

# PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE IN TEORIA DEL TRASPORTO DI MASSA

GIUSEPPE BUTTAZZO

SOMMARIO. La teoria del trasporto di massa, iniziata con Gaspard Monge (1781), si occupa dello studio dei vari modi con cui una data distribuzione di massa può essere trasportata in una configurazione diversa, ugualmente assegnata, minimizzando un funzionale che rappresenta il costo totale del trasporto. L'ambiente matematico naturale per questo tipo di problemi è quello di uno spazio metrico  $X$  e le distribuzioni di massa sono le misure di probabilità su  $X$ , mentre lo stato del sistema è descritto dall'equazione (alle derivate parziali) di Monge-Kantorovich. È interessante il legame tra la teoria del trasporto e vari problemi di ottimizzazione di forma; inoltre, facendo variare la distanza in  $X$  in opportune classi di controlli ammissibili, si ottengono diversi modelli di problemi di pianificazione urbana come ad esempio: la progettazione di reti di trasporto efficienti, il trasporto di massa con fenomeni di concentrazione (strutture ramificate) e/o di congestione (movimento di una folla), il posizionamento di un gran numero di punti di distribuzione in una regione urbana, la progettazione ottima dei quartieri di una regione urbana, la determinazione dei prezzi di pedaggio per l'utilizzazione di una rete di trasporto. Nel lavoro si illustrano alcuni di questi esempi.

## 1. INTRODUZIONE

La teoria del trasporto di massa iniziò con Gaspard Monge (1746-1818) che nel 1781 propose in [94] un modello per descrivere il lavoro complessivo necessario a trasportare una quantità di massa da una data configurazione ad un'altra, entrambe assegnate. Più precisamente, indicando con  $A \subset \mathbb{R}^N$  la configurazione iniziale della massa e con  $B \subset \mathbb{R}^N$  quella finale (rispettivamente *déblais* e *remblais* nella terminologia di Monge), si tratta di determinare una funzione  $T : A \rightarrow B$  tale che, indicando con  $T(x)$  la posizione in cui la generica particella  $x \in A$  viene trasportata, il costo complessivo del trasporto risulti minimo. Il costo complessivo del trasporto viene ottenuto integrando il costo elementare  $|x - T(x)|$  per trasportare  $x$  in  $T(x)$ . Si è quindi ricondotti al problema di minimo

$$\min \left\{ \int_A |x - T(x)| dx : T \text{ trasporta } A \text{ in } B \right\}.$$

Il problema di Monge si presta immediatamente ad essere generalizzato sostituendo lo spazio euclideo con uno spazio metrico  $(X, d)$ ,  $A$  e  $B$  con due misure  $f^+$

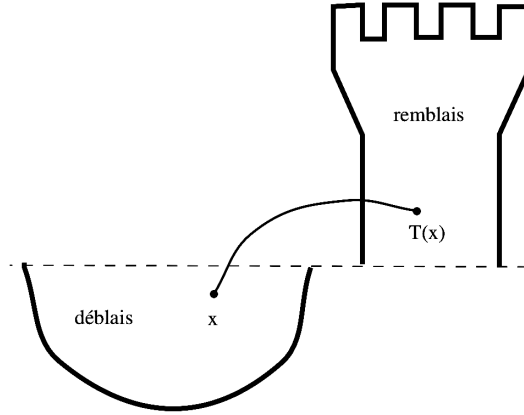


FIGURA 1. Il problema del trasporto di Monge.

ed  $f^-$  aventi la stessa massa (nel seguito normalizzeremo la massa a 1 prendendo misure di probabilità), ed il costo elementare  $|x - T(x)|$  con un costo generale  $c(x, T(x))$ . In tal modo il problema di Monge diventa

$$(1.1) \quad \min \left\{ \int c(x, T(x)) df^+(x) : T^\# f^+ = f^- \right\}$$

dove la corretta definizione di trasporto di una misura in un'altra viene dato mediante la misura immagine:

$$T^\# f^+(E) = f^+(T^{-1}(E)).$$

È immediato osservare che per misure generiche  $f^+, f^-$  la classe delle funzioni di trasporto può risultare vuota; ad esempio, se  $f^+$  ha  $h$  atomi ed  $f^-$  ha  $k$  atomi, con  $h < k$ , non esistono funzioni  $T$  che trasportano  $f^+$  su  $f^-$ .

Analogamente, si possono costruire facilmente esempi in cui  $f^+$  ed  $f^-$  sono non atomiche ma il problema (1.1) non ha soluzione. Indicando con  $\mathcal{H}^1$  la misura di Hausdorff unidimensionale in  $\mathbb{R}^2$ , basta infatti considerare  $f^+ = \mathcal{H}^1 \llcorner A$  ed  $f^- = \frac{1}{2}\mathcal{H}^1 \llcorner B + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1 \llcorner C$  come nella figura seguente, per avere che, se  $L$  è la distanza tra i segmenti  $A$  e  $B$  ed  $H$  è la lunghezza dei segmenti, l'estremo inferiore dei costi di trasporto, con  $c(x, y) = |x - y|$  è  $HL$ , mentre ogni funzione di trasporto ha un costo strettamente maggiore di  $HL$ .

In generale, quando  $c(x, y) = |x - y|$ , non c'è unicità delle funzioni di trasporto ottime come mostra l'esempio seguente in dimensione uno (detto *book shifting* per l'analogia con lo spostamento di volumi da uno scaffale ad un altro). Indichiamo con  $\mathcal{L}^1$  la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}$  e consideriamo  $f^+ = 1_{[0,a]}\mathcal{L}^1$ ,  $f^- = 1_{[b,a+b]}\mathcal{L}^1$ ; è facile verificare che entrambe le funzioni di trasporto  $T_1(x) = b + x$  (traslazione)

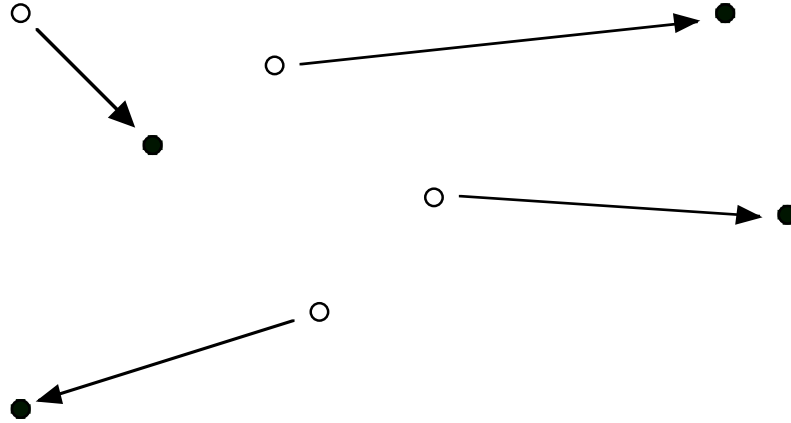


FIGURA 2. Una funzione di trasporto per misure atomiche.

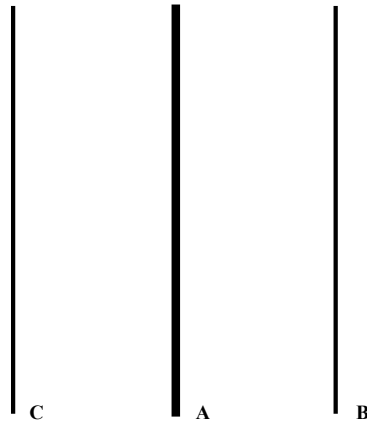


FIGURA 3. Un caso di non esistenza di funzioni di trasporto ottime.

e  $T_2(x) = a + b - x$  (riflessione) sono ottime e che in modo simile si possono costruire infinite funzioni di trasporto ottime.

Per quanto riguarda l'esistenza di funzioni di trasporto ottime nel caso di spazi euclidei, si ha il risultato seguente, dimostrato in forma incompleta da Sudakov [111] e ridimostrato completamente da vari autori (Ambrosio e Pratelli [11], Evans e Gangbo [74], Caffarelli, Feldman e McCann [57], Trudinger e Wang [113]).

**Teorema 1.1.** *Siano  $f^+, f^-$  due probabilità su  $\mathbb{R}^N$ , con supporto compatto o più in generale con momenti del primo ordine finiti, e supponiamo che  $f^+$  sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Se  $|\cdot|$  indica la norma euclidea in  $\mathbb{R}^N$  e  $c(x, y) = |x - y|$  si ha che il problema di Monge (1.1) ammette una funzione  $T$  di trasporto ottima.*

L'esistenza di funzioni di trasporto ottime per norme (o più in generale per distanze) qualsiasi, supponendo l'assoluta continuità delle misure  $f^+, f^-$ , è un

problema ancora aperto; per una discussione sui casi finora noti e sulle varie tecniche di dimostrazione usate in letteratura rinviamo a [11].

Per ovviare alla mancanza di esistenza di una funzione di trasporto ottima Kantorovich formulò in [89] il problema di Monge (1.1) in forma *rilassata*, in cui invece di una funzione di trasporto si cerca un *piano di trasporto*, cioè una misura  $\gamma$  sullo spazio prodotto  $X \times X$  avente  $f^+$  ed  $f^-$  come *marginali*, nel senso che:

$$\pi_1^\# \gamma = f^+, \quad \pi_2^\# \gamma = f^-$$

dove  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sono le proiezioni da  $X \times X$  sul primo e secondo fattore rispettivamente. In tal modo il problema del trasporto ottimo diventa

$$(1.2) \quad \min \left\{ \int_{X \times X} c(x, y) d\gamma(x, y) : \pi_1^\# \gamma = f^+, \pi_2^\# \gamma = f^- \right\}.$$

Osserviamo che, essendo (1.2) un problema di minimo per un funzionale lineare nell'incognita  $\gamma$ , ed essendo lo spazio delle misure  $\gamma$  ammissibili compatto per la topologia debole\* delle misure, si ottiene l'esistenza di un piano di trasporto ottimo sotto ipotesi molto generali sullo spazio  $X$  e sul costo  $c$  (ad esempio, se  $X$  è compatto e  $c$  è continua).

Prendendo  $c(x, y) = |d(x, y)|^p$  si ottiene la distanza di Wasserstein tra due probabilità  $f, g$ :

$$(1.3) \quad W_p(f, g) = \min \left\{ \left( \int_{X \times X} |d(x, y)|^p d\gamma(x, y) \right)^{1/p} : \pi_1^\# \gamma = f, \pi_2^\# \gamma = g \right\}.$$

Se  $X$  è compatto le distanze  $W_p$  sono tutte topologicamente equivalenti e le rispettive convergenze generate coincidono con la convergenza debole\*.

