Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques (*).

P. MARONI

Résumé. – *On établit une théorie générale des suites de polynômes orthogonaux dont la suite des dérivées est une suite quasi-orthogonale.*

Summary. – *One deals with general theory of orthogonal polynomials sequences whose derivatives sequence is quasi-orthogonal.*

1. – Introduction.

L'objet de cet article est de présenter une théorie générale des polynômes semi-classiques, c'est-à-dire des polynômes orthogonaux qui généralisent le plus immédiatement les polynômes classiques (Jacobi, Bessel, Laguerre, Hermite).

Les polynômes classiques peuvent être caractérisés de plusieurs façons. En particulier,

a) Ce sont les suites orthogonales dont la suite des dérivées est aussi orthogonale [1], [2], [3].

b) Ce sont les suites orthogonales dont chaque polynôme P_n vérifie une relation du type

$$\Phi(x)P'_{n+1}(x) = \theta_{n0}P_n(x) + \theta_{n1}P_{n+1}(x) + \theta_{n2}P_{n+2}(x)$$

où Φ est un polynôme de degré deux au plus [4].

Divers auteurs ont présenté des suites orthogonales généralisant la propriété *a*) ou *b*), c'est-à-dire des suites orthogonales dont la suite des dérivées est quasi-orthogonale, [5], [6], ou des suites orthogonales dont chaque polynôme vérifie [7]:

$$P'_{n+1}(x) = \theta_{n,n-s}P_{n-s}(x) + \theta_{n,n}P_n(x) .$$

(*) Entrata in Redazione il 9 dicembre 1985.

Indirizzo dell'A.: Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire d'Analyse Numérique L. A. 189 - 4, place Jussieu, 75252 Paris, Cedex 05.

Le point de vue adopté dans [5] et [6] consiste à partir d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynomiaux vérifiée par la fonction poids et qui généralise celle vérifiée par la fonction poids des polynômes classiques.

Ici, on présente le problème de la manière suivante: déterminer toutes les suites (régulièrement) orthogonales dont la suite des dérivées est quasi-orthogonale. On montre que la condition sur la suite des dérivées peut être considérablement affaiblie en introduisant la notion d'orthogonalité faible (définition 2.7). On montre également que le problème posé est équivalent au problème suivant: trouver toutes les suites $\{P_n\}_{n\geq 0}$ (régulièrement) orthogonales dont chaque polynôme P_n vérifie la relation de structure:

$$\Phi(x)P'_{n+1}(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \theta_{n,\nu}P_\nu(x)$$

où $\deg \Phi = t$.

Cela permet de répondre à deux questions posées par Askey, citées dans [4] et qui sont en fait équivalentes.

On établit aussi l'équation donnant toutes les formes linéaires (régulières) associées aux suites orthogonales envisagées et qu'on appellera dorénavant les suites semi-classiques. Celles-ci possèdent une propriété qui parait avoir échappé aux auteurs qui ont construit des suites semi-classiques particulières: elles sont quasi-orthogonales par rapport à la forme linéaire associée à la suite des dérivées.

Dans le paragraphe § 2, on rappelle les définitions indispensables pour la suite; un soin particulier est donné à la définition de la quasi-orthogonalité qui est précisée dans un sens qui n'est pas forcément en accord avec celui qui a cours dans la littérature [5], [8], [9], [10]. On indique également les conditions dans lesquelles une suite (régulièrement) orthogonale par rapport à une forme linéaire est en même temps quasi-orthogonale par rapport à une autre forme linéaire.

Le paragraphe § 3 contient le théorème fondamental caractérisant les suites semi-classiques. L'ensemble des suites semi-classiques apparaît comme étant la réunion des suites dites de classe s, $s \in N$ (définition 3.1). Les suites classiques sont alors de classe zéro.

Deux corollaires découlent naturellement du théorème fondamental: la suite $\{P^{(k)}_{n+k}\}_{n\geq 0}$ des dérivées d'ordre k des polynômes d'une suite semi-classique est quasi-orthogonale et chaque polynôme d'une suite semi-classique vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients polynomiaux. Enfin, une suite (régulièrement) orthogonale dont la suite des dérivées est $1/p$ orthogonale [11] est nécessairement une suite semi-classique.

Dans le paragraphe § 4, on indique sommairement le résultat suivant: une suite (régulièrement) orthogonale dont la suite des dérivées d'ordre k est quasi-orthogonale est une suite semi-classique [12], [13].

Le présent article a été résumé dans [14].

2. – Notations et définitions.

Soit $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{C}$ telle que $\deg B_n \leqslant n$ pour chaque $n\geqslant 0$. La suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est libre si et seulement si $\deg B_n = n$, $n\geqslant 0$. Dans ce cas, il est toujours possible de normaliser chaque polynôme en considérant:

$$B_n(x) = x^n + b_n x^{n-1} + \ldots, \qquad n\geqslant 0 .$$

On dira alors que la suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est une suite normalisée.

Soit $\mathfrak{L}$ une forme linéaire sur $\mathcal{P}$, espace vectoriel des polynômes sur $\boldsymbol{C}$. La forme $\mathfrak{L}$ est dite régulière (admissible ou définie) si on peut lui associer une suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ telle que:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}(P_m P_n) = 0 , \qquad m \neq n \\ &\mathfrak{L}(P_n^2) \neq 0 , \qquad n\geqslant 0 . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Une telle suite, lorsqu'elle existe, est dite (régulièrement) orthogonale relativement à $\mathfrak{L}$; elle est libre, de sorte qu'on peut toujours la supposer normalisée. Elle est alors unique.

Notant $\mu_n = \mathfrak{L}(x^n)$, $n\geqslant 0$, on sait que la forme $\mathfrak{L}$ est régulière si et seulement si:

$$\Delta_n = \det\,(\mu_{i+j})_{i,j=0}^{n} \neq 0 , \qquad n\geqslant 0 .$$

Il est utile de transformer cette condition.

LEMME 2.1. – *Pour toute suite normalisée $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ et toute forme $\mathfrak{L}$, on a:*

$$\det\big(\mathfrak{L}(B_\nu B_\mu)\big)_{\nu,\mu=0}^{n} = \Delta_n , \qquad n\geqslant 0 . \tag{2.2}$$

Soit $A = (a_{\nu\mu})_{\nu,\mu=0}^{n}$ une matrice quelconque; considérons:

$$\tilde{B}_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{n} a_{\nu\mu} B_\mu(x) , \qquad 0\leqslant \nu \leqslant n .$$

On a

$$\begin{aligned} \big(\mathfrak{L}(B_\nu B_\mu)\big)\, {}^t\!A &= \big(\mathfrak{L}(B_\nu \tilde{B}_\mu)\big) \\ A\big(\mathfrak{L}(B_\nu \tilde{B}_\mu)\big) &= \big(\mathfrak{L}(\tilde{B}_\nu \tilde{B}_\mu)\big) . \end{aligned}$$

D'où:

$$\det\big(\mathfrak{L}(\tilde{B}_\nu \tilde{B}_\mu)\big) = (\det A)^2 \det\big(\mathfrak{L}(B_\nu B_\mu)\big) . \tag{2.3}$$

Prenons en particulier $\tilde{B}_\nu(x) = x^\nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$, et ainsi, on a:

$$a_{\nu\mu} = 0\,, \quad \nu < \mu \leqslant n\,; \quad a_{\nu\nu} = 1\,; \quad \det A = 1\,.$$

D'où le résultat.

