

Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace C^2

By Masakazu SUZUKI

(Reçu le 5 sept., 1972)

Introduction.

Les recherches récentes, dues à T. Nishino et H. Saitô¹⁾, sur les fonctions entières de deux variables complexes, indiquent que les singularités²⁾ de ces fonctions sont soumises à certaines restrictions, causées par la topologie de l'espace C^2 . A. Gutwirth, M. Nagata et I. Wakabayashi ont aussi rencontré un problème de ce caractère³⁾.

Or, pour les (bonnes) fonctions réelles, c'était l'idée fondamentale, due à M. Morse⁴⁾, de déterminer le type topologique de l'espace où est définie la fonction considérée (et celui des sous-variétés niveaux), d'après les types de singularités de la fonction.

Dans le présent mémoire, en appliquant cette idée aux fonctions polynômes de deux variables complexes, nous trouverons deux espèces de restrictions auxquelles sont soumises les singularités de ces fonctions; l'une est l'indépendance, à un certain sens, des 1-cycles homologues engendrés aux points singuliers de la fonction considérée (voir les §§ 2, 3), et l'autre concerne l'existence de la singularité au point à l'infini (le § 4). Nos résultats donnent aussi une solution au problème cité plus haut, qui est relié aux automorphismes algébriques de l'espace C^2 (le § 5)⁵⁾.

La méthode utilisée ici reste aussi valable (à peu près) pour les fonctions

1) T. Nishino [1], II (1969). H. Saitô [1].

2) En tenant compte de la singularité au point à l'infini; pour la définition précise, voir le § 2 du mémoire actuel.

3) A. Gutwirth [1]. M. Nagata [1]. Wakabayashi, nonpublié. Voir, notamment, le page 150 du mémoire de M. Nagata.

4) Voir M. Morse [1].

5) Nous appellerons un automorphisme de l'espace $C^2: x'=f(x, y), y'=g(x, y)$, algébrique, si f et g sont polynômes en x, y .

L'auteur entend que S. Abhyankar, aussi, a résolu ce problème, en appliquant le développement de Puiseux, et que son résultat est à paraître. Mais, l'auteur pense que la méthode utilisée ici sera, peut-être, tout à fait différente de celle de S. Abhyankar.

entières de la classe (A), définies par T. Nishino⁶⁾, et on verra notamment que le nombre des valeurs critiques d'une telle fonction entière est fini (le § 6).

L'auteur voudrait exprimer ici ses remerciements sincères à M. T. Nishino pour son encouragement, et à M. M. Kita pour ses discussions avec lui qui ont donné occasion aux recherches actuelles.

§ 1. Généralités.

1. Polynômes primitifs. Considérons un polynôme $f(x, y)$, non-constant dans l'espace fini C^2 des deux variables complexes x, y . Pour chaque valeur $c \in C$, la surface caractéristique dans C^2 , définie par l'équation: $f=c$, sera notée S_c ; et chaque composante irréductible de S_c sera appelée surface première de f . Une surface première S de f sera dite de type (g, n) , si S , regardée comme une surface de Riemann (ouverte), est de genre g et possède n composantes de frontières ($g \geq 0, n \geq 1$); et elle sera dite d'ordre m , si $f-c, c$ étant la valeur de f en S , prend les zéros justement d'ordre m sur S .

Un polynôme $f(x, y)$, non-constant, sera dit primitif, s'il existe une valeur c_0 telle que S_{c_0} soit irréductible et d'ordre un. Alors, pour tout polynôme $f(x, y)$ arbitraire, on peut trouver un polynôme primitif $F(x, y)$ et un polynôme $\varphi(z)$ d'une variable tels que $f = \varphi(F)$. Et on a aussi

PROPOSITION 1. Une surface S_c d'un polynôme primitif $f(x, y)$ est d'ordre un, pourvu qu'elle soit irréductible.

N.B. «Sauf mention expresse du contraire, les polynômes qui interviennent dans la suite seront supposés primitifs.»

2. Valeurs critiques. Soit $f(x, y)$ un polynôme (primitif); alors pour toute $c \in C$, sauf un nombre fini, au plus, de valeurs: c_1, \dots, c_p , la surface $S_c: f=c$, est irréductible (d'ordre un), non-singulière et de type (g, n) , où $g \geq 0, n \geq 1$ sont deux nombres entiers indépendants des valeurs c ($\neq c_1, \dots, c_p$). Nous appellerons chaque c_i ($i=1, \dots, p$) valeur critique de f . La surface S_{c_i} sera notée S_i et appelée surface critique de f , et toute $S_c, (c \neq c_1, \dots, c_p)$, sera dite ordinaire.

Un polynôme f sera dit de type (g, n) , si sa surface ordinaire est de type (g, n) . De plus, on a

PROPOSITION 2. Soit $f(x, y)$ un polynôme, et soient c_1, \dots, c_p les valeurs critiques de f . Posons: $G = C - \bigcup_{i=1}^p c_i, E = f^{-1}(G)$; alors E est un espace fibré localement trivial (topologiquement) sur G avec la projection f .

Tous les énoncés du présent paragraphe seront vérifiés facilement, et nous ne donnons pas de démonstrations.

6) T. Nishino [2].

§ 2. Indices de singularités.

3. Indice λ . Considérons, à l'espace (x, y) , une fonction holomorphe $f(x, y)$ dans un domaine D . Un point P de D sera appelé *point singulier de f* , s'il est celui de la surface caractéristique $S_{f(P)}: f=f(P)$. Nous allons définir l'indice $\lambda(P, f)$ de f en ce point P . Traçons une boule fermée $B: |x-x_0|^2+|y-y_0|^2 \leq r^2$, de centre $P=(x_0, y_0)$, le rayon r étant choisi suffisamment petit pour : que B ne contienne aucun point singulier de f autre que P ; que $S_{f(P)} \cap \partial B^7$ consiste en des courbes fermées simples (non-singulières) et disjointes; et enfin que toute composante irréductible de $S_{f(P)} \cap B^{0,8)}$ passe par le point P et soit simplement connexe. On peut trouver alors, un nombre positif ε tel que, pour toute valeur $c: 0 < |c-f(P)| \leq \varepsilon$, la surface caractéristique $S_c \cap B$, où $S_c: f=c$, soit homéomorphe à la surface $\sigma = S_{f(P)+\varepsilon} \cap B$. Posons

$$\lambda(P, f) = \text{le premier nombre de Betti de } \sigma.$$

Nous appellerons $\lambda(P, f)$ *indice de f en P* . Remarquons qu'il ne dépend que de la figure géométrique locale de la surface caractéristique $S_{f(P)}$ en P et que des ordre des composantes irréductibles de $S_{f(P)}$ en P (et ne dépend pas de choix de la fonction f)⁹⁾.

Ensuite, soit $f(x, y)$ un polynôme. Pour chaque valeur critique c_i ($i=1, \dots, p$) de f , soient e_{i1}, \dots, e_{iq_i} ses points singuliers sur la surface $S_i: f=c_i$, (s'ils existent). Dans tout ce qui suit, nous désignerons $\sum_{j=1}^{q_i} \lambda(e_{ij}, f)$ par λ_i .

4. L'espace \hat{C}^2 , et les indices μ_i au point à l'infini¹⁰⁾. Soit C^2 l'espace (fini) de deux variables complexes x, y , et soit \hat{C}^2 «one point compactification» de l'espace C^2 . Le point ajouté sera noté ∞ . Cet espace \hat{C}^2 est homéomorphe à une sphère de dimension réelle 4. Pour chaque ensemble M dans

7) ∂B est l'hypersphère: $|x-x_0|^2+|y-y_0|^2=r$.

8) B^0 signifie l'intérieur de $B: |x-x_0|^2+|y-y_0|^2 < r$.

9) Pour la relation entre cet indice et le nombre des singularités ordinaires, voir par exemple; H. B. Laufer [1].

