

Problemes aux limites non classiques pour equations d'evolution

J. L. LIONS

ABSTRACT. We study the wave equation in a bounded domain $\Omega \times (0, T)$ subject to Cauchy data on $\partial\Omega \times (0, T)$, or on part of $\partial\Omega \times (0, T)$. Tools from the theory of optimal control are used. We use in particular the HUM theory, introduced in J. L. LIONS [1], [2], for the problem of exact controllability.

1. INTRODUCTION

1.1. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière (régulière) Γ . Dans le cylindre $\Omega \times (0, T)$, on considère l'équation des ondes

$$u'' - \Delta u = 0 \tag{1.1}$$

où

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

On dénote par

$$\Sigma = \Gamma \times (0, T) \text{ la frontière de } \Omega \times (0, T) \tag{1.2}$$

et par

$$\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \text{ un sous ensemble donné de } \Sigma. \tag{1.3}$$

1980 Mathematics Subject Classification (1985 revision): 49B22, 35R25, 49E30, 35L20.

Editorial de la Universidad Complutense. Madrid, 1988.

On cherche u solution de (1.1),

$$u = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{sur } \Sigma_0, \quad (1.5)$$

où f est une fonction donnée sur Σ_0 et où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ désigne la dérivée normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω . Pour fixer les idées on supposera que

$$f \in L^2(\Sigma_0). \quad (1.6)$$

La première question est: *ce problème admet-il une (ou plusieurs) solution(s)?*

La réponse n'est pas tout à fait évidente, un élément de la réponse étant apporté par la *théorie de la contrôlabilité exacte* dont nous rappelons quelques aspects au n.° 2.

Cela permet, sous certaines conditions sur Σ_0 , de donner les conditions nécessaires et suffisantes sur f pour que (1.1), (1.4), (1.5) admette une solution.

Mais s'il n'y a pas de solution au problème, il est assez naturel de le «relaxer» de la manière suivante: dans l'ensemble des fonctions u vérifiant (1.1), (1.4), trouver (si elle existe) celle des fonctions qui minimise la quantité.

$$\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - f \right)^2 d\Sigma_0. \quad (1.7)$$

On a alors affaire à un *problème de contrôle*, que nous posons maintenant plus précisément.

1.2. Problème de contrôle optimal. On considère le système dont l'état y est donné par

$$y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.8)$$

$$y(0) = v^0, \quad y'(0) = v^1,$$

$$v = \{v^0, v^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad (1.9)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (1.10)$$

Le système (1.8), (1.9), (1.10) admet une solution unique et définit donc l'état $y = \gamma(v)$ du système.

Sous les conditions (1.9) on sait que (cf. J. L. Lions [4], résultat redémontré dans J. L. Lions [2], vol. 1),

$$\frac{\partial y(v)}{\partial v} \in L^2(\Sigma). \tag{1.11}$$

On peut donc introduire la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial y(v)}{\partial v} - f \right|^2 d\Sigma_0 \tag{1.12}$$

et on cherche

$$\inf. \mathcal{J}(v), v = \{v^0, v^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{1.13}$$

C'est ce problème que l'on va résoudre aux n.° 3 et 4 après avoir donné, au n.° 2, un bref rappel de quelques notions de la théorie de la contrôlabilité exacte, telle qu'introduite dans J. L. Lions [1].

Quelques variantes seront données au n.° 4.

Remarque 1.1. *Le type de problèmes considérés ici intervient notamment dans des questions liées à la géologie, qui m'ont été signalées par L. Tarantola [1].*

2. CONTROLABILITE EXACTE ET HUM

2.1. Une inégalité. Sous «certains conditions» sur Σ_0 on a l'inégalité:

$$\int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial y(v)}{\partial v} \right|^2 d\Sigma_0 \geq C [\|v^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v^1\|_{L^2(\Omega)}^2], \tag{2.1}$$

$C > 0.$

Cette inégalité est, en quelque sorte, une inégalité de *type inverse* de celle obtenue en utilisant (1.11), et, plus précisément, que l'application $\{v^0, v^1\} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial v}$ est continue de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$.

Cette inégalité (2.1) a d'abord été obtenue par L. F. Ho [1] dans le cas suivant: soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$; on introduit

$$\Gamma(x^0) = \{x | x \in \Gamma, (x - x^0) \cdot v(x) \geq 0\}. \tag{2.2}$$

Alors (2.1) a lieu si

$$\Sigma_0 = \Gamma(x^0) \times (0, T) \quad (2.3)$$

$$T > 2R(x^0), \quad R(x^0) = \max_{x \in \Gamma(x^0)} (x - x^0) \cdot \nu(x).$$

Ce résultat a ensuite été étendu par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [1] qui ont obtenu les conditions nécessaires et suffisantes pour que (2.1) ait lieu.