On en déduit:

PROPOSITION 2.1. – *Pour chaque forme $\mathcal{L}$ les énoncés suivants sont équivalents:*

(2.4) *La forme $\mathcal{L}$ est régulière.*

(2.5) *Il existe une suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ telle que:*

$$\det\big(\mathcal{L}(B_\nu B_\mu)\big)^n_{\nu,\mu=0} \neq 0\,, \qquad n \geqslant 0\,.$$

(2.6) *Pour chaque suite libre $\{C_n\}_{n\geqslant 0}$, on a:*

$$\det\big(\mathcal{L}(C_\nu C_\mu)\big)^n_{\nu,\mu=0} \neq 0\,, \qquad n \geqslant 0\,.$$

(2.4) $\Rightarrow$ (2.5) *D'après le résultat classique.*

(2.5) $\Rightarrow$ (2.6) *Car en notant $C_n(x) = a_n\tilde{C}_n(x)$ où $\tilde{C}_n$ est le polynôme normalisé, on a:*

$$\det\big(\mathcal{L}(C_\nu C_\mu)\big) = \prod_{\nu=0}^{n} a_\nu^2 \det\big(\mathcal{L}(\tilde{C}_\nu \tilde{C}_\mu)\big)$$

en utilisant (2.3). *D'autre part, d'après l'hypothèse, la suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est libre et donc la suite normalisée $\{\tilde{B}_n\}_{n\geqslant 0}$ vérifie la condition* (2.5). *D'où, en vertu du lemme* 2.1:

$$\det\big(\mathcal{L}(C_\nu C_\mu)\big) = \prod_{\nu=0}^{n} a_\nu^2 \Delta_n = \prod_{\nu=0}^{n} a_\nu^2 \det\big(\mathcal{L}(\tilde{B}_\nu \tilde{B}_\mu)\big) \neq 0\,, \qquad n \geqslant 0\,.$$

(2.6) $\Rightarrow$ (2.4) *Evident.*

Soit $p \geqslant 1$ un entier.

DÉFINITION 2.1. – *La suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est dite $1/p$ orthogonale relativement à la forme $\mathcal{L} \neq 0$ si p est le plus petit entier supérieur ou égal à un tel que:*

$$\mathcal{L}(B_m B_n) = 0\,, \quad n \geqslant mp + 1\,, \quad m \geqslant 0 \ [11]\,. \tag{2.7}$$

REMARQUES. – 1) Lorsque $p = 1$, on retrouve le cas d'une suite orthogonale relativement à $\mathcal{L}$.

2) Lorsque la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est libre, elle est $1/p$ orthogonale relativement à $\mathcal{L}$ si et seulement si elle vérifie:

$$\mathcal{L}(x^m B_n(x)) = 0\,, \quad n \geq mp+1\,, \quad m \geq 0\,. \tag{2.8}$$

Définition 2.2. – *La suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est dite régulièrement $1/p$ orthogonale relativement à $\mathcal{L}$ si elle est libre et si elle est $1/p$ orthogonale par rapport à $\mathcal{L}$ régulière.*

Remarques. – 1) Il revient au même de dire que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est régulièrement $1/p$ orthogonale par rapport à $\mathcal{L}$ si elle vérifie (2.5) et (2.8).

2) Lorsque $p = 1$, on retrouve le cas d'une suite (régulièrement) orthogonale relativement à $\mathcal{L}$, car on a:

$$\det\big(\mathcal{L}(B_\nu B_\mu)\big)_{\nu,\mu=0}^{n} = \prod_{\nu=0}^{n} \mathcal{L}(B_\nu^2) \neq 0\,.$$

3) Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la suite normalisée orthogonale associée à la forme $\mathcal{L}$ régulière, alors toutes les suites normalisées $\{B_n\}_{n\geq 0}$ régulièrement $1/p$ orthogonales relativement à $\mathcal{L}$ sont données par

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n,\nu} P_\nu(x)\,, \quad n \geq 0 \tag{2.9}$$

où

$$b_{n,\nu} = 0\,, \quad n \geq \nu p + 1\,, \quad \nu \geq 0\,. \tag{2.10}$$

Définition 2.3. – *La suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est dite quasi-orthogonale d'ordre $p-1$ relativement à $\mathcal{L}$ si elle vérifie* [8], [9], [10]:

$$\mathcal{L}(B_m B_n) = 0\,, \quad 0 \leq m \leq n-p\,, \quad n \geq p \tag{2.11}$$

$$\exists r \geq p-1 \quad \textit{tel que} \quad \mathcal{L}(B_{r-p+1} B_r) \neq 0\,. \tag{2.12}$$

Remarques. – 1) Une suite quasi-orthogonale d'ordre zéro est une suite orthogonale.

2) Lorsque la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est libre, les conditions (2.11) et (2.12) sont équivalentes à:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(x^m B_n(x)) = 0\,, \quad 0 \leq m \leq n-p\,, \quad n \geq p \\ &\exists r \geq p-1 \quad \text{tel que} \quad \mathcal{L}(x^{r-p+1} B_r(x)) \neq 0\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Définition 2.4. – *La suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est dite régulièrement quasi-orthogonale d'ordre $p-1$ relativement à $\mathcal{L}$, si elle est libre et si elle vérifie* (2.13) *avec $\mathcal{L}$ régulière.*

Dans ce cas, toutes les suites normalisées $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ régulièrement quasi-orthogonales d'ordre $p-1$ par rapport à $\mathcal{L}$ sont de la forme:

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{\nu=0}^{n} b_{n,\nu} P_\nu(x)\,, \qquad 0\leqslant n\leqslant p-1 \\ B_n(x) &= \sum_{\nu=n-p+1}^{n} b_{n,\nu} P_\nu(x)\,, \qquad n\geqslant p \end{aligned}$$

et il existe $r\geqslant p-1$ tel que $b_{r,r-p+1}\neq 0$.