10) En tant que l'on considère le polynôme, l'introduction de l'espace \hat{C}^2 est seulement pour un peu de simplification, et on pourra obtenir les même résultats (§ 2, § 3) en considérant l'espace projectif complexe P^2 au lieu de \hat{C}^2 ; par exemple, $f(x, y)$ étant comme dans le n° 6, désignons par \bar{S}_c , pour chaque $c \in C$, la surface caractéristique $f=c$ dans P^2 , et par κ le nombre des points d'indétermination de f ; on a alors, $\text{rang } H_1(\hat{S}_i) = \text{rang } H_1(\bar{S}_i) + \kappa - 1$, ($i=1, \dots, p$) et $\text{rang } H_1(\bar{S}_c) = 2g + n - \kappa$, ($c \neq c_1, \dots, c_p$). On a donc,

$$d_i = \text{rang } H_1(\bar{S}_c) - \text{rang } H_1(\bar{S}_i), \quad (i=1, \dots, p), \quad (c \neq c_1, \dots, c_p),$$

etc. Mais, pour les fonctions entières traitées au § 6, l'usage de l'espace \hat{C}^2 est inévitable.

C^2 , l'ensemble $M \cup \infty$ dans \hat{C}^2 sera noté \hat{M} ; alors, \hat{M} est compacte si, et seulement si, M est fermé dans C^2 .

Soit $f(x, y)$ un polynôme, et soit c_i une des valeurs critiques de f . Nous définissons l'indice μ_i de f au point à l'infini; faisons projeter la surface $S_i: f=c_i$ au plan x , (après une transformation linéaire convenable de l'espace C^2 , s'il est nécessaire), et désignons par \mathcal{R}_i la surface de Riemann obtenue (connexe ou non) sur le plan x . On peut supposer qu'elle n'a pas de point frontière à distance finie. Prenons un nombre positif ρ tel que tous les points de ramification de \mathcal{R}_i se situent au-dessus de $|x| < \rho$, et traçons l'ensemble cylindrique fermé $\Gamma_i: \rho \leq |x| < \infty, |y| < \infty$, dans C^2 . Alors, $\hat{S}_i \cap \hat{\Gamma}_i$ est simplement connexe. En choisissant $c_i' (\neq c_i)$ suffisamment voisin de c_i , le premier nombre de Betti de $\hat{\tau}_i' = \hat{S}_{c_i'} \cap \hat{\Gamma}_i$ sera désigné par μ_i .

5. \tilde{S}_i . Soit $f(x, y)$ un polynôme, et soit c_i une des valeurs critique de f . En considérant la surface $S_i: f=c_i$, traçons Γ_i comme dans le numéro précédent, et, autour de chaque point singulier $e_{ij} (j=1, \dots, q_i)$ de S_i , une boule fermée B_{ij} suffisamment petite comme dans le n° 3. $c_i' (\neq c_i)$ étant suffisamment voisin de c_i , posons $\hat{\tau}_i' = \hat{S}_{c_i'} \cap \hat{\Gamma}_i, \sigma'_{ij} = \hat{S}_{c_i'} \cap B_{ij}$ (dans l'espace \hat{C}^2); l'espace quotient de $\hat{S}_{c_i'}$ obtenu en identifiant chaque composante connexe ω_k de $\omega = (\bigcup_{j=1}^{q_i} \sigma'_{ij}) \cup \hat{\tau}_i'$ avec un point de $\omega_k, (k=1, \dots, r+1)$, sera désigné par \tilde{S}_i . On notera que: \tilde{S}_i est homéomorphe à \hat{S}_i , si toutes les composantes irréductibles de S_i sont d'ordre un. Soient, encore, λ_i, μ_i les indices définis aux n°s 3, 4, et soit S une des surfaces ordinaires de f .

THÉORÈME 1. Sous ces notations, on a $\chi(\tilde{S}_i) - \lambda_i - \mu_i = \chi(\hat{S})$, (où $\chi(*)$ signifie le nombre d'Euler de *).

Soit, pour l'effet, $S = S_{c_i'}$. En posant $\omega = (\bigcup_{j=1}^{q_i} \sigma'_{ij}) \cup \hat{\tau}_i'$, envisageons la suite exacte d'homologie¹¹⁾ de la paire (\hat{S}, ω) :

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} H_2(\omega) \longrightarrow H_2(\hat{S}) \longrightarrow H_2(\hat{S}, \omega) \xrightarrow{\partial} H_1(\omega) \longrightarrow H_1(\hat{S}) \\ \xrightarrow{\partial} H_1(\hat{S}, \omega) \longrightarrow \tilde{H}_0(\omega) \longrightarrow \tilde{H}_0(\hat{S}) \xrightarrow{\partial} \dots \end{aligned}$$

($\tilde{H}_0(*)$ signifie le groupe d'homologie réduit.) Puisqu'on peut trianguler \hat{S} de façon que ω soit sous-complexe, on a $H_n(\hat{S}, \omega) \cong H_n(\hat{S}/\omega)^{12)}$, pour $n \geq 1$, et, de là, on a $\text{rang } H_2(\hat{S}, \omega) = \text{rang } H_2(\tilde{S}_i), \text{rang } H_1(\hat{S}, \omega) = \text{rang } H_1(\tilde{S}_i) + r$. De plus,

11) Au paragraphe actuel, les groupes d'homologie sont à coefficients dans le corps \mathbf{R} , dont la notation sera abrégée.

12) Si Y est un ensemble fermé d'un espace topologique X , l'espace quotient obtenu en identifiant Y à un point sera noté X/Y .

puisque $\text{rang } \tilde{H}_0(\hat{S}) = 0$, $H_2(\omega) = 0$, $\text{rang } H_1(\omega) = \sum_{j=1}^{q_i} \text{rang } H_1(\sigma'_{ij}) + \text{rang } H_1(\hat{\tau}'_i) = \lambda_i + \mu_i$, et $\text{rang } \tilde{H}_0(\omega) = r$, on a, d'après la suite exacte ci-dessus,

$$\text{rang } H_2(\hat{S}) - \text{rang } H_2(\tilde{S}_i) + \lambda_i + \mu_i - \text{rang } H_1(\hat{S}) + \text{rang } H_1(\tilde{S}_i) + r - r = 0.$$

On a donc $\chi(\hat{S}) = \chi(\tilde{S}_i) - \lambda_i - \mu_i$.

C. Q. F. D.

6. Les entiers a_i et d_i . On désignera le premier (resp. deuxième) nombre de Betti d'un espace topologique $*$ par $b^1(*)$ (resp. $b^2(*)$).

Soit $f(x, y)$ un polynôme de type (g, n) , et soient c_1, \dots, c_p les valeurs critiques de f . Nous définissons, pour chaque i ($= 1, \dots, p$)

$$a_i = b^2(\hat{S}_i) - b^2(\hat{S}), \quad d_i = b^1(\hat{S}) - b^1(\hat{S}_i), \quad (a_i \geq 0, d_i \geq 0),$$

où S est une surface ordinaire de f .

On notera que: $b^2(\hat{S}_i)$ n'est autre que le nombre des composantes irréductibles de S_i et $b^2(\hat{S}) = 1$; et que: $d_i = 2g + n - 1 - b^1(\hat{S}_i)$.

En posant $\nu_i = \chi(\hat{S}_i) - \chi(\hat{S})$, où χ est le nombre d'Euler; on a, d'après le Théorème 1,

$$d_i + a_i = \chi(\hat{S}_i) - \chi(\hat{S}) = \lambda_i + \mu_i + \nu_i.$$

(Si toutes les composantes irréductibles de S_i sont d'ordre un, on a $\nu_i = 0$.)

Notamment, en tenant compte de Proposition 1 au § 1, si $d_i + a_i = 0$, c_i n'est pas valeur critique.

§ 3. La formule principale.

Les groupes d'homologie intervenant dans ce paragraphe sont encore à coefficients dans le corps R .

7. Un lemme¹³⁾. Soit donnés un CW-complexe fini K et une suite de ses sous-complexes: $\phi = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_\alpha = K$; on a alors,

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{\alpha} \chi(K_i, K_{i-1}),$$

où χ est le nombre d'Euler¹⁴⁾.

