(x_0)}). \tag{9.18}$$

Moltiplicando primo e secondo membro della (9.18) per $\rho^s(x_0)$, elevando al quadrato ed integrando su Ω si ha

$$\sum_{<\alpha,\, q>=m} \int_\Omega (\rho^{s+<\alpha,\, \tau>-|\tau|/2}(x_0) \,| D^\alpha u |_{2,\, I_{1/2}(x_0)})^2 dx_0 \leq c_1\Big(\int_\Omega (\rho^{s+\chi-|\tau|/2}(x_0) \,| A u |_{2,\, I(x_0)})^2 dx_0 + \int_\Omega (\rho^{s-|\tau|/2}(x_0) \,| u |_{2,\, I(x_0)})^2 dx_0 \Big), \tag{9.19}$$

dove c_1 è una costante indipendente da u.

Dalla (9.19) e dai lemmi 7.3, 7.4 si deduce la limitazione

$$\sum_{<\alpha,\, q>=m} | D^\alpha u |_{2,\, s+<\alpha,\, \tau>} \leq c_2(| A u |_{2,\, s+\chi} + | u |_{2,\, s}), \tag{9.20}$$

dove c_2 è una costante indipendente da u.

Dalla (9.20) e dal lemma 7.5 segue la (8.14) e quindi si ha la tesi.

10. - Dimostrazione del teorema 8.2.

Premettiamo il seguente lemma, che costituisce una generalizzazione del lemma 3.1 di [33] e dove facciamo uso delle notazioni iniziali del n. 9:

LEMMA 10.1. - *Supponiamo che:*

i_1) *siano verificate le ipotesi del lemma* 9.1;

i_2) *esistano* θ *e* l *tali che l'operatore* $\mathcal{L}_{\theta, l}(x, D_x, D_y)$, *associato ad* $A(x, D_x)$ *tramite la* (8.18), *sia quasi-ellittico in* $\overline{Q}_{r_0} \times R^1$ *e gli operatori* $B_1(x, D_x)$, ..., $B_\nu(x, D_x)$ *verifichino la condizione complementare rispetto a* $\mathcal{L}_{\theta, l}(x, D_x, D_y)$ *su* $\overline{\sigma}_{r_0} \times R^1$.

Allora per ogni $u \in V(Q_{r_0})$ *e per ogni numero reale* η *sussiste la limitazione*

$$(10.1) \qquad \sum_{k=0}^{l} |\eta|^k \sum_{<\alpha, q> \leq m(1-k/l)} |D^\alpha u|_{2, Q_r} \leq c(|(A + \eta^l e^{i\theta})u|_{2, Q_{r_0}} + (1 + |\eta|^{l-1})|u|_{2, Q_{r_0}}),$$

dove $r < r_0$ *e dove* c *è una costante indipendente da* u *e da* η.

Poggiando sul lemma 9.1, otterremo la dimostrazione di questo lemma adattando al nostro caso un noto procedimento dovuto a S. AGMON [1].

Siano $u(x)$ una funzione di classe $V(Q_{r_0})$ e η un numero reale.

Assegnata $\zeta(y) \in C_0^\infty(R^1)$ e tale che

$$\zeta(y) \begin{cases} = 1 & \text{per} \quad |y| \leq 1/2 \\ = 0 & \text{per} \quad |y| \geq 1, \end{cases}$$

poniamo

$$v_\eta(x, y) = \zeta(y) e^{i\eta y} u(x).$$

Evidentemente, in conseguenza del lemma 9.1 si ha la limitazione

$$(10.2) \qquad \sum_{<\alpha, q> + mk/l \leq m} |D_x^\alpha D_y^k v_\eta|_{2, Q_r \times R^1} \leq c_1 (|\mathcal{L}_{\theta, l} v_\eta|_{2, Q_{r_0} \times R^1} + |v_\eta|_{2, Q_{r_0} \times R^1}),$$

dove r è un fissato numero reale positivo $< r_0$ e c_1 è una costante indipendente da u e da η.

Osserviamo che si ha

$$\mathfrak{L}_{\theta,l}v_\eta = \zeta(y)e^{i\eta y}(A + \eta^l e^{i\theta})u + e^{i\theta}e^{i\eta y}u \cdot \sum_{k=0}^{l-1}\binom{l}{k}D_y^{l-k}\zeta(y)\eta^k,$$

e quindi riesce

$$|\mathfrak{L}_{\theta,l}v_\eta|_{2,\,Q_{r_0}\times R^1} \leq c_2\Big(|(A+\eta^l e^{i\theta})u|_{2,\,Q_{r_0}} + |u|_{2,\,Q_{r_0}} \cdot \sum_{k=0}^{l-1}|\eta|^k\Big), \tag{10.3}$$

dove c_2 è una costante indipendente da u e da η.

Inoltre si ha

$$|D_x^\alpha D_y^k v_\eta|^2_{2,\,Q_r\times R^1} \geq \int_{Q_r} dx \int_{-1/2}^{1/2} |D_x^\alpha D_y^k(e^{i\eta y}u(x))|^2 dy$$

$$= |\eta|^{2k}\int_{Q_r}|D_x^\alpha u|^2 dx,$$

da cui segue

$$\sum_{\langle\alpha,\,q\rangle + mk/l \leq m} |D_x^\alpha D_y^k v_\eta|_{2,\,Q_r\times R^1} \geq \sum_{k=0}^{l}|\eta|^k \sum_{\langle\alpha,\,q\rangle\leq m(1-k/l)} |D_x^\alpha u|_{2,\,Q_r}. \tag{10.4}$$

Dalle (10.2), (10.3) e (10.4) si deduce la (10.1) e quindi si ha la tesi.

DIMOSTRAZIONE del teorema 8.2. – Consideriamo l'operatore

$$\widehat{A} = \left(\frac{\sigma^*(x_0,\,\xi)}{\rho(x_0)}\right)^\chi \tilde{A},$$

dove $\tilde{A}$ è definito dalla (8.8), ed assegnamo una funzione u di classe $W_s^m(\Omega)$ e soddisfacente le (8.17).

Tenendo presente l'osservazione 8.1, con considerazioni analoghe a quelle tenute nel corso della dimostrazione del teorema 8.1 per dedurre dal lemma 9.1 la (9.15), si deduce ora dal lemma 10.1 che per ogni $x_0 \in \Omega$ e per ogni numero reale η sussiste la limitazione

$$\sum_{k=0}^{l}|\eta|^k \sum_{\langle\alpha,\,q\rangle\leq m(1-k/l)} |D^\alpha u^*|_{2,\,I^*_{1/2}(x_0)} \tag{10.5}$$

$$\leq c_1(|(\widehat{A}+\eta^l e^{i\theta})u^*|_{2,\,I^*(x_0)} + (1+|\eta|^{l-1})\,|u^*|_{2,\,I^*(x_0)}),$$

dove c_1 è una costante indipendente da x_0, u e η.

Inoltre, con considerazioni analoghe a quelle tenute per dedurre dalla (9.15) la (9.19), si deduce dalla (10.5) che si ha

$$(10.6)\qquad \sum_{k=0}^{l} |\eta|^{2k} \sum_{\langle\alpha,q\rangle\le m(1-k/l)} \int_{\Omega} (\rho^{s-m+\langle\alpha,\tau\rangle-|\tau|/2}(x_0)\,|D^{\alpha}u|_{2,I_{1/2}(x_0)})^2 dx_0$$

$$\le c_2\Big[\int_{\Omega} (\rho^{s-m-|\tau|/2}(x_0)\,|(\sigma^{\chi}A+\eta^l e^{i\theta})u|_{2,I(x_0)})^2 dx_0$$

$$+ (1+|\eta|^{l-1})^2 \int_{\Omega} (\rho^{s-m-|\tau|/2}(x_0)\,|u|_{2,I(x_0)})^2 dx_0\Big],$$

dove c_2 è una costante indipendente da u, η e s.

Dalle (10.6), (8.10), (7.3) e dai lemmi 7.3, 7.4 segue la limitazione

$$(10.7)\qquad \sum_{k=0}^{l} |\eta|^{k} \sum_{\langle\alpha,q\rangle\le m(1-k/l)} |D^{\alpha}u|_{2,s+\langle\alpha,\tau\rangle-m}$$

$$\le c_3 d_0^{2|s|}(|(A+\eta^l e^{i\theta}\sigma^{-\chi})u|_{2,s+\chi-m} + (1+|\eta|^{l-1})|u|_{2,s-m}),$$

dove c_3 è una costante indipendente da u, η e s.

Dalla (10.7) si deduce in modo ovvio la tesi assumendo $\lambda = \eta^l e^{i\theta}$.

11. - La formula di Green; dimostrazione del teorema 8.3.

Diremo che un operatore di frontiera B_{ij} della forma (8.5) e definito su $\partial\Omega$ è di classe $\mathfrak{B}^{(\gamma_i,\tau)}$, se i suoi coefficienti verificano l'ipotesi $\mathcal{H}_3$); chiameremo q-ordine di B_{ij} il numero p_{ij}.

Inoltre diremo che un sistema $\{B_j\}_{j=1}^{r}$ di r operatori di frontiera della forma (8.20) è ***un sistema di Dirichlet*** di ordine r su una porzione Γ di $\overline{\partial_i\Omega}$, se esso è ***normale*** su Γ e i numeri p_j sono $\le (r-1)q^{(i)}$.

Indicheremo con A^* l'operatore ***aggiunto formale*** di A:

$$(11.1)\qquad A^*u = \sum_{\langle\mu,q\rangle\le m} D^{\mu}(\bar{a}_{\mu}(x)u).$$

LEMMA 11.1. - *Siano verificate le ipotesi* a_0), $\mathcal{H}_1$), $\mathcal{H}_3$), $\mathcal{H}_6$), $\mathcal{H}_7$) *e siano assegnati gli operatori* C_{ij}, $j = 1, \dots, m^{(i)} - \nu_i$ *e* $i \in \mathfrak{I}$, *di* q-*ordine* n_{ij}, *di classe*

$\mathfrak{B}^{(\gamma_i, \tau)}$ *e tali che, per ogni* $i \in \mathfrak{J}$, *gli operatori* $B_{ij}^{(\gamma_i, \tau)}$ *e* $C_{ij}^{(\gamma_i, \tau)}$ *costituiscano un sistema di Dirichlet di ordine* $m^{(i)}$ *su* $\overline{\partial_i \Omega}$.

