[6] H. Lang, *Über Bernoullische Zahlen in reell-quadratischen Zahlkörpern*, Acta Arith. 22 (1973), S. 423–437.
[7] H. W. Leopoldt, *Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen*, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 22 (1958), S. 131–140.
[8] C. Meyer, *Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern*, Berlin 1957.
[9] — *Über die Bildung von elementar-arithmetischen Klasseninvarianten in reell-quadratischen Zahlkörpern. Algebraische Zahlentheorie.* Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Berichte Heft 2 (1966), S. 165–215.
[10] C. L. Siegel, *Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1968), S. 7–38.
[11] — *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1969), S. 87–102.
[12] I. Sh. Slavutsky, *On Mordell's theorem*, Acta Arith. 11 (1965), S. 57–66.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Eingegangen 11. 2. 1972 (264)

ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes

par

MICHEL WALDSCHMIDT (Talence)

L'étude des valeurs algébriques de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, commencée par Schneider et poursuivie par Lang et Ramachandra, permet d'obtenir des propriétés de transcendance, concernant en particulier les fonctions exponentielles et elliptiques. Nous continuerons cette étude, et nous rechercherons une généralisation permettant d'obtenir des propriétés d'indépendance algébrique de fonctions méromorphes, complexes ou p-adiques, d'une ou plusieurs variables. Nous appliquerons ces résultats aux sous-groupes à un ou plusieurs paramètres de variétés de groupes, linéaires ou abéliennes. Nous obtiendrons également de nouveaux énoncés de transcendance concernant en particulier les fonctions zêta de Weierstrass.

§ 1. INTRODUCTION. VALEURS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS MÉROMORPHES

Pour généraliser les théorèmes de transcendance ou d'indépendance algébrique concernant la fonction exponentielle, et obtenir des résultats sur les valeurs algébriques ou algébriquement dépendantes de fonctions méromorphes, il est utile d'expliciter les propriétés particulières de la fonction exponentielle qui ont été utilisées. Il s'agit essentiellement du théorème d'addition algébrique: $\exp(x+y) = \exp x\cdot\exp y$ (par exemple dans la solution par Schneider du septième problème de Hilbert sur la transcendance de a^b), ou bien de l'existence d'une équation différentielle: $(\exp x)' = \exp x$ (par exemple dans la méthode de Gel'fond pour la résolution du même problème), ou encore de ces deux propriétés simultanément. On peut alors envisager une extension de la méthode pour rechercher une majoration du nombre de points où deux fonctions algébriquement indépendantes prennent simultanément des valeurs algébriques. Ceci a été fait par Schneider pour la méthode de Gel'fond, dans le cas où les fonctions considérées satisfont une équation différentielle à coefficients algébriques. Ce travail a été repris par de nombreux auteurs ([13], [14], [11]), et la meilleure majoration actuellement connue est celle que vient d'obtenir Bombieri qui a étendu ce théorème aux fonctions de plusieurs variables complexes [3].

Si on supprime l'hypothèse de l'existence d'une équation différentielle, le nombre de points où plusieurs fonctions méromorphes algébriquement indépendantes prennent simultanément des valeurs dans un corps de nombres peut être infini (par exemple $f_1(z) = 2^z, f_2(z) = 3^z, \ldots$), et le seul résultat que l'on puisse espérer concerne alors la répartition de ces points. Après les travaux de Schneider [13], ceci a été étudié par Lang ([10], [11]), tandis que Ramachandra appliquait son théorème principal à l'étude des densités de suites pondérées, et obtenait ainsi des propriétés de transcendance pour les fonctions algébriquement additives, telle la fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass [12].

Ces résultats peuvent s'étendre aux fonctions de plusieurs variables quand les points étudiés sont bien distribués ([4], [10], [15]).

Les théorèmes de Lang et Ramachandra, obtenus par une extension de la méthode qui avait permis à Schneider de résoudre le problème de Hilbert, nécessitent l'introduction des définitions de taille (§ 2), d'ordre arithmétique et de suites pondérées (§ 3); les exemples de suites pondérées que nous construirons concernent des fonctions exponentielles, elliptiques, et les fonctions zêta de Weierstrass (proposition 1 § 3), ainsi que les fonctions thêta des variétés abéliennes (proposition 2 § 3).

Le but essentiel de ce travail est d'étudier une généralisation de ces différents résultats aux valeurs, dans une extension K de type fini de $\boldsymbol{Q}$, de fonctions méromorphes, en utilisant la méthode qui permet d'obtenir des théorèmes d'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle.

Cette généralisation est permise lorsqu'on connait un type de transcendance (§ 4) de K sur $\boldsymbol{Q}$. Les résultats que l'on obtient ainsi concernent les fonctions méromorphes dans $\boldsymbol{C}$ (théorème 1 § 4), ou analytiques dans un disque (théorème 3 § 8); on en déduit des propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions elliptiques (proposition 3 § 5), et des énoncés de transcendance et d'indépendance algébrique de nombres p-adiques (propositions 4, 5 et 6 § 9).

On peut supprimer l'hypothèse sur le type de transcendance, quand K est une extension de $\boldsymbol{Q}$ de degré de transcendance 1, à condition que l'on sache majorer le nombre de zéros d'une fonction $P(f_1, \ldots, f_d)$, où P est un polynôme à coefficients dans K (théorème 2 § 6). On retrouve alors, par exemple en utilisant un résultat de Tijdeman, les propriétés de la fonction exponentielle (§ 7).

Chacun des théorèmes (1 § 4; 2 § 6; 3 § 8) est divisé en deux parties, a et b, la partie b étant une amélioration de la partie a sous l'hypothèse

supplémentaire que les fonctions considérées satisfont une équation différentielle. Pour effectuer les démonstrations, nous regrouperons tous les théorèmes précédents en un seul énoncé (théorème A § 10), en prenant comme modèle le théorème 3 de [13].

Nous terminerons (§ 11) en donnant un exemple dans chacun des cas complexe (théorème 5 § 11) et p-adique (proposition 7 § 11) des résultats que l'on obtient pour les fonctions de plusieurs variables.

Notations. Nous suivrons d'une manière générale les notations de Lang [11]. En particulier, si u et v sont deux fonctions réelles de variable réelle, nous écrirons $u(x) \ll v(x)$ pour $x \to +\infty$, ou plus simplement $u \ll v$, s'il existe deux nombres réels positifs C et x_0, tels que $u(x) \leqslant Cv(x)$ pour $x \geqslant x_0$. Si u et v sont des fonctions positives, on écrira $u \gg\ll v$ au lieu de $u \ll v$ et $v \ll u$.

Nous désignerons par Ξ un corps algébriquement clos, complet pour une valeur absolue, et de caractéristique nulle. Lorsque la valeur absolue est archimédienne, on a alors $\Xi = \boldsymbol{C}$. Lorsque la valeur absolue est ultramétrique, la caractéristique résiduelle de Ξ est un nombre premier p, et on normalisera la valeur absolue par $|p| = 1/p$; si Δ est un disque de Ξ de centre a, nous dirons qu'une fonction f, définie sur Δ et à valeurs dans Ξ, est analytique sur Δ, s'il existe une série entière en $x-a$, convergeant dans Δ, dont la somme coïncide avec f dans Δ ([1], [2]). Nous dirons qu'une fonction est méromorphe dans Δ si elle est quotient de deux fonctions analytiques dans Δ.

Lorsqu'il y aura un risque de confusion, nous noterons $|\ |_\infty$ la valeur absolue ordinaire sur $\boldsymbol{Q}$.

§ 2. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE LA TAILLE SUR UNE EXTENSION DE Q DE TYPE FINI

1) Taille d'un polynôme. Soit $P \in \boldsymbol{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ un polynôme non nul de degré r_i par rapport à X_i, et de hauteur $\|P\|$:

$$P = \sum_{l_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{l_q=0}^{r_q} p(l_1, \ldots, l_q) X_1^{l_1} \ldots X_q^{l_q} = \sum_{(l)} p(l) X^{(l)},$$

avec $p(l) = p(l_1, \ldots, l_q) \in \boldsymbol{Z}$, et $\|P\| = \max_{(l)} |p(l)|_\infty$; on notera:

$$\deg_{X_h}(P) = r_h,\ 1 \leqslant h \leqslant q; \quad \deg(P) = \max_{1 \leqslant h \leqslant q} r_h.$$

On définit la taille de P par

$$t(P) = \max\{\operatorname{Log}\|P\|, 1 + \deg(P)\}.$$

2) Taille sur une extension de $\boldsymbol{Q}$ de type fini. Soit K une extension de $\boldsymbol{Q}$ de type fini. Soit $q \geqslant 0$ le degré de transcendance de K sur $\boldsymbol{Q}$. Nous dirons que des éléments $x_1, \ldots, x_q, y$ de K forment un *système générateur de K sur $\boldsymbol{Q}$* si $K = \boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q, y)$, avec $x_1, \ldots, x_q$ algébriquement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$ et y entier sur $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$.