Per le applicazioni che seguono conviene mettere in evidenza la dipendenza del costo dalle misure  $f^+, f^-$  e dalla distanza  $d$ , indicando con  $M(f^+, f^-, d)$  il valore minimo del problema (1.2), in cui si fissa ad esempio  $c(x, y) = d(x, y)$ .

I problemi di trasporto ottimo presentano forti legami con numerosi campi di ricerca e relative applicazioni; citiamo ad esempio:

- ottimizzazione di forma e di densità per strutture elastiche;
- approssimazione delle densità ottime;
- ottimizzazione di reti di trasporto;
- problemi di pianificazione urbana;
- problemi di posizionamento e di irrigazione;
- modelli di traffico con effetti di concentrazione e di congestione;
- curve nello spazio delle misure ed applicazioni al movimento di una folla.

Nei capitoli seguenti presenteremo solo alcuni dei problemi elencati sopra, insieme ai risultati più significativi, rinviando alla bibliografia per ogni ulteriore approfondimento.

## 2. OTTIMIZZAZIONE DI FORMA E DI DENSITÀ PER STRUTTURE ELASTICHE

Un problema fondamentale della meccanica strutturale consiste nel determinare, a parità di peso, la struttura che meglio resiste all'azione di forze esterne assegnate. Più precisamente, limitandoci al caso scalare di una membrana elastica, assegnata una *regione di ammissibilità*  $Q \subset \mathbb{R}^N$ , una funzione  $f \in L^2(Q)$ , ed una quantità  $m > 0$ , si tratta di determinare una distribuzione di massa  $\mu$  che soddisfi i vincoli

$$\text{supp } \mu \subset Q, \quad \int_Q d\mu = m$$

e che minimizzi il funzionale di *compliance*

$$\mathcal{C}(\mu) = - \inf \left\{ \int_Q \frac{1}{2} |Du|^2 d\mu - \int_Q f u dx : u \in C^1(Q) \right\}.$$

La variabile di stato  $u$  rappresenta lo spostamento verticale della membrana, mentre la variabile di controllo  $\mu$  rappresenta la densità di materiale che va messa in ogni punto per ottenere la struttura migliore. Non essendoci regioni in cui il dato  $u$  viene assegnato è necessario assumere la condizione  $\int_Q f dx = 0$ . Naturalmente, si possono considerare anche casi in cui si impone la condizione di Dirichlet  $u = 0$  su  $K$ , dove  $K \subset Q$  è un insieme fissato, nel qual caso si possono considerare funzioni  $f \in L^2(Q)$  senza ulteriori vincoli. Inoltre, in molti problemi le forze esterne  $f$  non sono in  $L^2(Q)$  ma possono avere dei termini singolari; conviene considerare il caso generale  $f \in \mathcal{M}(Q)$  in cui le forze esterne sono misure con segno su  $Q$ , ed allora il problema di ottimizzazione diventa

$$(2.1) \quad \min \left\{ \mathcal{C}(\mu) : \text{supp } \mu \subset Q, \int_Q d\mu = m \right\}$$

dove

$$\mathcal{C}(\mu) = - \inf \left\{ \int_Q \frac{1}{2} |Du|^2 d\mu - \int_Q u df : u \in C^1(Q), u = 0 \text{ su } K \right\}.$$

Se  $K = \emptyset$  bisogna supporre  $\int_Q df = 0$ , mentre se  $K \neq \emptyset$  ogni  $f \in \mathcal{M}(Q)$  è ammissibile. Va osservato che nel caso in cui  $f \in \mathcal{M}(Q)$  può succedere che  $\mathcal{C}(\mu) = +\infty$  per una larga classe di misure  $\mu$ , anche se con densità molto regolare; ciò ad esempio succede se  $f$  è una misura discreta e  $\mu = a(x) dx$  con  $a$  limitata. Tuttavia, proprio a causa del fatto che  $\mathcal{C}(\mu) = +\infty$ , tali misure non modificano il problema di minimo (2.1).

Il caso di strutture elastiche generali, in cui le forze esterne sono vettoriali, è analogo: il termine  $\frac{1}{2} |Du|^2$  va rimpiazzato da una forma quadratica  $j(e(u))$ , dove  $e(u)$  è la parte simmetrica della matrice gradiente  $Du$ , ed il termine di lavoro delle forze esterne diventa  $\int_Q u \cdot df$ . Ad esempio, nel caso di un materiale omogeneo e isotropo si ha

$$(2.2) \quad j(e) = \beta |e|^2 + \frac{\alpha}{2} |\text{tr}(e)|^2$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono le costanti di Lamé.

Esiste un legame molto stretto tra la teoria del trasporto di massa e l'ottimizzazione delle strutture elastiche, sottoposte all'azione di una forza esterna e con vincolo di massa. Dati  $Q$  e  $K$  come sopra, conviene introdurre la semi-distanza geodetica

$$d_{Q,K}(x, y) = \sup \{ |\phi(x) - \phi(y)| : \phi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N), \phi = 0 \text{ su } K, |D\phi| \leq 1 \text{ su } Q \}.$$

Nel caso  $K = \emptyset$  e  $Q$  convesso  $d_{Q,K}$  coincide con l'usuale distanza euclidea; altrimenti  $d_{Q,K}$  è la distanza geodetica su  $Q$  dove non vengono contati i tratti percorsi su  $K$  (o che iniziano e terminano su  $K$ ). Indichiamo poi con  $\text{Lip}_1(Q, K)$  la classe delle funzioni 1-lipschitziane rispetto alla distanza  $d_{Q,K}$ .

Se nel problema di trasporto (1.2) con  $c(x, y) = d_{Q,K}(x, y)$  poniamo  $f = f^+ - f^-$ , possiamo considerare il problema duale:

$$(2.3) \quad \max \left\{ \int u df : u \in \text{Lip}_1(Q, K) \right\}.$$

Si ottiene facilmente l'esistenza di una soluzione, che viene chiamata *potenziale di Kantorovich* del problema di trasporto. Tale soluzione può essere caratterizzata equivalentemente mediante un'equazione alle derivate parziali di tipo ellittico con coefficienti misure, detta *equazione di Monge-Kantorovich*:

$$(2.4) \quad \begin{cases} i) & -\text{div}(\mu D_\mu u) = f \quad \text{su } \mathbb{R}^N \setminus K \\ ii) & u \in \text{Lip}_1(Q, K) \\ iii) & |D_\mu u| = 1 \quad \mu\text{-q.o.} \\ iv) & \text{supp } \mu \subset \overline{Q}, \quad \mu(K) = 0. \end{cases}$$

Per il senso preciso da dare alla *derivata tangenziale*  $D_\mu u$  e per la teoria degli spazi di Sobolev rispetto ad una misura rinviamo a [23, 25, 26]. Va osservato che la misura  $\mu$ , detta *densità di trasporto* è una delle incognite (assieme ad  $u$ ) in (2.4); sono note varie proprietà della misura  $\mu$ :

- se  $f$  è una misura allora  $\mu$  è una misura (cfr. [23, 26]), non unica in generale;
- se  $f^+ \in L^1$  (oppure  $f^- \in L^1$ ) allora  $\mu$  è unica e si ha  $\mu \in L^1$  (cfr. [4]);
- se  $f \in L^p$  con  $1 \leq p \leq +\infty$  allora  $\mu \in L^p$  (cfr. [69, 71, 72, 74]).

Riportiamo qui i risultati principali, rinviando ai lavori [26, 23] per ogni ulteriore dettaglio. Limitandoci per semplicità al caso scalare si ha il risultato seguente.

**Teorema 2.1.** *Il problema di ottimizzazione (2.1) ha una soluzione  $\mu_{opt}$ . Tale soluzione coincide con un multiplo della misura  $\mu$  che risolve l'equazione di Monge-Kantorovich (2.4). Inoltre lo spostamento verticale  $u_{opt}$  corrispondente alla distribuzione di massa  $\mu_{opt}$  coincide con un multiplo del potenziale di Kantorovich del problema di trasporto duale (2.3).*

Il caso vettoriale è analogo, con il sistema dell'elasticità lineare al posto dell'equazione ellittica (cfr. [23, 26]).

Il teorema precedente ci permette di rappresentare le soluzioni del problema di ottimizzazione (2.1) come soluzioni di un problema di trasporto di massa; alcuni esempi di densità ottime di massa sono riportati qui di seguito.

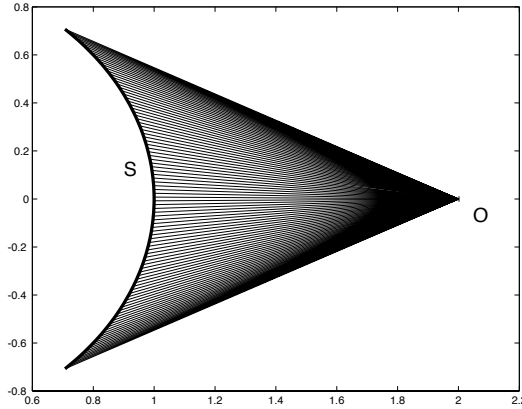


FIGURA 4. Densità ottima per  $f = \delta_O - \mathcal{H}^1[S]$  senza regione di Dirichlet.

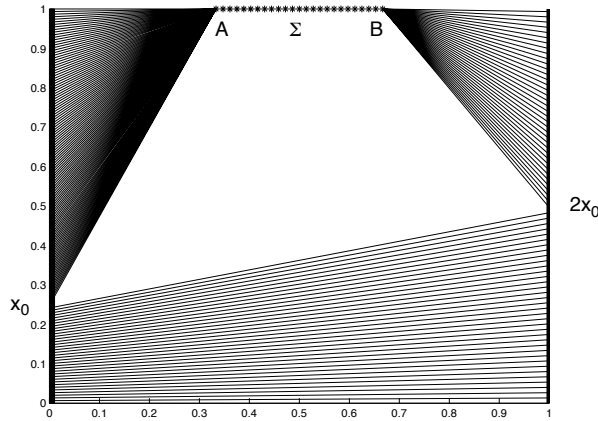


FIGURA 5. Densità ottima per  $f = 2\mathcal{H}^1[\{x = 0\}] - \mathcal{H}^1[\{x = 1\}]$  con regione di Dirichlet  $\Sigma$ .