DÉFINITION 2.5. – *La suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ est dite strictement quasi-orthogonale d'ordre $p-1$ relativement à $\mathcal{L}$ si elle vérifie:*

$$(2.15)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{L}(B_m B_n) = 0\,, \qquad 0\leqslant m\leqslant n-p\,, \qquad n\geqslant p \\ &\forall n\geqslant p-1\,, \qquad \mathcal{L}(B_{n-p+1}B_n)\neq 0\,. \end{aligned}$$

Alors chaque polynôme B_n est de degré n effectivement pour tout $n\geqslant 1$ et ainsi en posant $B_0(x)=1$, on pourra toujours supposer qu'une suite strictement quasi-orthogonale d'ordre $p-1$ est une suite normalisée.

DÉFINITION 2.6. – *Une suite $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ strictement quasi-orthogonale d'ordre $p-1$ relativement à une forme $\mathcal{L}$ régulière est appelée une suite normalement quasi-orthogonale d'ordre $p-1$.*

D'après (2.14) et (2.15), toutes les suites normalement quasi-orthogonales d'ordre $p-1$ relativement à $\mathcal{L}$ sont caractérisées par les conditions:

$$b_{n,n-p+1}\neq 0\,, \qquad n\geqslant p-1\,.$$

Dans la suite, on sera souvent placé dans la situation suivante: soit $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite orthogonale par rapport à $\mathcal{L}$ régulière; d'autre part, il existe une forme $\tilde{\mathcal{L}}$ telle que la suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ soit quasi-orthogonale d'ordre $p-1$ par rapport à $\tilde{\mathcal{L}}$. On peut caractériser une telle situation de la façon suivante:

PROPOSITION 2.2. – *Pour chaque suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ normalisée régulièrement orthogonale, les énoncés suivants sont équivalents* [2]:

a) *La suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ orthogonale par rapport à $\mathcal{L}$ régulière est quasi-orthogonale d'ordre $p-1$ par rapport à $\tilde{\mathcal{L}}$.*

b) *$\exists r\geqslant p-1$ tel que $\tilde{\mathcal{L}}(P_{r-p+1}P_r)\neq 0$; $\tilde{\mathcal{L}}(P_n)=0$, $n\geqslant p$.*

c) *Il existe un polynôme unique Φ de degré $p-1$ tel que*

$$(2.16)\qquad \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\Phi\cdot)\,.$$

d) *La suite* $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ *orthogonale par rapport à* $\mathcal{L}$ *régulière est strictement quasi-orthogonale d'ordre* $p-1$ *relativement à* $\tilde{\mathcal{L}}$.

e) $$\tilde{\mathcal{L}}(P_{p-1}) \neq 0\,; \quad \tilde{\mathcal{L}}(P_n) = 0\,, \quad n \geqslant p\,.$$

a) $\Rightarrow$ *b)* C'est évident d'après la définition 2.3.

b) $\Rightarrow$ *c)* Considérons la forme $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{L}} - \sum_{\nu=0}^{p-1} \lambda_\nu \mathcal{L}(x^\nu \cdot)$ où $\lambda_\nu \in \mathbf{C}$.

D'après la seconde hypothèse, on a $\mathcal{F}(P_n) = 0$, $n \geqslant p$ et il est possible de déterminer les coefficients λ_ν, $0 \leqslant \nu \leqslant p-1$, de façon unique par les conditions $\mathcal{F}(P_n) = 0$, $0 \leqslant n \leqslant p-1$. Il en résulte que $\mathcal{F} = 0$ et $\tilde{\mathcal{L}}$ est donnée par (2.16) où Φ est un polynôme de degré $p-1$ au plus. Si Φ est de degré $p-2$ au plus, alors $\tilde{\mathcal{L}}(P_{r-p+1}P_r) = 0$ contrairement à l'hypothèse. Donc $\lambda_{p-1} \neq 0$ et on a:

$$\tilde{\mathcal{L}}(P_{n-p+1}P_n) = \lambda_{p+1}\mathcal{L}(P_n^2)\,, \quad n \geqslant p-1\,. \tag{2.17}$$

c) $\Rightarrow$ *d)* D'après (2.16) et (2.17).

d) $\Rightarrow$ *e)* C'est évident.

e) $\Rightarrow$ *b)* C'est évident.

Le résultat est démontré car *d)* $\Rightarrow$ *a)* de façon évidente.

Donnons enfin une définition nouvelle.

DÉFINITION 2.7. – *La suite libre* $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *est dite faiblement orthogonale d'index* (p, q) *par rapport à* $\mathcal{L}$, *si il existe un couple d'entiers* $p, q \geqslant 1$ *tels que*:

$$\mathcal{L}(B_{p-1}) \neq 0\,, \quad \mathcal{L}(B_n) = 0\,, \quad n \geqslant p \tag{2.18}$$

$$\mathcal{L}\big(xB_{q-1}(x)\big) \neq 0\,, \quad \mathcal{L}\big(xB_n(x)\big) = 0\,, \quad n \geqslant q\,. \tag{2.19}$$

REMARQUE. – Une suite strictement quasi-orthogonale d'ordre $p-1$ par rapport à $\mathcal{L}$ est faiblement orthogonale d'index $(p, p+1)$ par rapport à $\mathcal{L}$.

3. – Les polynômes semi-classiques.

Soit $P_n(x)$ un polynôme normalisé, on écrira $Q_n(x) = P'_{n+1}(x)/(n+1)$, $n \geqslant 0$, où P'_n désigne la dérivée de P_n.

Soit $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite normalisée orthogonale par rapport à $\mathcal{L}$ régulière. Introduisons la récurrence du second ordre vérifiée par la suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$:

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1\,, \quad P_1(x) = x - \beta_0 \\ &P_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})P_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}P_n(x)\,, \quad n \geqslant 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $\gamma_n \neq 0$, $n \geqslant 0$, puisque la forme $\mathcal{L}$ est supposée régulière.

Par dérivation de (3.1) et en faisant $n \to n-1$, on a:

$$P_n(x) = (n+1)Q_n(x) + n\beta_n Q_{n-1}(x) + (n-1)\gamma_n Q_{n-2}(x) - nxQ_{n-1}(x)\,, \qquad n \geqslant 0 \tag{3.2}$$

en posant $Q_n(x) = 0$ si $n < 0$.

On va caractériser certaines suites orthogonales $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ à l'aide d'une propriété de la suite normalisée des dérivées $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$.

THÉORÈME 3.1. – *Les énoncés suivants sont équivalents:*

a) *La suite* $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ *est faiblement orthogonale d'index* (p, q) *par rapport à* $\tilde{\mathfrak{L}}$.

b) *Les formes* $\mathfrak{L}$ *et* $\tilde{\mathfrak{L}}$ *vérifient les propriétés suivantes*: [3].