Un élément $a \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$ s'écrit alors de manière unique:

$$a = \sum_{i=1}^{n} P_i y^{i-1}, \quad \text{avec} \quad n = [K : \boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)],$$

et $P_i \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$. Si $a \neq 0$, on définit la *taille* de a et le *degré de a par rapport à x_l* par

$$t(a) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} t(P_i); \quad \deg_{x_l}(a) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg_{x_l}(P_i), \quad 1 \leqslant l \leqslant q.$$

Enfin, si $a \in K$, a s'écrit de manière unique:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{R_i} y^{i-1},$$

où, pour $i = 1, \ldots, n$, Q_i et R_i sont deux polynômes de $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$ sans facteurs communs (le coefficient du terme de plus haut degré de R_i étant par exemple positif). L'anneau $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$ étant factoriel, considérons le plus petit commun multiple P des polynômes $R_1, \ldots, R_n$, et soit $\alpha = Pa \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$; on dira que P est le *dénominateur* de a (relatif au système $(x_1, \ldots, x_q, y)$).

On définit la *taille* et les *degrés* de a par:

$$t(a) = \max\{t(\alpha); t(P)\}; \quad \deg_{x_l}(a) = \max\{\deg_{x_l}(\alpha); \deg_{x_l}(P)\};$$
$$\deg(a) = \max_{1 \leqslant l \leqslant q} \deg_{x_l}(a).$$

3) Cas d'une extension algébrique de $\boldsymbol{Q}$. Si a est un nombre algébrique non nul, on note $d(a)$ le plus petit entier positif tel que $d(a)\cdot a$ soit entier algébrique, S_a (resp. $S_{a,\infty}$) l'ensemble des valeurs absolues (resp. des valeurs absolues archimédiennes) sur $\boldsymbol{Q}(a)$, et

$$\overline{|a|} = \max_{v \in S_{a,\infty}} |a|_v; \quad s(a) = \max\{\operatorname{Log}\overline{|a|}, \operatorname{Log} d(a)\}.$$

Soient K un corps de nombres, y un générateur de K sur $\boldsymbol{Q}$. Nous allons comparer les deux fonctions t et s définies sur K^*; par exemple, si p et q sont deux nombres entiers positifs premiers entre eux, on a:

$$t(p/q) = \max\{\operatorname{Log} p, \operatorname{Log} q, 1\}, \quad \text{et} \quad s(p/q) = \operatorname{Log}\max\{q, p/q\}.$$

Soit A l'anneau des entiers de K; comme A est un $\boldsymbol{Z}$-module libre (de dimension $n = [K : \boldsymbol{Q}]$), soit f le produit des dénominateurs (par

rapport à y) des éléments d'une base de A sur $\boldsymbol{Z}$; f est un entier positif tel que $fA \subset \boldsymbol{Z}[y]$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les différents plongements de K dans $\boldsymbol{C}$, c_1 le maximum des valeurs absolues archimédiennes des coefficients de la matrice inverse de $(\sigma_j y^{i-1})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, et

$$c_2 = \max\Big\{0, \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{Log} \sum_{i=1}^{n} |\sigma_j y^{i-1}|\Big\}, \quad c_3 = \max\{\operatorname{Log} f, \operatorname{Log}(nfc_1), 1\}.$$

Pour tout élément a non nul de K, on a:

$$s(a) - c_2 \leqslant t(a) \leqslant 2s(a) + c_3.$$

L'inégalité suivante:

$$-2[\boldsymbol{Q}(a) : \boldsymbol{Q}]\cdot s(a) \leqslant \operatorname{Log}|a|_w \quad \text{pour tout } w \in S_a,$$

qui est fondamentale dans les démonstrations de transcendance, et qui se déduit soit de la formule du produit sur $\boldsymbol{Q}(a)$ si $w \notin S_{a,\infty}$ ([1], lemme 4), soit du fait que la norme d'un entier algébrique appartient à $\boldsymbol{Z}$ ([11], ch. I, § 1), quand $w \in S_{a,\infty}$, s'écrira ici:

Si K est un corps de nombres, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout élément non nul a de K et toute valeur absolue $|\cdot|$ sur K, on ait:

(2.1) $$-c\cdot t(a) \leqslant \operatorname{Log}|a|.$$

4) Propriétés de la taille. Les principales propriétés de la taille et des degrés sont données par le lemme suivant:

Lemme 2.1. *Soit K une extension de $\boldsymbol{Q}$ de type fini; soit $(x_1, \ldots, x_q, y)$ un système générateur de K sur $\boldsymbol{Q}$. Il existe des constantes positives C_1, C_2, C_3, telles que:*

1) *pour tout $a_1, \ldots, a_m$ éléments non nuls de $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$, on ait*

(2.2) $$t(a_1 + \ldots + a_m) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} t(a_i) + \operatorname{Log} m;$$

2) *pour tout $a_1, \ldots, a_m$ éléments non nuls de $\boldsymbol{Q}[x_1, \ldots, x_q, y]$, on ait:*

(2.3) $$\deg_{x_l}(a_1 + \ldots + a_m) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \deg_{x_l}(a_i), \quad 1 \leqslant l \leqslant q;$$

(2.4) $$t(a_1 \ldots a_m) \leqslant \sum_{i=1}^{m} t(a_i) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{q} \operatorname{Log}(1 + \deg_{x_l} a_i) + mC_1;$$

(2.5) $$\deg_{x_l}(a_1 \ldots a_m) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \deg_{x_l}(a_i) + mC_1, \quad 1 \leqslant l \leqslant q;$$

3) *pour tout $a_1, \ldots, a_m$ éléments non nuls de K, on ait:*

$$(2.6)\qquad t(a_1+\ldots+a_m) \leqslant \sum_{i=1}^{m}[t(a_i)+\deg(a_i)+q\,\mathrm{Log}(\deg a_i+1)]+mC_2;$$

$$(2.7)\qquad \deg_{x_l}(a_1+\ldots+a_m) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\deg_{x_l}a_i+mC_2, \quad 1\leqslant l\leqslant q;$$

$$(2.8)\qquad t(a_1\ldots a_m) \leqslant \sum_{i=1}^{m}[t(a_i)+\deg(a_i)+q\,\mathrm{Log}(\deg a_i+1)]+mC_3;$$

$$(2.9)\qquad \deg_{x_l}(a_1\ldots a_m) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\deg_{x_l}a_i+mC_3.$$

Démonstration du lemme 2.1. a) Les relations (2.2) et (2.3) sont triviales; de même, dans le cas $K = \boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)$, les relations (2.4) et (2.5) ont lieu avec $C_1 = 0$. Nous allons établir (2.4) et (2.5) dans le cas $m = 2$. Soient

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n}P_i y^{i-1}, \qquad a_2 = \sum_{j=1}^{n}Q_j y^{j-1}.$$

Pour tout entier $u \geqslant 0$, il existe des polynômes $\Pi_{u,k}\in\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$, tels que

$$y^{n+u} = \sum_{k=1}^{n}\Pi_{u,k}y^{k-1}.$$

On a donc

$$a_1 a_2 = \sum_{k=1}^{n}R_k y^{k-1}$$

avec

$$R_k = \sum_{i+j=k+1}P_iQ_j + \sum_{u=0}^{n-2}\sum_{i+j=n+u+2}\Pi_{u,k}P_iQ_j.$$

On en déduit:

$$t(a_1a_2) \leqslant t(a_1)+t(a_2)+\sum_{l=1}^{q}\mathrm{Log}(1+\min\{\deg_{x_l}a_1, \deg_{x_l}a_2\})+C_1.$$

Le cas général se déduit de cette relation par récurrence sur m.

b) Les relations (2.7) et (2.9) sont immédiates. Démontrons (2.6) et (2.8). Soient $a_i = \alpha_i/P_i$, $1\leqslant i\leqslant m$, avec $P_i\in\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$ et $\alpha_i\in\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$. On a:

$$\sum_{i=1}^{m}a_i = \frac{\sum_{i=1}^{m}\big(\alpha_i\cdot\prod_{j\neq i}P_j\big)}{\prod_{j=1}^{m}P_j}; \qquad \prod_{i=1}^{m}a_i = \frac{\prod_{i=1}^{m}\alpha_i}{\prod_{j=1}^{m}P_j}.$$