### 3. APPROSSIMAZIONE DELLE DENSITÀ OTTIME

Abbiamo visto nel capitolo precedente come la determinazione delle densità ottime per i problemi di ottimizzazione strutturale (2.1) si riduca alla soluzione di un problema di trasporto o equivalentemente alla soluzione dell'equazione ellittica (2.4) con coefficienti misure. Come già osservato, l'equazione (2.4) ha come incognite sia  $u$  che  $\mu$ , ed è accoppiata all'equazione eikonale  $|D_\mu u| = 1$ .

In letteratura sono stati proposti vari metodi numerici per la risoluzione dei problemi di ottimizzazione di forma e di ottimizzazione di densità; segnaliamo

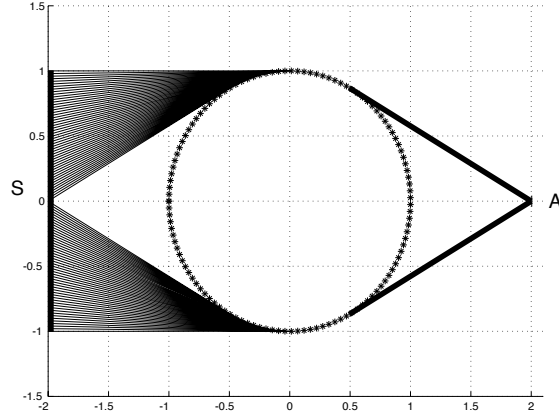


FIGURA 6. Densità ottima per  $f = \mathcal{H}^1 \llcorner S - 2\delta_A$  senza regione di Dirichlet e con  $Q$  non convesso, il complementare del cerchio.

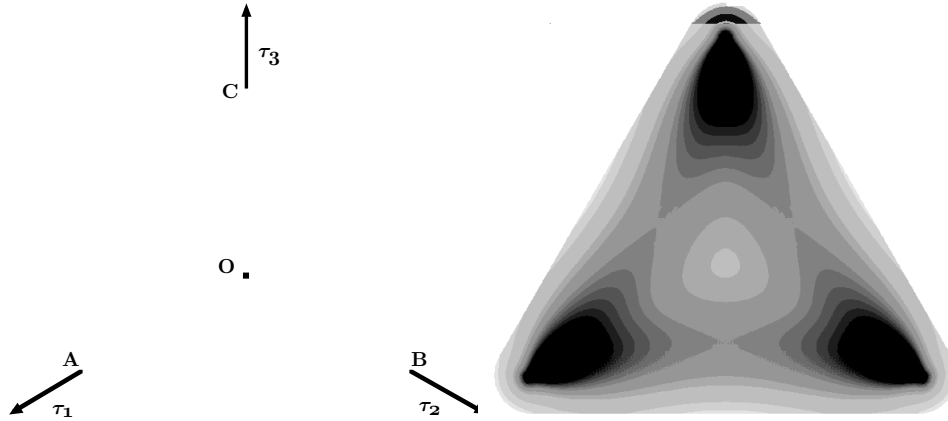


FIGURA 7. Densità ottima, nel caso vettoriale, per il campo di forze  $f$  rappresentato a sinistra, senza regione di Dirichlet.

in particolare i libri recenti [2, 17, 18] ed il sito <http://www.topopt.dtu.dk> dove si possono costruire numerose strutture ottime utilizzando un programma sviluppato da M. P. Bendsøe e O. Sigmund.

Presentiamo qui un'altra possibile approssimazione del problema (2.4), limitandoci per semplicità ancora al caso scalare; per una trattazione più generale rinviamo all'articolo [24]. L'idea è di considerare l'equazione ellittica

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{su } Q \setminus K \\ u = 0 & \text{su } K, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial Q \setminus K \end{cases}$$

nella sola incognita  $u$ , e far poi tendere  $p \rightarrow +\infty$ . L'operatore  $\Delta_p$  in (3.1) è il  $p$ -laplaciano

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$



Va osservato che, a causa delle immersioni di Sobolev, non appena  $p > N$  i termini noti  $f \in \mathcal{M}(Q)$  e le regioni di Dirichlet  $K$  qualsiasi sono ammissibili per l'equazione (3.1). In [24] è dimostrato il risultato seguente.

**Teorema 3.1.** *Indicando con  $u_p$  l'unica soluzione di (3.1) (a meno di costanti additive nel caso  $K = \emptyset$  e  $\int df = 0$ ), passando eventualmente ad una successione estratta  $p_n \rightarrow +\infty$  si ha*

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_p \rightarrow u & \text{uniformemente} \\ |\nabla u_p|^{p-2} \rightharpoonup \mu & \text{in } \mathcal{M}(\overline{Q}) \\ |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \rightharpoonup \nabla_\mu u & \text{in } \mathcal{M}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N). \end{cases}$$

dove la coppia  $(u, \mu)$  è soluzione dell'equazione di Monge-Kantorovich (2.4) e quindi del problema di ottimizzazione strutturale (2.1).

Nel caso vettoriale dell'elasticità l'equazione ellittica in (3.1) è sostituita dal sistema ellittico

$$-\operatorname{div} (|h(e(u))|^{p-2} \partial_e \frac{h^2(e(u))}{2}) = f$$

dove  $h(e)$  è la funzione 1-omogenea

$$h(e) = (2j(e))^{1/2}$$

ottenuta dalla forma quadratica  $j(e)$  introdotta in (2.2).

La Figura 7 è stata ottenuta mediante l'approssimazione del Teorema 3.1 nel caso dell'elasticità. Altre configurazioni di forze e relative densità ottime sono state studiate in [88] e sono riportate nelle Figure 8, 9, 10.

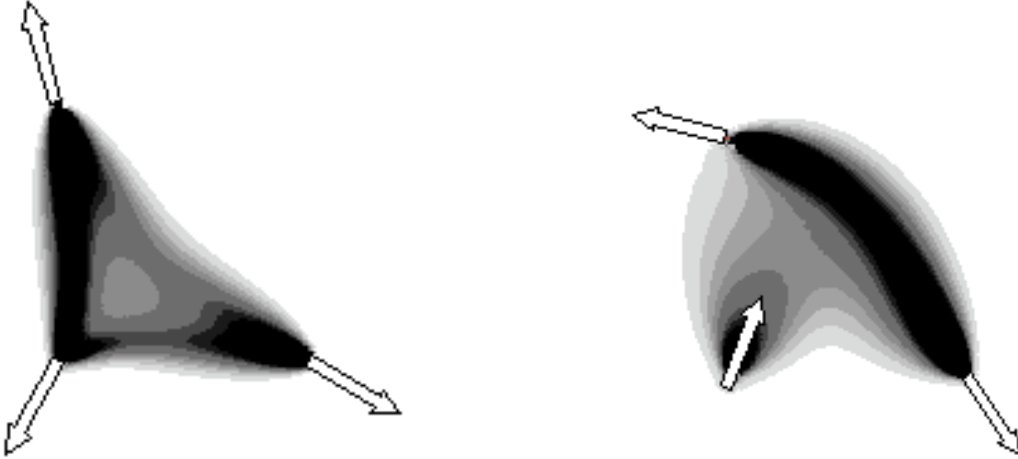


FIGURA 8. Densità ottime, nel caso vettoriale, per alcune forze assegnate.

Vale la pena segnalare due interessanti congetture sulle densità ottime nel caso dell'elasticità, supportate dalle figure precedenti.

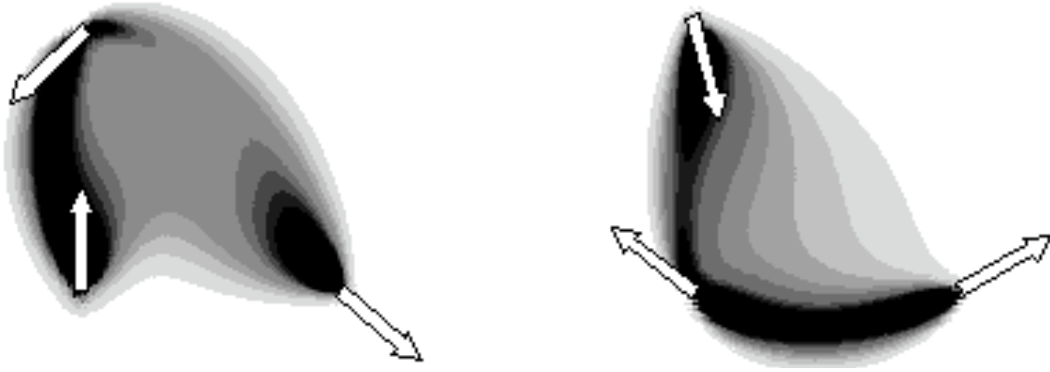


FIGURA 9. Altre densità ottime.

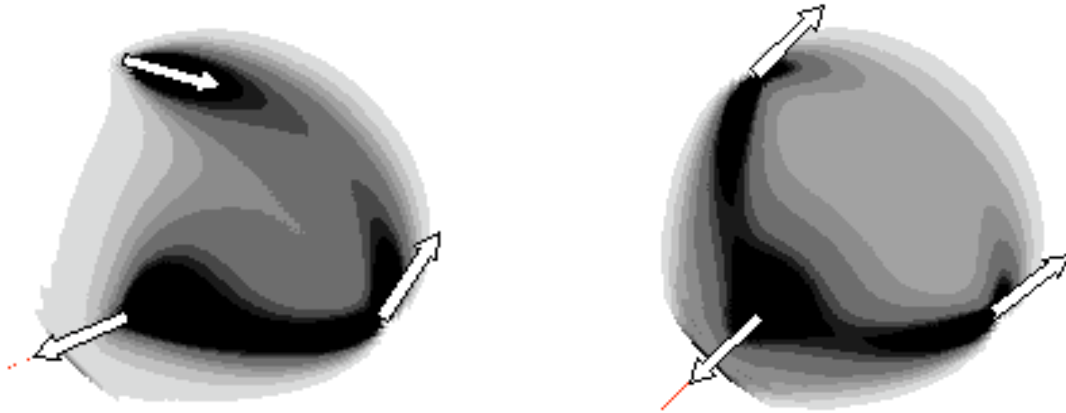


FIGURA 10. Ancora altre densità ottime.