8. La formule. Soit $f(x, y)$ un polynôme de type (g, n) , et soient c_1, \dots, c_p ses valeurs critiques. On aura alors, a_i et d_i étant comme ci-dessus (n° 6),

13) Voir: M. Morse [1].

14) $\chi(K) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \text{rang } H_n(K)$, $\chi(K_i, K_{i-1}) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \text{rang } H_n(K_i, K_{i-1})$, m étant la dimension de K .

THÉORÈME 2¹⁵⁾. $\sum_{i=1}^p (d_i + a_i) = 2g + n - 1$.

1° Traçons, pour l'effet, dans le plan C d'une variable c , une courbe simple de Jordan l_i à partir de chaque point c_i ($i=1, \dots, p$) jusqu'au point à l'infini, de façon qu'elles n'admettent aucun point commun deux à deux. Alors le domaine $G' = C - \bigcup_{i=1}^p l_i$ est simplement connexe, (où $c_i \in l_i$). Posons

$$X_i = f^{-1}(l_i), \quad X = \bigcup_{i=1}^p X_i, \quad (\text{dans } C^2),$$

et considérons dans l'espace \hat{C}^2 les ensembles compacts $\hat{X}_i, \hat{X}, \hat{S}_i$ et $\hat{Y} = \bigcup_{i=1}^p \hat{S}_i$. (Remarquons que, pour toute paire (i, j) , ($1 \leq i < j \leq p$), $\hat{X}_i \cap \hat{X}_j = \infty$ et $\hat{S}_i \cap \hat{S}_j = \infty$.) Alors, comme on le verra facilement, on peut subdiviser \hat{C}^2 en un CW-complexe fini de façon que \hat{Y} et \hat{X} soient des sous-complexes de \hat{C}^2 . On a donc, pour tout entier $n \geq 1$, des isomorphismes $H_n(\hat{C}^2, \hat{X}) \cong H_n(\hat{C}^2/\hat{X})$ et $H_n(\hat{X}, \hat{Y}) \cong H_n(\hat{X}/\hat{Y})$.

2° Soit R un exemplaire de la surface de Riemann de type (g, n) , à savoir, de genre g et avec n composantes de frontières. Soit $D: |z| < 1$ le disque unité ouvert sur le plan z , et soit L l'intervalle ouvert: $(0, 1)$. D'après la Proposition 2 au § 1, \hat{C}^2/\hat{X} (resp. \hat{X}_i/\hat{S}_i) est homéomorphe à l'espace $\widehat{R \times D}$ (resp. $\widehat{R \times L}$), «one point compactification» de l'espace produit $R \times D$ (resp. $R \times L$), puisque D et L sont contractiles. On a:

(i) $\text{rang } H_0(\hat{Y}) = 1$, $\text{rang } H_1(\hat{Y}) = \sum_{i=1}^p b^1(\hat{S}_i)$, $\text{rang } H_2(\hat{Y}) = \sum_{i=1}^p b^2(\hat{S}_i)$, $H_n(\hat{Y}) = 0$, pour $n \geq 3$.

(ii) $H_0(\hat{X}, \hat{Y}) = 0$. Pour $n \geq 1$, $H_n(\hat{X}, \hat{Y}) \cong H_n(\hat{X}/\hat{Y}) \cong \sum_{i=1}^p H_n(\hat{X}_i/\hat{S}_i) \cong \sum_{i=1}^p H_n(\widehat{R \times L})$ (somme directe). Donc, $H_n(\hat{X}, \hat{Y}) = 0$ pour $n=1$ et pour $n \geq 4$, $\text{rang } H_2(\hat{X}, \hat{Y}) = p(2g+n-1)$, et $\text{rang } H_3(\hat{X}, \hat{Y}) = p$.

(iii) $H_0(\hat{C}^2, \hat{X}) = 0$. Pour $n \geq 1$, $H_n(\hat{C}^2, \hat{X}) \cong H_n(\hat{C}^2/\hat{X}) \cong H_n(\widehat{R \times D})$. Donc, $H_n(\hat{C}^2, \hat{X}) = 0$ pour $n=1, 2, n \geq 5$, $\text{rang } H_3(\hat{C}^2, \hat{X}) = 2g+n-1$, $\text{rang } H_4(\hat{C}^2, \hat{X}) = 1$.

Par suite, d'après le lemme au n° précédent, nous avons

15) De la même manière que pour ce théorème, on pourra obtenir la proposition suivante:

Soit M une variété analytique compacte à deux dimensions complexes, et soit donnée une fonction méromorphe f sur M (non-constante), qui n'admet aucun point d'indétermination, et telle que, pour une valeur $c_0 \in \bar{C}$, la surface caractéristique: $f=c_0$ soit irréductible et d'ordre un. (On suppose qu'il existe au moins une telle fonction f sur M .) On définit les valeurs critiques c_1, \dots, c_p de f et les entières d_i, a_i ($i=1, \dots, p$) de la façon naturelle; on a alors, $\sum_{i=1}^p (d_i + a_i) - 4g = \chi(M) - 4$, où g est le genre des surfaces ordinaires de f , et $\chi(M)$ est le nombre d'Euler de M .

$$\chi(\hat{C}^2) = 1 - \sum_{i=1}^p b^1(\hat{S}_i) + \sum_{i=1}^p b^2(\hat{S}_i) + p(2g+n-1) - p - (2g+n-1) + 1.$$

En substituant $2g+n-1 - b^1(\hat{S}_i) = d_i$ et $b^2(\hat{S}_i) - 1 = a_i$, on a

$$\chi(\hat{C}^2) = 2 + \sum_{i=1}^p (d_i + a_i) - (2g+n-1).$$

Or, \hat{C}^2 étant homéomorphe à une sphère à 4 dimensions réelles, on a $\chi(\hat{C}^2) = 2$. On a donc, $\sum_{i=1}^p (d_i + a_i) = 2g+n-1$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. *Le nombre des valeur critique d'un polynôme $f(x, y)$ de type (g, n) ne surpasse pas $2g+n-1$.*

COROLLAIRE 2. *Si $S_{c_0} : f = c_0$ est irréductible et simplement connexe (f étant un polynôme), f n'admet qu'une valeur critique, c_0 , au plus.*

Rappelons le n° 6; en combinant les théorèmes 1 et 2, on a

COROLLAIRE 3. $\sum_{i=1}^p (\lambda_i + \mu_i + \nu_i) = 2g+n-1$. (Si toutes les composant irréductible de S_i est d'ordre un, $\nu_i = 0$.)

§ 4. 1-cycles absorbés en le point à l'infini.

«Les groupes d'homologie dans le présent paragraphe sont à coefficients entiers, et leurs rangs sont pris sur l'anneau Z des entiers.»

9. Tubes Σ_i . Nous continuerons de sous-entendre que $f(x, y)$ est un polynôme de type (g, n) , que c_1, \dots, c_p ses valeurs critiques, et que $S_i = S_{c_i}$ ($i = 1, \dots, p$), où $S_c = f^{-1}(c)$, pour $c \in C$. Rappelons la configuration au n° 5, à savoir; pour chaque i ($1 \leq i \leq p$), les points singuliers e_{ij} ($j = 1, \dots, q_i$) de S_i , les boules fermées B_{ij} de centre e_{ij} et de rayon r_{ij} suffisamment petits et l'ensemble $\Gamma_i : \rho \leq |x| < \infty, |y| < \infty, \rho$ étant suffisamment grand, (faite une transformation linéaire si nécessaire). Prenons un nombre positif ε_i de façon que, pour toute c telle que $0 < |c - c_i| \leq \varepsilon_i$, $\sigma_{ij}(c) = S_c \cap B_{ij}$ (resp. $\tau_i(c) = S_c \cap \Gamma_i$) soient homéomorphes à $\sigma_{ij}(c_i + \varepsilon_i)$ (resp. $\tau_i(c_i + \varepsilon_i)$), et que, en posant $\Sigma_i = f^{-1}(\gamma_i)$, où γ_i est le disque: $|c - c_i| \leq \varepsilon_i$ sur le plan c , et en posant $U_{ij} = \Sigma_i \cap B_{ij}$, $V_i = \Sigma_i \cap \Gamma_i$, $W_i = (\bigcup_{j=1}^{q_i} U_{ij}) \cup V_i$, la fermeture $\overline{\Sigma_i - W_i}$ ¹⁶⁾ soit rétractile sur $\Delta_i = \overline{S_i - (S_i \cap W_i)}$. Ceci est possible sûrement, (il suffit de choisir ε_i assez petit). Remarquons que $\sigma_{ij} = S_i \cap B_{ij}$ et $\hat{\tau}_i$, ($\tau_i = S_i \cap \Gamma_i$), sont simplement connexes, et que $\Delta_i / \partial \Delta_i \approx S_i / \tau_i \approx \hat{S}_i$, (où \approx signifie "homéomorphe", et $\partial \Delta_i = \Delta_i \cap W_i$).