Allora, per ogni $i \in \mathfrak{J}$, *esistono due sistemi* $\{ B'_{ij} \}_{j=1}^{m^{(i)}-\nu_i}$ *e* $\{ C'_{ij} \}_{j=1}^{\nu_i}$ *di operatori differenziali lineari di frontiera verificanti le seguenti condizioni*:

1) B'_{ij} *e* C'_{ij} *sono operatori di classe* $\mathfrak{B}^{(\chi-\gamma_i-m^{(i)}\tau^{(i)}, \tau)}$, *rispettivamente di q-ordine* $m^{(i)} - n_{ij} - 1$ *e* $m^{(i)} - p_{ij} - 1$;

2) *Per ogni* $i \in \mathfrak{J}$, *gli operatori* $B_{ij}^{\prime(\chi-\gamma_i-m^{(i)}\tau^{(i)}, \tau)}$ *e* $C_{ij}^{\prime(\chi-\gamma_i-m^{(i)}\tau^{(i)}, \tau)}$ *costituiscono un sistema di Dirichlet di ordine* $m^{(i)}$ *su* $\overline{\partial_i \Omega}$;

3) *Per ogni coppia di funzioni u e v di classe* $C_0^\infty(\overline{\Omega} - S)$ *sussiste la formula di Green*:

$$(11.2) \qquad \int_\Omega Au \cdot \overline{v} dx - \int_\Omega u \cdot \overline{A^* v}\, dx = \sum_{i \in \mathfrak{J}} \left(\sum_{j=1}^{m^{(i)}-\nu_i} \int_{\partial_i \Omega} C_{ij} u \cdot \overline{B'_{ij} v} d\sigma - \sum_{j=1}^{\nu_i} \int_{\partial_i \Omega} B_{ij} u \cdot \overline{C'_{ij} v} d\sigma \right);$$

4) *Se, fissato* $i \in \mathfrak{J}$, *A è propriamente quasi-ellittico di tipo* ν_i *su* $\partial_i \Omega$, *allora gli operatori* $B'_{i1}, \ldots, B'_{i, m^{(i)}-\nu_i}$ *verificano la condizione complementare rispetto ad* A^* *su* $\partial_i \Omega$ *se e solo se gli operatori* $B_{i1}, \ldots, B_{i\nu_i}$ *verificano la stessa condizione rispetto ad A su* $\partial_i \Omega$.

Infatti, siano $\mathcal{U}_{ik}$ gli insiemi definiti nell'osservazione 7.1.

Dai risultati del n. 6, si deduce evidentemente che ad ogni $\mathcal{U}_{ik}$ è possibile associare due sistemi $\{ B'_{ikj} \}_{j=1}^{m^{(i)}-\nu_i}$ e $\{ C'_{ikj} \}_{j=1}^{\nu_i}$ di operatori soddisfacenti, limitatamente alla porzione $\partial_i \Omega \cap \mathcal{U}_{ik}$ di $\partial_i \Omega$, alle condizioni 1), 2) e 4) del teorema e tali che per $f, g \in C^\infty(\overline{\Omega})$, con f oppure g a supporto compatto in $\overline{\Omega} \cap \mathcal{U}_{ik}$, si abbia

$$(11.3) \qquad \int_\Omega Af \cdot \overline{g} dx - \int_\Omega f \cdot \overline{A^* g} dx$$

$$= \sum_{j=1}^{m^{(i)}-\nu_i} \int_{\partial_i \Omega} C_{ij} f \cdot \overline{B'_{ikj} g} d\sigma - \sum_{j=1}^{\nu_i} \int_{\partial_i \Omega} B_{ij} f \cdot \overline{C'_{ikj} g} d\sigma.$$

Assegnamo un ricoprimento di S mediante un numero finito $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_p$ di aperti di R^n tali che, per ogni $r \in \{1, \ldots, p\}$ e per ogni $i \in \mathfrak{J}$, l'insieme

$\mathcal{C}_r \cap \partial_i\Omega$, se non vuoto, sia contenuto in uno degli insiemi $\mathcal{U}_{ik}$.

Assegnamo inoltre un numero finito $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_s$ di aperti di R^n tali che $\overline{\mathcal{O}}_k \subset \Omega$ e con la condizione che gli insiemi $\mathcal{O}_k$, $\mathcal{U}_{ik}$ e $\mathcal{C}_k$ costituiscano un ricoprimento di $\overline{\Omega}$.

Consideriamo quindi una partizione dell'unità su $\overline{\Omega}$ relativa al suddetto ricoprimento e costituita di funzioni α_k, β_{ik}, φ_k di classe $C_0^\infty(R^n)$ e tali che

$$\operatorname{supp} \alpha_k \subset \mathcal{O}_k, \qquad \operatorname{supp} \beta_{ik} \subset \mathcal{U}_{ik}, \qquad \operatorname{supp} \varphi_k \subset \mathcal{C}_k.$$

Fissate allora u, $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega} - S)$, si ha

$$\int_\Omega Au \cdot \overline{v} dx = \sum_{k=1}^{s} \int_\Omega Au \cdot \overline{\alpha_k v} dx \tag{11.4}$$

$$+ \sum_{i \in \mathfrak{J}} \sum_{k=1}^{h_i} \int_\Omega Au \cdot \overline{\beta_{ik} v} dx + \sum_{k=1}^{p} \int_\Omega Au \cdot \overline{\varphi_k v} dx.$$

Evidentemente risulta

$$\int_\Omega Au \cdot \overline{\alpha_k v} dx = \int_\Omega u \cdot \overline{A^*(\alpha_k v)} dx, \tag{11.5}$$

mentre in conseguenza della (11.3) si ha

$$\int_\Omega Au \cdot \overline{\beta_{ik} v} dx - \int_\Omega u \cdot \overline{A^*(\beta_{ik} v)} dx \tag{11.6}$$

$$= \sum_{j=1}^{m(i)-\nu_i} \int_{\partial_i\Omega} C_{ij} u \cdot \overline{B'_{ikj}(\beta_{ik} v)} d\sigma - \sum_{j=1}^{\nu_i} \int_{\partial_i\Omega} B_{ij} u \cdot \overline{C'_{ikj}(\beta_{ik} v)} d\sigma.$$

Volendo trasformare l'ultimo integrale a secondo membro della (11.4), indichiamo con T il supporto di v e con E_k il supposto di φ_k.

Assegnamo un ricoprimento di $T \cap E_k$ con un numero finito $\mathfrak{D}_{k1}, \ldots, \mathfrak{D}_{kr_k}$ di aperti di R^n in modo che ogni $\mathfrak{D}_{kr}$ verifichi una delle seguenti due condizioni:

a) $\overline{\mathfrak{D}}_{kr} \subset \Omega$;

a') esiste $\mathfrak{U}_{ih}$ tale che $\overline{\mathfrak{D}}_{kr} \cap (T \cap E_k) \subseteq \overline{\mathfrak{U}_{ih}} \cap T$ e $\mathfrak{D}_{kr} \supset \mathfrak{U}_{ih} \cap \overline{\partial_i \Omega}$.

Consideriamo quindi una partizione dell'unità su $T \cap E_k$ relativa al suddetto ricoprimento e costituita di funzioni $\zeta_{kr} \in C_0^\infty(R^n)$, a supporto compatto in $\mathfrak{D}_{kr}$ e tali che nel caso a') riesca

$$\zeta_{kr} = 1 \quad \text{su} \quad E_k \cap \overline{\partial_i \Omega}.$$

Allora si può scrivere

$$\int_\Omega Au \cdot \overline{\varphi_k v} dx = \sum_{r=1}^{r_k} \int_\Omega Au \cdot \overline{\zeta_{kr}\varphi_k v} dx.$$

Nel caso a) si ha evidentemente

$$\int_\Omega Au \cdot \overline{\zeta_{kr}\varphi_k v} dx = \int_\Omega u \cdot \overline{A^*(\zeta_{kr}\varphi_k v)} dx.$$

Nel caso a') si può evidentemente applicare la (11.3), e quindi si ha

$$\int_\Omega Au \cdot \overline{\zeta_{kr}\varphi_k v} dx - \int_\Omega u \cdot \overline{A^*(\zeta_{kr}\varphi_k v)} dx$$
$$= \sum_{j=1}^{m^{(i)}-\nu_i} \int_{\partial_i \Omega} C_{ij} u \cdot \overline{B'_{ikj}(\zeta_{kr}\varphi_k v)} d\sigma - \sum_{j=1}^{\nu_i} \int_{\partial_i \Omega} B_{ij} u \cdot \overline{C'_{ikj}(\zeta_{kr}\varphi_k v)} d\sigma.$$

Ne segue che risulta

$$\int_\Omega Au \cdot \overline{\varphi_k v} dx - \int_\Omega u \cdot \overline{A^*(\varphi_k v)} dx \tag{11.7}$$
$$= \sum_{i \in \mathfrak{J}} \left(\sum_{j=1}^{m^{(i)}-\nu_i} \int_{\partial_i \Omega} C_{ij} u \cdot \overline{B'_{ikj}(\varphi_k v)} d\sigma - \sum_{j=1}^{\nu_i} \int_{\partial_i \Omega} B_{ij} u \cdot \overline{C'_{ikj}(\varphi_k v)} d\sigma \right).$$

Dalle (11.4)-(11.7) e dalle proprietà degli operatori B'_{ikj} e C'_{ikj} si deduce che gli operatori B'_{ij} e C'_{ij} definiti dalle formule

$$B'_{ij}v = \sum_{k=1}^{h_i} B'_{ikj}(\beta_{ik}v) + \sum_{k=1}^{p} B'_{ikj}(\varphi_k v),$$

$$C'_{ij}v = \sum_{k=1}^{h_i} C'_{ikj}(\beta_{ik}v) + \sum_{k=1}^{p} C'_{ikj}(\varphi_k v),$$

soddisfano le condizioni richieste dal lemma.

LEMMA 11.2. - *Nelle stesse ipotesi del lemma* 11.1 *si ha*:

a) *La formula di Green* (11.2) *sussiste per ogni coppia di funzioni* u *e* v, *una di classe* $C_0^\infty(\overline{\Omega} - S)$ *e l'altra di classe* $W^m(T)$ *per ogni compatto* $T \subset \overline{\Omega} - S$.

b) *Se* $v \in W^m(T)$ *per ogni compatto* $T \subset \overline{\Omega} - S$, *si ha* $B'_{ij}v = 0$ *su* $\partial_i\Omega$, $j = 1, \dots, m^{(i)} - \nu_i$, *se e solo se risulta*

$$\int_\Omega Au \cdot \overline{v}dx = \int_\Omega u \cdot \overline{A^*v}dx \tag{11.8}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(\Omega \cup \partial_i\Omega)$ *e tale che* $B_{ij}u = 0$ *su* $\partial_i\Omega$, $j = 1, \dots, \nu_i$.

c) *Se* $u \in W^m(T)$ *per ogni compatto* $T \subset \overline{\Omega} - S$, *si ha* $B_{ij}u = 0$ *su* $\partial_i\Omega$, $j = 1, \dots, \nu_i$, *se e solo se è verificata la* (11.8) *per ogni* $v \in C_0^\infty(\Omega \cup \partial_i\Omega)$ *e tale che* $B'_{ij}v = 0$ *su* $\partial_i\Omega$, $j = 1, \dots, m^{(i)} - \nu_i$.