2.2. Méthode HUM. Le problème de la *contrôlabilité exacte* est —dans un cas très particulier— le suivant (on pourra consulter J. L. Lions [1], [2] pour la théorie générale, et la bibliographie de ces travaux).

On considère l'équation d'état donnée par

$$z'' - \Delta z = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} z &= w & \text{sur} & \Sigma_0 \\ z &= 0 & \text{sur} & \Sigma/\Sigma_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$z(0) = y^0, \quad z'(0) = y^1. \quad (2.6)$$

Dans (2.6) on suppose que

$$y^0 \in L^2(\Omega), \quad y^1 \in H^{-1}(\Omega) \text{ [dual de } H_0^1(\Omega)\text{]}. \quad (2.7)$$

Alors, si $w \in L^2(\Sigma_0)$, on peut montrer (J. L. Lions [4]; cf. aussi [2], vol. 1) que (2.4), (2.5), (2.6) admet une solution unique $z(w)$. La fonction

$$t \rightarrow \{z(t; w), z'(t; w)\}$$

est continue de $[0, T] \rightarrow L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

On cherche w , s'il existe, tel que

$$z(T; w) = z'(T; w) = 0. \quad (2.8)$$

Si, pour tout couple y^0, y^1 vérifiant (2.7), on peut trouver $w \in L^2(\Sigma_0)$ tel que l'on ait (2.8), alors on dit qu'il y a *Contrôlabilité exacte à l'instant T*.

La méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) montre que si (2.1) a lieu, alors il y a *contrôlabilité exacte*.

On opère comme suit: on part de v^0, v^1 et on résout (1.8), (1.9), (1.10).

On introduit ensuite ψ solution de

$$\begin{aligned} \psi'' - \Delta\psi &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \psi(T) = \psi'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \psi &= \frac{\partial y}{\partial \nu} && \text{sur } \Sigma_0 \\ \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma/\Sigma_0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

On définit enfin Λ par

$$\Lambda \{v^0, v^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \tag{2.10}$$

On définit ainsi (cela mérite quelques développements que l'on trouvera dans J. L. Lions [2], vol. 1) un opérateur

$$\Lambda \in \mathcal{L}(F; F'), \quad F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \tag{2.11}$$

qui est symétrique ($\Lambda^* = \Lambda$). On a:

$$\langle \Lambda \{v^0, v^1\}, \{v^0, v^1\} \rangle = \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial y(v)}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma_0 \tag{2.12}$$

(on multiplie l'équation (2.9) par $y(v)$ et l'on intègre par parties).

Les intégrations par parties sont valables *par définition*, puisque ψ est solution faible de (2.9) définie par transposition, comme dans J. L. Lions et E. Magenes [1]). Alors

$$\Lambda \text{ est un isomorphisme de } F \text{ sur } F'. \tag{2.13}$$

On considère alors l'équation

$$\Lambda \{v^0, v_1\} = \{y^1, -y^0\}. \tag{2.14}$$

Elle admet une solution unique. On calcule $y(v)$ correspondant à cette solution: si l'on prend $w = \frac{\partial y(v)}{\partial \nu}$ sur Σ_0 on a $z = \psi$, donc (2.8) et on a construit un contrôle donnant la contrôlabilité exacte.

Remarque 2.1. En fait s'il un contrôle, disons w_0 , donnant lieu à (2.8), alors il en existe *une infinité*. Tous les contrôles w donnant lieu à (2.8) forment un espace affine

$$w \in w_0 + \mathcal{V}, \tag{2.15}$$

où \mathcal{V} est défini comme suit. On considère la solution θ de

$$\begin{aligned} \theta'' - \Delta\theta &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \theta(0) = \theta'(0) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \theta &= g && \text{sur } \Sigma_0 \\ \theta &= 0 && \text{sur } \Sigma/\Sigma_0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Alors

$$\mathcal{V} = \{g | g \in L^2(\Sigma_0), \theta(T) = \theta'(T) = 0\} \quad (2.17)$$

Remarque 2.2. On a montré dans J. L. Lions [3] que la condition nécessaire et suffisante pour que (1.1), (1.4), (1.5) admette une solution est que

$$\int_{\Sigma_0} fg d\Sigma_0 = 0 \quad \forall g \in \mathcal{V}. \quad (2.18)$$

La nécessité est évidente: on multiplie (1.1) par θ avec (2.16), (2.17).