Il existe un polynôme ψ *unique de degré* $p \geqslant 1$ *tel que*:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(P') = \mathfrak{L}(\psi P)\,, \qquad P \in \mathfrak{T}\,. \tag{3.3}$$

Il existe un polynôme Λ *unique de degré* $q \geqslant 1$ *tel que*:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(xP'(x)) = \mathfrak{L}(\Lambda P)\,, \qquad P \in \mathfrak{T}\,. \tag{3.4}$$

Définissant l'entier $s \geqslant 0$ *par* $s + 1 = \max(p, q-1)$, *il existe un entier* $0 \leqslant r \leqslant s+2$ *et un polynôme* Φ *unique de degré* $s + 2 - r$ *tel que*:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(P) = \mathfrak{L}(\Phi P)\,, \qquad P \in \mathfrak{T}\,. \tag{3.5}$$

c') *Il existe* $s \geqslant 0$ *et* $0 \leqslant r \leqslant s+2$ *entiers tels que*:

La suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ *est strictement quasi-orthogonale d'ordre* $s+2-r$ *par rapport à* $\tilde{\mathfrak{L}}$.
La suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ *est quasi-orthogonale d'ordre* s *par rapport à* $\tilde{\mathfrak{L}}$.

c) *La suite* $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ *est quasi-orthogonale d'ordre* s *par rapport à* $\tilde{\mathfrak{L}}$ [5], [6].

d) *Il existe* $s \geqslant 0$ *et* $0 \leqslant t \leqslant s+2$ *entiers et un polynôme* Φ *de degré* t *tels que*:

$$\Phi(x)Q_n(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \theta_{n,\nu} P_\nu(x)\,, \qquad n \geqslant s+1 \tag{3.6}$$

$$\exists \sigma \geqslant s \quad \textit{tel que} \quad \theta_{\sigma,\sigma-s} \neq 0\,. \tag{3.7}$$

d') *Il existe* $s, t \geqslant 0$ *entiers et un polynôme* Φ *de degré* t *tels que* [4]

$$\Phi(x)Q_n(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \theta_{n,\nu} P_\nu(x)\,, \qquad n \geqslant s+1$$

$$\exists \sigma \geqslant s \quad \textit{tel que} \quad \theta_{\sigma,\sigma-s} \neq 0\,.$$

$a) \Rightarrow b)$ D'après l'hypothèse, il existe $\tilde{\mathfrak{L}}$ et $p, q \geqslant 1$ tels que:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(Q_{p-1}) \neq 0 , \qquad \tilde{\mathfrak{L}}(Q_n) = 0 , \qquad n \geqslant p$$
$$\tilde{\mathfrak{L}}(xQ_{q-1}(x)) \neq 0 , \quad \tilde{\mathfrak{L}}(xQ_n(x)) = 0 , \quad n \geqslant q .$$

Posons $\mathcal{F} = \tilde{\mathfrak{L}}(D\cdot)$ où $D = d/dx$. On a:

$$\mathcal{F}(P_{n+1}) = \tilde{\mathfrak{L}}(P'_{n+1}) = (n+1)\,\tilde{\mathfrak{L}}(Q_n) = 0 , \quad n \geqslant p$$
$$\mathcal{F}(P_p) \quad = p\tilde{\mathfrak{L}}(Q_{p-1}) \neq 0 .$$

D'après la proposition 2.2, il existe un polynôme ψ unique de degré p tel que $\mathcal{F}(P) = \mathfrak{L}(\psi P)$, $P \in \mathfrak{P}$. D'où (3.3). On montre de même (3.4) en considérant $\mathcal{F} = \tilde{\mathfrak{L}}(xD\cdot)$.

D'autre part, de (3.2), on a:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(P_n) = 0 , \qquad n \geqslant \max\,(p+2, q+1) = s+3 .$$

On distingue deux cas:

1) $p \neq q-1$, alors $\tilde{\mathfrak{L}}(P_{s+2}) \neq 0$
car si $1 \leqslant p < q-1$, on a $\tilde{\mathfrak{L}}(P_{s+2}) = -\,q\tilde{\mathfrak{L}}(xQ_{q-1}(x)) \neq 0$
et si $0 \leqslant q-1 < p$, on a $\tilde{\mathfrak{L}}(P_{s+2}) = p\gamma_{p+1}\,\tilde{\mathfrak{L}}(Q_{p-1}) \neq 0$.

2) $p = q-1$, alors $\tilde{\mathfrak{L}}(P_{s+2}) = p\gamma_{p+1}\,\tilde{\mathfrak{L}}(Q_{p-1}) - q\tilde{\mathfrak{L}}(xQ_{p-1}(x))$
d'où le fait qu'il existe $0 \leqslant r \leqslant s+2$ tel que $\tilde{\mathfrak{L}}(P_{s+2-r}) \neq 0$.
On en déduit (3.5) d'après la proposition 2.2.

$b) \Rightarrow c')$ La suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre $s+2-r$ par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$ d'après (3.5) et la proposition 2.2. D'autre part, de (3.3) et (3.5), on a:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(P'R) = \mathfrak{L}(P\{\psi R - \Phi R'\}) , \qquad P, R \in \mathfrak{P} . \tag{3.8}$$

En particulier pour $R(x) = x$ et compte-tenu de (3.4), on a:

$$\mathfrak{L}(\Lambda P) = \mathfrak{L}(P(x)\{x\psi(x) - \Phi(x)\}) , \qquad P \in \mathfrak{P}$$

d'où

$$\Phi(x) = x\psi(x) - \Lambda(x) . \tag{3.9}$$

On en déduit pour (3.8):

$$\tilde{\mathfrak{L}}(P'R) = \mathfrak{L}(P(x)\{\psi(x)(R(x) - xR'(x)) + \Lambda(x)R'(x)\}) . \tag{3.10}$$

En particulier pour $P(x) = P_{n+1}(x)/(n+1)$, $R(x) = x^m$, on a

$$\tilde{\mathfrak{L}}(x^m Q_n(x)) = \frac{1}{n+1}\mathfrak{L}(P_{n+1}(x)\{(1-m)x^m\psi(x) + mx^{m-1}A(x)\}) . \tag{3.11}$$

D'où, compte-tenu de la définition de s:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(x^m Q_n(x)) = 0 , \quad 0 \leqslant m \leqslant n-s-1 , \quad n \geqslant s+1 .$$

Dans (3.11), prenons $m = n - s$; on en déduit:

$$\begin{array}{llll} \text{si} & 1 \leqslant p < q-1 , & \tilde{\mathfrak{L}}(Q_s) = 0 , & \tilde{\mathfrak{L}}(xQ_{s+1}(x)) \neq 0 \\ \text{si} & 0 \leqslant q-1 < p , & \tilde{\mathfrak{L}}(Q_s) \neq 0 , & \tilde{\mathfrak{L}}(xQ_{s+1}(x)) = 0 \\ \text{si} & p = q-1 , & \tilde{\mathfrak{L}}(Q_s) \neq 0 , & \tilde{\mathfrak{L}}(xQ_{s+1}(x)) \neq 0 . \end{array}$$

La suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est bien quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$.

$c') \Rightarrow c)$ Evident.