Il nous reste à établir la relation suivante: soient $\alpha\in\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$ et $\pi\in\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$; on a

$$(2.10)\qquad \begin{aligned} t\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) &\leqslant \max\{t(\alpha)+\deg\alpha;\ t(\pi)+\deg\pi\},\\ \deg_{x_l}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) &\leqslant \max\{\deg_{x_l}\alpha, \deg_{x_l}\pi\}.\end{aligned}$$

En effet, soit $\alpha = \sum_{i=1}^{n}\pi_i y^{i-1}$, et soit P un dénominateur de $\frac{\alpha}{\pi}$; on a

$$\frac{\alpha}{\pi} = \Big(\sum_{i=1}^{n}P_iy^{i-1}\Big)/P, \qquad \text{avec}\qquad \pi = PQ,\ \pi_i = P_iQ,\ \text{où } Q\in\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q].$$

La relation attendue se déduit de la suivante ([8], ch. III, § 4, lemme 2):

$$t(P) \leqslant t(PQ)+\deg(PQ).$$

Remarque 2.1. Le lemme 2.1 montre que les propriétés de la taille sur une extension de $\boldsymbol{Q}$ de type fini sont analogues à celles de la taille d'un nombre algébrique ([11], [12]). Il contient de plus le lemme 1 de [11], ch. V, § 2, et le lemme 7 de [17] (voir aussi [7], lemme 1).

Le lemme suivant montre l'existence de deux applications de $\boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q, y)$ dans $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$ laissant la taille invariante à une constante près.

Lemme 2.2. *Soient K une extension de $\boldsymbol{Q}$ de type fini, $(x_1, \ldots, x_q, y)$ un système générateur de K sur $\boldsymbol{Q}$, et $n = [K: \boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)]$. Il existe une constante $C > 0$ ayant les propriétés suivantes.*

Soit a un élément non nul de K. Il existe $\pi\in\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$, et $\alpha\in\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$, non nuls, tels que

$$\pi = a\cdot\alpha; \quad t(\pi)\leqslant Ct(a); \quad t(\alpha)\leqslant Ct(a);$$

$$\deg_{x_h}\pi \leqslant C(1+\deg_{x_h}a); \quad \deg_{x_h}\alpha\leqslant C(1+\deg_{x_h}a), \quad 1\leqslant h\leqslant q.$$

De plus, si K est un sous-corps de Ξ, on a

$$\mathrm{Log}|\pi| \leqslant \mathrm{Log}|a| + Ct(a).$$

Démonstration. Nous allons effectuer la construction de π et de α de deux manières différentes. Soit P le dénominateur de a, et soient $P_0, \ldots, P_{n-1}$ les éléments de l'anneau $A_0 = \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$ tels que $P\cdot a = P_0+\ldots+P_{n-1}y^{n-1}$.

1) La première construction utilise les propriétés de la norme N de K sur $\boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)$. Soit $\pi_1 = N(P\cdot a) = P^{n-1}\cdot N(a)$. Comme l'anneau $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q] = A_0$ est intégralement clos, $\pi_1\in A_0$. Soient $y_1 = y, \ldots, y_n$

les n conjugués de y sur $\boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)$. On remarque alors que

$$\pi_1 = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} P_j y_i^j = P\cdot a\cdot \prod_{i=2}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} P_j y_i^j$$

et on applique le lemme 2.1.

2) La deuxième méthode utilise les propriétés du résultant de deux polynômes (cf. par exemple [1], [11]).

Soit π_2 le résultant du polynôme $g(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} P_j Y^j$ et du polynôme minimal f de y sur $\boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)$. Alors $\pi_2 \in A_0$, et il existe deux polynômes $Q(Y)$ et $R(Y)$, à coefficients dans A_0, tels que

$$\pi_2 = Q(Y)g(Y)+R(Y)f(Y); \qquad t(Q) \leqslant Ct(a);$$
$$\deg_{x_h}(Q) \leqslant C(1+\deg_{x_h} a), \qquad 1 \leqslant h \leqslant q.$$

3) Pour terminer la démonstration, quand $K \subset \Xi$, on remarque que pour tout $a \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$, on a $\mathrm{Log}\,|a| \ll t(a)$.

Parmi les principales conséquences des lemmes 2.1 et 2.2, et de la relation (2.10), citons les suivantes:

Remarque 2.2. Soit K une extension de $\boldsymbol{Q}$ de type fini; soit $(x_1, \ldots, x_q, y)$ un système générateur de K sur $\boldsymbol{Q}$. Il existe une constante positive C_4 telle que pour tout élément non nul a de K, on ait ([11], ch. V, § 2, lemme 2):

(2.11) $$t(1/a) \leqslant C_4 t(a); \qquad \deg_{x_h}(1/a) \leqslant C_4\big(\deg_{x_h}(a)+1\big), \qquad 1 \leqslant h \leqslant q.$$

Remarque 2.3. Il existe une constante positive C_5 telle que pour tout a, b, éléments non nuls de K, on ait:

$$t(a/b) \leqslant C_5 \max\{t(a), t(b)\};$$
$$\deg_{x_h}(a/b) \leqslant C_5 \max\{\deg_{x_h} a, \deg_{x_h} b, 1\}, \qquad 1 \leqslant h \leqslant q.$$

Remarque 2.4. Il existe une constante $C_6 > 0$ telle que pour tout élément non nul $a = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q_i} y^{i-1}$ de K, avec P_i et Q_i premiers entre eux dans $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$, on ait:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C_6} t(a) \leqslant \max\{t(P_i), t(Q_i)\} \leqslant t(a)+\deg(a); \\ \dfrac{1}{C_6}(\deg_{x_h} a) - 1 \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant d} \{\deg_{x_h} P_i, \deg_{x_h} Q_i\} \leqslant \deg_{x_h} a, \qquad 1 \leqslant h \leqslant q. \end{cases}$$

Remarque 2.5. Soit σ un homomorphisme de K dans une clôture algébrique de K. Il existe une constante $C_7 > 0$ telle que pour tout élément

a non nul de K, on ait:

$$t(\sigma a) \leqslant C_7 t(a); \qquad \deg(\sigma a) \leqslant C_7\big(1+\deg(a)\big).$$

Enfin les lemmes et remarques précédentes montrent que deux tailles t et t' définies sur K à partir de deux systèmes générateurs différents vérifient: $t(a) \gg \ll t'(a)$. De manière plus précise, nous démontrerons le:

LEMME 2.3. *Soient $K \subset K'$ deux extensions de $\boldsymbol{Q}$ de type fini, $(x_1, \ldots, x_q, y)$ (resp. $(x_1', \ldots, x_{q'}', y')$) un système générateur de K (resp. K') sur $\boldsymbol{Q}$. On note t (resp. t') la taille et $\deg$ (resp. $\deg'$) le degré sur K (resp. K') définis par ces systèmes générateurs.*

1) *Il existe une constante $C_8 > 0$ telle que pour tout élément non nul a de K,*

(2.12) $$\frac{1}{C_8} t(a) \leqslant t'(a) \leqslant C_8 t(a); \qquad \frac{1}{C_8}(\deg a) - 1 \leqslant \deg' a \leqslant C_8(\deg a + 1).$$

2) *Si $x_h = x_h'$ pour $h = 1, \ldots, q$, alors il existe une constante $C_9 > 0$ telle que pour tout $a \in K$, $a \neq 0$, on ait:*

(2.13) $$t'(a) \leqslant t(a)+\deg a + C_9;$$
$$\deg_{x_l}' a \leqslant \deg_{x_l} a + C_9, \qquad 1 \leqslant l \leqslant q;$$
$$\deg_{x_l}' a \leqslant C_9, \qquad q < l \leqslant q'.$$

Démonstration du lemme 2.3.

a) L'inégalité $t'(a) \ll t(a)$ est vraie, grâce à (2.4), dans le cas où a est un monôme px^r, avec $p \in Z$, $p \neq 0$, et $r \geqslant 0$:

$$t'(px^r) \leqslant \mathrm{Log}\,|p| + t'(x^r) \ll \max\{r, \mathrm{Log}\,|p|\} \leqslant t(px^r).$$

On déduit alors de (2.2) que pour tout polynôme non nul $P \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$, on a

$$t'(P) = t'\Big(\sum_{(\lambda)} p(\lambda) x^{(\lambda)}\Big) \leqslant \max_{(\lambda)} t'\big(p(\lambda)x^{(\lambda)}\big) + \sum_{l=1}^{q} \mathrm{Log}(1+\deg_{x_l} P)$$

d'où

$$t'(P) \ll \max\{r, \mathrm{Log}\,|p(\lambda)|\} \leqslant t(P).$$

Enfin soit $a \in K$, $a \neq 0$, et soit P le dénominateur de a:

$$Pa = \sum_{i=1}^{n} P_i y^{i-1};$$

on a

$$t'(a) \ll \max\{t'(P), t'(P_i)\} \ll \max\{t(P), t(P_i)\} = t(a).$$

La relation $\deg'(a) \ll \deg(a)$ se démontre de la même manière.

b) Pour obtenir les inégalités $t(a) \ll t'(a)$ et $\deg(a) \ll \deg'(a)$, grâce à ce que nous venons de démontrer, il suffit que l'on étudie le cas $x_l = x'_l$ pour $1 \leqslant l \leqslant q$. Soit

$$a = \sum_{i=1}^{n} R_i y^{i-1} \in K \quad \text{avec} \quad R_i \in \boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q).$$

On aura donc $t(R_i) = t'(R_i)$, d'où $t(a) \ll \max_{1 \leqslant i \leqslant n} t'(R_i)$.

Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les n $\boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)$-homomorphismes de K dans une clôture algébrique Ω de K'. Comme la matrice $(\sigma_i y^{j-1})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ est inversible, on a

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} t'(R_i) \ll \max_{1 \leqslant j \leqslant n} t'\big(\sigma_j(a)\big).$$

Pour tout $j = 1, \ldots, n$, σ_j se prolonge en un homomorphisme σ'_j de K' dans Ω; la remarque 2.5 montre que l'on a:

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} t'\big(\sigma_j(a)\big) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} t'\big(\sigma'_j(a)\big) \ll t'(a).$$

Ceci démontre (2.12).

c) Démontrons enfin la relation (2.13). Soient

$$n = [K\colon \boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)], \quad \text{et} \quad n' = [K'\colon \boldsymbol{Q}(x'_1, \ldots, x'_{q'})].$$

Il existe un élément $\Delta \in \boldsymbol{Z}[x'_1, \ldots, x'_{q'}, y']$ tel que

$$\Delta y^{i-1} \in \boldsymbol{Z}[x'_1, \ldots, x'_{q'}, y'] \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

On définit ainsi des entiers $c > 0$ et $r_{ij}(\eta_1, \ldots, \eta_{q'}) \in \boldsymbol{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n'$, $0 \leqslant \eta_l \leqslant c$ $(1 \leqslant l \leqslant q')$, tels que

$$\Delta y^{i-1} = \sum_{\eta_1=0}^{c} \cdots \sum_{\eta_{q'}=0}^{c} \sum_{j=1}^{n'} r_{ij}(\eta_1, \ldots, \eta_{q'}) x'^{\eta_1}_1 \ldots x'^{\eta_{q'}}_{q'} y'^{j-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Soient $a \in K$, et P le dénominateur de a (relatif à $(x_1, \ldots, x_q, y)$):

$$Pa = \sum_{\lambda_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{\lambda_q=0}^{r_q} \sum_{i=1}^{n} p_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) x_1^{\lambda_1} \ldots x_q^{\lambda_q} y^{i-1}.$$

On aura donc

$$P\Delta a = \sum_{\mu_1=0}^{r_1+c} \cdots \sum_{\mu_q=0}^{r_q+c} \sum_{\mu_{q+1}=0}^{c} \cdots \sum_{\mu_{q'}=0}^{c} \sum_{j=1}^{n'} q_j(\mu_1, \ldots, \mu_{q'}) x'^{\mu_1}_1 \ldots x'^{\mu_{q'}}_{q'} y'^{j-1},$$

avec

$$q_j(\mu_1, \ldots, \mu_{q'}) = \sum_{\lambda_1+\eta_1=\mu_1} \cdots \sum_{\lambda_q+\eta_q=\mu_q} \sum_{i=1}^{n} p_i(\lambda) r_{ij}(\eta_1, \ldots, \eta_q, \mu_{q+1}, \ldots, \mu_{q'}).$$

Le nombre de termes dans la somme

$$\sum_{\lambda_1+\eta_1=\mu_1}$$

étant inférieur ou égal à $c+1$, on a

$$\operatorname{Log}\max_{j,(\mu)} |q_j(\mu)|_\infty \leqslant C + \operatorname{Log}\max_{i,(\lambda)} |p_i(\lambda)|_\infty.$$

La relation (2.13) est donc vérifiée avec $C_9 = \max\big(c+C, 3t'(\Delta)\big)$, grâce à (2.10).

§ 3. SUITES PONDÉRÉES

1. Ordre et ordre arithmétique.

a) Ordre d'une fonction méromorphe. Nous introduisons l'ordre suivant sur le $\boldsymbol{R}$-espace vectoriel $\boldsymbol{R}^2$: (ordre lexicographique):

$$(u_1, v_1) \leqslant (u_2, v_2) \quad \text{si et seulement si} \quad u_1 < u_2, \text{ ou } u_1 = u_2 \text{ et } v_1 \leqslant v_2.$$

Si $u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_d$ sont des nombres réels, nous noterons

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant d} \{u_i, v_i\} \quad \text{au lieu de} \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \{u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_d\}$$

(qui est un nombre réel), et

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant d} \{(u_i, v_i)\} \quad \text{au lieu de} \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \{(u_1, v_1), \ldots, (u_d, v_d)\}$$

(qui appartient à $\boldsymbol{R}^2$).

Dans [11], Lang introduit la définition suivante: Soit ϱ un nombre réel positif; une fonction complexe entière est d'ordre inférieur ou égal à ϱ si

$$\operatorname{Log}|F|_R = \operatorname{Log}\sup_{|z|=R} |F(z)| \ll R^\varrho \quad \text{pour} \quad R \to \infty.$$

Une fonction méromorphe est d'ordre inférieur ou égal à ϱ si elle est quotient de deux fonctions entières d'ordre inférieur ou égal à ϱ. Ainsi une fonction exponentielle $z \mapsto a^z$ $(a \in \boldsymbol{C})$ est d'ordre inférieur ou égal à **1**, une fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass ou une fonction zêta de Weierstrass sont d'ordre inférieur ou égal à 2, tandis qu'une fonction polynômiale est d'ordre inférieur ou égal à ε pour tout ε positif. On peut remarquer que les majorations qui interviennent dans les démonstrations classiques de transcendance font intervenir des fonctions g définies sur les entiers positifs à valeurs complexes, et sont du type

$$|g(n)| \ll n^a (\operatorname{Log} n)^b, \quad \text{avec} \quad (a, b) > (0, 0).$$

DÉFINITION. Soient ϱ et ϱ' deux nombres réels, $(\varrho, \varrho') > (0, 0)$. Nous dirons qu'une fonction entière F est *d'ordre inférieur ou égal à* (ϱ, ϱ') si

$$\operatorname{Log}|F|_R \ll R^\varrho (\operatorname{Log} R)^{\varrho'} \quad \text{pour} \quad R \to \infty.$$

Une fonction méromorphe est *d'ordre inférieur ou égal à* (ϱ, ϱ') si elle est quotient de deux fonctions entières d'ordre inférieur ou égal à (ϱ, ϱ').

Ainsi une fonction méromorphe est d'ordre inférieur ou égal à ϱ si et seulement si elle est d'ordre inférieur ou égal à $(\varrho, 0)$. De plus, une fonction est d'ordre inférieur ou égal à $(0, 1)$ si et seulement si elle est rationnelle.

Le nombre $n(R)$ de zéros d'une fonction entière d'ordre inférieur ou égal à (ϱ, ϱ'), dans le disque $|z| \leqslant R$, est majoré par:

$$n(R) \ll R^\varrho (\operatorname{Log} R)^{\varrho'} \quad \text{pour} \quad R \to \infty.$$

Soit g une fonction méromorphe d'ordre inférieur ou égal à (ϱ_1, ϱ_1'); si $(\varrho_1, \varrho_1') \leqslant (\varrho_2, \varrho_2')$, alors g est d'ordre inférieur ou égal à (ϱ_2, ϱ_2'); en particulier g est d'ordre inférieur ou égal à $(\varrho_1 + \varepsilon, \varrho_2')$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout réel ϱ_2'.