LEMME 1. ε_i ($i = 1, \dots, p$) étant choisis comme ci-dessus, on a:

(i) Pour tout i ($i = 1, \dots, p$), $H_1(\Sigma_i)$ n'a pas de torsion, et $\sum_{i=1}^p \text{rang } H_1(\Sigma_i) = (p-1)(2g+n-1)$.

16) M étant un ensemble dans C^2 , \overline{M} signifie la fermeture de M dans C^2 .

(ii) Pour $n \geq 2$, $H_n(\Sigma_i) = 0$, ($i = 1, \dots, p$).

Considérons, pour l'effet, sur le plan c , les disques $\gamma_i : |c - c_i| \leq \varepsilon_i$ ($i = 1, \dots, p$), (disjoints), et les points $c_i + \varepsilon_i$ sur $\partial\gamma_i$ ($i = 1, \dots, p$). Joignons chaque point $c_i + \varepsilon_i$ ($i = 2, \dots, p$) au point $c_1 + \varepsilon_1$ par une courbe simple de Jordan l_i , qui ne contient aucun point des γ_j ($j = 1, \dots, p$) sauf deux points $c_1 + \varepsilon_1$ et $c_i + \varepsilon_i$, de façon que, pour toute paire (i, j) ($2 \leq i < j \leq p$), on ait $l_i \cap l_j = c_1 + \varepsilon_1$. Posons $X_1 = \Sigma_1 = f^{-1}(\gamma_1)$, $X_i = f^{-1}(l_i \cup \gamma_i)$ ($i = 2, \dots, p$), et $X = \sum_{i=1}^p X_i$.

Comme le plan c est rétractile sur $Q = \gamma_1 \cup (\bigcup_{i=2}^p (l_i \cup \gamma_i))$, l'espace C^2 est rétractile sur $X (= f^{-1}(Q))$, en vertu de Proposition 2 au n° 2. Par suite, on a $H_n(X) = 0$, pour $n \geq 1$. On a donc, l'isomorphisme sur $\partial : H_{n+1}(X, \Sigma) \rightarrow H_n(\Sigma)$, pour tout $n \geq 1$, où $\Sigma = \bigcup_{i=1}^p \Sigma_i$.

Or, $H_n(X, \Sigma) \cong H_n(X/\Sigma) \cong \sum_{i=2}^p H_n(X_i/(\Sigma_1 \cup \Sigma_i))$, (somme directe). On verra facilement que, pour tout i ($i = 2, \dots, p$), $H_n(X_i/(\Sigma_1 \cup \Sigma_i)) = 0$, ($n \geq 3$), $H_2(X_i/(\Sigma_1 \cup \Sigma_i)) \cong \mathbf{Z}^{2g+n-1}$, (somme directe de $2g+n-1$ exemplaires de l'anneau \mathbf{Z} des entiers). Ainsi on a obtenu $H_n(\Sigma) = 0$, pour $n \geq 2$, $H_1(\Sigma) \cong \mathbf{Z}^{(p-1)(2g+n-1)}$. Cela suffit pour le lemme, puisque $H_n(\Sigma) = \sum_{i=1}^p H_n(\Sigma_i)$, (somme directe).

C. Q. F. D.

10. V_i^k . Dans la configuration du numéro précédent, soient $V_i^1, \dots, V_i^{N_i}$ les composantes connexes de $V_i (= \Sigma_i \cap \Gamma_i)$. On verra immédiatement que N_i est égal au nombre des composantes irréductibles de $\tau_i(c)$, où $0 < |c - c_i| \leq \varepsilon_i$, et qu'il ne dépasse pas n .

LEMME 2. (i) Pour $i (= 1, \dots, p)$, l'homomorphisme bord $\partial : H_2(\Sigma_i, V_i) \rightarrow H_1(V_i)$ est biunivoque, et $H_1(V_i)/\text{Im. } \partial$ n'a pas de torsion. (Il est à remarquer que $H_2(\Sigma_i, V_i) \cong H_2(\hat{S}_i)$.)

(ii) Pour tout i, k ($i = 1, \dots, p, k = 1, \dots, N_i$), on a $H_1(V_i^k) \cong \mathbf{Z}$, et $H_n(V_i^k) = 0$, ($n \geq 2$).

COROLLAIRE. $f(x, y)$ étant un polynôme de type (g, n) , (primitif comme toujours), le nombre des composantes irréductibles de $S_c : f = c$ ne dépasse pas n , pour toute $c \in \mathbf{C}$.

Pour démontrer le Lemme 2, considérons la suite exacte d'homologie de la paire (Σ_i, V_i) :

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_2(\Sigma_i) \longrightarrow H_2(\Sigma_i, V_i) \xrightarrow{\partial} H_1(V_i) \longrightarrow H_1(\Sigma_i) \longrightarrow H_1(\Sigma_i, V_i) \\ \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_0(V_i) \longrightarrow \tilde{H}_0(\Sigma_i) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

($\tilde{H}_0(*)$ signifie le groupe d'homologie réduit.)

1° D'après le Lemme 1, $H_2(\Sigma_i) = 0$ et $H_1(\Sigma_i)$ n'a pas de torsion; il en résulte la proposition (i) du Lemme 2, à l'aide de la suite exacte ci-dessus.

Remarquons, de plus, que $H_1(V_i)$ n'a pas de torsion.

2° On a $H_n(\Sigma_i, V_i) \cong H_n(\Sigma_i/V_i)$, ($n \geq 1$). Comme on le verra facilement, (ε_i étant suffisamment petit), $U_{ij} (= \Sigma_i \cap B_{ij})$ ($j=1, \dots, q_i$) sont contractiles, et Σ_i/V_i est rétractile sur $\mathcal{A}_i/\partial\mathcal{A}_i (\approx \hat{S}_i$ comme déjà remarqué). Par suite, on a $H_n(\Sigma_i, V_i) \cong H_n(\hat{S}_i) \cong \mathbf{Z}^{b_i^1}, \mathbf{Z}^{b_i^2}, 0$; pour $n=1, 2, \geq 3$, respectivement, (où $b_i^l = b^l(\hat{S}_i)$, pour $l=1, 2$). D'autre part, on a évidemment $\tilde{H}_0(V_i) \cong \mathbf{Z}^{N_i-1}, \tilde{H}_0(\Sigma_i) = 0$. On a donc, d'après la suite exacte ci-dessus,

$$\begin{aligned} \text{rang } H_1(\Sigma_i) &= (\text{rang } H_1(V_i) - b_i^2) + (b_i^1 - N_i + 1) \\ &= (\text{rang } H_1(V_i) - N_i) + (2g + n - 1) - (d_i + a_i). \end{aligned}$$

En additionnant ces identités pour $i=1, \dots, p$, et en y appliquant le Lemme 1, on a

$$(p-1)(2g+n-1) = \sum_{i=1}^p (\text{rang } H_1(V_i) - N_i) + p(2g+n-1) - \sum_{i=1}^p (d_i + a_i).$$

D'après le Théorème 2, on a donc $\sum_{i=1}^p (\text{rang } H_1(V_i) - N_i) = 0$.