$c) \Rightarrow c')$ Car d'après (3.2), on voit que la suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre $s+2$ au plus par rapport à $\mathfrak{L}$: donc, il existe $0 \leqslant r \leqslant s+2$ tel que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ soit strictement quasi-orthogonale d'ordre $s+2-r$ par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$.

$c') \Rightarrow d)$ D'après l'hypothèse et la proposition 2.2, il existe un polynôme Φ unique de degré $t = s+2-r$ tel que:

$$\tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}(\Phi\cdot) .$$

Considérons l'expression:

$$\Phi(x)Q_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n+t} \theta_{n,\nu} P_\nu(x) , \quad n \geqslant 0 .$$

On a:

$$\mathfrak{L}(\Phi Q_n P_\mu) = \theta_{n,\mu}\mathfrak{L}(P_\mu^2) , \quad 0 \leqslant \mu \leqslant n+t .$$

Mais

$$\mathfrak{L}(\Phi Q_n P_\mu) = \tilde{\mathfrak{L}}(Q_n P_\mu) = 0 , \quad 0 \leqslant \mu \leqslant n-s-1 , \quad n \geqslant s+1$$

en vertu de l'hypothèse; de plus, il existe $\sigma \geqslant s$ tel que

$$\tilde{\mathfrak{L}}(P_{\sigma-s}Q_\sigma) \neq 0 .$$

Donc

$$\theta_{n,\mu} = 0 , \quad 0 \leqslant \mu \leqslant n-s-1 , \quad n \geqslant s+1$$

$$\exists \sigma \geqslant 0 \quad \text{tel que} \quad \theta_{\sigma,\sigma-s} \neq 0 .$$

D'où (3.6) et (3.7).

d) $\Rightarrow$ *d'*) C'est évident.

d') $\Rightarrow$ *d*) Il suffit de montrer que nécessairement $0 \leqslant t \leqslant s+2$.

Soit $\tilde{\mathfrak{L}}$ définie par $\tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}(\Phi\cdot)$. Alors de l'hypothèse, on déduit

$$\tag{3.12} \tilde{\mathfrak{L}}(P_m Q_n) = 0\,, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-s-1\,, \quad n \geqslant s+1\,.$$

Supposons que $t \geqslant s+3$; de (3.2), on a:

$$\tag{3.13} \tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{n-t}P_n(x)\big) = (n+1)\,\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{n-t}Q_n(x)\big) + n\beta_n\,\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{n-t}Q_{n-1}(x)\big) + \\ + (n-1)\gamma_n\,\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{n-t}Q_{n-2}(x)\big) - n\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{n+1-t}Q_{n-1}(x)\big)\,.$$

D'après (3.12), on a

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{n-t}P_n(x)\big) = 0\,, \quad n \geqslant t$$

ce qui est contradictoire avec le fait que Φ est de degré t.
Donc nécessairement $t \leqslant s+2$.

d) $\Rightarrow$ *a*) D'après (3.12), on a en particulier:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(Q_n) = 0\,, \quad n \geqslant s+1\,; \qquad \tilde{\mathfrak{L}}\big(xQ_n(x)\big) = 0\,, \quad n \geqslant s+2\,.$$

Donc, il existe $1 \leqslant p \leqslant s+1$ tel que:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(Q_{p-1}) \neq 0\,; \quad \tilde{\mathfrak{L}}(Q_n) = 0\,, \quad n \geqslant p\,.$$

L'entier p ne peut pas être nul, car alors $\tilde{\mathfrak{L}}$ serait identiquement nulle en contradiction avec (3.7).
De même, il existe $1 \leqslant q \leqslant s+2$ tel que:

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(xQ_{q-1}(x)\big) \neq 0\,, \quad \tilde{\mathfrak{L}}\big(xQ_n(x)\big) = 0\,, \quad n \geqslant q\,.$$

L'entier q ne peut pas être nul, car supposons que $\tilde{\mathfrak{L}}\big(xQ_n(x)\big) = 0$, $n \geqslant 0$. Alors $\tilde{\mathfrak{L}}(x^n) = 0$, $n \geqslant 1$ et de (3.13) où $0 \leqslant t \leqslant s+2$, on a

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{n-t}P_n(x)\big) = 0\,, \quad n \geqslant t+2$$

ce qui est contradictoire avec $\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{n-t}P_n(x)\big) = \mathfrak{L}(P_n^2) \neq 0$, $n \geqslant t$.
Enfin, on a $\max(p, q-1) = 1+s$, car si $\max(p, q-1) < 1+s$, la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ serait quasi-orthogonale d'ordre inférieur à s, ce qui n'est pas possible d'après (3.7).

Complément à la démonstration.

On peut préciser la propriété de quasi-orthogonalité de la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$. Ecrivons (3.11) avec $m = n - s$:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(x^{n-s}Q_n(x)) = \frac{1}{n+1}\,\mathfrak{L}(P_{n+1}(x)\{(1-n+s)x^{n-s}\psi(x) + (n-s)x^{n-s-1}\Lambda(x)\})\,.$$

On en déduit:

I) $1\leqslant p < q-1$, alors $\tilde{\mathfrak{L}}(Q_s) = 0$; $\tilde{\mathfrak{L}}(x^{n-s}Q_n(x)) \neq 0$, $n\geqslant s+1$ c'est-à-dire

$$\theta_{s,0} = 0\,;\quad \theta_{n,n-s} \neq 0\,,\quad n\geqslant s+1\,. \tag{3.14}$$

II) $0\leqslant q-1 < p$, alors $\tilde{\mathfrak{L}}(Q_s) \neq 0$; $\tilde{\mathfrak{L}}(xQ_{s+1}(x)) = 0$; $\tilde{\mathfrak{L}}(x^{n-s}Q_n(x)) \neq 0$, $n\geqslant s+2$ c'est-à-dire

$$\theta_{s\,0} \neq 0\,;\quad \theta_{s+1,1} = 0\,;\quad \theta_{n,n-s} \neq 0\,,\quad n\geqslant s+2\,. \tag{3.15}$$

III) $p = q-1$, dans ce cas écrivons $\psi(x) = ax^{s+1} + \dots$ et $\Lambda(x) = bx^{s+2} + \dots$ d'où

$$\tilde{\mathfrak{L}}(x^{n-s}Q_n(x)) = \{a(1-n+s) + b(n-s)\}\,\frac{\mathfrak{L}(P_{n+1}^2)}{n+1}\,,\qquad n\geqslant s\,.$$

III$_1$) $1\leqslant r\leqslant s+2$, alors $a = b(\neq 0)$ nécessairement d'après (3.9) donc

$$\tilde{\mathfrak{L}}(x^{n-s}Q_n(x)) = \frac{a}{n+1}\,\mathfrak{L}(P_{n+1}^2) \neq 0\,,\qquad n\geqslant s$$

c'est-à-dire

$$\theta_{n,n-s} \neq 0\,,\quad n\geqslant s\,. \tag{3.16}$$

La suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$.