Si f est une fonction méromorphe d'ordre inférieur ou égal à (ϱ, ϱ') et si S est un sous-ensemble de $\boldsymbol{C}$, nous dirons que *f est définie sur S* s'il existe deux fonctions entières g et h, d'ordre inférieur ou égal à (ϱ, ϱ'), telles que h ne s'annule en aucun point de S, et que $f = g/h$.

b) Ordre arithmétique: Soit K un sous-corps de $\boldsymbol{C}$ de type fini sur $\boldsymbol{Q}$.

Soient (S_n) une suite croissante de sous-ensembles de $\boldsymbol{C}$, tels que

$$\max_{z \in S_n} |z| \ll n \quad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

f une fonction méromorphe définie sur $S = \bigcup S_n$, et soient ϱ et ϱ' deux réels avec $(\varrho, \varrho') > (0, 0)$. On dira que la fonction f est *d'ordre arithmétique inférieur ou égal à (ϱ, ϱ') sur (S_n) à valeurs dans K* si les conditions suivantes sont réalisées:

0.A.1: $f(S) \subset K$ *et* $\max_{z \in S_n} t(f(z)) \ll n^\varrho (\operatorname{Log} n)^{\varrho'}$ *pour* $n \to \infty$;

0.A.2: *Il existe une fonction entière h d'ordre inférieur ou égal à (ϱ, ϱ') n'ayant aucun zéro dans S, telle que hf soit entière, et que*

$$\max_{z \in S_n} \operatorname{Log}|1/h(z)| \ll n^\varrho (\operatorname{Log} n)^{\varrho'} \quad \textit{pour} \quad n \to \infty.$$

2. Suites pondérées. Soient $K_1, \ldots, K_d$ des sous-corps de $C, f_1, \ldots, f_d$ des fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur le compositum $K = K_1 \ldots K_d$, d'ordre inférieur ou égal à $(\varrho_1, \varrho_1'), \ldots, (\varrho_d, \varrho_d')$ respectivement, avec $\max_{1 \leqslant i \leqslant d} \varrho_i > 0$; soit $\varrho = (\varrho_1 + \ldots + \varrho_d)/d$. Soient (S_n) (T_n) deux suites croissantes de sous-ensembles finis de $\boldsymbol{C}$, avec $T_n \subset S_n$ pour tout n, et $\max_{z \in S_n} |z| \ll n$ pour $n \to \infty$.

Soient $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ des réels, avec $(\lambda, \lambda') \geqslant (\mu, \mu') \geqslant (0, 0)$.

On dira que (S_n, T_n) est une *suite pondérée relative aux corps $K_1, \ldots, K_d$ et aux fonctions $f_1, \ldots, f_d$, de densité supérieure au moins égale à $(\lambda\varrho, \lambda')$ et de densité inférieure au plus égale à $(\mu\varrho, \mu')$* s'il existe un sous-corps L de $\boldsymbol{C}$, de type fini sur $\boldsymbol{Q}$, tel que les propriétés suivantes soient vérifiées.

a) Pour $1 \leqslant i \leqslant d$, la fonction f_i est définie sur $S = \bigcup S_n$, d'ordre arithmétique inférieur ou égal à (ϱ_i, ϱ_i') sur (S_n) à valeurs dans $L \cap K_i$.

b) Pour tout $n \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ entiers et tout polynôme $P \in (L \cap K) \times \times [X_1, \ldots, X_d]$, si la fonction $F = P(f_1, \ldots, f_d)$ s'annule pour tout $z \in T_n$ (avec un ordre au moins égal à s), alors F s'annule pour tout $z \in S_n$ (avec un ordre au moins égal à s).

c) On a

$$\operatorname{Card} T_n \ll n^{\mu\varrho} (\operatorname{Log} n)^{\mu'} \quad \text{et} \quad n^{\lambda\varrho} (\operatorname{Log} n)^{\lambda'} \ll \operatorname{Card} S_n.$$

Remarque 3.1. Au lieu de considérer un corps L fixe, on peut utiliser une suite de corps L_n dont les degrés $[L_n : L_1]$ satisfont une condition de croissance (voir par exemple [12]); on remplace alors la condition $f_i(S) \subset L \cap K_i$ par $f_i(S_n) \subset L_n \cap K_i$ pour tout $n \geqslant 0$ et $i = 1, \ldots, d$.

D'autre part, nous verrons que, de l'axiome 0.A.1 nous n'utiliserons que la propriété:

$$f_i(T) \subset K \quad \text{et} \quad \max_{z \in T_n} t(f_i(z)) \ll n^{\varrho_i} (\operatorname{Log} n)^{\varrho_i'} \quad \text{pour} \quad n \to +\infty \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Remarque 3.2. Quand $K_1 = \ldots = K_d = K$, on dira simplement que la suite pondérée (S_n, T_n) est relative au corps K et aux fonctions $f_1, \ldots, f_d$.

Enfin, quand K est le corps des nombres algébriques, cette définition est analogue à celle de "special weighted sequence" de Ramachandra [12], avec néanmoins une définition différente de l'ordre d'une fonction. Le théorème principal de Ramachandra s'énonce alors:

Soient K un corps de nombres, $f_1, \ldots, f_d$ $(d \geqslant 2)$ des fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur K, d'ordre inférieur ou égal à $\varrho_1, \ldots, \varrho_d$ respectivement. Soit (S_n, T_n) une suite pondérée de densité supérieure au moins égale à $(\lambda\varrho, 0)$ et de densité inférieure au plus égale à $(\mu\varrho, 0)$. Alors $\lambda d \leqslant \mu + d$.

Un corollaire est le résultat de Lang [11], chap. II, théorème 2. On déduit également de ce théorème celui de Gel'fond Schneider sur la transcendance de a^b, ainsi que de nombreuses propriétés de fonctions elliptiques [8], [12], [14] (voir § 5).

3. Suites pondérées spéciales. Rappelons qu'une dérivation D sur un anneau A est une application de A dans A satisfaisant:

$$D(x+y) = Dx+Dy \quad \text{et} \quad D(xy) = xDy+yDx.$$

Pour étudier les valeurs de fonctions méromorphes satisfaisant une équation différentielle, nous aurons à examiner le problème suivant.

Soient $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions méromorphes, K un sous-corps de C de type fini sur $\boldsymbol{Q}$, $(x_1, \ldots, x_q, y)$ un système générateur de K sur $\boldsymbol{Q}$, k un nombre entier positif ou nul, et w un nombre complexe tel que $f_i(w) \in K$ pour tout $i = 1, \ldots, d$. Soient $P \in K[X_1, \ldots, X_d]$, $F = P(f_1, \ldots, f_d)$, et D une dérivation sur une extension finie E du corps $K(f_1, \ldots, f_d)$.

Nous voulons majorer la taille de $D^k F(w)$ (considéré comme élément d'une extension finie de K que nous préciserons).

Soit i un nombre entier, $1 \leqslant i \leqslant d$. Remarquons que la dérivation D opère sur le sous-corps K_i de E engendré sur K par $D^h f_i$, $h \geqslant 0$; soient $f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i-1}$ des éléments de E tels que $K_i = K(f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i-1})$. Soit A l'anneau $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$, et $P_{i,0}, \ldots, P_{i,\nu_i-1}$ des éléments de $A[X_1, \ldots \ldots, X_{\nu_i-1}]$ tels que

$$Df_{i,j} = \frac{P_{i,j}(f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i-1})}{P_{i,0}(f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i-1})}, \quad 1 \leqslant j \leqslant \nu_i-1.$$

Soit

$$f_{i,\nu_i} = \frac{1}{P_{i,0}(f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i-1})}.$$

Alors la dérivation D opère sur l'anneau $A[f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i}]$, et les nombres $f_{i,j}(w)$, $1 \leqslant j \leqslant \nu_i$ sont tous algébriques sur K. Le problème précédent est donc résolu par le lemme 3.1 (où l'on n'impose plus au corps de base d'être C), qui est une extension du lemme 1 de [11], ch. III, § 2 (voir aussi le lemme 1 de [3] et la démonstration du théorème 1 de [1]).

Lemme 3.1. *Soient K un sous-corps de Ξ de type fini sur $\boldsymbol{Q}$, $(x_1, \ldots \ldots, x_q, y)$ un système générateur de K sur $\boldsymbol{Q}$, $f_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant j \leqslant \nu_i)$ des fonctions de Ξ dans Ξ. Il existe une constante $C > 0$ ayant les propriétés suivantes.*

Soit w un élément de Ξ; on suppose que les fonctions $f_{i,j}$ sont analytiques dans un voisinage de w, et que $f_{i,j}(w) \in K$ pour tour $i = 1, \ldots, d$ et $j = 1, \ldots, \nu_i$. Soit P un polynôme en $X_{i,j}$ à coefficients dans l'anneau $A = \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$:

$$P = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{\nu_i} X_{i,j}^{\lambda_{i,j}},$$

où $(\lambda) = (\lambda_{i,j})$, et $p(\lambda) \in A$, $1 \leqslant i \leqslant d$, $1 \leqslant j \leqslant \nu_i$. Soit $v_{i,j}$ le degré du polynôme P par rapport à $X_{i,j}$, et soit F la fonction $P(f_{i,j})$.