3° Prenons une composante connexe V_i^k de V_i , quelconque. $\partial\mathcal{A}_i \cap V_i^k$ consiste en un nombre fini de courbes fermées; (ce sont des revêtements finis sans point de ramification sur le cercle $|x| = \rho$). Soit α une d'elles, orientée d'une façon convenable. Alors, α n'est pas homologue à nul dans V_i^k , puisque la variation de l'argument de $x(P)$, P traçant α une fois, n'est pas nulle, et que x ne s'annule en aucun point de V_i^k , ($V_i^k \subset \Gamma_i: \rho \leq |x| < \infty, |y| < \infty$). Donc, $\text{rang } H_1(V_i^k) \geq 1$.

D'autre part, $\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{N_i} \text{rang } H_1(V_i^k) = \sum_{i=1}^p N_i$, comme nous l'avons vu à 2°. Donc, on a nécessairement $\text{rang } H_1(V_i^k) = 1$, pour tout i, k , ($i=1, \dots, p, k=1, \dots, N_i$). $H_1(V_i^k)$ n'a pas de torsion, puisqu'il en est de même pour $H_1(V_i)$.

C. Q. F. D.

11. Cas de type $(g, 1)$.

THÉORÈME 3. Soit $f(x, y)$ un polynôme de type $(g, 1)$, (primitif comme toujours), et soient e_1, \dots, e_q les points singuliers de f ; on a alors, (i) pour tout $c \in \mathbf{C}$, $S_c: f=c$ est irréductible et d'ordre un, (ii) $\sum_{j=1}^q \lambda(e_j, f) = 2g$.

Soient, pour l'effet, c_1, \dots, c_p les valeurs critiques de f , et considérons les circonstances aux Lemmes 1 et 2, pour f . On remarquera d'abord, que dans le cas actuel V_i est connexe, pour tout i .

1° En suite, S_i étant irréductible, $H_2(\Sigma_i, V_i) \cong \mathbf{Z}$, et l'un des générateurs de ce groupe est la classe définie par $\partial\mathcal{A}_i$ (défini au n° 9), avec l'orientation convenable. D'après le Lemme 2, $H_1(V_i) \cong \mathbf{Z}$, $\partial: H_2(\Sigma_i, V_i) \rightarrow H_1(V_i)$ est biunivoque, et $H_1(V_i)/\text{Im. } \partial$ est sans torsion; il en résulte que $\partial\mathcal{A}_i$ est un générateur de $H_1(V_i)$. Supposons que l'orientation de $\partial\mathcal{A}_i$ est telle que $\arg x$ s'augmente,

(cela ne diminue pas la généralité).

L'application $x: V_i \rightarrow C^*$, (C^* étant le domaine $0 < |x| < \infty$), induit l'homomorphisme $x_*: H_1(V_i) \rightarrow H_1(C^*) \cong \mathbf{Z}$. Pour tout cycle β de $H_1(V_i)$, nous définissons le nombre entier $m(\beta)$ par l'équation $x_*(\beta) = m(\beta) \cdot \gamma$, où γ est le générateur de $H_1(C^*)$ choisi de façon que $m(\partial A_i)$ soit positif.

3° Or, considérons la surface $\tau_i' = \tau_i(c_i + \varepsilon_i)$, (voir le n° 9). $\tau_i' \cap [|x| = \rho, |y| < \infty]$ consiste en un nombre fini de courbes fermées, qui sont des revêtements finis sans points de ramification sur le cercle $|x| = \rho$, que nous noterons $\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^{h_i}$ (avec l'orientation telle que $\arg x$ s'augmente). On a alors,

$$\partial A_i \sim \alpha_i^1 + \dots + \alpha_i^{h_i}: \text{homologue dans } V_i.$$

Par suite, $m(\partial A_i) = \sum_{k=1}^{h_i} m(\alpha_i^k)$, $m(\alpha_i^k) > 0$. Si $h_i > 1$, on a $m(\partial A_i) > m(\alpha_i^1) > 0$; c'est absurde. Donc, $h_i = 1$. Nous écrirons α_i au lieu de α_i^1 , dans la suite.

4° Puis, regardons τ_i' comme une portion d'une surface de Riemann au-dessus du plan x . Supposons qu'il existe au moins un point de ramification ξ de τ_i' . Fixons un point η sur α_i , et joignons le point η à ξ par une courbe l sur τ_i' qui ne passe par aucun point de ramification de τ_i' , (avec l'orientation $\eta \rightarrow \xi$).

Décrivons un cycle sur τ_i' comme suit:

- (1) d'abord, à partir de η , on trace l jusqu'à ζ tout devant le point ξ ,
- (2) on joigne le point ζ à un autre ζ' , qui possède la même coordonnée x que ζ et une branche distincte de celle de ζ , par une courbe tout au voisinage du point ξ ,
- (3) on trace la courbe telle qu'elle possède la même projection (sur le plan x) que l^{-1} , (c'est la courbe l , avec l'orientation opposée), à partir de ζ' jusqu'au point η' ayant la même coordonnée x que η , ($\eta' \in \alpha_i$ nécessairement),
- (4) on trace α_i , à partir de η' , jusqu'à η , (c'est possible).

Désignons ce cycle par α_i' , on verra immédiatement que $0 < m(\alpha_i') < m(\alpha_i) = m(\partial A_i)$. Ceci est aussi absurde, puisque ∂A_i est un générateur de $H_1(V_i)$.

Donc, τ_i' n'a pas de point de ramification sur le plan x , et se situe au-dessus de la portion $\rho \leq |x| < \infty$ sans point frontière relatif. Par suite, elle est homéomorphe à $1 \leq |t| < \infty$ sur le plan t , et $\hat{\tau}_i'$ (voir le n° 4) est simplement connexe. Ainsi, nous avons obtenu $\mu_i = 0$. Il en résulte (ii), d'après le Corollaire 3 du Théorème 2.

C. Q. F. D.

N.B. Si f est un polynôme de type (g, n) , et si toute la surface première de f est d'ordre un, est-ce que $\sum_{i=1}^p \mu_i \leq n-1$, ou non? (Notamment, si, outre ces conditions, f n'admet aucun point singulier, est-ce que $g=0$, ou non?) Malheureusement, l'auteur n'a pas de réponse pour ces questions.

THÉORÈME 4. Soit $f(x, y)$ un polynôme, et supposons que $S_0: f=0$ soit irré-

ductible, d'ordre un, non-singulière et de type $(g, 1)$; alors S_0 est ordinaire.

Supposons, pour l'effet, que $c_1=0$ soit une valeur critique de f . En remarquant que, dans le cas actuel, V_1 est connexe, on pourra démontrer $\mu_1=0$, de la même manière que dans le Théorème 3. Par suite, d'après le Théorème 1 et l'hypothèse, on a $d_1+a_1=0$. Donc S_0 est ordinaire. C.Q.F.D.

COROLLAIRE¹⁷⁾. Soit $f(x, y)$ un polynôme, et supposons que $S_0: f=0$ soit irréductible, d'ordre un, non-singulière et simplement connexe. Alors, pour toute $c \in \mathbb{C}$, $S_c: f=c$ l'est aussi.

§ 5. Une application aux automorphismes algébriques de l'espace \mathbb{C}^2 .

12. Un automorphisme: $x'=f(x, y)$, $y'=g(x, y)$ de l'espace \mathbb{C}^2 sera dite algébrique, si f et g sont des polynômes en x, y . On a alors, d'après théorème de E. Picard (sur la fonction entière), l'application inverse étant $x=f'(x', y')$, $y=g'(x', y')$, f' et g' sont aussi des polynômes en x', y' . D'après H. W. E. Jung¹⁸⁾, tout automorphisme algébrique de l'espace \mathbb{C}^2 est un produit de transformations linéaires et de transformations de type: $x'=x$, $y'=y+cx^l$, ($c \in \mathbb{C}$, l : un nombre entier positif). Nous nous proposons ici d'aborder le problème suivant:

Problème. Etant donné à l'espace \mathbb{C}^2 une courbe affine S irréductible, non-singulière et simplement connexe, trouver un automorphisme algébrique de l'espace \mathbb{C}^2 : $x'=f(x, y)$, $y'=g(x, y)$ tel qu'il transforme S à l'axe $x'=0$.