Infatti, osserviamo che, in conseguenza del lemma 7.2, ogni funzione $w \in \overset{\circ}{W}{}^m(\Omega)$ può essere approssimata in $W^m(\Omega)$ da una successione di funzioni di classe $C_0^\infty(\overline{\Omega} - S)$.

Osserviamo inoltre che, in conseguenza del lemma 6.2, comunque si assegnano le funzioni f_j, $j = 1, \dots, \nu_i$, e g_j, $j = 1, \dots, m^{(i)} - \nu_i$, di classe $C_0^\infty(\partial_i\Omega)$, esiste $u \in C_0^\infty(\Omega \cup \partial_i\Omega)$ tale che

$$B_{ij}u = f_j \quad \text{su} \quad \partial_i\Omega, \qquad j = 1, \dots, \nu_i,$$

$$C_{ij}u = g_j \quad \text{su} \quad \partial_i\Omega, \qquad j = 1, \dots, m^{(i)} - \nu_i,$$

ed esiste $v \in C_0^\infty(\Omega \cup \partial_i\Omega)$ tale che

$$B'_{ij}v = g_j \quad \text{su} \quad \partial_i\Omega, \qquad j = 1, \dots, m^{(i)} - \nu_i,$$

$$C'_{ij}v = f_j \quad \text{su} \quad \partial_i\Omega, \qquad j = 1, \dots, \nu_i.$$

Dopo tali osservazioni, la dimostrazione del lemma si ottiene con considerazioni analoghe a quelle tenute in [34] per stabilire il corollario 5.1.

Quando sono verificate le condizioni del lemma 11.1, daremo il nome di problema *aggiunto formale* di (8.15)-(8.17) al problema

$$(11.9)\qquad \begin{aligned} & v \in W^m_{-s-\chi+2m}(\Omega), \\ & A^* v + \overline{\lambda}\sigma^{-\chi} v = g \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad g \in L^2_{-s+m}(\Omega), \\ & B'_{ij} v = 0 \quad \text{su} \quad \partial_i\Omega, \qquad j = 1, \ldots, m^{(i)} - \nu_i, \qquad i \in \mathfrak{J}, \end{aligned}$$

e indicheremo con $N^*_{s,\lambda}$ l'insieme delle soluzioni del problema omogeneo associato a (11.9).

Inoltre indicheremo:

con $\mathcal{A}_{s,\lambda}$ l'operatore $u \to Au + \lambda\sigma^{-\chi}u$ lineare e continuo da

$$W^m_s(\Omega, B_{ij}) = \{ u \in W^m_s(\Omega) \mid B_{ij}u = 0 \text{ su } \partial_i\Omega,\ j = 1, \ldots, \nu_i,\ i \in \mathfrak{J} \}$$

in $L^2_{s+\chi-m}(\Omega)$;

con $\mathcal{A}^*_{s,\lambda}$ l'operatore aggiunto di $\mathcal{A}_{s,\lambda}$;

con $\mathfrak{N}^*_{s,\lambda}$ il nucleo di $\mathcal{A}^*_{s,\lambda}$.

LEMMA 11.3. - *Siano verificate le ipotesi $\mathcal{H}_1)$-$\mathcal{H}_4)$, $\mathcal{H}_6)$, $\mathcal{H}_7)$ ed inoltre $\sigma(x) \in C^\infty(\overline{\Omega} - S)$. Allora per ogni s reale e per ogni λ complesso si ha $\mathfrak{N}^*_{s,\lambda} \subseteq N^*_{s,\lambda}$.*

Se inoltre è anche verificata l'ipotesi $\mathcal{H}_5)$, si ha $\mathfrak{N}^*_{s,\lambda} = N^*_{s,\lambda}$.

Infatti, cominciamo con l'osservare che per ogni s reale riesce $L^2_{-s}(\Omega) = (L^2_s(\Omega))'$ (= duale forte di $L^2_s(\Omega)$) [18] e che dalla definizione di operatore aggiunto segue che $v \in \mathfrak{N}^*_{s,\lambda}$ se e solo se si ha

$$(11.10)\qquad v \in L^2_{-s-\chi+m}(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega v \cdot \overline{Au + \lambda\sigma^{-\chi}u}\, dx = 0 \qquad \forall\, u \in W^m_s(\Omega, B_{ij}).$$

D'altra parte dal corollario 5.2, dal lemma 11.2 e dal teorema 8.1 si deduce, con note considerazioni, che una soluzione v di (11.10) è anche una soluzione del problema omogeneo associato a (11.9); ne segue la prima parte del lemma.

---

[18] Cfr. il lemma 1.3 di [33].

La dimostrazione della seconda parte del lemma, che qui per brevità omettiamo, si ottiene poi ripetendo i ragionamenti tenuti nel corso della dimostrazione del lemma 5.3 di [33] per stabilire l'analogo risultato nel caso ellittico.

DIMOSTRAZIONE del teorema 8.3. - Osserviamo che, nelle ipotesi poste, dal lemma 11.1 segue che gli operatori A^* e B'_{ij} verificano le ipotesi $\mathcal{H}_1)$-$\mathcal{H}_4)$, $\mathcal{H}_6)$, $\mathcal{H}_7)$ con $m^{(i)} - \nu_i$ in luogo di ν_i e l'ipotesi $\mathcal{H}_5)$ con $-\theta$ in luogo di θ.

Se ne deduce che, fissato s, esiste una costante $\lambda_0 > 0$ tale che per ogni λ, con $|\lambda| \geq \lambda_0$ e $\arg \lambda = \theta$, i problemi (8.15)-(8.17) e (11.9) ammettono ciascuno al più una soluzione.

Da tali considerazioni, da noti risultati relativi agli operatori lineari e dal lemma 11.3 si deduce la tesi nell'ulteriore ipotesi che $\sigma \in C^\infty(\overline{\Omega} - S)$.

Se poi $\sigma \notin C^\infty(\overline{\Omega} - S)$, consideriamo il problema (8.15)-(8.17) con σ_k in luogo di σ (cfr. l'ipotesi $\mathcal{H}_8)$).

Per quanto sopra stabilito e per il teorema 8.2 si ha evidentemente che esiste una costante $\lambda_0 > 0$, indipendente da k, tale che per ogni λ, con $|\lambda| \geq \lambda_0$ e $\arg \lambda = \theta$, detto problema ammette un'unica soluzione u_k la quale soddisfa la limitazione

$$\| u_k \|_{W^m_s(\Omega)} \leq c \, \| f \|_{L^2_{s+\chi-m}(\Omega)} , \tag{11.11}$$

con c costante indipendente da k.

Tenuto conto del lemma 7.6, dalla (11.11) segue che da $\{u_k\}$ si può estrarre una successione debolmente convergente in $W^m_s(\Omega)$ e fortemente convergente in $W^j_\beta(\Omega)$, per ogni $j \in J(\mathfrak{M})$ e $< m$ e per ogni $\beta > s + j - m$, verso una funzione $u \in W^m_s(\Omega)$, la quale, evidentemente, riesce una soluzione del problema (8.15)-(8.17). Ne segue la tesi.

CAPITOLO III.

Ulteriori risultati relativi al problema di Dirichlet per le equazioni fortemente quasi-ellittiche in un dominio limitato.

12. - Lemmi preliminari.

Nel seguito considereremo operatori differenziali lineari della forma (8.1) e fortemente quasi-ellittici. Pertanto ([19]), supporremo che gli interi $m_1, \ldots, m_n$

([19]) Cfr. quanto osservato nella parte finale del n. 8.

siano pari e porremo

$$m_k = 2N_k \quad (k = 1, \dots, n), \qquad m^{(i)} = 2N^{(i)} \quad (i = 1, \dots, t), \qquad m = 2N.$$

Indicheremo: con $W_s^{2N}(\Omega, \partial/\partial \mathbf{n}_i)$, s reale, la classe delle funzioni $u \in W_s^{2N}(\Omega)$ e soddisfacenti le condizioni

$$\frac{\partial^j u}{\partial \mathbf{n}_i^j} = 0 \quad \text{su} \quad \partial_i \Omega, \qquad j = 0, \dots, N^{(i)} - 1, \qquad i \in \mathfrak{J}, \tag{12.1}$$

con $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{\Omega}, \partial/\partial \mathbf{n}_i)$ la classe delle funzioni $u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{\Omega})$ e soddisfacenti le (12.1).

Lemma 12.1. - *Supponiamo che sia verificata l'ipotesi* a_0) *e che esista una funzione* $\sigma(x) \in C^\infty(\overline{\Omega} - S) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ *e soddisfacente la* (8.10).

Allora, per ogni s reale, $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{\Omega}, \partial/\partial \mathbf{n}_i)$ *è denso in* $W_s^{2N}(\Omega, \partial/\partial \mathbf{n}_i)$.

Infatti, assegnamo A e λ tali che il problema (8.24) sia univocamente risolubile per ogni $f \in L^2_{s+\chi-2N}(\Omega)$ (cfr. il corollario 8.1).

Inoltre, assegnata $u \in W_s^{2N}(\Omega, \partial/\partial \mathbf{n}_i)$, poniamo

$$f = Au + \lambda \sigma^{-\chi} u$$

e indichiamo con $\{f_k\}$ una successione di funzioni di classe $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap L^2_{s+\chi-2N}(\Omega)$ convergente ad f in $L^2_{s+\chi-2N}(\Omega)$.

Indichiamo inoltre, per ogni k, con u_k la soluzione del problema

$$u_k \in W_s^{2N}(\Omega, \partial/\partial \mathbf{n}_i),$$

$$Au_k + \lambda \sigma^{-\chi} u_k = f_k \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Evidentemente risulta

$$\lim_k \| u_k - u \|_{W_s^{2N}(\Omega)} = 0.$$

Inoltre dal corollario 5.2 segue che $u_k \in C^\infty(\overline{\Omega} - S)$.

Si ottiene allora la tesi osservando che per il lemma 7.7 si ha per ogni k

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \delta_\varepsilon u_k - u_k \|_{W_s^{2N}(\Omega)} = 0$$

e che le funzioni $\delta_\varepsilon u_k \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{\Omega}, \partial/\partial \mathbf{n}_i)$.