III$_2$) $r = 0$, alors $a \neq b$ car $\deg \Phi = s+2$.

Ici encore deux cas se présentent:

a) Il existe $\tau\geqslant 2$ entier tel que $a/b = \tau/(\tau-1)$, alors:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(x^{\tau}Q_{\tau+s}(x)) = 0\,;\quad \tilde{\mathfrak{L}}(x^{n-s}Q_n(s)) \neq 0\,,\quad n\geqslant s,\ n\neq \tau+s$$

c'est-à-dire

$$\theta_{\tau+s,\tau} = 0\,;\quad \theta_{n,n-s} \neq 0\,,\quad n\geqslant s,\ n\neq\tau+s\,. \tag{3.17}$$

b) Quel que soit $\tau \geqslant 2$ entier, on a $a/b \neq \tau(\tau-1)$ alors:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(x^{n-s}Q_n(x)) \neq 0\,, \qquad n \geqslant s$$

c'est-à-dire

$$\theta_{n,n-s} \neq 0\,, \qquad n \geqslant s\,. \tag{3.18}$$

Dans ce cas, la quasi-orthogonalité de la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est encore stricte.

REMARQUE. – On voit qu'on est amené à distinguer deux cas:

Celui où la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre s c'est-à-dire

$$\theta_{n,n-s} \neq 0\,, \qquad n \geqslant s\,.$$

Celui où la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre s avec la précision suivante: il existe $\tau \geqslant 0$ unique tel que $\theta_{s+\tau,\tau} = 0$ et $\theta_{n,n-s} \neq 0$, $n \geqslant s$, $n \neq s + \tau$.

Une première conséquence du théorème précédent est la suivante:

THÉORÈME 3.2. – *Toutes les formes $\mathfrak{L}$ régulières pour lesquelles l'un quelconque des énoncés précédents est vérifié, sont données par l'équation suivante*:

$$\mathfrak{L}(\psi P) = \mathfrak{L}(\{x\psi(x) - A(x)\}P'(x))\,, \qquad P \in \mathfrak{P}\,. \tag{3.19}$$

D'après (3.3) et (3.5), compte-tenu de (3.9).

On peut donner à l'équation (3.19) la forme d'une relation de récurrence portant sur les moments de $\mathfrak{L}$, $\mu_n = \mathfrak{L}(x^n)$, $n \geqslant 0$. Notons

$$\psi(x) = \sum_{\nu=0}^{p} a_\nu x^\nu\,, \qquad a_p \neq 0$$

$$A(x) = \sum_{\nu=0}^{q} b_\nu x^\nu\,, \qquad b_q \neq 0\,.$$

Il vient en prenant dans (3.19) $P(x) = x^n$, $n \geqslant 0$:

$$\sum_{\nu=0}^{q} a_\nu \mu_{\nu+n} = n \sum_{\nu=0}^{p} a_\nu \mu_{\nu+n} - n \sum_{\nu=0}^{q} b_\nu \mu_{\nu+n-1}\,, \qquad n \geqslant 0\,. \tag{3.20}$$

On ne traitera pas ici de la résolution des équations (3.19) et (3.20). Mais on peut cependant indiquer qu'il est toujours possible de chercher une représentation de la forme $\mathfrak{L}$ selon l'expression:

$$\mathfrak{L}(P) = \int_C Z(x) P(x)\, dx \tag{3.21}$$

où C est un chemin convenable à déterminer éventuellement dans le champ complexe. On suppose que Z possède la régularité indispensable.

On a donc pour (3.19) d'après (3.21):

$$\int_C Z(x)\psi(x)P(x)\,dx + \int_C \big((x\psi(x) - A(x))Z(x)\big)' P(x)\,dx = Z(x)\big(x\psi(x) - A(x)\big)P(x)\big]_C .$$

Si la fonction Z et le chemin C sont tels que:

$$\big(x\psi(x) - A(x)\big)Z'(x) + \big(2\psi(x) + x\psi'(x) - A'(x)\big)Z(x) = 0 \tag{3.22}$$

$$Z(x)\big(x\psi(x) - A(x)\big)P(x)\big]_C = 0\,, \qquad P \in \mathfrak{P} \tag{3.23}$$

ils fournissent, au moins formellement, une solution de l'équation (3.19) par l'intermédiaire de (3.21).

Traitons le cas simple où $\Phi(x) = x\psi(x) - A(x) = 1$ qui implique $r = s + 2$ et $p = q - 1 = 1 + s$. On a de (3.22):

$$Z(z) = K \exp - \left[\sum_{\nu=0}^{p} \frac{a_\nu}{\nu + 1} x^{\nu+1}\right].$$

En supposant de plus que p est impair et $a_p > 0$, on soit que la solution Z trouvée vérifie la condition (3.23) avec $C = \boldsymbol{R}$. Il en résulte:

$$\mathfrak{L}(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\sum_{\nu=0}^{1+s} \frac{a_\nu}{1+\nu} x^{1+\nu}\right] P(x)\,dx\,, \qquad P \in \mathfrak{P} \tag{3.24}$$

où s est pair. Si de plus, tous les coefficients a_ν sont réels (avec $a_{1+s} > 0$), alors la forme $\mathfrak{L}$ est définie positive: c'est une solution admissible de l'équation (3.19). Dans ce cas, on a $\tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}$ et donc la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est normalement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\mathfrak{L}$ [7].

Indiquons, pour terminer avec cet exemple, un problème typique qui se posera dans tous les autres cas: en supposant toujours s pair et $a_{1+s} > 0$, mais $a_\nu \in \boldsymbol{C}$, $0 \leqslant \nu \leqslant s$, quelles sont les conditions à imposer aux coefficients a_ν, $0 \leqslant \nu \leqslant s$, pour que la forme $\mathfrak{L}$ donnée par (3.24) soit régulière?

Posons la définition suivante:

DÉFINITION 3.1. – *Une suite orthogonale* $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ *associée à une forme* $\mathfrak{L}$ *régulière solution de l'équation* (3.19) *sera dite de classe* s *avec* $s + 1 = \max(p, q-1)$, $p = \deg \psi$ *et* $q = \deg A$.

Une suite orthogonale de classe s, $s \in \boldsymbol{N}$, sera appelée une suite semi-classique.

REMARQUES. – 1) On pourra distinguer à l'intérieur d'une classe s entre les suites de type zéro pour lesquelles la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre s et les autres qu'on appelera de type un.

2) Les suites classiques (Jacobi, Bessel, Laguerre, Hermite) apparaissent ainsi comme des suites semi-classiques de classe zéro. Il ne semble pas qu'on ait remarqué explicitement la propriété de quasi-orthogonalité stricte d'ordre inférieur ou égal à deux de chacune de ces suites par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$.

Donnons encore un corollaire du théorème 3.1.