Quant à ce problème, d'après A. Gutwirth et M. Nagata¹⁹⁾, on a

PROPOSITION. Soit donné un polynôme $f(x, y)=x^m+y^n+f_0(x, y)$, où f_0 est un polynôme de degré inférieur à m (resp. à n) en x (resp. en y), et de degré total n au plus, ($m < n$). Si, pour toute $c \in \mathbb{C}$, $S_c: f=c$ est irréductible, non-singulière et simplement connexe, alors, n est un multiple de m .

(Récemment, I. Wakabayashi a donné une démonstration très simple à cette proposition.)

En appliquant le corollaire du Théorème 4 à cette proposition, on a

PROPOSITION. Soit donné un polynôme $f(x, y)=x^m+y^n+f_0(x, y)$, où $m < n$

17) M. M. Kita a remarqué que: si ce polynôme est de type $(1, 1)$ au plus, ce corollaire est en relation intime au problème suivant:

Etant donné un domaine multiple (Überlagerungsbereich) \mathcal{D} de l'espace fini (z, w) , à deux feuilles, tel que \mathcal{D} soit analytiquement homéomorphe à l'espace fini (x, y) , et que la surface critique \mathfrak{M} de \mathcal{D} soit donnée par l'équation: $z^3+a_1(w)z^2+a_2(w)z+a_3(w)=0$, où a_i ($i=1, 2, 3$) sont des fonctions entières d'une variable complexe; démontrer que \mathfrak{M} est irréductible, non-singulière, et simplement connexe. Cette remarque a donné occasion à la recherche actuelle, dont nous avons déjà parlé un mot à l'introduction.

18) H. W. E. Jung, (1942).

19) Voir la note 3).

et f_0 satisfait à la même condition que plus haut. Si $S_0: f=0$ est irréductible, d'ordre un, non-singulière et simplement connexe, alors, n est un multiple de m .

Maintenant, à l'aide de cette proposition, le problème posé ci-dessus est résoluble, de la manière habituelle; à savoir, faisant des transformations de deux types dites plus haut, successivement, diminuant les degrés de f , jusqu'à ce que le polynôme f se réduise à x .

THÉORÈME 5²⁰⁾. *Le problème posé ci-dessus est toujours résoluble.*

§ 6. Fonctions entières de la classe (A).

13. Préliminaires. Soit $f(x, y)$ une fonction entière de deux variables complexes x, y ; toute composante irréductible d'une surface caractéristique $S_c: f=c$ dans C^2 sera appelée *surface première* de f . T. Nishino a défini, dans son Mémoire (IV)²¹⁾, une classification remarquable des fonctions entières générales de deux variables complexes, à savoir: *classe (A)*, *classe (P)*, *classe (E)*. Une fonction entière était dite d'appartenir à la classe (P), si toute sa surface première est parabolique²²⁾, et une fonction de la classe (P) était dite d'appartenir à la classe (A), si toute sa surface première est de type fini²³⁾. Sur cette classification, nous citons le théorème suivant, dû à lui:

THÉORÈME. *Une fonction entière $f(x, y)$ de la classe (P) appartient à la classe (A), s'il existe un ensemble e de capacité logalimique positive dans le plan c , tel que, pour tout $c \in e$, $S_c: f=c$ contienne au moins une surface première de type fini.*

Soit $f(x, y)$ une fonction entière de la classe (A), et soit S une des surfaces premières de f . Nous appellerons S *surface ordinaire* de f , si, pour un point P de S , il existe un voisinage U de P , tel que toute la surface première passant par U soit d'ordre un, non-singulière et homéomorphe à S (topologiquement), et n'admette aucune surface conjuguée²⁴⁾. Une surface première de f qui n'est pas ordinaire sera dite *critique*, et une valeur $c \in C$ telle que $S_c: f=c$ contienne au moins une surface critique sera appelée *valeur critique* de f . Les autres seront appelées *valeurs ordinaires* de f .

On a alors, d'après le Mémoire (IV) de T. Nishino:

THÉORÈME. *Soit $f(x, y)$ une fonction entière de la classe (A); alors on a:*

20) Voir la note 5).

21) à paraître. T. Nishino [2].

22) C'est à dire, parabolique comme une surface de Riemann.

23) C'est à dire, qu'elle est de genre fini et possède un nombre fini de composantes de frontières, en la regardant comme une surface de Riemann.

24) Deux surfaces premières S, S' de f est dites conjuguées l'une à l'autre, s'il existe une suite de surfaces premières de $f: S_1, S_2, \dots$, qui converge à S et, en même temps, à S' . (Voir le Mémoire I de T. Nishino.)

(i) l'ensemble des valeurs critiques de f est fermé et de capacité logarithmique nulle sur le plan.

(ii) Soit S une des surfaces ordinaires de f , et soit c la valeur de f en S . Alors il existe un nombre positif ε tel que, le tube normal Σ : la composante connexe qui contient S du domaine $|f-c| < \varepsilon$, soit analytiquement homéomorphe à un domaine multiple algébroïde²⁵⁾ \mathcal{D} du $\gamma \times \mathbf{C}$, (où γ est le disque : $|z-c| < \varepsilon$ dans le plan z et \mathbf{C} est le plan d'une variable complexe w), tel que la projection à l'espace (z, w) de toute la surface critique intérieure de \mathcal{D} soit définie par l'équation de la forme : $w = \xi(z)$, où ξ est une fonction holomorphe dans γ .

Par suite, d'après le Mémoire (I) de T. Nishino, on a deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. Toute fonction entière de la classe (A) n'admet aucune paire de surfaces conjuguées de type (β) .

Une fonction entière $f(x, y)$ de la classe (A) sera dite primitive, s'il existe une valeur c_0 telle que $S_{c_0} : f = c_0$ soit irréductible et d'ordre un.

COROLLAIRE 2. Pour toute fonction entière $f(x, y)$ de la classe (A), il existe une fonction entière primitive $F(x, y)$ et une fonction entière φ d'une variable complexe, telles que $f(x, y) \equiv \varphi(F(x, y))$.

On notera que subsistent encore deux propositions suivantes :

PROPOSITION 1'. Soit $f(x, y)$ une fonction entière primitive de la classe (A). Si une surface $S_c : f = c$ est irréductible, elle est d'ordre un.

PROPOSITION 2'. Soit $f(x, y)$ une fonction entière de la classe (A), et soit $e (\subset \mathbf{C})$ l'ensemble des valeurs critiques de f . Posons $G = \mathbf{C} - e$, $E = f^{-1}(G)$. Alors E est un espace fibré localement trivial (topologiquement) sur G avec la projection f .

« Dans la suite nous ne traiterons que la fonction entière primitive de la classe (A), et supposons sans dire que les fonctions entières envisagées sont primitives. »

14. Valeurs critiques des fonctions entières de la classe (A). « Les groupes d'homologie dans ce numéro sont à coefficients dans le corps \mathbf{R} . »

Nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME 6. Toute fonction entière (primitive) de la classe (A) n'admet qu'un nombre fini de valeurs critiques. En outre, $f(x, y)$ étant une telle fonction, la surface caractéristique $S_c : f = c$, pour toute $c \in \mathbf{C}$ ne possède qu'un nombre fini de composantes irréductibles.

(Précisément dit, le nombre des valeurs critiques ne dépasse pas le 1^{er}

25) C'est à dire, le domaine d'holomorphie sur le domaine $\gamma \times \mathbf{C}$, de la fonction $\varphi(z, w)$ définie par une équation $\varphi^m + A_1(z, w)\varphi^{m-1} + \dots + A_m(z, w) = 0$, (où $A_k(z, w)$ sont des fonctions polynômes en w dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de z dans γ).

nombre de Betti de la surface ordinaire de la fonction.)

1° Supposons, pour l'effet, une fonction entière $f(x, y)$ de la classe (A) et de type $(g, n)^{26)}$, avec au moins $2g+n$ valeurs critiques; c_1, \dots, c_p (où $p = 2g+n$). Soit e l'ensemble de toutes les valeurs critiques de f ; e est fermé et de capacité logalistique nulle sur le plan \mathbf{C} de la variable complexe c , d'après le théorème de T. Nishino, cité plus haut.