Facendo ora uso delle notazioni introdotte per il lemma 9.1, supponiamo che l'operatore A definito dalla (9.1) verifichi l'ipotesi $\mathcal{E}_1$) e la seguente ipotesi:

$\mathcal{E}_2$) *A è fortemente quasi-ellittico* in $\overline{Q_{r_0}}$, cioè riesce

$$Re\, A_0(x, \xi) = Re \sum_{<\mu, q>=2N} a_\mu(x)\xi^\mu > 0 \qquad \forall\, x \in \overline{Q_{r_0}} \text{ e } \forall\, \xi \in R^n - \{0\}. \tag{12.2}$$

Indichiamo con $\mathcal{V}(\Sigma_{r_0})$ la classe delle funzioni $u \in W^{2N}(\Sigma_{r_0})$ e tali che

$$\frac{\partial u}{\partial x_n^j} = 0 \quad \text{su} \quad \sigma_{r_0}, \qquad j = 0, \ldots, N_n - 1, \tag{12.3}$$

e con $\mathcal{V}(\Gamma_{r_0})$ lo spazio $W^{2N}(\Gamma_{r_0})$.

LEMMA 12.2. - *Se sono verificate le ipotesi $\mathcal{E}_1$) e $\mathcal{E}_2'$), per ogni $u \in \mathcal{V}(Q_{r_0})$ e per ogni $\lambda > 0$ sussiste la limitazione*

$$\sum_{<\alpha, q>=2N} |D^\alpha u|_{2, Q_r} + \lambda^{1/2} \sum_{<\alpha, q>=N} |D^\alpha u|_{2, Q_r} + \lambda |u|_{2, Q_r} \leq c(|Au + \lambda u|_{2, Q_{r_0}} + |u|_{2, Q_{r_0}}), \tag{12.4}$$

dove $r < r_0$ e dove c è una costante indipendente da u e λ.

Infatti, poniamo per ogni $x^k \in \overline{Q_{r_0}}$

$$A_{0k} = \sum_{<\mu, q>=2N} a_\mu(x^k) D^\mu.$$

Per la compattezza di $\overline{Q_{r_0}}$ e per la continuità in $\overline{Q_{r_0}}$ dei coefficienti $a_\mu(x)$ per $<\mu, q> = 2N$, in corrispondenza di $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito $\{x^k\}_{k=1}^p$ di punti di $\overline{Q_{r_0}}$ godenti della proprietà che ogni x^k ha un intorno n-dimensionale $\mathcal{I}(x^k)$ tale che $\{\mathcal{I}(x^k)\}_{k=1}^p$ sia un ricoprimento di $\overline{Q_{r_0}}$ e tale inoltre che si abbia

$$|A_0 v - A_{0k} v|_{2, Q_{r_0}} \leq \varepsilon \sum_{<\alpha, q>=2N} |D^\alpha v|_{2, Q_{r_0}} \tag{12.5}$$

per ogni $v \in W^{2N}(Q_{r_0})$ ed a supporto compatto in $\overline{Q_{r_0}} \cap \mathcal{I}(x^k)$.

Indicheremo con $\{\varphi_k\}_{k=1}^p$, $\varphi_k \in C_0^\infty(R^n)$ e supp $\varphi_k \subset \mathcal{I}(x^k)$, una partizione dell'unità su $\overline{Q_{r_0}}$ relativa al suddetto ricoprimento.

Sia ora u una funzione di classe $\mathfrak{D}(Q_{r_0})$ e sia $\zeta(x)$ la funzione definita nel corso della dimostrazione del lemma 9.1. Poniamo $v = \zeta u$ e $v_k = \varphi_k v$.

Indicheremo con $c_1, \ldots, c_9$ delle costanti positive indipendenti da u, r, r' e λ.

Con noti procedimenti si prova che riesce

$$Re \int_{Q_{r_0}} A_{0k} v_k \cdot \overline{v}_k dx \geq c_1 \sum_{<\alpha, q>=N} | D^\alpha v_k |^2_{2, Q_{r_0}} . \tag{12.6}$$

Consegue che per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$\sum_{<\alpha, q>=N} | D^\alpha v_k |^2_{2, Q_{r_0}} + \lambda | v_k |^2_{2, Q_{r_0}} \leq c_2 \int_{Q_{r_0}} | (A_{0k} v_k + \lambda v_k) \cdot v_k | dx$$

$$\leq \frac{c_3}{\lambda} | A_{0k} v_k + \lambda v_k |^2_{2, Q_{r_0}} + \frac{\lambda}{2} | v_k |^2_{2, Q_{r_0}}$$

e quindi si ha anche

$$\lambda^{1/2} \sum_{<\alpha, q>=N} | D^\alpha v_k |_{2, Q_{r_0}} + \lambda | v_k |_{2, Q_{r_0}} \leq c_4 | A_{0k} v_k + \lambda v_k |_{2, Q_{r_0}} . \tag{12.7}$$

Dalle (12.5), (12.7) e dal lemma 7.1 segue evidentemente che riesce

$$\lambda^{1/2} \sum_{<\alpha, q>=N} | D^\alpha v_k |_{2, Q_{r_0}} + \lambda | v_k |_{2, Q_{r_0}} \leq c_5 (| A v_k + \lambda v_k |_{2, Q_{r_0}} \tag{12.8}$$

$$+ \varepsilon \sum_{<\alpha, q>=2N} | D^\alpha v_k |_{2, Q_{r_0}} + c(\varepsilon) | v_k |_{2, Q_{r_0}}).$$

Inoltre dalle (12.8) e (9.3) si ha

$$\sum_{<\alpha, q>=2N} | D^\alpha v_k |_{2, Q_{r_0}} \leq c_6 (| A v_k + \lambda v_k |_{2, Q_{r_0}}$$

$$+ \varepsilon \sum_{<\alpha, q>=2N} | D^\alpha v_k |_{2, Q_{r_0}} + (1 + c(\varepsilon)) | v_k |_{2, Q_{r_0}}) ;$$

da tale relazione e dalla (12.8) si deduce la limitazione

$$\sum_{<\alpha, q>=2N} | D^\alpha v_k |_{2, Q_{r_0}} + \lambda^{1/2} \sum_{<\alpha, q>=N} | D^\alpha v_k |_{2, Q_{r_0}} + \lambda | v_k |_{2, Q_{r_0}}$$

$$\leq c_7 (| A v_k + \lambda v_k |_{2, Q_{r_0}} + | v_k |_{2, Q_{r_0}})$$

$$\leq c_8 (| A(\zeta u) + \lambda \zeta u |_{2, Q_{r_0}} + \sum_{<\mu, q><2N} | D^\alpha (\zeta u) |_{2, Q_{r_0}}).$$

Tenuto conto che $\zeta u = v = \sum_{k=1}^{p} v_k$, da quest'ultima relazione e dal lemma 7.1 segue che si ha

$$\sum_{<\alpha,\, q>=2N} | D^{\alpha}(\zeta u) |_{2,\, Q_{r_0}} + \lambda^{1/2} \sum_{<\alpha,\, q>=N} | D^{\alpha}(\zeta u) |_{2,\, Q_{r_0}} + \lambda \, | \zeta u |_{2,\, Q_{r_0}} \leq c_9 (| A(\zeta u) + \lambda \zeta u |_{2,\, Q_{r_0}} + | \zeta u |_{2,\, Q_{r_0}}). \tag{12.9}$$

Dalla (12.9) si deduce la tesi con considerazioni analoghe a quelle tenute per dedurre dalle (9.6) e (9.7) la tesi del lemma 9.1.

Assegnato ora in Ω un operatore della forma (8.1), dimostriamo il segnente

LEMMA 12.3. - *Supponiamo che sia verificata l'ipotesi* a_0), *che i coefficienti* $a_\mu(x)$ *verifichino l'ipotesi* $\mathcal{H}_1$) *e che sia soddisfatta la condizione* (8.23) *di forte quasi-ellitticità.*

Allora, assegnati i numeri reali $\beta \leq \chi$, s *e una funzione* $\sigma(x) \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ *e soddisfacente la* (8.10), *per ogni* $u \in W^{2N}_{s+2N}(\Omega,\, \partial/\partial n_i)$ *e per ogni* $\lambda > 0$ *sussiste la limitazione*

$$\sum_{<\alpha,\, q>\leq 2N} | D^{\alpha} u |_{2,\, s+<\alpha,\, \tau>} + \lambda^{1/2} \sum_{<\alpha,\, q>=N} | D^{\alpha} u |_{2,\, s+<\alpha,\, \tau>+(\chi-\beta)/2} + \lambda \, | u |_{2,\, s+\chi-\beta} \leq c (| Au + \lambda \sigma^{-\beta} u |_{2,\, s+\chi} + | u |_{2,\, s}), \tag{12.10}$$

dove c *è una costante indipendente da* u *e* λ.

Infatti, poniamo [20]

$$\tilde{A}^{(\beta)} = \left(\frac{\sigma^*(x_0,\, \xi)}{\rho(x_0)} \right)^{\beta} \tilde{A},$$

dove $\tilde{A}$ è l'operatore definito dalla (8.8).

Con considerazioni analoghe a quelle tenute per dedurre dal lemma 9.1 la (9.15) e dal lemma 10.1 la (10.5), si deduce dal lemma 12.2 che si ha per $u \in W^{2N}_{s+2N}(\Omega,\, \partial/\partial n_i)$ e $\lambda > 0$

$$\sum_{<\alpha,\, q>=2N} | D^{\alpha} u^* |_{2,\, I^*_{1/2}(x_0)} + \lambda^{1/2} \rho^{(\chi-\beta)/2}(x_0) \sum_{<\alpha,\, q>=N} | D^{\alpha} u^* |_{2,\, I^*_{1/2}(x_0)} + \lambda \rho^{\chi-\beta}(x_0) \, | u^* |_{2,\, I^*_{1/2}(x_0)} \leq c_1 (| \tilde{A}^{(\beta)} u^* + \lambda \rho^{\chi-\beta}(x_0) u^* |_{2,\, I^*(x_0)} + | u^* |_{2,\, I^*(x_0)}), \tag{12.11}$$

dove c_1 è una costante indipendente da u, λ e x_0.

---

[20] Si tenga presente l'osservazione 8.1.

Operando in (12.11) il cambiamento di variabili (7.6) si ha

$$\sum_{<\alpha,q>=2N} \rho^{<\alpha,\tau>-|\tau|/2}(x_0) \,|\, D^\alpha u \,|_{2,I_{1/2}(x_0)} + \lambda^{1/2} \sum_{<\alpha,q>=N} \rho^{<\alpha,\tau>+(\chi-\beta)/2-|\tau|/2}(x_0) \,|\, D^\alpha u \,|_{2,I_{1/2}(x_0)}$$

$$+ \lambda \rho^{\chi-\beta-|\tau|/2}(x_0) \,|\, u \,|_{2,I_{1/2}(x_0)} \leq c_1(\rho^{\chi-\beta-|\tau|/2}(x_0) \,|\, \sigma^\beta A u + \lambda u \,|_{2,I(x_0)}$$

$$+ \rho^{-|\tau|/2}(x_0) \,|\, u \,|_{2,I(x_0)})$$

$$\leq c_2(\rho^{\chi-|\tau|/2}(x_0) \,|\, Au + \lambda \sigma^{-\beta} u \,|_{2,I(x_0)} + \rho^{-|\tau|/2}(x_0) \,|\, u \,|_{2,I(x_0)}),$$

dove c_2 è una costante indipendente da u, λ e x_0.