**Congettura 1.** Nel caso dell'elasticità bidimensionale (cioè con  $N = 2$ ), se  $K = \emptyset$ , per ogni forza  $f$  ammissibile, cioè avente risultante e momento nulli, il supporto della misura ottima è un insieme semplicemente connesso. Va segnalato che in [88] viene dimostrato che il supporto della misura ottima non può avere buchi di forma circolare.

**Congettura 2.** Nel caso dell'elasticità, per ogni forza  $f$  ammissibile e con supporto compatto, il supporto della misura ottima è compatto. Va segnalato che il problema analogo nel caso scalare ha risposta positiva in quanto è possibile dimostrare che

$$\text{supp } \mu_{opt} \subset \text{conv}(\text{supp } f).$$

#### 4. OTTIMIZZAZIONE DI RETI DI TRASPORTO

Dato un dominio  $\Omega$  e due misure di probabilità  $f^+$  ed  $f^-$  vogliamo introdurre la nozione di *rete di trasporto* in  $\Omega$  e studiare il problema di determinare una rete di trasporto ottima per un opportuno funzionale costo.

Il dominio  $\Omega$  può essere visto come una *regione geografica* assegnata e le misure  $f^+$  ed  $f^-$  come le distribuzioni di *residenti* e di *servizi* in  $\Omega$ . Si tratta dunque di determinare una rete di trasporto che trasporti in modo ottimo i residenti nei luoghi dei servizi.

Il caso più semplice, a cui ci limiteremo in questa presentazione, è quello in cui si considerano reti di trasporto *connesse*. Per un'analisi di situazioni più generali rinviamo a [46]. Indichiamo con  $\mathcal{H}^1$  la misura di Hausdorff unidimensionale.

**Definizione 4.1.** Una rete di trasporto in  $\Omega$  è un insieme chiuso e connesso  $\Sigma \subset \bar{\Omega}$  con  $\mathcal{H}^1(\Sigma) < +\infty$ .

Come funzionale costo di una generica rete di trasporto  $\Sigma$  consideriamo il valore minimo  $M(f^+, f^-, d_\Sigma)$  del problema (1.2), dove  $d_\Sigma$  è una semi-distanza opportuna che si costruisce su  $\Omega$  e relativa alla rete  $\Sigma$ . La quantità  $d_\Sigma(x, y)$  descrive la distanza del punto  $x$  dal punto  $y$  in  $\Omega$  quando nella percorrenza si utilizza la rete  $\Sigma$  nel modo migliore; ad esempio, se  $\Sigma = \emptyset$  ed  $\Omega$  è convesso  $d_\Sigma$  è semplicemente la distanza euclidea, mentre se  $\Omega$  non è convesso  $d_\Sigma$  è la distanza geodetica in  $\Omega$ :

$$d(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 |\alpha'(t)| dt : \alpha \in \text{Lip}([0, 1]; \bar{\Omega}), \alpha(0) = x, \alpha(1) = y \right\}.$$

Nel caso in cui la percorrenza su  $\Sigma$  sia gratuita, l'espressione di  $d_\Sigma$  è abbastanza semplice: si ha

$$d_\Sigma(x, y) = \inf \left\{ d(x, y) \wedge (d(x, \xi_1) + d(y, \xi_2)) : \xi_1, \xi_2 \in \Sigma \right\}.$$

Nel caso in cui si voglia invece contare la percorrenza fuori di  $\Sigma$  (fatta con *mezzi propri*) mediante una funzione crescente  $A(t)$  e la percorrenza su  $\Sigma$  (il *prezzo del biglietto*) mediante un'altra funzione crescente  $B(t)$ , definiremo

$$d_\Sigma(x, y) = \inf \left\{ A(\mathcal{H}^1(\theta \setminus \Sigma)) + B(\mathcal{H}^1(\theta \cap \Sigma)) : \theta \text{ curva tra } x \text{ ed } y \right\}.$$

Ad esempio, una scelta molto naturale è  $A(t) = t$  mentre molte compagnie di trasporto urbano usano le funzioni  $B$  della Figura 11

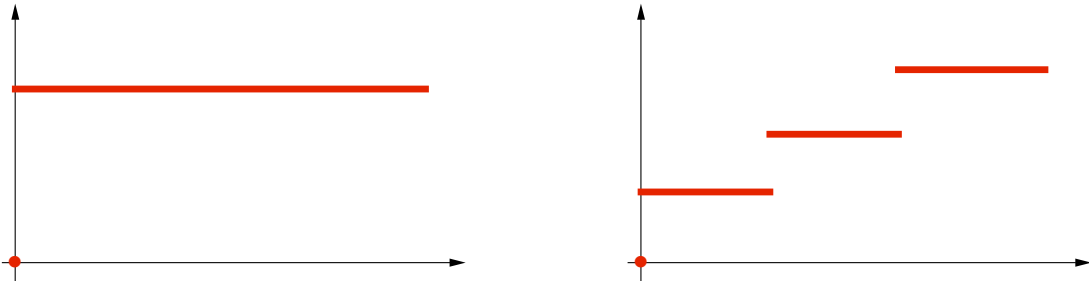


FIGURA 11. Due funzioni di prezzo  $B$ : per città piccole (a sinistra), per città grandi (a destra).

Definita la funzione  $d_\Sigma$  e il funzionale costo  $F(\Sigma) = M(f^+, f^-, d_\Sigma)$  possiamo considerare il problema della ricerca della rete di trasporto ottima:

$$(4.1) \quad \min \{F(\Sigma) : \Sigma \text{ rete di trasporto in } \Omega, \mathcal{H}^1(\Sigma) \leq L\}$$

dove il vincolo  $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq L$  esprime una limitazione naturale sulle risorse disponibili. Grazie alla definizione di rete di trasporto, si può ottenere il seguente risultato di esistenza (cfr. [30]).

**Teorema 4.2.** *Per ogni  $f^+, f^-, \Omega, L, A, B$  come sopra, esiste una rete di trasporto  $\Sigma_{opt}$  ottima per il problema di minimo (4.1).*

Il problema della ricerca di condizioni necessarie di ottimalità per una rete ottima  $\Sigma_{opt}$  è particolarmente interessante; gli unici risultati disponibili si hanno nel caso in cui  $A(t) = t$  e  $B(t) = 0$ , dove il costo dei mezzi propri varia linearmente con la distanza percorsa mentre l'utilizzo della rete di trasporto è gratuito. Segnaliamo che almeno nel caso di  $f^+, f^-$  limitate la regolarità a meno di un numero finito di punti di biforcazione sembra una proprietà che le reti ottime  $\Sigma_{opt}$  debbano verificare, ma a parte qualche risultato di regolarità molto debole, questo è ancora un problema aperto. Elenchiamo qui di seguito alcune proprietà degli insiemi ottimi  $\Sigma_{opt}$ , rinviando agli articoli [45, 46, 52, 53] per ogni ulteriore dettaglio.

- gli insiemi  $\Sigma_{opt}$  non contengono curve chiuse;
- i punti di biforcazione di  $\Sigma_{opt}$  sono punti di incontro di tre rami di curve;
- le curve che si incontrano nei punti di biforcazione di  $\Sigma_{opt}$  formano angoli di  $120^\circ$ ;
- non ci sono punti di biforcazione se  $L$  è piccolo per cui in tal caso  $\Sigma_{opt}$  è una curva semplice;

Riportiamo la rappresentazione grafica di  $\Sigma_{opt}$  nel caso più semplice in cui  $f^- = 0$  (detto problema di *irrigazione*), caso in cui il funzionale costo si riduce alla distanza media da  $\Sigma$

$$(4.2) \quad F(\Sigma) = \int_{\Omega} \text{dist}(x, \Sigma) df^+(x).$$

Notiamo che, a causa della presenza della regione di Dirichlet  $\Sigma$ , la condizione  $0 = \int df = \int df^+ - \int df^-$  non è necessaria, il che giustifica l'aver supposto  $f^- = 0$ .

Negli esempi seguenti si è sempre presa  $f^+$  la misura di Lebesgue su  $\Omega$ . Segnaliamo che, anche nel caso semplificato del funzionale costo (4.2), il trattamento numerico del problema di minimo (4.1) è molto complesso in quanto il funzionale  $F(\Sigma)$  presenta un numero molto elevato di minimi locali, per cui è richiesto l'uso di algoritmi di ottimizzazione globale (cfr [45]).

Se indichiamo con  $\Sigma_L$  una rete ottima (per il funzionale distanza media (4.2)) per la lunghezza  $L$ , è interessante studiare il comportamento asintotico di  $\Sigma_L$  quando  $L \rightarrow +\infty$  attraverso le misure di probabilità  $\frac{1}{L}\mathcal{H}^1 \llcorner \Sigma_L$ . In [97] si dimostra che, nel caso  $f^+ \in L^1(\Omega)$ , tali misure convergono debolmente alla misura di

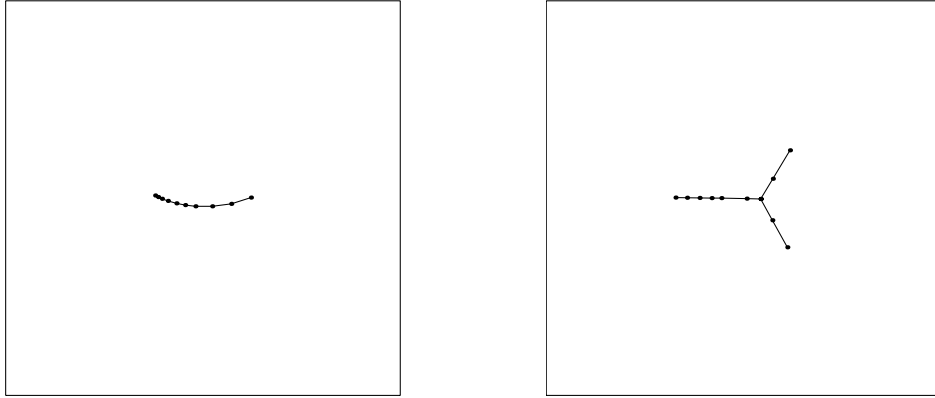


FIGURA 12. Rappresentazione di  $\Sigma_L$  nel quadrato di lato unitario, per  $L = 0.25$  (a sinistra), per  $L = 0.5$  (a destra).