1) *On a*

$$(3.1)\quad \begin{cases} t\big(F(w)\big) \leqslant C\Big[\max\limits_{(\lambda)} t\big(p(\lambda)\big) + \sum\limits_{i=1}^{d} \sum\limits_{j=1}^{\nu_i} v_{i,j} t\big(f_{i,j}(w)\big)\Big], \\ \deg_{x_l} F(w) \leqslant C\Big\{\max\limits_{(\lambda)} \deg_{x_l} p(\lambda) + \sum\limits_{i=1}^{d} \sum\limits_{j=1}^{\nu_i} v_{i,j} \deg_{x_l} f_{i,j}(w)\Big\}, \quad 1 \leqslant l \leqslant q. \end{cases}$$

2) *Soit D une dérivation sur l'anneau engendré sur A par $f_{i,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant \nu_i, 1 \leqslant i \leqslant d)$. On suppose que pour tout $i = 1, \ldots, d$, D opère sur le sous-anneau $A[f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i}]$. Soient $R_{i,j} \in A[X_{i,1}, \ldots, X_{i,\nu_i}]$ tels que*

$$Df_{i,j} = R_{i,j}(f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i}), \quad 1 \leqslant j \leqslant \nu_i, 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Soit $\delta_{i,j}$ le degré total du polynôme $R_{i,j}$. On pose

$$\delta_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu_i} \{\delta_{i,j}\} - 1, \quad w_{i,k} = \sum_{j=1}^{\nu_i} v_{i,j} + k\delta_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, k \geqslant 0.$$

Pour tout entier $k \geqslant 0$, on a $D^k F(w) \in K$, et

$$(3.2)\quad t\big(D^k F(w)\big) \leqslant C\Big\{\max_{(\lambda)} t\big(p(\lambda)\big) + k + \sum_{h=0}^{k-1} \operatorname{Log} \max_{1 \leqslant i \leqslant d} w_{i,h} + {} + \sum_{i=1}^{d} w_{i,k} \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu_i} t\big(f_{i,j}(w)\big)\Big\};$$

$$(3.3)\quad \deg_{x_l}\big(D^k F(w)\big) \leqslant C\Big\{\max_{(\lambda)} \deg_{x_l}\big(p(\lambda)\big) + k + {} + \sum_{i=1}^{d} w_{i,k} \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu_i} \deg_{x_l}\big(f_{i,j}(w)\big)\Big\}, \quad 1 \leqslant l \leqslant q.$$

De plus, si $\varDelta_1, \ldots, \varDelta_d$ sont des éléments de A tels que

$$\varDelta_i \cdot f_{i,j}(w) \in A \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant \nu_i, \ 1 \leqslant i \leqslant d,$$

alors on a

$$\Big(\prod_{i=1}^{d} \varDelta_i^{w_{i,k}}\Big) \cdot D^k F(w) \in A.$$

Démonstration du lemme 3.1. Dans toute la démonstration, on désignera par C une constante indépendante de w, P et k.

1) Démontrons la relation (3.1); soit $\varDelta_{i,j}$ le dénominateur de $f_{i,j}(w)$; on a

$$F(w) \cdot \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{\nu_i} \varDelta_{i,j}^{v_{i,j}} = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{\nu_i} \varDelta_{i,j}^{v_{i,j}-\lambda_{i,j}} \big(\varDelta_{i,j} f_{i,j}(w)\big)^{\lambda_{i,j}}.$$

On peut alors utiliser les relations (2.2) et (2.4) du lemme 2.1, et la relation (2.10); on obtient ainsi:

$$t\big(F(w)\big) \leqslant C \max\Big\{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{\nu_i} v_{i,j}\big(t(f_{i,j}(w))\big);\ \max_{(\lambda)} t\big(p(\lambda)\big) + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{\nu_i} v_{i,j}\big(t(f_{i,j}(w))\big)\Big\}.$$

On procède de même pour le degré par rapport à x_l, et on en déduit (3.1).

2) Supposons que, pour tout $i = 1, \ldots, d$, la dérivation D opère sur l'anneau $K[f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i}]$. Pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un polynôme $P_k(X_{i,j})$ appartenant à l'anneau $A[X_{i,j}]_{(1\leqslant i\leqslant d,\, 1\leqslant j\leqslant \nu_i)}$, tel que $D^k F = P_k(f_{i,j})$. Soit $v_i^{(k)}$ le degré total de P_k par rapport à $X_{i,1}, \ldots, X_{i,\nu_i}$, et écrivons P_k sous la forme

$$P_k(X_{i,j}) = \sum_{(\lambda^{(k)})} p_k(\lambda^{(k)}) \prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{\nu_i} X_{i,j}^{\lambda_{i,j}^{(k)}},$$

avec

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{\nu_i} \lambda_{i,j}^{(k)} \leqslant v_i^{(k)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d,\ k \geqslant 0, \quad \text{et} \quad p_k(\lambda^{(k)}) \in A.$$

On a:

$$D^{k+1}F = P_{k+1}(f_{i,j}) = \sum_{(\lambda^{(k)})} p_k(\lambda^{(k)}) \sum_{i=1}^{d}\Big(D\prod_{j=1}^{\nu_i} f_{i,j}^{\lambda_{i,j}^{(k)}}\Big)\prod_{s\neq i}\prod_{t=1}^{\nu_s} f_{s,t}^{\lambda_{s,t}^{(k)}};$$

$$D\prod_{j=1}^{\nu_i} f_{i,j}^{\lambda_{i,j}^{(k)}} = \sum_{j=1}^{\nu_i} \lambda_{i,j}^{(k)} R_{i,j}(f_{i,h}) f_{i,j}^{\lambda_{i,j}^{(k)}-1}\prod_{u\neq j} f_{i,u}^{\lambda_{i,u}^{(k)}}.$$

Les polynômes $R_{i,j}$ peuvent s'écrire:

$$R_{i,j}(X_{i,1}, \ldots, X_{i,\nu_i}) = \sum_{(l_{i,j})} a_{i,j}(l_{i,j}) X_{i,1}^{l_{i,j,1}} \ldots X_{i,\nu_i}^{l_{i,j,\nu_i}},$$

avec $a_{i,j}(l_{i,j}) = a_{i,j}(l_{i,j,1}, \ldots, l_{i,j,\nu_i}) \in A$, et $l_{i,j,1} + \ldots + l_{i,j,\nu_i} \leqslant \delta_{i,j}$. On obtient:

$$P_{k+1}(X_{i,j}) = \sum_{(\lambda^{(k)})}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{\nu_i}\sum_{(l_{i,j})} p_k(\lambda^{(k)}) a_{i,j}(l_{i,j}) \lambda_{i,j}^{(k)} X_{i,j}^{\lambda_{i,j}^{(k)}+l_{i,j,j}-1} \times \times\Big(\prod_{u\neq j} X_{i,u}^{\lambda_{i,u}^{(k)}+l_{i,j,u}}\Big)\prod_{s\neq i}\prod_{t=1}^{\nu_s} X_{s,t}^{\lambda_{s,t}^{(k)}}. \tag{3.4}$$

Ecrivons cette relation sous la forme

$$P_{k+1}(X_{i,j}) = \sum_{(\lambda^{(k+1)})} p_{k+1}(\lambda^{(k+1)}) \prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{\nu_i} X_{i,j}^{\lambda_{i,j}^{(k+1)}},$$

avec

$$\sum_{j=1}^{\nu_i} \lambda_{i,j}^{(k+1)} \leqslant \max_t \sum_{u=1}^{\nu_i} (\lambda_{i,u}^{(k)} + l_{i,t,u}) - 1 \leqslant \sum_{j=1}^{\nu_i} \lambda_{i,j}^{(k)} + \max_j \delta_{i,j} - 1, \tag{3.5}$$

$$t\big(p_{k+1}(\lambda^{k+1})\big) \leqslant \max_{(\lambda^{(k)})}\big\{t\big(p_k(\lambda^{(k)})\big)\big\} + 2\operatorname{Log}\max_{(\lambda^{(k)})} \lambda_{i,j}^{(k)} + C, \tag{3.6}$$

et

$$\deg_{x_l}\big(p_{k+1}(\lambda^{(k+1)})\big) \leqslant \max_{(\lambda^{(k)})}\big\{\deg_{x_l}\big(p_k(\lambda^{(k)})\big)\big\} + C. \tag{3.7}$$