Après intégrations par parties, on trouve (2.18).

Le fait que (2.18) soit suffisant est établi dans l'article cité.

Notre objet est maintenant de résoudre (1.13), que la condition (2.18) ait lieu ou non.

3. SYSTEME D'OPTIMALITE

On va supposer désormais que (2.1) a lieu. Alors le problème (1.13) admet une solution unique. On cherche à caractériser cette solution par un système d'optimalité.

Pour cela on introduit le problème pénalisé suivant:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v, y) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial y}{\partial \nu} - f \right|^2 d\Sigma_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\Omega \times (0, T)} (y'' - \Delta y)^2 dx dt \quad (3.1)$$

où y vérifie

$$y(0) = v^0, \quad y'(0) = v^1 \quad (3.2)$$

et

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.3)$$

On a pris dans (3.1) $\varepsilon > 0$; c'est le facteur de pénalisation.

Le problème pénalisé est:

$$\inf. \mathcal{J}_\varepsilon(v, y) \tag{3.4}$$

où $v = \{v^0, v^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $y'' - \Delta y \in L^2(\Omega \times (0, T))$ avec (3.2) et (3.3).

Le problème (3.4) admet une solution unique, notée $\{v_\varepsilon, y_\varepsilon\}$.

On introduit

$$p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(y_\varepsilon'' - \Delta y_\varepsilon) \tag{3.5}$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a:

$$V_\varepsilon = \{v_\varepsilon^0, v_\varepsilon^1\} \rightarrow \{v^0, v^1\} \text{ dans } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \tag{3.6}$$

où $\{v^0, v^1\}$ est la solution du problème (1.13).

On écrit le système d'optimalité pour le problème (3.4). L'équation d'Euler est, utilisant la notation (3.5):

$$\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial v} - f \right) \frac{\partial y}{\partial v} - \iint_{\Omega \times (0, T)} p_\varepsilon (y'' - \Delta y) \, dx \, dt = 0 \tag{3.7}$$

$\forall y$ avec (3.2), (3.3).

Après intégrations par parties dans (3.7), on trouve

$$p_\varepsilon'' - \Delta p_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \tag{3.8}$$

$$p_\varepsilon(0) = p_\varepsilon'(0) = p_\varepsilon(T) = p_\varepsilon'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{3.9}$$

et

$$p_\varepsilon + \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial v} - f = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \quad p_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma/\Sigma_0 \tag{3.10}$$

Il résulte de (3.1) que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ on a:

$$\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial v} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{dans } L^2(\Sigma_0) \tag{3.11}$$

où $y = y(v^0, v^1)$ solution «optimale» correspondant à $v = \{v^0, v^1\}$ solution optimale de (1.13).

On déduit de (3.10), (3.11) que

$$p_\varepsilon|_{\Sigma} \text{ demeure dans un borné de } L^2(\Sigma) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \tag{3.12}$$

Cela, joint à (3.8) et (3.9) (où l'on peut utiliser aussi bien les conditions «initiales» à $t=0$ que les conditions «finales» à $t=T$), montre que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\{p_\varepsilon, p'_\varepsilon\} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)). \quad (3.13)$$

On peut alors passer à la limite. On trouve:

Théorème 3.1. *Le problème (1.13) admet une solution unique $v = \{v^0, v^1\}$. Soit y la solution correspondante. La fonction y est caractérisée par la solution $\{y, p\}$ du système d'optimalité*

$$\begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ p'' - \Delta p &= 0 && \text{dans } \Omega \\ p(0) = p'(0) = p(T) = p'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ y &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ p + \frac{\partial y}{\partial \nu} - f &= 0 && \text{sur } \Sigma_0 \quad p = 0 \quad \text{sur } \Sigma/\Sigma_0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Remarque 3.1. On va maintenant «interpréter» (3.14) —dont on reconnaît que ce problème n'est pas d'une lumineuse clarté...— et en déduire un *algorithme* pour résoudre constructivement le problème.