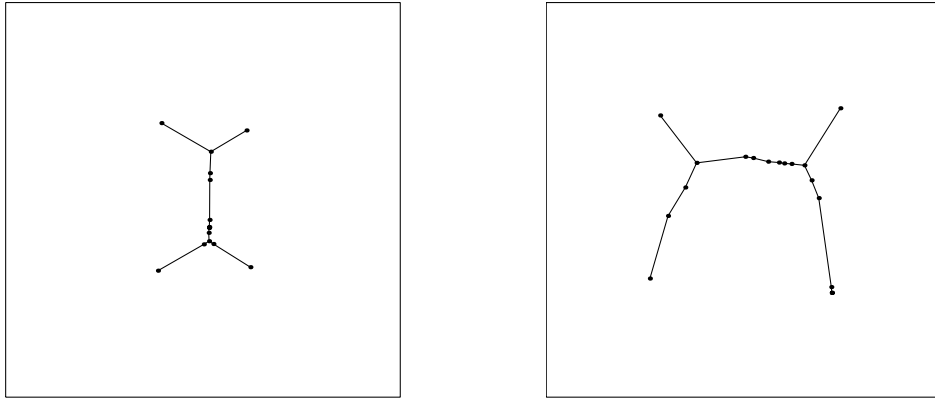


FIGURA 13. Rappresentazione di  $\Sigma_L$  nel quadrato di lato unitario, per  $L = 0.75$  (a sinistra), per  $L = 1.25$  (a destra).

probabilità  $\mu = (f^+)^{(N-1)/N} / \int_{\Omega} (f^+)^{(N-1)/N} dx$ , mentre i valori minimi  $F(\Sigma_L)$  sono asintotici a

$$C_N L^{1/(1-N)} \left( \int_{\Omega} (f^+)^{(N-1)/N} \right)^{N/(N-1)}$$

per un'opportuna costante  $C_N$  che dipende solo dalla dimensione  $N$ . L'unico caso in cui la costante  $C_N$  è nota è il caso bidimensionale  $N = 2$  in cui si ha  $C_2 = 1/4$ .

## 5. PROBLEMI DI POSIZIONAMENTO

I problemi di posizionamento (in inglese *location*) sono problemi di ottimizzazione in cui il funzionale costo  $F(\Sigma)$  è uguale a quello in (4.2) ma la classe degli insiemi  $\Sigma$  ammissibili è costituita dagli insiemi discreti di  $n$  punti. Il problema è

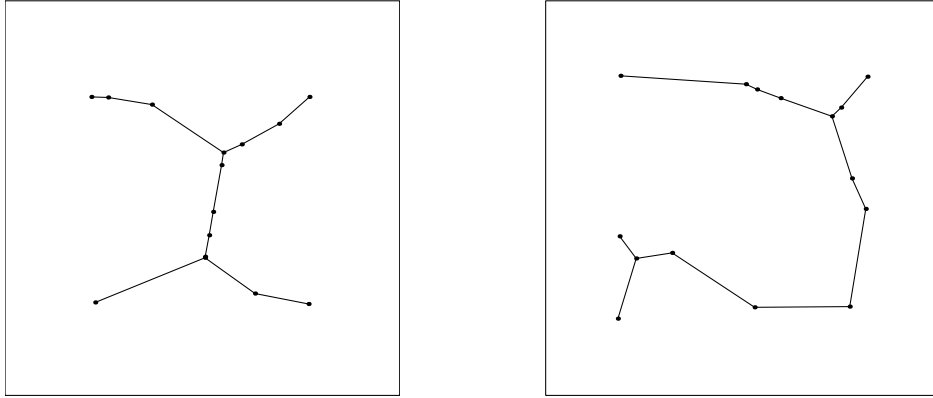


FIGURA 14. Rappresentazione di  $\Sigma_L$  nel quadrato di lato unitario, per  $L = 1.5$  (a sinistra), per  $L = 2$  (a destra).



FIGURA 15. Rappresentazione di  $\Sigma_L$  nella palla unitaria di  $\mathbb{R}^3$  (il punto nero è il centro della palla), per  $L = 1$  (a sinistra), per  $L = 2$  (a destra).

quindi

$$\min \left\{ F(\Sigma) : \Sigma \subset \Omega, \#\Sigma \leq n \right\}.$$

Tali problemi intervengono ad esempio in questioni di pianificazione urbana in cui, nota la distribuzione  $f^+$  di popolazione, si vuole stabilire dove posizionare dei punti di distribuzione (farmacie, distributori di benzina, ...) o di raccolta (contenitori, o anche scuole, ...) in modo da minimizzare la distanza media che i residenti devono percorrere per raggiungere il punto di  $\Sigma$  più vicino.

L'esistenza di una configurazione ottima  $\Sigma_n$  con  $n$  fissato è immediata; come nel problema precedente è interessante studiare il comportamento asintotico di  $\Sigma_n$  per  $n \rightarrow +\infty$  attraverso le misure di probabilità  $\frac{1}{n} \mathcal{H}^0 \llcorner \Sigma_n$ . Si ha (cfr. [28]) che, nel caso  $f^+ \in L^1(\Omega)$ , tali misure convergono debolmente alla misura di

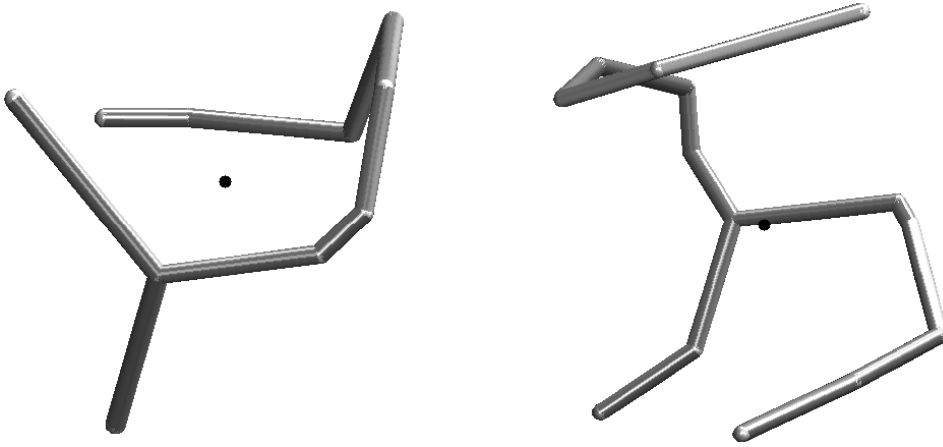


FIGURA 16. Rappresentazione di  $\Sigma_L$  nella palla unitaria di  $\mathbb{R}^3$  (il punto nero è il centro della palla), per  $L = 3$  (a sinistra), per  $L = 4$  (a destra).

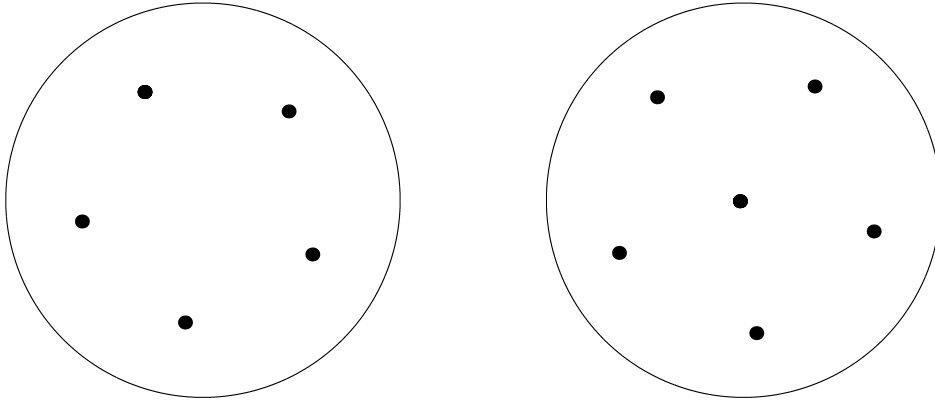


FIGURA 17. Posizionamento ottimo di 5 e 6 punti in un disco per  $f^+ = 1$ .

probabilità  $\mu = (f^+)^{N/(N+1)} / \int_{\Omega} (f^+)^{N/(N+1)} dx$ , mentre i valori minimi  $F(\Sigma_n)$  sono asintotici a

$$K_N n^{-1/N} \left( \int_{\Omega} (f^+)^{N/(N+1)} \right)^{(N+1)/N}$$

per un'opportuna costante  $K_N$  che dipende solo dalla dimensione  $N$ . Nel caso  $N = 1$  si trova  $K_1 = 1/4$  mentre nel caso  $N = 2$  si ha (cfr. [96])

$$K_2 = \int_E |x| dx = \frac{3 \log 3 + 4}{6\sqrt{2} 3^{3/4}} \simeq 0.377$$

dove  $E$  è un esagono regolare di area unitaria centrato nell'origine. I valori di  $K_N$  per  $N \geq 3$  non sono noti e si hanno solo delle stime.

Analogamente a quanto visto per i problemi di irrigazione il trattamento numerico dei problemi di posizionamento è molto complesso, a causa del gran numero di minimi locali del funzionale  $F(\Sigma)$  nella classe considerata.

Invece che determinare accuratamente i punti in  $\Omega$  per raggiungere una configurazione  $\Sigma_n$  ottima, si può cercare di posizionare gli  $n$  punti a caso in  $\Omega$ , secondo una legge  $P$  di probabilità. Si trova (cfr. [64]) che, nel caso  $f^+ \in L^1(\Omega)$ , la scelta migliore è  $P = (f^+)^{N/(N+1)} / \int_{\Omega} (f^+)^{N/(N+1)} dx$ , e si può calcolare la media dei valori di  $F(\Sigma)$ , trovando per un'opportuna costante  $R_N$  che dipende solo dalla dimensione  $N$

$$E(F(\Sigma)) \approx R_N n^{-1/N} \left( \int_{\Omega} (f^+)^{N/(N+1)} \right)^{(N+1)/N}.$$

Nel caso random la costante  $R_N$  può essere calcolata per ogni dimensione  $N$ , e si trova

$$R_N = \omega_N^{-1/N} \Gamma(1 + 1/N)$$

dove  $\omega_N$  è la misura della palla unitaria di  $\mathbb{R}^N$  e  $\Gamma$  è la funzione di Eulero. Essendo ovviamente il valore del funzionale  $F$  sulle configurazioni ottime più basso del suo valor medio su tutte le configurazioni, si ha la stima

$$K_N \leq \omega_N^{-1/N} \Gamma(1 + 1/N).$$

D'altro canto, non è difficile ottenere anche una stima dal basso per  $K_N$ : si ha

$$K_N \geq \min \left\{ \int_E |x| dx : |E| = 1 \right\}$$

ed essendo il minimo raggiunto per una palla, si trova la stima  $K_N \geq \omega_N^{-1/N} \frac{N}{N+1}$ , per cui si ha

$$\omega_N^{-1/N} \frac{N}{N+1} \leq K_N \leq \omega_N^{-1/N} \Gamma(1 + 1/N).$$

Si ha dunque

$$K_N = \omega_N^{-1/N} (1 + O(1/N)) \quad \text{per } N \rightarrow +\infty$$

da cui si ricava che per dimensioni  $N$  grandi un posizionamento random fornisce valori (in media) equivalenti ad un posizionamento ottimo, di gran lunga più complesso da calcolare! Ad esempio si ha:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.5 & K_1 &= 0.25 \\ R_2 &= 0.5 & K_2 &\simeq 0.377 \\ R_3 &\simeq 0.554 & 0.465 &\leq K_3 \leq 0.554 \end{aligned}$$

Il grafico seguente mostra le due curve  $\Gamma(1 + 1/N)$  (quella superiore, corrispondente al posizionamento random) e  $N/(N + 1)$  (quella inferiore, corrispondente



alla stima inferiore per  $K_N$ ) in funzione della dimensione  $N$ ; dalle stime precedenti si ha che la quantità  $K_N \omega_N^{1/N}$  si trova tra le due.