Da quest'ultima relazione si deduce la tesi con ragionamenti analoghi a quelli tenuti per dedurre dalla (9.18) la tesi del teorema 8.1.

Nel seguito supporremo che sia

$$\tau_k = q_k, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{12.12}$$

e indicheremo con $H^N_{0,s}(\Omega)$, s reale, la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^N_s(\Omega)$.

Inoltre considereremo la seguente ipotesi [21]:

a_1) Esiste una funzione $\sigma(x) \in C^\infty(\overline{\Omega} - S) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$, soddisfacente la (8.10) e le limitazioni

$$|\, D^\alpha \sigma(x) \,| \leq c_\alpha \sigma^{-|\alpha|+1}(x) \qquad \forall\, x \in \Omega, \tag{12.13}$$

dove le c_α sono delle costanti indipendenti da x.

Assegnamo ora una forma sesquilineare e continua su $W^N_s(\Omega) \times W^N_s(\Omega)$ del tipo

$$a_s(u, v) = \int_\Omega \sum_{\substack{<h,q>\leq N \\ <k,q>\leq N}} a_{hk}(x) D^h u \cdot \overline{D^k(\sigma^{2s} v)}\, dx, \tag{12.14}$$

dove $\sigma(x)$ è la funzione definita nell'ipotesi a_1), supponendo che sia verificata la condizione di forte quasi-ellitticità:

$$Re \sum_{<h,q>=<k,q>=N} a_{hk}(x) \xi^{\alpha+\beta} > 0 \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega} \text{ e } \forall\, \xi \in R^n - \{0\}. \tag{12.15}$$

---

[21] In conseguenza del lemma 3.1 del cap. 6 di J. NEČAS [26], si ha che tale ipotesi è, ad es., verificata nel caso in cui Ω ha frontiera «localmente lipschitziana» e $S = \partial\Omega$, e nel caso in cui $t = 2$, $S^{(1)} = \partial\Omega^{(1)}$, $S^{(2)} = \emptyset$ e $\Omega^{(1)}$ ha frontiera «localmente lipschitziana».

Si ha:

Lemma 12.4. - *Siano verificate le ipotesi* a_0) *e* a_1), *la condizione* (12.15) *di forte quasi-ellitticità ed inoltre i coefficienti* $a_{hk}(x)$ *siano di classe* $C^0(\overline{\Omega})$ *per* $<h, q> = <k, q> = N$, *di classe* $L^\infty(\Omega)$ *per* $<h+k, q> \geq \beta$ *e di classe* $L^\infty_{\beta-<h+k, q>}(\Omega)$ *per* $<h+k, q> < \beta$, *dove* β *è un fissato numero reale appartenente all'intervallo* $[0, 2N]$.

Allora, assegnato $s_0 > 0$, *per ogni* $s \in [-s_0, s_0]$ *e per ogni* $u \in H^N_{0,s}(\Omega)$ *si ha*

$$\sum_{<\alpha, q> \leq N} |D^\alpha u|^2_{2,s} \leq c \, Re\, a_s(u, u) \tag{12.16}$$

$$+ c_0 \Big(s^2 \sum_{<\alpha, q> < N} |D^\alpha u|^2_{2, s+<\alpha, q>-N} + |u|^2_{2, s-\beta/2}\Big),$$

dove c *e* c_0 *sono due costanti positive indipendenti da* u *e* s.

Se non è verificata l'ipotesi a_1), *la* (12.16) *sussiste per* $s = 0$.

È sufficiente stabilire la (12.16) per funzioni $u \in C^\infty_0(\Omega)$.

Poniamo

$$a'_s(u, v) = \int_\Omega \sum_{<h+k, q> \geq \beta} a_{hk}(x) D^h u \cdot \overline{D^k(\sigma^{2s} v)}\, dx,$$

$$a''_s(u, v) = a_s(u, v) - a'_s(u, v).$$

Assegnamo $s \in [-s_0, s_0]$ e $u \in C^\infty_0(\Omega)$.

Nel corso di questa dimostrazione indicheremo con $c_1, \ldots, c_8$ delle costanti positive indipendenti da u e s.

Notoriamente, nelle ipotesi poste si ha (cfr. E. Giusti [16])

$$Re\, a'_0(u, u) \geq c_1 \sum_{<\alpha, q> \leq N} |D^\alpha u|^2_{2,0} - c_2 |u|^2_{2,0}. \tag{12.17}$$

D'altra parte osserviamo che riesce

$$a'_s(u, u) = a'_0(\sigma^s u, \sigma^s u) + B_s(u), \tag{12.18}$$

dove

$$B_s(u) = \sum_{<h+k, q> \geq \beta} \int_\Omega a_{hk}(x) \Bigg(\sum_{\alpha < k} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{k}{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^h u \cdot \overline{D^{k-\alpha}\sigma^s \cdot D^{\alpha-\gamma}\sigma^s \cdot D^\gamma u} \tag{12.19}$$

$$- \sum_{\alpha < h} \binom{h}{\alpha} D^{h-\alpha}\sigma^s \cdot D^\alpha u \cdot \overline{D^k(\sigma^s u)} \Bigg) dx.$$

Tenuto conto delle (8.10), (12.13) ed osservando che

$$|h-\alpha| \leq N - <\alpha, q> \quad \text{per} \quad \alpha \leq h \quad \text{e} \quad <h, q> \leq N,$$

si verifica facilmente che riesce

$$(12.20) \quad |B_s(u)| \leq c_3 |s| \Big(\sum_{<\alpha, q> < N} |D^\alpha u|_{2, s+<\alpha, q>-N} \Big) \cdot \sum_{<h, q> \leq N} (|D^h u|_{2, s} + |D^h(\sigma^s u)|_{2, 0}).$$

Analogamente si verifica che si ha per $<h, q> \leq N$

$$(12.21) \qquad |D^h(\sigma^s u) - \sigma^s D^h u|_{2, 0} \leq c_4 |s| \sum_{<\alpha, q> < N} |D^\alpha u|_{2, s+<\alpha, q>-N} \,.$$

D'altra parte per la (12.17) si ha

$$(12.22) \qquad Re\, a'_0(\sigma^s u, \sigma^s u) \geq c_1 \sum_{<h, q> \leq N} |D^h(\sigma^s u)|^2_{2, 0} - c_2 |\sigma^s u|^2_{2, 0} \,.$$

Dalle (12.18)-(12.22) si deduce evidentemente la limitazione

$$(12.23) \qquad \sum_{<\alpha, q> \leq N} |D^\alpha u|^2_{2, s} \leq c_5\, Re\, a'_s(u, u)$$
$$+ c_6 \Big(s^2 \sum_{<\alpha, q> < N} |D^\alpha u|^2_{2, s+<\alpha, q>-N} + |u|^2_{2, s} \Big).$$

Se $\beta = 0$, la (12.23) coincide con la (12.16) e quindi si ha la tesi.
Se $\beta > 0$, osserviamo che riesce

$$(12.24) \qquad |a''_s(u, u)| \leq c_7 \sum_{<h+k, q> < \beta} \sum_{\alpha \leq k} \int_\Omega |a_{hk} D^h u \cdot \sigma^{2s-|k-\alpha|} \cdot D^\alpha u| \, dx.$$

Tenuto conto che per ipotesi $a_{hk}(x) \in L^\infty_{\beta-<h+k, q>}(\Omega)$ per $<h+k, q> < \beta$ ed osservando che

$$2s - |k-\alpha| - \beta + <h+k, q> \geq 2s + <h, q> + <\alpha, q> - \beta,$$

dalla (12.24) si deduce facilmente la limitazione

$$|a_s''(u, u)| \leq c_8 \sum_{<h, q> \leq N} |D^h u|_{2, s+<h, q>-\beta/2} \cdot \sum_{<\alpha, q> < N} |D^\alpha u|_{2, s+<\alpha, q>-\beta/2} \cdot \tag{12.25}$$

Dalle (12.23), (12.25) e dal lemma 7.5 si deduce la (12.16), e cioè la tesi, con note considerazioni.

Indicheremo con $W_{0,s}^N(\Omega)$, s reale, la classe delle funzioni $u \in W_s^N(\Omega)$ e soddisfacenti le (12.1).

Evidentemente [22] riesce $H_{0,s}^N(\Omega) \subseteq W_{0,s}^N(\Omega)$. Vogliamo inoltre dimostrare che

LEMMA 12.5. - *Se sono verificate le ipotesi* a_0) *e* a_1), *si ha* $H_{0,s}^N(\Omega) = W_{0,s}^N(\Omega)$.

Dobbiamo solo dimostrare che $w \in W_{0,s}^N(\Omega)$ implica $w \in H_{0,s}^N(\Omega)$.

Assegnamo un operatore differenziale lineare A della forma

$$Au = \sum_{\substack{<h, q> \leq N \\ <k, q> \leq N}} D^k(a_{hk}(x) D^h u), \tag{12.26}$$

a coefficienti $a_{hk}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e soddisfacente la condizione (12.15) di forte quasi-ellitticità.

Dai lemmi 12.4 e 7.5 segue che esistono delle costanti positive c, c_0 e c_0' tali che si ha per ogni $u \in H_{0,s}^N(\Omega)$

$$\begin{aligned} Re\, a_s(u, u) &\geq c \| u \|^2_{W_s^N(\Omega)} - c_0 \| u \|^2_{L^2_{s-N}(\Omega)} \\ &\geq c \| u \|^2_{W_s^N(\Omega)} - c_0' \int_\Omega \sigma^{-2N} u \cdot \overline{\sigma^{2s} u}\, dx, \end{aligned} \tag{12.27}$$

dove $a_s(u, v)$ è definita dalla (12.14).

Fissiamo un numero complesso λ tale che $Re\, \lambda \geq c_0'$ e tale inoltre che per ogni $f \in L^2_{s+N}(\Omega)$ il problema

$$\begin{aligned} &u \in W_{s+N}^{2N}(\Omega, \partial/\partial \mathbf{n}_i), \\ &Au + \lambda \sigma^{-2N} u = f \quad \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \tag{12.28}$$

sia univocamente risolubile (cfr. il corollario 8.1).