4. ALGORITHME DE RESOLUTION

On commence par introduire la fonction auxiliaire F solution de

$$\begin{aligned} F'' - \Delta F &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ F(T) = F'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ F = f & \text{ sur } \Sigma_0 \quad F = 0 && \text{sur } \Sigma/\Sigma_0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Considérons dans (3.14) $y(0) = v^0$, $y'(0) = v^1$ comme les *inconnues*.
Donc

$$\begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ y(0) = v^0, y'(0) &= v^1 && \text{dans } \Omega \\ y &= 0 && \text{sur } \Sigma \end{aligned} \quad (4.2)$$

Alors si l'on pose

$$\psi = -p + F \tag{4.3}$$

on a:

$$\begin{aligned} \psi'' - \Delta\psi &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \psi(T) = \psi'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \psi = \frac{\partial y}{\partial \nu} & \text{ sur } \Sigma_0 & \psi = 0 & \text{ sur } \Sigma/\Sigma_0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Comparons à (2.9). Il s'agit du même ψ ! Donc

$$\{\psi'(0), -\psi(0)\} = \wedge \{v^0, v^1\} \tag{4.5}$$

\wedge étant l'opérateur introduit en (2.10) (méthode HUM).
Revenons à (3.14). Les systèmes (4.2), (4.3), (4.4) d'une part, (3.16) d'autre part, sont *identiques* si

$$\{p'(0), -p(0)\} = \{0, 0\}$$

i.e. si

$$\{\psi'(0), -\psi(0)\} = \{F'(0), -F(0)\}$$

i.e. si

$$\wedge \{v^0, v^1\} = \{F'(0), -F(0)\}. \tag{4.6}$$

Conclusion:

Théorème 4.1. *La solution $\{v^0, v^1\}$ du problème (1.13) est obtenue de la manière suivante:*

- (i) *On résout (4.1).*
- (ii) *On résout (4.6) (qui admet une solution unique d'après HUM; cf. les rappels du n.° 2).*

Remarque 4.1. *Pour la résolution numérique de (4.6), on renvoie à R. Glowinski, C. H. Li et J. L. Lions [1] (où l'on trouvera d'autres résultats!).*

Remarque 4.2. On a donc obtenu

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} - f = -p \quad \text{sur} \quad \Sigma_0. \quad (4.7)$$

On a $p=0$ sur Σ_0 si et seulement si f vérifie (2.18).

5. QUELQUES VARIANTES

On peut considérer des problèmes du type (1.1), (1.4), (1.5) mais avec une équation aux dérivées partielles *non linéaire* au lieu de (1.1). On utilisera, à cet effet, la méthode introduite par E. Zuázua [1] (extensión *non linéaire* de HUM).

On peut considérer, par les méthodes ci-dessus, le problème suivant: on cherche u solution de

$$u'' + \Delta^2 u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (5.1)$$

avec

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \quad (5.2)$$

et

$$\Delta u = f \quad \text{sur} \quad \Sigma_0. \quad (5.3)$$

On peut également considérer d'autres conditions aux limites.

Il suffit «d'ajouter» les méthodes introduites précédemment et celles de J. L. Lions [1]-[2].

Bibliographie

- C. BARDOS; G. LEBEAU et J. RAUCH. [1]. Appendice 2 de J. L. LIONS [2] et série d'articles en préparation.
- R. GLOWINSKI; C. H. LI; J. L. LIONS [1]. *A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I) Dirichlet control: description of the numerical methods*, Japan, J. of Applied Math.
- L. F. HO [1]. *Observabilité frontière de l'équation des ondes*. C. R. Acad. Sc. Paris, 302 (1986), p. 443-446.
- J. L. LIONS [1]. *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*. J. von Neumann Lecture. Boston, 1986. SIAM Rev. March 1988, vol. 30, 1, p. 1-68.

- [2] *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*. Volume 1: *Méthode HUM*. Notes rédigées par E. Zuazua, avec deux appendices de E. ZUAZUA et de C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH. Masson RMA, 1988. Volume 2: *Perturbations*. Masson RMA, 1988. Volume 3: en préparation.
- [3] *Exact controllability and non well set boundary value problems*, dans *Recent Advances in Communication and Control Theory*, ed. by R. E. KALMAN, G. I. MARCHUK, A. E. RUBERTI et A. J. VITERBI, New York, Optimization Software, 1987, p. 227-238. [4] *Contrôle des systèmes distribués singuliers*. Gauthier-Villars. Collection M.M.I., t. 13, 1983.
- J. L. LIONS et E. MAGENES. [1]. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. 1 et 2. Dunod Paris, 1968.
- L. TARANTOLA. [1]. Communication personnelle, 1986.
- E. ZUAZUA. [1]. *Contrôlabilité exacte de systèmes d'évolution non-linéaires*. C.R.A.S. 1988.