En effectuant une récurrence sur k, on déduit de (3.5), (3.6) et (3.7):

$$v_i^{(k)} \leqslant v_i^{(0)} + k\delta_i \leqslant \sum_{j=1}^{\nu_i} v_{i,j} + k\delta_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d; \tag{3.8}$$

$$t\big(p_k(\lambda^{(k)})\big) \leqslant \max_{(\lambda)} t\big(p(\lambda)\big) + 2\sum_{h=0}^{k-1} \operatorname{Log}\max_{1\leqslant i\leqslant d} v_i^{(k)} + kC; \tag{3.9}$$

$$\deg_{x_l}\big(p_k(\lambda^{(k)})\big) \leqslant \max_{(\lambda)} \deg_{x_l}\big(p(\lambda)\big) + kC, \quad 1 \leqslant l \leqslant q. \tag{3.10}$$

Les relations (3.2) et (3.3) se déduisent alors de (3.1), (3.8), (3.9) et (3.10).

DÉFINITION. Soient $K_1, \ldots, K_d$ des sous-corps de $\boldsymbol{C}, f_1, \ldots, f_d$ des fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur $K = K_1 \ldots K_d$, d'ordre inférieur ou égal à $(\varrho_1, \varrho_1'), \ldots, (\varrho_d, \varrho_d')$ respectivement. Soit (S_n, T_n) une suite pondérée relative aux corps $K_1, \ldots, K_d$ et aux fonctions $f_1, \ldots, f_d$. Nous dirons que la suite *pondérée* (S_n, T_n) *est spéciale* s'il existe des fonctions méromorphes $f_{i,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant \nu_i, 1 \leqslant i \leqslant d)$ et un sous-corps L de $\boldsymbol{C}$ de type fini sur $\boldsymbol{Q}$ tels que, pour tout $i = 1, \ldots, d$, on ait

1) $f_{i,1} = f_i$.

2) Les fonctions $f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i}$ sont d'ordre inférieur ou égal à (ϱ_i, ϱ_i'). De plus, elles sont définies sur S, d'ordre arithmétique inférieur ou égal à (ϱ_i, ϱ_i') sur (S_n) à valeurs dans $L \cap K_i$.

3) Il existe une dérivation D sur l'anneau R engendré sur K par $f_{i,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant \nu_i, 1 \leqslant i \leqslant d)$, qui opère sur les sous-anneaux $K[f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i}]$, $1 \leqslant i \leqslant d$, et qui vérifie:

— pour tout $z \in T$, $g \in R$ et $k \geqslant 0$, la condition $D^h g(z) = 0$ pour $h = 0, \ldots, k$ entraîne: $d^h/dz^h g(z) = 0$ pour $h = 0, \ldots, k$;

— il existe un prolongement de D à l'anneau $R[z]$ qui vérifie:

$$\max_{t\in S_n} \operatorname{Log}|D^k(z-t)^k|_{z=t} \leqslant k \operatorname{Log}(k+n) \quad \text{pour} \quad k+n \to +\infty.$$

Si (S_n, T_n) *est une suite pondérée spéciale, on lui associe des nombres réels* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d, \varrho_*$, *et* ϱ_*', *avec* $\varepsilon_i = 0$ *ou* 1, *et* $(\varrho_*, \varrho_*') \geqslant (0, 1)$, *définis de la manière suivante:*

soient $R_{i,j} \in K[X_{i,1}, \ldots, X_{i,\nu_i}]$, tels que

$$Df_{i,j} = R_{i,j}(f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i}), \quad 1 \leqslant j \leqslant \nu_i, 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Soient $\delta_{i,j}$ le degré total du polynôme $R_{i,j}$, et $\delta_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu_i} \delta_{i,j} - 1$ On pose $\varepsilon_i = 0$ si $\delta_i \leqslant 0$; $\varepsilon_i = 1$ si $\delta_i \geqslant 1$; $(\varrho_*, \varrho'_*) = \max_{\varepsilon_i = 1} (\varrho_i, \varrho'_i)$ si $\max_{1 \leqslant i \leqslant d} \varepsilon_i = 1$, et $(\varrho_*, \varrho'_*) = (0, 1)$ si $\varepsilon_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, d$.

Ainsi la condition $(\varrho_*, \varrho'_*) = (0, 1)$ est équivalente à $\varepsilon_i = 0$ pour tout i, c'est-à-dire à "la dérivation D opère sur le K-espace vectoriel $Kf_1 + \ldots + Kf_d$". En particulier, une suite pondérée est spéciale avec $(\varrho_*, \varrho'_*) = (0, 1)$ si et seulement si

1) il existe une dérivation D sur $K(f_1, \ldots, f_d)$, opérant sur le K-espace vectoriel engendré sur K par $f_1, \ldots, f_d$, et vérifiant la condition 3;

2) il existe un sous-corps L de K, de type fini sur $\boldsymbol{Q}$, tel que pour tout entier $k \geqslant 0$ et $i = 1, \ldots, d$, la fonction $D^k f_i$ soit d'ordre arithmétique inférieur ou égal à (ϱ_i, ϱ'_i) sur (S_n) à valeurs dans L.

Un exemple de dérivation satisfaisant la condition "pour $z \in S$ et $k \geqslant 0$, les conditions $D^h g(z) = 0$ pour $h = 0, \ldots, k$ et $d^h/dz^h g(z) = 0$ pour $h = 0, \ldots, k$ sont équivalentes" est le suivant. Soit φ une fonction entière n'ayant pas de zéros dans S; on choisit $D = \varphi(z) d/dz$.

Enfin, si $f_1, \ldots, f_d$ sont des fonctions méromorphes d'ordre inférieur ou égal à (ϱ, ϱ'), si (S_n, T_n) est une suite pondérée relative aux corps $K_1, \ldots, K_d$ et aux fonctions $f_1, \ldots, f_d$, et si la dérivation d/dz opère sur l'anneau $K[f_1, \ldots, f_d]$ où K est le compositum $K_1 \ldots K_d$, alors la suite pondérée (S_n, T_n) est spéciale, avec $(\varrho_*, \varrho'_*) = (\varrho, \varrho')$.

On peut remarquer que les nombres $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d, \varrho_*, \varrho'_*$ associés à une suite pondérée spéciale ne sont pas définis de manière unique, mais dépendent du choix des fonctions $f_{i,j}, j \geqslant 2$.

Le théorème de Schneider [13], [14], complété par les travaux de Lang [11] (dans lesquels on remplace la dérivation d/dz par une dérivation D satisfaisant la propriété 3 de la définition des suites pondérées spéciales) peut s'énoncer de la manière suivante.

Soient K un corps de nombres, f_1, f_2 deux fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur K, d'ordre inférieur ou égal à ϱ. Soit (S_n, T_n) une suite pondérée spéciale, relative au corps K et aux fonctions f_1, f_2.

Alors l'ensemble $S = \bigcup S_n$ est fini.

On peut alors majorer explicitement le nombre d'éléments de S [3].

4. Construction de suites pondérées. L'exemple le plus simple de suites pondérées est fourni par les fonctions exponentielles [20]; Ramachandra a construit des suites pondérées relatives au corps $\overline{\boldsymbol{Q}}$ des nombres algébriques et à des fonctions $f_1, \ldots, f_d$ algébriquement additives [12]. Nous construirons des suites pondérées relatives à un sous-corps quelconque Ω de $\boldsymbol{C}$ algébriquement clos, et à des fonctions $f_1, \ldots, f_d$, quand $f_i(z)$ est égal à az, $\exp bz$, $\wp(cz)$, ou à $\alpha z + \zeta(cz)$, où a, b, c, α sont des nombres complexes, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, les fonctions $\wp$ sont des fonctions elliptiques de Weierstrass dont les invariants appartiennent à Ω, et où ζ sont des fonctions zêta de Weierstrass associées à certaines des fonctions $\wp$. On remarque alors que l'ensemble des $z \in \boldsymbol{C}$ tels que $f_i(z) \in \Omega$, ou z est une période de f_i, forme un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{C}$ sur $\boldsymbol{Q}$; la plupart des résultats de transcendance et d'indépendance algébrique des fonctions f_i peuvent s'exprimer par une majoration de la dimension de cet espace vectoriel. Pour obtenir une telle majoration, il faut évidemment introduire une hypothèse sur le degré de transcendance de Ω sur $\boldsymbol{Q}$; il serait souhaitable que l'on n'introduise pas d'autre hypothèse, comme l'indiquent la conjecture de Schanuel [10], [11] et la conjecture 1 de [18]; mais, même dans le cas algébrique, les résultats actuels ne semblent pas les meilleurs possibles (problème 1 de Schneider [14], conjectures de Lang [11] et Ramachandra [12]).