---

[22] Si tengono presenti il lemma 1.7 e la nota [13].

Assegnata ora $w \in W^N_{0,s}(\Omega)$, osserviamo che

$$a_s(w, v) + \lambda \int_\Omega \sigma^{-2N} w \cdot \overline{\sigma^{2s} v}\, dx$$

riesce un funzionale lineare e continuo su $H^N_{0,s}(\Omega)$, e quindi esiste $u_0 \in H^N_{0,s}(\Omega)$ tale che

$$a_s(w - u_0, v) + \lambda \int_\Omega \sigma^{-2N} (w - u_0) \cdot \overline{\sigma^{2s} v}\, dx = 0 \qquad \forall v \in H^N_{0,s}(\Omega) .$$

Dal corollario 5.2 si deduce, con note considerazioni, che $w - u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega} - S)$, e quindi per il teorema 8.1 si ha anche che $w - u_0$ è una soluzione del problema amogeneo associato a (12.28). Ne segue che risulta $w = u_0 \in H^N_{0,s}(\Omega)$ e quindi si ha la tesi.

13. - Teoremi di unicità.

I teoremi di unicità e di esistenza per il problema di DIRICHLET che ci proponiamo di stabilire in quest'ultima parte del lavoro, si applicano quando A risulta fortemente quasi-ellittico in $\overline{\Omega}$, tale cioè che si abbia

$$Re \sum_{<\mu, q>=2N} a_\mu(x)\xi^\mu > 0 \qquad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \forall \xi \in R^n - \{0\}, \tag{13.1}$$

e quando sono verificate le ipotesi a_0), a_1) e la seguente condizione:

a_2) $t \leq 2$, $N = N^{(1)}$, $\Omega^{(1)}$ ha frontiera «localmente lipschitziana» e, se $t = 2$, $S^{(2)} = \emptyset$.

Nel seguito $\sigma(x)$ denoterà la funzione definita dall'ipotesi a_1).

Cominciamo col dimostrare il seguente teorema di unicità:

TEOREMA 13.1. - *Supponiamo che siano verificate le ipotesi a_0), a_1) e a_2), che A sia fortemente quasi-ellittico in $\overline{\Omega}$ e che i coefficienti $a_\mu(x)$ siano di classe $C^0(\overline{\Omega})$ per $< \mu, q > = 2N$, di classe $L^\infty_{N+\gamma-<\mu,q>}(\Omega)$ per $< \mu, q > < 2N$, dove γ è un fissato numero reale tale che $\sup\limits_{<\alpha, q> < 2N} < \alpha, q > - N \leq \gamma \leq N$.*

Esistono due costanti $\lambda_0 > 0$ e $\eta_0 \in]0, 1/2[$ tali che per ogni $\lambda \geq \lambda_0$, per ogni $s \in [N - \eta_0, N + \eta_0]$ e per ogni $u \in W^{2N}_s(\Omega, \partial/\partial n_i)$ sussiste la limitazione

$$\| u \|_{W^{2N}_s(\Omega)} \leq c \, \| Au + \lambda \sigma^{-2\gamma} u \|_{L^2_s(\Omega)}, \tag{13.2}$$

dove c è una costante indipendente da u, s e λ [23].

[23] Osserviamo, come si deduce dalla dimostrazione, che se non è verificata l'ipotesi a_1) la (13.2) sussiste per $s = 0$ e per ogni funzione $\sigma(x) \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ e soddisfacente la (8.10).

Premettiamo il seguente

LEMMA 13.1. - *Sia verificata l'ipotesi* a_2) *e sia* s_0 *un assegnato numero reale* $< 1/2$.

Per ogni $s \leq s_0$ *e per ogni* $u \in H^N_{0,s}(\Omega)$ *si ha*

$$|u|_{2,s-N} \leq c \sum_{<\alpha,q>=N} |D^\alpha u|_{2,s}, \tag{13.3}$$

dove c *è una costante indipendente da* u *e* s.

È evidentemente sufficiente stabilire la (13.3) per funzioni $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Allora se $t = 1$, osservando che in tal caso risulta $<\alpha, q> = |\alpha|$, la tesi consegue dall'osservazione 7.3 e dal lemma 7.9.

Se $t = 2$, ancora dall'osservazione 7.3 e dal lemma 7.9 segue che, fissato $y \in \Omega^2$, si ha per $s \leq s_0$

$$\int_{\Omega^{(1)}} |\rho^{s-N^{(1)}}(x,y) u(x,y)|^2 dx \leq c \sum_{|\alpha|=N^{(1)}} \int_{\Omega^{(1)}} |\rho^s(x,y) D_x^\alpha u(x,y)|^2 dx, \tag{13.4}$$

dove c è una costante indipendente da u, s e y. Siccome per ipotesi $N = N^{(1)}$, da quest'ultima relazione si deduce la (13.3) e quindi si ha la tesi.

DIMOSTRAZIONE del teorema 13.1. - Procedendo come nella dimostrazione del lemma 12.2, consideriamo, in corrispondenza di $\varepsilon > 0$, un ricoprimento finito di $\bar{\Omega}$ mediante gli intorni $\mathfrak{I}(x^k)$, $k = 1, \dots, p$, in modo che si abbia

$$|A_0 v - A_{0k} v|_{2,s} \leq \varepsilon \sum_{<\alpha,q>=2N} |D^\alpha v|_{2,s} \tag{13.5}$$

per ogni $v \in W_s^{2N}(\Omega)$ ed a supporto compatto in $\bar{\Omega} \cap \mathfrak{I}(x^k)$, e una partizione dell'unità $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^p$ su $\bar{\Omega}$ relativa a tale ricoprimento, con $\varphi_k \in C_0^\infty(R^n)$ e supp $\varphi_k \subset \mathfrak{I}(x^k)$.

Osserviamo che, in conseguenza del lemma 12.1, è sufficiente stabilire la (13.2) per funzioni $u \in \mathring{C}^\infty(\bar{\Omega}, \partial/\partial \boldsymbol{n}_i)$.

Assegnata allora $u \in \mathring{C}^\infty(\bar{\Omega}, \partial/\partial \boldsymbol{n}_i)$, poniamo $u_k = \varphi_k u$.

Nel corso di questa dimostrazione denoteremo con $c_1, \dots, c_{12}$ delle costanti positive indipendenti da u, s e λ.

Dall'ipotesi di forte quasi-ellitticità (13.1) si deduce, con note considerazioni [24], che si ha per ogni $\lambda > 0$

$$\sum_{<\alpha,q>=N} |D^\alpha(\sigma^{s-N} u_k)|^2_{2,0} + \lambda\, |\sigma^{s-N-\gamma} u_k|^2_{2,0} \tag{13.6}$$

[24] Cfr. anche la (12.6).

$$\leq c_1 \int_\Omega |(A_{0k}(\sigma^{s-N} u_k) + \lambda\sigma^{s-N-2\gamma} u_k) \cdot \sigma^{s-N} u_k| \, dx$$

$$\leq c_1 |\sigma^N (A_{0k}(\sigma^{s-N} u_k) + \lambda\sigma^{s-N-2\gamma} u_k)|_{2,0} \cdot |\sigma^{s-2N} u_k|_{2,0}.$$

Dalla (13.6), con considerazioni analoghe a quelle tenute nel corso della dimostrazione del lemma 12.4, si deduce facilmente che, fissato un intervallo $[s', s'']$, si ha per ogni $s \in [s', s'']$ e per ogni $\lambda > 0$

$$\sum_{<\alpha, q> = N} |D^\alpha u_k|^2_{2, s-N} + \lambda |u_k|^2_{2, s-N-\gamma}$$

$$\leq c_2 [(|A_{0k} u_k + \lambda\sigma^{-2\gamma} u_k|_{2,s} + |s - N| \sum_{<\alpha, q> < 2N} |D^\alpha u_k|_{2, s+<\alpha, q>-2N}) \cdot |u_k|_{2, s-2N}$$

$$+ |s - N|^2 \sum_{<\alpha, q> < N} |D^\alpha u_k|^2_{2, s+<\alpha, q>-2N}].$$

Da quest'ultima relazione, dal lemma 12.5 e dalla (13.3) scritta con $s - N$ in luogo di s segue che si ha, supposto $s'' < N + 1/2$,

$$|u_k|_{2, s-2N} + \lambda^{1/2} |u_k|_{2, s-N-\gamma} \leq c_3 |A_{0k} u_k + \lambda\sigma^{-2\gamma} u_k|_{2,s} + c_4 |s - N| \sum_{<\alpha, q> < 2N} |D^\alpha u_k|_{2, s+<\alpha, q>-2N}. \tag{13.7}$$

Dalla (13.7) e dalla (12.10) scritta per $\chi = 2N$, $\tau = q$, $\beta = 2\gamma$ e con $s - 2N$ in luogo di s si deduce la limitazione

$$\sum_{<\alpha, q> \leq 2N} |D^\alpha u_k|_{2, s+<\alpha, q>-2N} + \lambda^{1/2} |u_k|_{2, s-N-\gamma}$$

$$\leq c_5 |A_{0k} u_k + \lambda\sigma^{-2\gamma} u_k|_{2,s} + c_6 |s - N| \sum_{<\alpha, q> < 2N} |D^\alpha u_k|_{2, s+<\alpha, q>-2N},$$

da cui segue che esiste $\eta_0 \in]0, 1/2[$ tale che per ogni $s \in [N - \eta_0, N + \eta_0]$ e per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$\sum_{<\alpha, q> \leq 2N} |D^\alpha u_k|_{2, s+<\alpha, q>-2N} + \lambda^{1/2} |u_k|_{2, s-N-\gamma} \leq c_7 |A_{0k} u_k + \lambda\sigma^{-2\gamma} u_k|_{2,s}. \tag{13.8}$$

D'altra parte dalla (13.5), dall'ipotesi che i coefficienti $a_\mu(x) \in \overset{2}{L}_{N+\gamma-<\mu, q>}(\Omega)$ per $<\mu, q> < 2N$ e dal lemma 7.5 si deduce facilmente che si ha

$$|A_{0k} u_k - A u_k|_{2,s} \leq \varepsilon \sum_{<\alpha, q> = 2N} |D^\alpha u_k|_{2,s} + c_8 \sum_{<\alpha, q> < 2N} |D^\alpha u_k|_{2, s+<\alpha, q>-N-\gamma}$$

$$\leq \varepsilon \sum_{<\alpha, q> = 2N} (|D^\alpha u_k|_{2,s} + |D^\alpha u_k|_{2, s+N-\gamma}) + c(\varepsilon) |u_k|_{2, s-N-\gamma}.$$