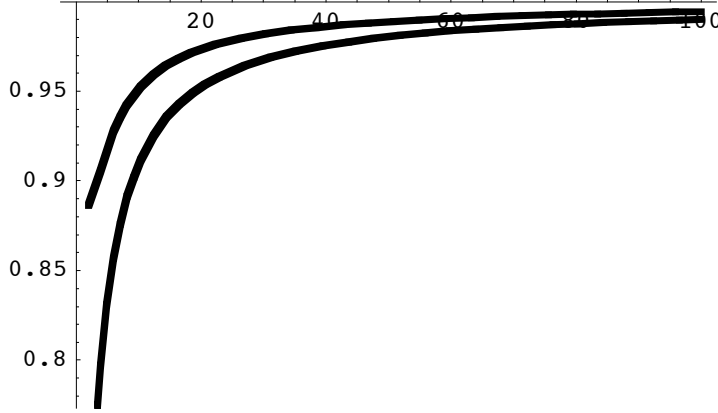


FIGURA 18. Le curve  $\Gamma(1 + 1/N)$  e  $N/(N + 1)$  in funzione della dimensione  $N$ .

## 6. FORMULAZIONE DINAMICA DEI PROBLEMI DI TRASPORTO DI MASSA

Data una misura di probabilità “iniziale”  $f^+$  ed una “finale”  $f^-$  si vuole determinare una curva  $\rho(t)$  a valori nello spazio  $\mathcal{P}(\Omega)$  delle misure di probabilità su  $\Omega$  tale che  $\rho(0) = f^+$ ,  $\rho(1) = f^-$ , e  $\rho(t)$  descriva dinamicamente il trasporto di  $f^+$  su  $f^-$  nel senso che la curva  $\rho(t)$  sia una geodetica nello spazio  $\mathcal{P}(\Omega)$  munito di una metrica di Wasserstein  $W_p$  introdotta in (1.3).

In diverse applicazioni del trasporto di massa a problemi di traffico o di comportamento di strutture ramificate, è interessante studiare formulazioni dinamiche in cui la metrica di Wasserstein viene perturbata in modo da favorire le concentrazioni di raggi di trasporto (come ad esempio nei modelli di reti di canali, idrici o sanguigni, o di reti elettriche o informatiche, o ancora di strutture vegetali come alberi e foglie) oppure in modo da favorire l’effetto opposto della diffusione dei raggi di trasporto (come ad esempio nei modelli di traffico congestionato o di movimento di folle in situazioni di panico).

Una formulazione generale è stata proposta in [31] dove, dato uno spazio metrico compatto  $(X, d)$ , si considerano funzionali definiti sullo spazio delle curve  $\phi : [0, 1] \rightarrow X$  del tipo

$$(6.1) \quad \mathfrak{F}(\phi) = \int_0^1 J(\phi(t)) |\phi'(t)|_X dt.$$

Il coefficiente  $J$  è un funzionale definito su  $X$ , mentre  $|\phi'|$  è la *derivata metrica* di  $\phi$  definita da

$$|\phi'(t)|_X = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(\phi(t + \varepsilon), \phi(t))}{\varepsilon}.$$

Il teorema seguente (cfr. [31]) fornisce l'esistenza di curve ottime per  $\mathfrak{F}$  sotto condizioni molto generali.

**Teorema 6.1.** *Fissati  $x_0, x_1 \in X$  supponiamo che:*

- i)  $J$  sia semicontinuo inferiormente in  $X$ ;*
  - ii)  $J \geq c$  per un'opportuna costante  $c > 0$ ;*
  - iii)  $\mathfrak{F}(\phi) < +\infty$  per almeno una curva  $\phi$  congiungente  $x_0$  con  $x_1$ .*
- Allora esiste una curva ottima per il problema di minimo*

$$\min \{ \mathfrak{F}(\phi) : \phi(0) = x_0, \phi(1) = x_1 \}.$$

Nel caso dei problemi di trasporto si considera come  $X$  lo spazio  $\mathcal{P}(\Omega)$  delle probabilità su un insieme compatto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^N$  munito di una metrica di Wasserstein  $W_p$ . Lo spazio  $X$  è dunque uno spazio metrico compatto la cui topologia è equivalente alla topologia debole\* su  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Il coefficiente  $J$  in (6.1) è un funzionale debolmente\* semicontinuo inferiormente sullo spazio  $\mathcal{P}(\Omega)$ ; tali funzionali sono stati studiati estensivamente in [20, 21, 22], dove viene fornita la seguente caratterizzazione:

$$J(\mu) = \int_{\Omega} f(x, \mu^a) dm + \int_{\Omega \setminus A_{\mu}} f^{\infty}(x, \mu^s) + \int_{\Omega} g(x, \mu(x)) d\#$$

dove

- $m$  è una misura positiva su  $\Omega$ ;
- $\mu = \mu^a + \mu^s$  è la decomposizione di Lebesgue-Nikodym di  $\mu$  in parte assolutamente continua e parte singolare rispetto a  $m$ ;
- $f(x, \cdot)$  è una funzione convessa;
- $f^{\infty}$  è la funzione di recessione di  $f$  definita da

$$f^{\infty}(x, z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, tz)}{t};$$

- $A_{\mu}$  è l'insieme degli atomi di  $\mu$ ;
- $\int_{\Omega \setminus A_{\mu}} f^{\infty}(x, \mu^s)$  sta ad indicare  $\int_{\Omega \setminus A_{\mu}} f^{\infty}(x, \frac{d\mu^s}{d|\mu^s|}) d|\mu^s|$ ;
- $\#$  è la misura che conta i punti;
- $g(x, \cdot)$  è una funzione subadditiva che verifica la condizione di compatibilità  $f^{\infty}(x, z) = g^0(x, z)$  essendo

$$g^0(x, z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x, tz)}{t}.$$

Casi particolarmente interessanti sono:

- i funzionali di tipo Lebesgue, in cui  $f(x, z) = |z|^p$  con  $p > 1$  e  $g \equiv +\infty$ , per cui l'espressione di  $J$  si riduce a

$$J(\mu) = \int_{\Omega} |u|^p dm \quad \text{se } \mu = u \cdot dm$$

mentre  $J = +\infty$  sulle misure  $\mu$  aventi parte singolare;

- i funzionali di tipo Dirac, in cui  $f \equiv +\infty$  e  $g(x, z) = |z|^\alpha$  con  $\alpha < 1$ , per cui l'espressione di  $J$  si riduce a

$$J(\mu) = \int_{\Omega} |\mu(x)|^\alpha d\# = \sum_{x \in A_\mu} |\mu(x)|^\alpha \quad \text{se } \mu \text{ è una misura discreta}$$

mentre  $J = +\infty$  sulle misure non discrete;

- i funzionali di tipo Mumford-Shah, in cui  $f(x, z) = |z|^p$  con  $p > 1$  e  $g(x, z) = |z|^\alpha$  con  $\alpha < 1$ , per cui l'espressione di  $J$  si riduce a

$$J(\mu) = \int_{\Omega} |\mu^a|^p dm + \int_{\Omega} |\mu(x)|^\alpha d\# \quad \text{se } \mu \text{ non ha parte cantoriana}$$

mentre  $J = +\infty$  sulle misure aventi parte cantoriana (cioè parte singolare non atomica).

Utilizzando come coefficiente  $J$  nell'espressione della distanza di Wasserstein perturbata (6.1) un funzionale di tipo Lebesgue si possono descrivere problemi di trasporto con fenomeni di congestione, mentre mediante i coefficienti  $J$  di tipo Dirac si possono descrivere problemi di trasporto con fenomeni di concentrazione.

Una diversa formulazione dinamica dei problemi di trasporto è stata proposta da Brenier (cfr [36]): si considera l'equazione di continuità

$$(6.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x q = 0, \quad q \cdot \nu_\Omega = 0, \quad \rho|_{t=0} = f^+, \quad \rho|_{t=1} = f^-$$

dove  $q = \rho v$  è il vettore flusso, e tra le coppie  $(\rho, q)$  che verificano l'equazione precedente si minimizza il funzionale energia cinetica

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \rho |v|^2 dx dt = \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{|q|^2}{\rho} dx dt.$$

Naturalmente, essendo  $\rho$  e  $q$  misure, il funzionale energia cinetica va scritto più correttamente nella forma

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \left| \frac{dq}{d\rho} \right|^2 d\rho.$$

e, come funzionale della coppia  $(\rho, q)$ , risulta convesso. Più in generale, si possono considerare funzionali convessi  $\Psi(\rho, q)$  e problemi di minimo

$$\min \{ \Psi(\rho, q) : (\rho, q) \text{ verificano l'equazione di continuità (6.2)} \}.$$