Traçons, sur le plan \mathbf{C} , p disques fermés $\gamma_i: |c-c_i| \leq \varepsilon_i$ ($i=1, \dots, p$) sans point commun deux à deux, tels que tout cercle $\partial\gamma_i: |c-c_i| = \varepsilon_i$ ($1 \leq i \leq p$) ne passe par aucun point de e . Pour chaque i ($=1, \dots, p$), prenant un point c'_i sur $\partial\gamma_i$, on trace une courbe simple de Jordan l_i , à partir de c'_i , jusqu'au point à l'infini, ne passant par aucun point de e , ni point de γ_k ($k=1, \dots, p$), de façon qu'elles, l_1, \dots, l_p , ne possèdent aucun point commun deux à deux. Traçons encore, sur ce plan, un domaine (ouvert et connexe) G simplement connexe, contenant tous les $\gamma_i \cup l_i$ ($i=1, \dots, p$), limité par des courbes simples de Jordan, et tel que $(\bar{G} - \bigcup_{i=1}^p \gamma_i) \cap e = \emptyset$. (Cela est possible sûrement.) Posons

$$\Sigma_0 = X_0 = f^{-1}(\mathbf{C}-G), \quad \Sigma_i = f^{-1}(\gamma_i), \quad X_i = f^{-1}(\gamma_i \cup l_i),$$

($i=1, \dots, p$) et $\Sigma = \bigcup_{i=0}^p \Sigma_i$, $X = \bigcup_{i=0}^p X_i$; ce sont tous des ensembles fermés dans \mathbf{C}^2 .

Considérons dans l'espace $\hat{\mathbf{C}}^2$ les ensembles (fermés) $\hat{\Sigma}_i, \hat{X}_i$ ($i=0, \dots, p$); $\hat{\Sigma}, \hat{X}$, et désignons les intérieurs des $\hat{\Sigma}, \hat{\Sigma}_i$ (ou ceux des Σ, Σ_i) par Σ^0, Σ_i^0 , respectivement. On peut alors subdiviser, facilement, l'espace $\hat{\mathbf{C}}^2 - \Sigma^0$ en un CW-complexe (fini) de façon que $\hat{X} - \Sigma^0$ et $\partial\hat{\Sigma}_i = \hat{\Sigma}_i - \Sigma_i^0$ en soient des sous-complexes. Par suite, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} H_n(\hat{\mathbf{C}}^2, \hat{X}) &\cong H_n(\hat{\mathbf{C}}^2 - \Sigma^0, \hat{X} - \Sigma^0) \cong H_n(\hat{\mathbf{C}}^2 - \Sigma^0 / \hat{X} - \Sigma^0), \\ H_n(\hat{X}_i, \hat{\Sigma}_i) &\cong H_n(\hat{X}_i - \Sigma_i^0, \hat{\Sigma}_i - \Sigma_i^0) \cong H_n(\hat{X}_i - \Sigma_i^0 / \hat{\Sigma}_i - \Sigma_i^0), \end{aligned}$$

en vertu des théorèmes d'excision pour l'homologie.

On a donc, notamment, $H_n(\hat{\mathbf{C}}^2, \hat{X}) \cong 0$, \mathbf{R}^{2g+n-1} , \mathbf{R} : pour $n=2, 3, 4$, respectivement; et $H_n(\hat{X}_i, \hat{\Sigma}_i) \cong \mathbf{R}^{2g+n-1}$, \mathbf{R} : pour $n=2, 3$, respectivement, ($i \geq 1$). Ici, \mathbf{R}^m signifie la somme directe de m exemplaires du corps \mathbf{R} .

2° Puis, nous allons démontrer: (I) Pour tout i ($=0, \dots, p$), $\beta_i^2 = \text{rang } H_2(\hat{\Sigma}_i)$, $\beta_i^1 = \text{rang } H_1(\hat{\Sigma}_i)$ sont finis; précisément dit, $1 \leq \beta_i^2 \leq 2g+n-1$, $0 \leq \beta_i^1 \leq 2g+n-1$. (II) En posant $\delta_i = 2g+n-1 - \beta_i^1$ et $\alpha_i = \beta_i^2 - 1$, on a $\sum_{i=1}^p (\delta_i + \alpha_i) \leq 2g+n-1$, ($\delta_i \geq 0, \alpha_i \geq 0$).

En effet, le bord $\partial: H_n(\hat{\mathbf{C}}^2, \hat{X}) \rightarrow H_{n-1}(\hat{X})$ est isomorphisme sur, pour $n=2, 3$

26) C'est à dire, que la surface ordinaire de f est de type (g, n) .

(et $n \geq 5$); *surjectif* et *nul*, pour $n = 4$, puisque $H_n(\hat{C}^2) = 0$, ($n \neq 0, 4$) et $H_4(\hat{C}^2) \xrightarrow{j_*} H_4(\hat{C}^2, \hat{X})$ est *isomorphisme sur*, (où j_* est l'application canonique). Par suite, d'après 1°, on a $H_1(\hat{X}) = 0$, $\text{rang } H_2(\hat{X}) = 2g + n - 1$, $H_3(\hat{X}) = 0$.

Or, pour toute paire (i, j) telle que $0 \leq i < j \leq p$, on a $\hat{X}_i \cap \hat{X}_j = \{\infty\}$. On a donc, pour toute i ($= 0, \dots, p$), $H_1(\hat{X}_i) = 0$, $H_3(\hat{X}_i) = 0$ et $\sum_{i=0}^p \text{rang } H_2(\hat{X}_i) = 2g + n - 1$.

En suite, envisageons la suite exacte des groupes d'homologie reliée à la paire $(\hat{X}_i, \hat{\Sigma}_i)$, ($i \geq 1$);

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_3(\hat{X}_i) \longrightarrow H_3(\hat{X}_i, \hat{\Sigma}_i) \xrightarrow{\partial} H_2(\hat{\Sigma}_i) \longrightarrow H_2(\hat{X}_i) \longrightarrow H_2(\hat{X}_i, \hat{\Sigma}_i) \\ \xrightarrow{\partial} H_1(\hat{\Sigma}_i) \longrightarrow H_1(\hat{X}_i) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

En tenant compte des calculs ci-dessus, la proposition (I) est visible par cette suite exacte. On a, en outre,

$$1 - \beta_i^2 + \text{rang } H_2(\hat{X}_i) - (2g + n - 1) + \beta_i^1 = 0, \quad (i \geq 1).$$

On a donc, $\sum_{i=1}^p (\delta_i + \alpha_i) = \sum_{i=1}^p \text{rang } H_2(\hat{X}_i) \leq 2g + n - 1$.

3° Démontrons: *Lorsque S_i n'est pas irréductible, on a $\alpha_i \geq 1$, ($1 \leq i \leq p$).*

En effet, soient, S_i^1, S_i^2 deux composantes irréductibles de S_i . Traçons, sur chaque S_i^h , ($h = 1, 2$), une portion fermée K_h , non-singulière et homéomorphe au disque unité $D: |w| \leq 1$ sur le plan w , et puis, deux portions fermées disjointes T_h ($h = 1, 2$) de Σ_i , telles que T_h soit homéomorphe au produit $\gamma \times D$ où γ est le disque unité: $|z| \leq 1$ sur le plan z , et que, par cet homéomorphisme, $(\partial\gamma) \times D$ corresponde à une portion de $\partial\Sigma_i = f^{-1}(\partial\gamma_i)$, et $0 \times D$ (resp. $z \times D$) corresponde à K_h (resp. à une composante irréductible d'une $S_c \cap T_h$, $c \in \gamma_i$), (pour chaque $h = 1, 2$). (C'est possible sûrement.) Soit $V = \hat{\Sigma}_i - (T_1 \cup T_2)$, et soit $T^* = \hat{\Sigma}_i / \bar{V}$, (\bar{V} signifie la fermeture de V). On a, évidemment, $H_2(T^*) \cong \mathbf{R} + \mathbf{R}$ (somme directe), et dont les bases sont K_1^* et K_2^* , où $K_h^* = K_h / \partial K_h$, ($\partial K_h = K_h \cap \bar{V}$).