Da quest'ultima relazione, dalla (13.8), dalla condizione $\gamma \leq N$ e dalle ipotesi relative ai coefficienti $a_\mu(x)$ segue che si ha

$$\sum_{<\alpha, q> \leq 2N} |D^\alpha u_k|_{2, s+<\alpha, q>-2N} + \lambda^{1/2} |u_k|_{2, s-N-\gamma} \tag{13.9}$$
$$\leq c_9(|Au_k + \lambda\sigma^{-2\gamma} u_k|_{2, s} + |u_k|_{2, s-N-\gamma})$$
$$\leq c_{10}(|Au + \lambda\sigma^{-2\gamma} u|_{2, s} + \sum_{<\mu, q> \leq 2N} \sum_{\alpha < \mu} |a_\mu D^\alpha u|_{2, s} + |u|_{2, s-N-\gamma})$$
$$\leq c_{11}(|Au + \lambda\sigma^{-2\gamma} u|_{2, s} + \sum_{<\alpha, q> < 2N} (|D^\alpha u|_{2, s} + |D^\alpha u|_{2, s+<\alpha, q>-N-\gamma}) + |u|_{2, s-N-\gamma}).$$

D'altra parte osserviamo che dall'ipotesi

$$\gamma \geq \sup_{<\alpha, q> < 2N} <\alpha, q> - N$$

segue che si ha

$$|D^\alpha u|_{2, s} \leq c_{12} |D^\alpha u|_{2, s+<\alpha, q>-N-\gamma} \qquad \text{per } <\alpha, q> < 2N.$$

Tenendo presente che $u = \sum_{k=1}^{p} u_k$, da quest'ultima relazione, dalla (13.9) e dal lemma 7.5 si deduce con ovvie considerazioni la tesi.

Sussiste inoltre il seguente teorema di unicità:

TEOREMA 13.2. - *Sia A un operatore della forma* (12.26) *e supponiamo che siano verificate le ipotesi del lemma* 12.4, *l'ipotesi a_2) e le condizioni $a_{hk}(x) \in C^{|k|}(\overline{\Omega} - S)$, $D^{k-\alpha} a_{hk}(x) \in L^\infty_{2N-<\alpha+h, q>}(\Omega)$ per $\alpha < k$.*

Esistono due costanti $\lambda_0 > 0$ e $\eta_0 \in]0, 1/2[$ tali che per ogni $\lambda \geq \lambda_0$, per ogni $s \in [N - \eta_0, N + \eta_0]$ e per ogni $u \in W^{2N}_s(\Omega, \partial/\partial n_i)$ sussiste la limitazione

$$\|u\|_{W^{2N}_s(\Omega)} \leq c \|Au + \lambda\sigma^{-\beta} u\|_{L^2_s(\Omega)}, \tag{13.10}$$

dove c è una costante indipendente da u, s e λ.

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo il seguente

LEMMA 13.2. - *Siano verificate le ipotesi del lemma* 12.4 *e la condizione a_2).*

Esistono due costanti $\lambda_0 > 0$ e $s_0 \in]0, 1/2[$ tali che per ogni numero complesso λ, con $Re\, \lambda \geq \lambda_0$, per ogni $s \in [-s_0, s_0]$ e per ogni $u \in H^N_{0, s}(\Omega)$ sussiste la limitazione

$$\|u\|^2_{W^N_s(\Omega)} \leq c Re \left(a_s(u, u) + \lambda \int_\Omega \sigma^{-\beta} u \cdot \overline{\sigma^{2s} u}\, dx\right), \tag{13.11}$$

dove c è una costante positiva indipendente da u, s e λ.

Infatti, dai lemmi 12.4 e 13.1 si deduce evidentemente che esiste una costante $s_0 \in]0, 1/2[$ tale che per ogni $s \in [-s_0, s_0]$ e per ogni $u \in H^N_{0,s}(\Omega)$ si ha

$$\|u\|^2_{W^N_s(\Omega)} \leq c\, Re\, a_s(u, u) + c_0 \|u\|^2_{2, s-\beta/2}, \tag{13.12}$$

dove c e c_0 sono due costanti positive indipendenti da u e s.

Dalla (13.12) si deduce evidentemente la tesi.

Dimostrazione del teorema 13.2. - La tesi è un'ovvia conseguenza dei lemmi 12.3, 12.5, 13.2 e dell'osservazione che per ogni $u \in W^{2N}_s(\Omega, \partial/\partial n_i)$ riesce

$$Re\left(a_{s-N}(u, u) + \lambda \int_\Omega \sigma^{-\beta} u \cdot \overline{\sigma^{2(s-N)} u}\, dx\right)$$

$$= Re \int_\Omega (Au + \lambda\sigma^{-\beta}u) \cdot \overline{\sigma^{2(s-N)} u}\, dx \leq |Au + \lambda\sigma^{-\beta}u|_{2,s} \cdot |u|_{2, s-2N}.$$

14. - Teoremi di esistenza.

Consideriamo ora il problema

$$\begin{aligned} & u \in W^{2N}_s(\Omega, \partial/\partial n_i), \\ & Au + \lambda\sigma^{-2\gamma} u = f \text{ in } \Omega, \qquad f \in L^2_s(\Omega), \end{aligned} \tag{14.1}$$

dove γ è un fissato numero reale tale che

$$\sup_{<\alpha, q> < 2N} <\alpha, q> - N \leq \gamma < N. \tag{14.2}$$

Sussiste il seguente

Teorema 14.1. - *Nelle stesse ipotesi del teorema* 13.1, *esistono due costanti* $\lambda_0 > 0$ *e* $\eta_0 \in]0, 1/2[$ *tali che per ogni* $\lambda \geq \lambda_0$, *per ogni* $s \in [N - \eta_0, N + \eta_0]$ *e per ogni* $f \in L^2_s(\Omega)$ *il problema* (14.1) *è univocamente risolubile.*

Inoltre, per ogni λ *complesso e per ogni* $s \in [N - \eta_0, N + \eta_0]$, (14.1) *è un problema a indice e il suo indice è nullo.*

Cominciamo con l'osservare che la tesi è vera nell'ulteriore ipotesi che i coefficienti $a_\mu(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Infatti allora la prima parte del teorema si dimostra, tenendo conto del teorema di unicità 13.1, con ragionamenti analoghi a quelli tenuti per stabilire il teorema 8.3, e la seconda parte si ottiene poi come conseguenza del lemma 7.1 di [33] e del lemma 7.6.

Supponendo ora verificate le sole ipotesi del teorema, assegnamo, per ogni μ tale che $<\mu, q> = 2N$, una successione $\{a_\mu^{(k)}(x)\}$ di funzioni equicontinue ed equilimitate di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$, uniformemente convergente in $\bar{\Omega}$ ad $a_\mu(x)$, e, per ogni μ tale che $<\mu, q> < 2N$, una successione $\{a_\mu^{(k)}(x)\}$ di funzioni di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$ ed equilimitate in $L^\infty_{N+\gamma-<\mu,q>}(\Omega)$, convergente quasi ovunque in Ω ad $a_\mu(x)$.

Supponiamo inoltre, ciò che è lecito, che si abbia

$$Re \sum_{<\mu, q>=2N} a_\mu^{(k)}(x)\xi^\mu \geq a_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{2N_i} \qquad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \forall \xi \in R^n,$$

dove a_0 è una costante positiva indipendente da x, ξ e k.

Posto

$$A_k = \sum_{<\mu, q>\leq 2N} a_\mu^{(k)}(x) D^\mu,$$

consideriamo il problema

$$(14.3) \qquad \begin{aligned} &u \in W_s^{2N}(\Omega, \partial/\partial \boldsymbol{n}_i), \\ &A_k u + \lambda\sigma^{-2\gamma} u = f \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

Da quanto premesso e dal teorema 13.1 di unicità segue che esistono due costanti $\lambda_0 > 0$ e $\eta_0 \in]0, 1/2[$, indipendenti da k, tali che per ogni $\lambda \geq \lambda_0$, per ogni $s \in [N - \eta_0, N + \eta_0]$ e per ogni $f \in L_s^2(\Omega)$ il problema (14.3) ammette un'unica soluzione u_k la quale soddisfa la limitazione

$$(14.4) \qquad \|u_k\|_{W_s^{2N}(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_s^2(\Omega)},$$

dove c è una costante indipendente da k.

Tenuto conto del lemma 7.6, dalla (14.4) segue che da $\{u_k\}$ si può estrarre una successione debolmente convergente in $W_s^{2N}(\Omega)$ e fortemente convergente in $W_\alpha^j(\Omega)$, per ogni $j \in J(\mathfrak{M})$ e $< 2N$ e per ogni $\alpha > s + j - 2N$, verso una funzione $u \in W_s^{2N}(\Omega)$, la quale, evidentemente, riesce una soluzione del problema (14.1).

Da tali considerazioni, dal teorema 13.1 di unicità, dal lemma 7.1 di [33] e dal lemma 7.6 si deduce la tesi.

Consideriamo inoltre il problema

$$(14.5) \qquad \begin{aligned} &u \in W_s^{2N}(\Omega, \partial/\partial \boldsymbol{n}_i), \\ &Au + \lambda\sigma^{-\beta} u = f \text{ in } \Omega, \qquad f \in L_s^2(\Omega), \end{aligned}$$

dove β è un fissato numero reale tale che

$$0 \leq \beta < 2N. \tag{14.6}$$

Vogliamo dimostrare il seguente

TEOREMA 14.2. - *Nelle stesse ipotesi del teorema* 13.2, *esistono due costanti* $\gamma_0 > 0$ *e* $\eta_0 \in]0, 1/2[$ *tali che per ogni numero complesso* λ *con* $Re\,\lambda \geq \gamma_0$, *per ogni* $s \in [N - \eta_0, N + \eta_0]$ *e per ogni* $f \in L^2_s(\Omega)$ *il problema* (14.5) *è univocamente risolubile.*

Inoltre (14.5) *è, per ogni* λ *complesso e per ogni* $s \in [N - \eta_0, N + \eta_0]$, *un problema a indice e il suo indice è nullo.*

Infatti, con ragionamenti del tipo di quelli tenuti per dedurre dal teorema 13.1 la tesi del teorema 14.1, si deduce dal teorema 13.2 che esistono due costanti $\lambda_1 > 0$ e $\eta_1 \in]0, 1/2[$ tali che per ogni $\lambda \geq \lambda_1$, per ogni $s \in [N - \eta_1, N + \eta_1]$ e per ogni $f \in L^2_s(\Omega)$ il problema (14.5) è univocamente risolubile e che inoltre (14.5) è, per ogni λ complesso e per ogni $s \in [N - \eta_1, N + \eta_1]$, un problema a indice di indice nullo.