THÉORÈME 3.3. – *Soit $s\geqslant 1$ un entier. Une suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ orthogonale par rapport à $\mathfrak{L}$ régulière et dont la suite des dérivées $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est $1/s$ orthogonale par rapport à une forme $\tilde{\mathfrak{L}}$, est de classe $s-1$.*

Lorsque $s=1$, le résultat est démontré par le théorème 3.1. Supposons $s\geqslant 2$. On a d'après l'hypothèse:

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^m Q_n(x)\big) = 0\,, \qquad n \geqslant ms+1,\ m\geqslant 0$$

donc, en particulier:

$$\tilde{\mathfrak{L}}(Q_n) = 0\,, \qquad n\geqslant 1$$

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(xQ_n(x)\big) = 0\,, \qquad n\geqslant s+1\,.$$

Montrons que la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ est faiblement orthogonale d'index $(1, q)$, $1 \leqslant q \leqslant s+1$ par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$.

Car si on avait $\tilde{\mathfrak{L}}\big(xQ_n(x)\big) = 0$, $n\geqslant 0$, cela entrainerait

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^m Q_n(x)\big) = 0\,, \qquad n\geqslant m(s-1)+1,\ m\geqslant 0$$

et ainsi la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ serait $1/(s-1)$ orthogonale par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$, contrairement à l'hypothèse.

Montrons que $q=s+1$ nécessairement; car si $q\leqslant s$, on aurait $1+\sigma = \max(1, q-1) < s$ et donc la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ serait quasi-orthogonale d'ordre σ par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$ et donc elle serait $1/(\sigma+1)$ orthogonale par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$, de qui est encore contradictoire puisque $\sigma+1<s$. D'où le résultat.

THÉORÈME 3.4. – *Si la suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ est de classe s, alors la suite $\{P^{(k)}_{n+k}\}_{n\geqslant 0}$, pour chaque $k\in \boldsymbol{N}$, est quasi-orthogonale d'ordre ks par rapport à la forme $\mathfrak{L}(\Phi^k\cdot)$* [5], [6].

Le résultat est vrai pour $k=0$ et 1. Supposons $k=2$. De (3.6), on a par dérivation et changeant n en $n+1$:

$$\Phi(x)Q'_{n+t}(x)=\sum_{\nu=n-s}^{n+t}\theta_{n+1,\nu+1}(\nu+1)Q_\nu(x)-\Phi'(x)Q_{n+1}(x)\,,\qquad n\geqslant s\,. \tag{3.25}$$

On en déduit:

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^m\Phi(x)Q'_{n+1}(x)\big)=\sum_{\nu=n-s}^{n+t}\theta_{n+1,\nu+1}(\nu+1)\,\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^mQ_\nu(x)\big)-\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^m\Phi'(x)Q_{n+1}(x)\big)$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^m\Phi(x)Q'_{n+1}(x)\big)=0\,,\qquad 0\leqslant m\leqslant n-2s-1,\ n\geqslant 2s+1\,.$$

La suite $\{Q'_{n+1}\}_{n\geqslant 0}$ est ainsi quasi-orthogonale d'ordre $2s$ au plus par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}(\Phi\cdot)$.

Supposons qu'elle soit quasi-orthogonale d'ordre $2s-1$ par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}(\Phi\cdot)$. De (3.2), on a:

$$2(n+1)Q_n(x)=(n+2)Q'_{n+1}(x)+(n+1)\beta_{n+1}Q'_n(x)+n\gamma_{n+1}Q'_{n-1}(x)-(n+1)xQ'_n(x)$$

d'où

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^m\Phi(x)Q_n(x)\big)=0\,,\qquad 0\leqslant m\leqslant n-2s,\ n\geqslant 2s\,.$$

Or, d'après ce qu'on a vu, il existe $\sigma\geqslant 2s$ tel que

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{\sigma-s}Q_\sigma(x)\big)\neq 0$$

et d'autre part, pour $s\leqslant t\leqslant s+2$, on a

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{\sigma-s-t}\Phi(x)Q_\sigma(x)\big)=0\,.$$

C'est contradictoire et donc la suite $\{Q'_{n+1}\}_{n\geqslant 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre $2s$ par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}(\Phi\cdot)$ lorsque $s\leqslant t\leqslant s+2$.

Dans le cas où $0\leqslant t<s$, $s\geqslant 1$, on a directement de (3.25):

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{n-2s}\Phi(x)Q'_{n+1}(x)\big)=\theta_{n+1,n-s+1}(n-s+1)\,\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{n-2s}Q_{n-s}(x)\big)\,,\qquad n\geqslant 2s$$

et donc, il existe un entier $\tau\geqslant 2s$ tel que

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^{\tau-2s}\Phi(x)Q'_{\tau+1}(x)\big)\neq 0\,.$$

Le résultat est donc vrai pour $k=2$; par récurrence, on peut voir facilement qu'il est vrai pour k quelconque.

THÉORÈME 3.5. – *Chaque polynôme d'une suite de classe s vérifie une équation différentielle* [6]:

$$J(x;n)P''_{n+1}(x)+K(x;n)P'_{n+1}(x)+L(x;n)P_{n+1}(x)=0 \tag{3.26}$$

où J, k et L sont des polynômes dont les degrés respectifs ne dépendent que de s et de r.

En utilisant la récurrence (3.1), on voit qu'il existe deux polynômes $A(x;n)$ et $B(x;n)$ tels que:

$$\Phi(x)Q_n(x)=A(x;n)P_{n-1}(x)+B(x;n)P_n(x)\,,\qquad n\geqslant 0 \tag{3.27}$$

avec $\deg A\leqslant s+1$ et $\deg B\leqslant s+2$.

On en déduit:

$$\Phi(x)Q_n(x)=R(x;n)P_n(x)-\frac{1}{\gamma_n}A(x;n)\,P_{n+1}(x) \tag{3.28}$$

où

$$R(x;n)=\frac{1}{\gamma_n}(x-\beta_n)A(x;n)+B(x;n)$$

$$\Phi(x)Q_{n+1}(x)=A(x;n+1)P_n(x)+B(x;n+1)P_{n+1}(x) \tag{3.29}$$

$$\Phi(x)Q_{n+2}(x)=-\gamma_{n+1}B(x;n+2)P_n(x)+S(x;n+1)P_{n+1}(x) \tag{3.30}$$

où

$$S(x;n)=A(x;n+1)+(x-\beta_n)B(x;n+1)\,.$$

En éliminant P_n et P_{n+1} entre (3.28), (3.29) et (3.30), on obtient:

$$Q_n(x)D(x;n+1)-Q_{n+1}(x)E(x;n+1)+Q_{n+2}(x)F(x;n+1)=0 \tag{3.31}$$

avec

$$D(x;n+1)=A(x;n+1)S(x;n+1)+\gamma_{n+1}B(x;n+1)B(x;n+2)$$

$$E(x;n+1)=R(x;n)S(x;n+1)-\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}A(x;n)B(x;n+2)$$

$$F(x;n+1)=R(x;n)B(x;n+1)+\frac{1}{\gamma_n}A(x;n)A(x;n+1)\,.$$

Ecrivons maintenant (3.28) sous la forme:

$$\delta_n=\Phi(x)Q_n(x)+\frac{1}{\gamma_n}A(x;n)P_{n+1}(x)=R(x;n)P_n(x)\,. \tag{3.32}$$