Rinviamo al lavoro [44] per ulteriori dettagli ed al sito <http://www.lama.univ-savoie.fr/~oudet/index.php?page=Galerie/crowd> per alcune animazioni in cui si simula il movimento di una folla in condizioni di congestione.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] M. AGUEH: *Sharp Gagliardo-Nirenberg inequalities and mass transport theory*. J. Dynam. Differential Equations, **18** (4) (2006), 1069–1093.
- [2] G. ALLAIRE: *Shape Optimization by the Homogenization Method*. Applied Mathematical Sciences **146**, Springer-Verlag, New York (2002).
- [3] L. AMBROSIO: *Optimal transport maps in Monge-Kantorovich problem*. Proceedings International Congress of Mathematicians, Beijing 2002, Vol. III, Higher Ed. Press, Beijing (2002), 131–140.
- [4] L. AMBROSIO: *Lecture notes on optimal transport problems*. In “Mathematical aspects of evolving interfaces”, Funchal 2000, Lecture Notes in Math. **1812**, Springer, Berlin (2003) 1–52.
- [5] L. AMBROSIO: *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*. Invent. Math., **158** (2) (2004), 227–260.
- [6] L. AMBROSIO, N. FUSCO, D. PALLARA: *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford (2000).
- [7] L. AMBROSIO, N. GIGLI, G. SAVARÉ: *Gradient flows with metric and differentiable structures, and applications to the Wasserstein space*. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **15** (3-4) (2004), 327–343.
- [8] L. AMBROSIO, N. GIGLI, G. SAVARÉ: *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. Lectures in Mathematics ETH Zrich, Birkhäuser Verlag, Basel (2005).
- [9] L. AMBROSIO, B. KIRCHHEIM, A. PRATELLI: *Existence of optimal transport maps for crystalline norms*. Duke Math. J., **125** (2) (2004), 207–241.
- [10] L. AMBROSIO, S. LISINI, G. SAVARÉ: *Stability of flows associated to gradient vector fields and convergence of iterated transport maps*. Manuscr. Math., **121** (1) (2006), 1–50.
- [11] L. AMBROSIO, A. PRATELLI: *Existence and stability results in the  $L^1$  theory of optimal transportation*. In “Optimal transportation and applications”, Martina Franca 2001, Lecture Notes in Math. **1813**, Springer, Berlin (2003), 123–160.
- [12] L. AMBROSIO, S. RIGOT: *Optimal mass transportation in the Heisenberg group*. J. Funct. Anal., **208** (2) (2004), 261–301.
- [13] L. AMBROSIO, F. SANTAMBROGIO: *Necessary optimality conditions for geodesics in weighted Wasserstein spaces*. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **18** (1) (2007), 23–37.
- [14] L. AMBROSIO, P. TILLI: *Topics on Analysis in Metric Spaces*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications **25**, Oxford University Press, Oxford (2004).
- [15] J. D. BENAMOU: *Numerical resolution of an “unbalanced” mass transport problem*. Math. Model. Numer. Anal. (M2AN), **37** (5) (2003), 851–868.
- [16] J. D. BENAMOU, Y. BRENIER, K. GUITTET: *Numerical analysis of a multi-phasic mass transport problem*. Contemp. Math., **353** (2004), 1–17.
- [17] M. P. BENDSØE: *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*. Springer-Verlag, Berlin (1995).
- [18] M. P. BENDSØE, O. SIGMUND: *Topology Optimization. Theory, methods and applications*. Springer-Verlag, Berlin (2003).
- [19] P. BERNARD, B. BUFFONI: *Optimal mass transportation and Mather theory*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **9** (1) (2007), 85–121.
- [20] G. BOUCHITTE, G. BUTTAZZO: *New lower semicontinuity results for nonconvex functionals defined on measures*. Nonlinear Anal., **15** (1990), 679–692.

- [21] G. BOUCHITTE, G. BUTTAZZO: *Integral representation of nonconvex functionals defined on measures*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **9** (1992), 101–117.
- [22] G. BOUCHITTE, G. BUTTAZZO: *Relaxation for a class of nonconvex functionals defined on measures*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **10** (1993), 345–361.
- [23] G. BOUCHITTE, G. BUTTAZZO: *Characterization of optimal shapes and masses through Monge-Kantorovich equation*. J. Eur. Math. Soc., **3** (2001), 139–168.
- [24] G. BOUCHITTE, G. BUTTAZZO, L. DE PASCALE: *A  $p$ -Laplacian approximation for some mass optimization problems*. J. Optim. Theory Appl., **118** (1) (2003), 1–25.
- [25] G. BOUCHITTE, G. BUTTAZZO, P. SEPPECHER: *Energies with respect to a measure and applications to low dimensional structures*. Calc. Var., **5** (1997), 37–54.
- [26] G. BOUCHITTE, G. BUTTAZZO, P. SEPPECHER: *Shape optimization solutions via Monge-Kantorovich equation*. C. R. Acad. Sci. Paris, **324-I** (1997), 1185–1191.
- [27] G. BOUCHITTE, T. CHAMPION, C. JIMENEZ: *Completion of the space of measures in the Kantorovich norm*. Rivista Mat. Univ. Parma, **4** (7) (2005), 127–139.
- [28] G. BOUCHITTE, C. JIMENEZ, M. RAJESH: *Asymptotique d'un problème de positionnement optimal*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, **335** (2002), 835–858.
- [29] G. BOUCHITTE, C. JIMENEZ, M. RAJESH: *A new  $L^\infty$  estimate in optimal mass transport*. Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 3525–3535.
- [30] A. BRANCOLINI, G. BUTTAZZO: *Optimal networks for mass transportation problems*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., **11** (2005), 88–101.
- [31] A. BRANCOLINI, G. BUTTAZZO, F. SANTAMBROGIO: *Path functionals over Wasserstein spaces*. J. Eur. Math. Soc., **8** (2006), 415–434.
- [32] A. BRANCOLINI, G. BUTTAZZO, F. SANTAMBROGIO, E. STEPANOV: *Long-term planning versus short-term planning in the asymptotical location problem*. Preprint Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, (2006).
- [33] Y. BRENIER: *Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math., **305** (1987), 805–808.
- [34] Y. BRENIER: *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*. Comm. Pure Appl. Math., **44** (1991), 375–417.
- [35] Y. BRENIER: *Minimal geodesics on groups of volume-preserving maps and generalized solutions of the Euler equations*. Comm. Pure Appl. Math., **52** (1999), 411–452.
- [36] Y. BRENIER: *Extended Monge-Kantorovich theory*. In “Optimal transportation and applications”, Martina Franca 2001, Lecture Notes in Math. **1813**, Springer, Berlin (2003), 92–121.
- [37] Y. BRENIER: *Optimal transportation theory and geometric partial differential equations*. In “Applied Mathematics Entering the 21st Century”, SIAM, Philadelphia, (2004), 37–47.
- [38] Y. BRENIER, M. PUEL: *Optimal multiphase transportation with prescribed momentum*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., **8** (2002), 287–343.
- [39] D. BUCUR, G. BUTTAZZO: *Variational Methods in Shape Optimization Problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations **65**, Birkhäuser Verlag, Basel (2005).
- [40] G. BUTTAZZO: *Three optimization problems in mass transportation theory*. In “Nonsmooth Mechanics and Analysis: Theoretical and Numerical Advances”, Advances in Mechanics and Mathematics **12**, Springer, Berlin (2006), 13–23.
- [41] G. BUTTAZZO, A. DAVINI, I. FRAGALÀ, F. MACIÀ: *Optimal Riemannian distances preventing mass transfer*. J. Reine Angew. Math., **575** (2004), 157–171.
- [42] G. BUTTAZZO, L. DE PASCALE: *Optimal shapes and masses, and optimal transportation problems*. In “Optimal Transportation and Applications”, Martina Franca 2–8 September 2001, Lecture Notes in Mathematics **1813**, Springer-Verlag, Berlin (2003), 11–52.

- [43] G. BUTTAZZO, L. DE PASCALE, I. FRAGALÀ: *Topological equivalences of some variational problems involving distances*. Discrete Contin. Dyn. Syst., **7** (2) (2001), 247–258.
- [44] G. BUTTAZZO, C. JIMENEZ, E. OUDET: *An optimization problem for mass transportation with congested dynamics*. Preprint Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, (2007). Disponibile su <http://cvgmt.sns.it>.
- [45] G. BUTTAZZO, E. OUDET, E. STEPANOV: *Optimal transportation problems with free Dirichlet regions*. In “Variational Methods for Discontinuous Structures”, Cernobbio 2001, Progress in Nonlinear Differential Equations **51**, Birkhäuser Verlag, Basel (2002), 41–65.
- [46] G. BUTTAZZO, A. PRATELLI, S. SOLIMINI, E. STEPANOV: *Optimal urban networks via mass transportation*. Preprint Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, (2007).
- [47] G. BUTTAZZO, A. PRATELLI, E. STEPANOV: *Optimal pricing policies for public transportation networks*. SIAM J. Optimization, **16** (3) (2006), 826–853.
- [48] G. BUTTAZZO, F. SANTAMBROGIO: *A model for the optimal planning of an urban area*. SIAM J. Math. Anal., **37** (2) (2005), 514–530.
- [49] G. BUTTAZZO, F. SANTAMBROGIO: *Asymptotical compliance optimization for connected networks*. Preprint Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, (2007).
- [50] G. BUTTAZZO, F. SANTAMBROGIO, N. VARCHON: *Asymptotics of an optimal compliance-location problem*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., **12** (2006), 752–769.
- [51] G. BUTTAZZO, E. STEPANOV: *On regularity of transport density in the Monge-Kantorovich problem*. SIAM J. Control Optim., **42** (3) (2003), 1044–1055.
- [52] G. BUTTAZZO, E. STEPANOV: *Optimal transportation networks as free Dirichlet regions for the Monge-Kantorovich problem*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (5) **2** (2003), 631–678.
- [53] G. BUTTAZZO, E. STEPANOV: *Minimization problems for average distance functionals*. In “Calculus of Variations: topics from the mathematical heritage of E. De Giorgi”, Quaderni di Matematica II Università di Napoli, vol. **14**, Aracne Editrice, Roma (2004), 47–84.
- [54] G. BUTTAZZO, E. STEPANOV: *Transport density in Monge-Kantorovich problems with Dirichlet conditions*. Discrete Contin. Dynam. Systems, **12** (4) (2005), 607–628.
- [55] L. CAFFARELLI: *Boundary regularity of maps with a convex potential*. Commun. Pure Appl. Math., **45** (1992), 1141–1151.
- [56] L. CAFFARELLI: *The Monge-Ampère equation and optimal transportation, an elementary review*. In “Optimal Transportation and Applications”, Martina Franca 2–8 September 2001, Lecture Notes in Mathematics **1813**, Springer-Verlag, Berlin (2003), 1–10.
- [57] L. CAFFARELLI, M. FELDMAN, R. J. McCANN: *Constructing optimal maps for Monge’s transport problem as a limit of strictly convex costs*. J. Amer. Math. Soc., **15** (2002), 1–26.
- [58] E. A. CARLEN, W. GANGBO: *Constrained steepest descent in the 2-Wasserstein metric*. Ann. of Math., **157** (3) (2003), 807–846.
- [59] E. A. CARLEN, W. GANGBO: *Solution of a model Boltzmann equation via steepest descent in the 2-Wasserstein metric*. Arch. Ration. Mech. Anal., **172** (1) (2004), 21–64.
- [60] G. CARLIER: *Duality and existence for a class of mass transportation problems and economic applications*. Adv. Math. Econ., **5** (2003), 1–21.
- [61] G. CARLIER: *On a class of multidimensional optimal transportation problems*. J. Convex Anal., **10** (2) (2003), 517–529.
- [62] G. CARLIER, F. SANTAMBROGIO: *A variational model for urban planning with traffic congestion*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., **11** (4) (2005), 595–613.
- [63] T. CHAMPION, L. DE PASCALE, P. JUUTINEN: *The  $\infty$ -Wasserstein distance: local solutions and existence of optimal transport maps*. Preprint Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Pisa, (2007).