D'altra parte, tenuto conto del lemma 12.5, si ha che una soluzione di (14.5) è anche una soluzione del problema

$$\begin{aligned} &u \in H^N_{0,\, s-N}(\Omega), \\ &a_{s-N}(u, v) + \lambda \int_\Omega \sigma^{-\beta} u \cdot \overline{\sigma^{2(s-N)} v}\, dx = \int_\Omega f \cdot \overline{\sigma^{2(s-N)} v}\, dx \qquad \forall v \in H^N_{0,\, s-N}(\Omega), \end{aligned} \tag{14.7}$$

e quindi dal lemma 13.2 segue che per ogni λ complesso con $Re\,\lambda \geq \lambda_0$ e per ogni $s \in [N - s_0, N + s_0]$ (dove λ_0 e s_0 sono le costanti definite dal lemma 13.2) il problema (14.5) ammette al più una soluzione.

Da tali considerazioni si deduce in modo ovvio la tesi.

OSSERVAZIONE 14.1. - Supponiamo che i coefficienti $a_\mu(x)$ di A siano sufficientemente regolari (ad es., supponiamo che sia soddisfatta l'ipotesi $\mathcal{H}_6$)).

Allora dal lemma 11.3 segue che, se sono anche verificate le ipotesi del teorema 14.1, le condizioni di compatibilità per il problema (14.1) sono date dall'ortogonalità, secondo il prodotto scalare in $L^2(\Omega)$, di f alle soluzioni del problema omogeneo

$$v \in W^{2N}_{-s+2N}(\Omega, \partial/\partial n_i),$$

$$A^* v + \bar{\lambda} \sigma^{-2\gamma} v = 0 \text{ in } \Omega.$$

Analogamente si ha che se, oltre alle suddette ipotesi di regolarità sui coefficienti $a_\mu(x)$ di A, sono verificate le ipotesi del teorema 14.2, le condizioni di compatibilità per il problema (14.5) sono date dall'ortogonalità, secondo il prodotto scalare in $L^2(\Omega)$, di f alle soluzioni del problema omogeneo

$$v \in W^{2N}_{-s+2N}(\Omega\,,\ \partial/\partial n_i)\,,$$

$$A^*v + \bar{\lambda}\sigma^{-\beta}v = 0 \text{ in } \Omega\,.$$

OSSERVAZIONE 14.2. - Supponendo verificate le ipotesi del teorema 13.1, consideriamo il problema

$$\text{(14.8)} \qquad \begin{aligned} &u \in W^{2N}_s(\Omega,\ \partial/\partial n_i),\\ &Au = f \text{ in } \Omega, \qquad f \in L^2_s(\Omega). \end{aligned}$$

Dal teorema 14.1 segue che esiste una costante $\eta_0 \in]0,\ 1/2[$ tale che il problema (14.8) ha nucleo di dimensione finita per ogni $s \leq N + \eta_0$ ed è un problema ad indice, con indice nullo, per ogni $s \in [N - \eta_0,\ N + \eta_0]$.

Vogliamo ricercare in un esempio (che riferiremo al caso ellittico, cioè al caso $t = 1$) l'insieme dei valori di s per cui il problema ha nucleo di dimensione finita e l'insieme dei valori di s per i quali il problema è un problema a indice.

Nel piano R^2, consideriamo il cerchio $\Omega = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ e indichiamo con $\rho(x,\ y)$ la distanza di $(x,\ y)$ da $\partial\Omega$.

Allora se $A = \Delta =$ operatore di LAPLACE, il problema (14.8) diventa

$$\text{(14.9)} \qquad \begin{aligned} &u \in W^2_s(\Omega),\\ &\Delta u = f \text{ in } \Omega\,, \qquad f \in L^2_s(\Omega). \end{aligned}$$

Se $s > 3/2$, il problema omogeneo associato a (14.9) ha infinite soluzioni linearmente indipendenti. Infatti, utilizzando le coordinate polari $(r,\ \theta)$, si verifica facilmente che tali, ad es., sono le funzioni

$$u_n(r,\ \theta) = r^n(\cos n\theta + \operatorname{sen} n\theta), \qquad n > 0.$$

Inoltre, osserviamo che *l'aggiunto formale* di (14.9) è il problema

$$\text{(14.10)} \qquad \begin{aligned} &v \in W^2_{-s+2}(\Omega),\\ &\Delta v = g \text{ in } \Omega\,, \qquad g \in L^2_{-s+2}(\Omega)\,, \end{aligned}$$

e che l'omogeneo associato a tale problema ha infinite soluzioni linearmente indipendenti per $s < 1/2$.

D'altra parte, se $s < 3/2$, da noti risultati (cfr., ad es.: il teorema 2.2 del cap. 6 di [26], l'osservazione 5.1 di [33]) segue che una funzione $u \in W_s^2(\Omega)$ ha traccia nulla su $\partial\Omega$ (si tenga anche presente che nel caso considerato si ha $W_s^2(\Omega) = H_{0,s}^2(\Omega)$), nel senso che

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |u(r, \theta)|^2 \, d\theta = 0, \tag{14.11}$$

e quindi una soluzione del problema omogeneo associato a (14.9) è una funzione armonica in Ω e soddisfacente la (14.11).

Siccome la sola funzione nulla gode di queste ultime proprietà (cfr., ad es., il n. 2 di G. CIMMINO [14]), si conclude che il problema omogeneo associato a (14.9) per $s < 3/2$ ammette la sola soluzione nulla.

Analogamente si verifica che per $s > 1/2$ il problema omogeneo associato a (14.10) ammette la sola soluzione nulla.

Inoltre, tenuto conto dell'osservazione 14.1, si ha che per ogni $s \in]1/2, 3/2[$ e per ogni $f \in L_s^2(\Omega)$ il problema (14.9) è univocamente risolubile.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON, *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., 15 (1962), pp. 119-147.

[2] — —, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand Mathematical Studies, Princeton, 1965.

[3] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), pp. 623-727.

[4] L. ARKERYD, *On L^p estimates for quasi-elliptic boundary problems*, Math. Scand., 24 (1969), pp. 141-144

[5] G. C. BAROZZI, *Sul multi-indice degli operatori quasi-ellittici*, Boll. U. M. I., s. III, 19 (1964), pp. 289-299.

[6] — —, *Sui polinomi propriamente quasi-ellittici in due variabili*, Boll. U. M. I., s. III, 20 (1965), pp. 185-190.

[7] — —, *Un problema al contorno non omogeneo in un dominio angoloso per equazioni fortemente quasi-ellittiche in due variabili*, (I) e (II), Rend. Sem. Mat. Padova, 44 (1970), pp. 27-63 e pp. 319-337.

[8] A. CAVALLUCCI, *Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche*, Ann. di Mat., 67 (1965), pp. 143-167.

[9] — —, *Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche relativamente a domini normali*, Boll. U. M. I., s. III, 19 (1964), pp. 465-477.

[10] — —, *Alcuni teoremi di tracce*, Atti Sem. Mat. Fis. Modena, 15 (1966), pp. 137-157.

[11] — —, *Costruzione di un rilevamento per la traccia iperpiana dello spazio* $H_\mu(R^n)$, Boll. U. M. I., s. III, 22 (1967), pp. 491-496.

[12] — —, *Sulla regolarità delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche in un semispazio*, Atti Sem. Mat. Fis. Modena, 17 (1968), pp. 1-18.

[13] — —, *Sulla regolarità delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche non lineari*, Rend. di Mat., 1 (1968), pp. 385-425.

[14] G. Cimmino, *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 61 (1938), pp. 177-221.

[15] G. Geymonat, P. Grisvard, *Problemi ai limiti lineari ellittici negli spazi di Sobolev con peso*, Le Matematiche, 22 (1967), pp. 212-249.

[16] E. Giusti, *Equazioni quasi-ellittiche e spazi* $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, \delta)$, (I) e (II), Ann. di Mat., 75 (1967), pp. 313-353; Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 21 (1967), pp. 353-372.

[17] P. Grisvard, *Équations différentielles abstraites*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 2 (1969), pp. 311-395.

[18] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1963.

[19] M. Itano, *On a trace theorem for the space* $H^\mu(R^n)$, J. Sci. Hiroshima Univ., 30 (1966), pp. 11-29.

[20] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. I e II, Dunod Éditeur, Paris, 1968.

[21] T. Matsuzawa, *On quasi-elliptic boundary problems*, Trans. Amer. Math. Soc., 133 (1968), pp. 241-265.

[22] — —, *Sur les équations quasi-elliptiques et les classes de Gevrey*, Bull. Soc. Math. France, 96 (1968), pp. 243-263.

[23] C. Miranda, *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*, Ann. di Mat., 59 (1962), pp. 189-212.

[24] — —, *Partial differential equations of elliptic type*, Springer-Verlag, 1970.

[25] J. Nečas, *Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 16 (1962), pp. 305-326.

[26] — —, *Les Méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris; Academia, Éditeurs, Prague, 1967.

[27] M. Pagni, *Problemi al contorno per una certa classe di equazioni lineari alle derivate parziali*, Atti Sem. Mat. Fis. Modena, 13 (1964), pp. 119-164.

[28] C. Parenti, *Problema di Dirichlet in un semispazio relativo ad una classe di operatori quasi-ellittici*, Boll. U. M. I, s IV, 3 (1970), pp. 104-121.

[29] — —, *Valutazioni a priori e regolarità per soluzioni di equazioni quasi-ellittiche*, in corso di stampa sui Rend. Sem. Mat. Padova.

[30] J. Peetre, *A proof of the hypoellipticity of formally hypoelliptic differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), pp. 737-744.

[31] B. Pini, *Su un problema tipico relativo a una certa classe di equazioni ipoellittiche*, Atti Acc. Sci. Ist. Bologna, s. 12, 1 (1964), pp. 1-26.

[32] — —, *Sulla rappresentazione delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche in una regione angolosa*, Ann. di Mat., 80 (1968), pp. 359-372.

[33] M. Troisi, *Problemi ellittici con dati singolari*, Ann. di Mat., 83 (1969), pp. 363-407.

[34] — —, *Ulteriori contributi allo studio dei problemi ellittici con dati singolari*, Ric. di Mat., 19 (1970), pp. 9-25.

[35] — —, *Ulteriori contributi alla teoria degli spazi di Sobolev non isotropi*, Ric. di Mat., 20 (1971), pp. 90-117.

[36] L. R. VOLEVICH, *Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi-ellittici* (in russo), Mat. Sbornik, 59 (1962), pp. 3-52.

[37] L. R. VOLEVICH, B. P. PANEYAKH, *Alcuni spazi di funzioni generalizzate e teoremi di immersione* (in russo), Usp. Mat. Nauk, 20 (1965), pp. 3-74; trad. inglese: Russian Math. Surveys, 20 (1965), pp. 1-73.