En dérivant, on a:

$$\delta_n' = R'(x;n)P_n(x) + nR(x;n)Q_{n-1}(x)\,. \tag{3.33}$$

De (3.31), on a

$$Q_n(x)E(x;n) = Q_{n-1}(x)D(x;n) + Q_{n+1}(x)F(x;n)\,. \tag{3.34}$$

Enfin de (3.2), on obtient:

$$\varepsilon_n = P_{n+1}(x) + (n+1)(x-\beta_{n+1})Q_n(x) = n\gamma_{n+1}Q_{n-1}(x) + (n+2)Q_{n+1}(x)\,. \tag{3.35}$$

On élimine P_n, Q_{n-1} et Q_{n+1} entre les équations (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35):

$$\begin{vmatrix} \delta_n(x) & R(x;n) & 0 & 0 \\ \delta_n'(x) & R'(x;n) & nR(x;n) & 0 \\ Q_n(x)E(x;n) & 0 & D(x;n) & F(x;n) \\ \varepsilon_n(x) & 0 & n\gamma_{n+1} & n+2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

C'est l'équation différentielle cherchée et on en tire:

$$J(x;n) = \Phi(x)\,R(x;n)\left\{\frac{n}{n+1}\gamma_{n+1}\,F(x;n) - \frac{n+2}{n+1}D(x;n)\right\}$$

$$\begin{aligned} k(x;n) = \left\{\frac{n}{n+1}\gamma_{n+1}F(x;n) - \frac{n+2}{n+1}D(x;n)\right\}\cdot& \\ \cdot\left\{R(x;n)\left(\Phi'(x) + \frac{n+1}{\gamma_n}A(x;n)\right) - \Phi(x)\,R'(x;n)\right\} &+ \\ + R(x;n)\left\{\frac{n(n+2)}{n+1}\,E(x;n) - n(x-\beta_{n+1})\,R(x;n)\,F(x;n)\right\}& \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(x;n) = \frac{1}{\gamma_n}\{n\gamma_{n+1}F(x;n) - (n+2)\,D(x;n)\}\,\{A'(x;n)R(x;n) - A(x;n)\,R'(x;n)\} &- \\ - nR^2(x;n)F(x;n)\,.& \end{aligned}$$

4. – Indiquons pour terminer un résultat qui généralise un résultat connu sur les polynômes classiques [12], [13].

THÉORÈME 4.1. – *Soit $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite normalisée orthogonale par rapport à $\mathfrak{L}$ régulière. Soit $k\geqslant 2$ un entier. Alors si la suite $\{P_{n+k}^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$, la suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ est nécessairement une suite semi-classique.*

Notons $\{Q_n^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$ la suite normalisée des dérivées d'ordre k, c'est-à-dire

$$Q_n^{(k)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{Q_{n+1}^{(k-1)}(x)}{n+1}\right), \qquad k\geqslant 1 \text{ avec } Q_n^{(0)}(x) = P_n(x)\,.$$

D'après (3.2), on a par récurrence:

$$\frac{p+1}{n+p+1}Q_n^{(p)}(x) = Q_n^{(p+1)}(x) + \frac{n}{n+p+1}\beta_{n+p}Q_{n-1}^{(p+1)}(x) + \\ + \frac{(n-1)\,n}{(n+p)(n+p+1)}\gamma_{n+p}Q_{n-2}^{(p+1)}(x) - \frac{n}{n+p+1}xQ_{n-1}^{(p+1)}(x)\,, \qquad n, p\geqslant 0\,. \tag{4.1}$$

Par hypothèse, on a:

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^m Q_n^{(k)}(x)\big) = 0\,, \qquad 0\leqslant m\leqslant n-s-1,\ n\geqslant s+1\,.$$

D'où, de (4.1):

$$\tilde{\mathfrak{L}}\big(x^m Q_n^{(k-1)}(x)\big) = 0\,, \qquad 0\leqslant m\leqslant n-s-3,\ n\geqslant s+3$$

et ainsi, par récurrence, on voit que la suite $\{Q_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre $s+2(k-1)$ au plus par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$. Il existe donc $0\leqslant\sigma\leqslant s+2(k-1)$ tel que la suite $\{Q_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ soit quasi-orthogonale d'ordre σ par rapport à $\tilde{\mathfrak{L}}$: la suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ est ainsi de classe σ.

REFERENCES

[1] W. HAHN, *Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen*, Math. Zeit., **39** (1935), pp. 634-638.

[2] H. L. KRALL, *On derivatives of orthogonal polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936), pp. 423-428.

[3] J. L. GERONIMUS, *On polynomials with respect to numerical sequences and on Hahn's theorems*, Izv. Akad. Nauk, **4** (1940), pp. 215-228 (en russe).

[4] W. A. AL-SALAM - T. S. CHIHARA, *Another characterization of the classical orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **3** (1) (1972), pp. 65-70.

[5] A. RONVEAUX, *Polynômes orthogonaux dont les polynômes dérivés sont quasi-orthogonaux*, C. R. Acad. Sc. Paris, **289** A (1979), pp. 433-436.

[6] E. HENDRIKSEN - H. VAN ROSSUM, *Semi-classical orthogonal polynomials*, Polynômes orthogonaux et applications, Symposium Laguerre, Bar-le-Duc (1984), Lectures Notes, p. 385, à paraître.

[7] S. BONAN - P. NEVAI, *Orthogonal polynomials and their derivatives I*, J. of Approx. Th., **40** (2) (1984), pp. 134-147.

[8] T. S. CHIHARA, *On quasi-orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), pp. 765-767.

[9] D. DICKINSON, *On quasi-orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., **12** (1961), pp. 185-194.

[10] J. A. SHOHAT, *On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **42** (1937), pp. 461-496.

[11] P. MARONI, *Une généralisation du théorème de Favard-Shohat sur les polynômes orthogonaux*, C. R. Acad. Sc. Paris, **293** (1981), pp. 19-22.

[12] W. HAHN, *Über höhere Ableitungen von orthogonal Polynomen*, Math. Zeit., **43** (1937), p. 101.

[13] H. L. KRALL, *On higher derivatives of orthogonal polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936), pp. 867-870.

[14] P. MARONI, *Une caractérisation des polynômes orthogonaux semi-classiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, **301**, série I (1985), pp. 269-272.