- [64] P. COHORT: *Limit theorems for random normalized distortion*. Ann. Appl. Prob., (1) **14** (2004), 118–143.
- [65] D. CORDERO-ERAUSQUIN: *Some applications of mass transport to Gaussian-type inequalities*. Arch. Ration. Mech. Anal., **161** (3) (2002), 257–269.
- [66] D. CORDERO-ERAUSQUIN: *Non-smooth differential properties of optimal transport*. Contemp. Math., **353** (2004), 61–71.
- [67] D. CORDERO-ERAUSQUIN, W. GANGBO, C. HOUDRÈ: *Inequalities for generalized entropy and optimal transportation*. Contemp. Math., **353** (2004), 73–94.
- [68] L. DE PASCALE: *On a constrained shape optimization problem*. Comm. Appl. Anal., **7** (4) (2003), 485–498.
- [69] L. DE PASCALE, L. C. EVANS, A. PRATELLI: *Integral estimates for transport densities*. Bull. London Math. Soc., **36** (3) (2004), 383–395.
- [70] L. DE PASCALE, M. S. GELLI, L. GRANIERI: *Minimal measures, one-dimensional currents and the Monge-Kantorovich problem*. Calc. Var. PDE, **27** (1) (2006), 1–23.
- [71] L. DE PASCALE, A. PRATELLI: *Regularity properties for Monge transport density and for solutions of some shape optimization problem*. Calc. Var. PDE, **14** (3) (2002), 249–274.
- [72] L. DE PASCALE, A. PRATELLI: *Sharp summability for Monge transport density via interpolation*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., **10** (4) (2004), 549–552.
- [73] L. C. EVANS: *Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer*. Current Developments in Mathematics, 1997, 65–126.
- [74] L. C. EVANS, W. GANGBO: *Differential Equation Methods for the Monge-Kantorovich Mass Transfer Problem*. Memoirs AMS **653**, 1999.
- [75] M. FELDMAN, R. McCANN: *Monges transport problem on a Riemannian manifold*. Trans. Amer. Mat. Soc., **354** (2002), 1667–1697.
- [76] M. FELDMAN, R. McCANN: *Uniqueness and transport density in Monge’s mass transportation problem*. Calc. Var. PDE, **15** (1) (2002), 81–113.
- [77] A. FIGALLI: *Existence, uniqueness, and regularity of optimal transport maps*. SIAM J. Math. Anal., **39** (1) (2007), 126–137.
- [78] A. FIGALLI: *The Monge problem on non-compact manifolds*. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **117** (2007), 147–166.
- [79] A. FIGALLI, C. VILLANI: *Strong displacement convexity on Riemannian manifolds*. Math. Z., **257** (2) (2007), 251–259.
- [80] I. FRAGALÀ, M. S. GELLI, A. PRATELLI: *Continuity of an optimal transport in Monge problem*. J. Math. Pures Appl., **84** (9) (2005), 1261–1294.
- [81] W. GANGBO: *An elementary proof of the polar factorization theorem for functions*. Arch. Rat. Mech. Anal., **128** (1994), 381–399.
- [82] W. GANGBO: *The Monge mass transfer problem and its applications. Monge Ampère equation: applications to geometry and optimization*. Contemp. Math., **226** (1999), 79–104.
- [83] W. GANGBO, R. J. McCANN: *Optimal maps in Monge’s mass transport problem*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **321** (12) (1995), 1653–1658.
- [84] W. GANGBO, R. J. McCANN: *The geometry of optimal transportation*. Acta Math., **177** (1996), 113–161.
- [85] W. GANGBO, R. J. McCANN: *Shape recognition via Wasserstein distance*. Quart. Appl. Math., **58** (4) (2000), 705–737.
- [86] W. GANGBO, V. OLIKER: *Existence of optimal maps in the reflector-type problems*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., **13** (1) (2007), 93–106.
- [87] W. GANGBO, A. ŚWIĘCH: *Optimal maps for the multidimensional Monge-Kantorovich problem*. Comm. Pure Appl. Math., **51** (1) (1998), 23–45.

- [88] F. GOLAY, P. SEPPECHER: *Locking materials and the topology of optimal shapes*. Eur. J. Mech. A/Solids, **20** (2001), 631–644.
- [89] L. V. KANTOROVICH: *On the transfer of masses*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **37** (1942), 227–229.
- [90] L. V. KANTOROVICH: *On a problem of Monge*. Uspekhi Mat. Nauk., **3** (1948), 225–226.
- [91] D. KINDERLEHRER, A. TUDORASCU: *Transport via mass transportation*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **6** (2) (2006), 311–338.
- [92] R. McCANN: *Polar factorization of maps on Riemannian manifolds*. Geom. Funct. Anal., **11** (2001), 589–608.
- [93] B. MOHAMMADI: *Optimal transport, shape optimization and global minimization*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **344** (9) (2007), 591–596.
- [94] G. MONGE: *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*. Histoire Acad. Sciences Paris, (1781), 666–704.
- [95] J. M. MOREL, F. SANTAMBROGIO: *Comparison of distances between measures*. Appl. Math. Lett., **20** (4) (2007), 427–432.
- [96] F. MORGAN, R. BOLTON: *Hexagonal economic regions solve the location problem*. Amer. Math. Monthly, (2) **109** (2002), 165–172.
- [97] S. J. N. MOSCONI, P. TILLI: *Gamma-convergence for the irrigation problem*. J. Convex Anal., **12** (2005), 145–158.
- [98] F. OTTO, C. VILLANI: *Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality*. J. Funct. Anal., **173** (2) (2000), 361–400.
- [99] F. OTTO, M. WESTDICKENBERG: *Eulerian calculus for the contraction in the Wasserstein distance*. SIAM J. Math. Anal., **37** (4) (2005), 1227–1255.
- [100] A. PRATELLI: *Equivalence between some definitions for the optimal mass transport problem and for the transport density on manifolds*. Ann. Mat. Pura Appl., **184** (2) (2005), 215–238.
- [101] A. PRATELLI: *How to show that some rays are maximal transport rays in Monge problem*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **113** (2005), 179–201.
- [102] A. PRATELLI: *On the equality between Monge’s infimum and Kantorovich’s minimum in optimal mass transportation*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **43** (1) (2007), 1–13.
- [103] S. T. RACHEV, L. RÜSCHENDORF: *Mass Transportation Problems. Vol I: Theory, Vol. II: Applications*. Probability and its applications, Springer, Berlin (1998).
- [104] S. RIGOT: *Mass transportation in groups of type H*. Commun. Contemp. Math., **7** (4) (2005), 509–537.
- [105] R. ROSSI, G. SAVARÉ: *Gradient flows of non convex functionals in Hilbert spaces and applications*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., **12** (3) (2006), 564–614.
- [106] L. RÜSCHENDORF: *Monge-Kantorovich transportation problem and optimal couplings*. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., **109** (3) (2007), 113–137.
- [107] F. SANTAMBROGIO: *Optimal channel networks, landscape function and branched transport*. Interfaces Free Bound., **9** (1) (2007), 149–169.
- [108] F. SANTAMBROGIO: *Transport and concentration problems with interaction effects*. J. Global Optim., **38** (1) (2007), 129–141.
- [109] F. SANTAMBROGIO, P. TILLI: *Blow-up of optimal sets in the irrigation problem*. J. Geom. Anal., **15** (2) (2005), 343–362.
- [110] G. SAVARÉ: *Gradient flows and diffusion semigroups in metric spaces under lower curvature bounds*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **345** (3) (2007), 151–154.
- [111] V. N. SUDAKOV: *Geometric problems in the theory of infinite dimensional distributions*. Proc. Steklov Inst. Math., **141** (1979), 1–178.



- [112] E. STEPANOV: *Partial geometric regularity of some optimal connected transportation networks*. J. Math. Sci., **132** (4) (2006), 522–552.
- [113] N. S. TRUDINGER, X. J. WANG: *On the Monge mass transfer problem*. Calc. Var. PDE, **13** (2001), 19–31.
- [114] C. VILLANI: *Topics in Optimal Transportation*. Graduate Studies in Mathematics **58**, American Math. Soc., Providence (2003).
- [115] C. VILLANI: *Optimal transportation, dissipative PDE's and functional inequalities*. In “Optimal Transportation and Applications”, Martina Franca 2–8 September 2001, Lecture Notes in Mathematics **1813**, Springer-Verlag, Berlin (2003), 53–89.
- [116] C. VILLANI: *Current trends in optimal transportation: a tribute to Ed Nelson*. Math. Notes, **47** (2006), 141–156.
- [117] Q. XIA: *Xia, Qinglan . Optimal paths related to transport problems*. Commun. Contemp. Math., **5** (2) (2003), 251–279.
- [118] Q. XIA: *Interior regularity of optimal transport paths*. Calc. Var. PDE, **20** (3) (2004), 283–299.
- [119] Q. XIA: *An application of optimal transport paths to urban transport networks*. Discrete Contin. Dyn. Syst., supplement (2005), 904–910.
- [120] Q. XIA: *The formation of a tree leaf*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., **13** (2) (2007), 359–377.

Giuseppe Buttazzo  
Dipartimento di Matematica  
Università di Pisa  
Largo B. Pontecorvo, 5  
56127 Pisa - ITALY  
buttazzo@dm.unipi.it