Or, considérons l'homomorphisme canonique $\pi: H_2(\hat{\Sigma}_i) \rightarrow H_2(T^*)$, et supposons que $\alpha_i = 0$, (c'est à dire, $H_2(\hat{\Sigma}_i) \cong \mathbf{R}$). En posant $S = S_{c_i'}$, ($c_i' \in \partial\gamma_i$), on a $\hat{S} \neq 0$, dans $H_2(\hat{\Sigma}_i)$, (pour cela, il suffit, par exemple, de consulter la suite exacte citée à 2°). Par suite, il existe $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$, tels que $\hat{S}_i^h = k_i \hat{S}$, dans $H_2(\hat{\Sigma}_i)$, ($h = 1, 2$).

Or, on a $\pi(\hat{S}_i^h) = K_h^*$, ($h = 1, 2$), et $\pi(\hat{S}) = m_1 \cdot K_1^* + m_2 \cdot K_2^*$, où m_1, m_2 sont les ordres des S_i^1, S_i^2 respectivement. On a donc, pour chaque h ($= 1, 2$), $K_h^* = k_h m_1 K_1^* + k_h m_2 K_2^*$, dans $H_2(T^*)$. K_h^* ($h = 1, 2$) étant bases, on a, par suite, $k_1 m_2 = k_2 m_1 = 0$. Or, $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$. Donc, $k_1 = k_2 = 0$, ce qui entraîne

$K_h^* = 0$, dans $H_2(T^*)$; c'est absurde. Donc, $\alpha_i \geq 1$.

4° Démontrons: Lorsque S_i est irréductible, et que le premier nombre de Betti de \hat{S}_i est inférieur à $2g+n-1$, on a $\delta_i \geq 1$, ($1 \leq i \leq p$).

Joignons, pour l'effet, le point c_i au point c_i' ($\in \partial\gamma_i$) sur le plan c , par un arc simple de Jordan l de façon que l ne passe par aucun point de e , et que l ne sorte pas du disque γ_i , et posons $L = f^{-1}(l)$. On verra immédiatement $H_1(\hat{L}, \hat{S}_i) = 0$. Par suite, l'homomorphisme: $H_1(\hat{S}_i) \rightarrow H_1(\hat{L})$, induit par l'injection: $\hat{S}_i \rightarrow \hat{L}$, est surjectif. Donc, l'hypothèse entraîne $\text{rang } H_1(\hat{L}) < 2g+n-1$.

Or, d'après la suite exacte citée à 2°, $H_1(\hat{\Sigma}_i)$ est engendré par $(2g+n-1)$ cycles sur $\hat{S} = \hat{S}_{c_i'}$. On voit par suite, dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 H_1(\hat{S}) & \xrightarrow{h_1} & H_1(\hat{\Sigma}_i) \\
 & \searrow h_2 & \nearrow h_3 \\
 & H_1(\hat{L}) &
 \end{array}$$

que h_1 est surjectif. Par suite, h_3 l'est aussi. Comme $\text{rang } H_1(\hat{L}) < 2g+n-1$, on a $\text{rang } H_1(\hat{\Sigma}_i) < 2g+n-1$. Donc, $\delta_i \geq 1$.

5° D'après 3° et 4°, on a $\delta_i + \alpha_i \geq 1$, pour tout i ($= 1, \dots, p$). Donc, d'après (II) à 2°, on a $p \leq 2g+n-1$. Cela est en contradiction avec l'hypothèse posée au commencement de 1°.

6° La deuxième assertion du théorème est maintenant visible, d'après le raisonnement ci-dessus, (1°-3°). C. Q. F. D.

15. Formule principale pour les fonctions entières de la classe (A).

Une fois établi le Théorème 6, on verra, sans difficulté, que les théorèmes aux § 2 et § 3 restent valables aussi pour les fonctions entières de deux variables complexes de la classe (A). Nous ne le répéterons pas, puisque l'on peut le démontrer tout pareillement au cas de polynômes, avec une modification pour le mode de la définition de l'indice μ à l'infini, à savoir:

Soit $f(x, y)$ une fonction entière de la classe (A), et soit c_i une des valeurs critiques de f . Désignons les composantes irréductibles de $S_i: f = c_i$, par S_i^1, \dots, S_i^h , et marquons un point (non-singulière) P_k sur chaque S_i^k , ($k=1, \dots, h$). En traçant une boule ouverte $B_r: |x|^2 + |y|^2 < r$ (contenant tous les P_k), désignons la composante irréductible de $S_i^k \cap B_r$ qui contient le point P_k par $\Delta_k(r)$. Choisissons le rayon r suffisamment grand pour que $\Delta_k(r)$ ($k=1, \dots, h$) soient homéomorphes aux S_i^k ($k=1, \dots, h$), respectivement. (C'est possible sûrement²⁷⁾.) En suite, prenant c_i' suffisamment voisin de c_i , désignons, pour chaque k ($= 1, \dots, h$), la composante irréductible de $S_{c_i'} \cap B_r$ qui contient un point Q_k voisin de P_k par Δ_k' , et posons $\tau_i' = S_{c_i'} - \bigcup_{k=1}^h \Delta_k'$.

27) Il n'existe jamais de surface caractéristique, bornée, dans $C^2 - \bar{B}_r$.

Considérons dans l'espace \hat{C}^2 l'ensemble \hat{c}_i' ; son premier nombre de Betti est l'indice μ_i voulu.

THÉORÈME 1'. $F(x, y)$ étant une fonction entière de la classe (A), on a pour toute valeur critique c_i de f , $\chi(\tilde{S}_i) - \lambda_i - \mu_i = \chi(\hat{S})$, où S est une surface ordinaire de f , et $\chi(*)$ désigne le nombre d'Euler de $*$. En outre, si toutes les composantes irréductibles de S_i sont d'ordre un, \tilde{S}_i est homéomorphe à \hat{S}_i .

Dans les circonstances ci-dessus, nous définissons :

$$d_i = \text{rang } H_1(\hat{S}) - \text{rang } H_1(\hat{S}_i), \quad a_i = \text{rang } H_2(\hat{S}_i) - \text{rang } H_2(\hat{S}),$$

$$(d_i \geq 0, a_i \geq 0, d_i + a_i = \chi(\hat{S}_i) - \chi(\hat{S})).$$

On a alors, c_1, \dots, c_p étant les valeurs critiques de f ,

$$\text{THÉORÈME 2'}. \quad \sum_{i=1}^p (d_i + a_i) = 2g + n - 1.$$

Quant aux Théorèmes 3 et 4 (au § 4°), l'auteur pense qu'ils subsistent aussi pour les fonctions entières de la classe (A); mais, pour les démontrer, il existe une difficulté propre aux fonctions entières, dans le cas où $g \geq 2$, (g, n) étant le type de la fonction considérée.

Bibliographie

A. Gutwirth

- [1] An inequality for certain pencils of plane curves, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961), 631-639.

H. W. E. Jung

- [1] Über ganze birationale Transformaionen der Ebene, J. reine angew. Math., 184 (1942), 161-174.

H. B. Laufer

- [1] On the number of singularities of an analytic curves, Trans. Amer. Math. Soc., 136 (1969), 527-535.

M. Morse

- [1] Relation between the critical points of a real function of n independent variables, Trans. Amer. Math. Soc., 27 (1925), 345-396.

M. Nagata

- [1] A theorem of Gutwirth, J. Math. Kyoto Univ., 11 (1971), 149-154.

T. Nishino

- [1] Nouvelles recherches sur les fonctions entières de deux variables complexes, I, II, J. Math. Kyoto Univ., 8 (1968), 49-100, 9 (1969), 221-274.
[2] ———— IV, à paraître dans J. Math. Kyoto Univ.

H. Saitô

- [1] Fonctions entières qui se déduisent à certains polynômes (1), Osaka J. Math., 9 (1972), 293-332.

Masakazu SUZUKI

Section de Mathématique
Faculté des Sciences
Université de Kyoto
Kitashirakawa, Sakyo-ku
Kyoto, Japon