PROPOSITION 1. *Soient d_1, d_2, d_3, d_4, d des nombres entiers vérifiant*

$$d_1 = 0 \text{ ou } 1; \quad d_2 \geqslant 0; \quad d_3 \geqslant d_4 \geqslant 0; \quad d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 > 1.$$

Soient $b_1, \ldots, b_{d-d_4}$ des nombres complexes non nuls, a_j $(d - d_4 < j \leqslant d)$ des nombres complexes, $\wp_1, \ldots, \wp_{d_3}$ des fonctions elliptiques de Weierstrass d'invariants $g_{2,k}$ et $g_{3,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant d_3)$, et soit ζ_l $(1 \leqslant l \leqslant d_4)$ la fonction zêta de Weierstrass associée à $\wp_l$.

Soient $f_1, \ldots, f_d$ les fonctions méromorphes, d'ordre inférieur ou égal à $(\varrho_1, \varrho'_1), \ldots, (\varrho_d, \varrho'_d)$ respectivement, définies de la manière suivante:

$$f_i(z) = b_i z; \qquad (\varrho_i, \varrho'_i) = (0, 1); \quad 0 < i \leqslant d_1;$$

$$f_i(z) = \exp b_i z; \qquad (\varrho_i, \varrho'_i) = (1, 0); \quad d_1 < i \leqslant d_1 + d_2;$$

$$f_i(z) = \wp_{i-d_1-d_2}(b_i z); \qquad (\varrho_i, \varrho'_i) = (2, 0); \quad d_1 + d_2 < i \leqslant d_1 + d_2 + d_3;$$

$$f_i(z) = a_i z + \zeta_{i-d_1-d_2-d_3}(b_{i-d_3} z); \qquad (\varrho_i, \varrho'_i) = (2, 0); \quad d_1 + d_2 + d_3 < i \leqslant d.$$

On définit θ par: $\theta = 1$ si les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ ont une période commune, $\theta = 0$ sinon. Soient $\Omega_2 \subset \Omega_1$ deux sous-corps de $\boldsymbol{C}$, algébriquement clos, et contenant $g_{2,k}$ et $g_{3,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant d_3)$.

L'ensemble des nombres complexes z tels que, pour tout $i = 1, \ldots, d$, $f_i(z) \in \Omega_h$ ou z est une période de f_i, forme un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{C}$ sur $\boldsymbol{Q}$, de dimension μ_h avec $\theta \leqslant \mu_h \leqslant +\infty$ $(h = 1$ ou $2)$. Soient l_1 et l_2 deux nombres entiers, $\theta \leqslant l_h \leqslant \mu_h$.

On suppose que les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ sont algébriquement indépendantes sur $\boldsymbol{C}$. Alors:

1) *Il existe une suite pondérée relative à Ω_1 et aux fonctions $f_1, \ldots, f_d$, de densité supérieure au moins égale à $(l_1, 0)$ et de densité inférieure au plus égale à $(l_1-\theta, 0)$.*

2) *Si le corps Ω_2 contient les nombres $b_1, \ldots, b_{d-d_4}, a_{d-d_4+1}, \ldots, a_d$, alors il existe une suite pondérée spéciale relative à Ω_2 et aux fonctions $f_1, \ldots, f_d$, de densité supérieure au moins égale à $(l_2, 0)$ et de densité inférieure au plus égale à $(l_2-\theta, 0)$.*

Remarque 3.4. Pour construire la suite pondérée relative à Ω_h ($h = 1$ ou 2), on supposera seulement que les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ sont algébriquement indépendantes sur Ω_h.

D'autre part, dans le cas $h = 2$, les deux nombres réels associés à la suite pondérée spéciale sont:

$$(\varrho_*, \varrho_*') = \begin{cases} (0, 1) & \text{si} \quad d_3 = 0, \\ (2, 0) & \text{si} \quad d_3 \geqslant 1. \end{cases}$$

Remarque 3.5. Soit Ω un sous-corps algébriquement clos de $\boldsymbol{C}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant d-d_4$, la condition

"ou bien $f_i(z) \in \Omega$, ou bien z est une période de f_i"

est équivalente à

"$f_i(z) \in \Omega \cup \{\infty\}$".

On dit alors que z est un pseudo-Ω-point de f_i. On peut remarquer que deux fonctions méromorphes algébriquement dépendantes sur Ω possèdent les mêmes pseudo-Ω-points (cf. [12], lemme 8); on retrouve ainsi le résultat annoncé dans [20] sur l'espace vectoriel des pseudo-Ω-points communs à plusieurs fonctions Ω-additives.

La proposition 1 repose sur plusieurs lemmes. Le premier permettra de vérifier l'axiome 0.A.1 dans la définition de l'ordre arithmétique, pour les fonctions $\wp(bz)$ et $az+\zeta(bz)$, avec $(\varrho, \varrho') = (2, 0)$.

LEMME 3.2. *Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2 et g_3. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_l$ des nombres complexes non pôles de $\wp$.*

1) *Soit K_1 le sous-corps de $\boldsymbol{C}$ obtenu en adjoignant à $\boldsymbol{Q}$ les $2l+2$ nombres $g_2, g_3, \wp(\beta_j)$ et $\wp'(\beta_j)$, $1 \leqslant j \leqslant l$.*

Il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout entier $k \geqslant 0$ et pour tout $(m_1, \ldots, m_l) \in \boldsymbol{N}^l$, ou bien $(m\beta) = m_1\beta_1+\ldots+m_l\beta_l$ est pôle de $\wp$, ou bien

$$\wp^{(k)}(m\beta) \in K_1 \quad \text{et} \quad t\big(\wp^{(k)}(m\beta)\big) \leqslant Ak\max\{\operatorname{Log} k, m_1^2, \ldots, m_l^2\}.$$

2) *Soient a un nombre complexe, et ζ la fonction zêta associée à $\wp$. Il existe un entier $\delta \geqslant 0$ ayant la propriété suivante. Soit K_2 le sous-corps de $\boldsymbol{C}$ obtenu en adjoignant à K_1 les $3l$ nombres $a\beta_j+\zeta(\beta_j), \wp(\beta_j/2^\delta), \wp'(\beta_j/2^\delta)$, $1 \leqslant j \leqslant l$.*

Il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout $(m_1, \ldots, m_l) \in \boldsymbol{N}^l$, ou bien $(m\beta) = m_1\beta_1+\ldots+m_l\beta_l$ est pôle de $\wp$, ou bien

$$a(m\beta)+\zeta(m\beta) \in K_2, \quad \text{et} \quad t\big(a(m\beta)+\zeta(m\beta)\big) \leqslant B\max\{m_1^2, \ldots, m_l^2\}.$$

Remarque 3.6. La démonstration de la partie 1 du lemme 3.2 utilise une technique analogue à celle de Ramachandra ([12], lemmes 2 et 3 qui concernent le cas où K_1 est un corps de nombres). D'après le lemme 3.1 (avec $d = 1$, $\nu_1 = 2$, $f_{1,1} = \wp$, et $f_{1,2} = \wp'$), il suffit que l'on établisse le résultat pour $k = 0$ et $k = 1$.

Remarque 3.7. Le nombre $\delta \geqslant 0$ dont l'existence est affirmée dans la partie 2 du lemme 3.2 peut être défini de la manière suivante. Soit E le $\boldsymbol{Z}$-module engendré par $\beta_1, \ldots, \beta_l$, Λ le $\boldsymbol{Z}$-module des périodes de $\wp$, et (ω, ω') un générateur du $\boldsymbol{Z}$-module $E \cap \Lambda$. Il existe un entier $\delta \geqslant 0$ tel que

$$\frac{\omega}{2^\delta} \notin \Lambda-\{0\} \quad \text{et} \quad \frac{\omega'}{2^\delta} \notin \Lambda-\{0\}.$$

En particulier, si $E \cap \Lambda = \{0\}$, c'est-à-dire si $\omega_1, \omega_2, \beta_1, \ldots, \beta_l$ sont $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants (où (ω_1, ω_2) est un générateur de Λ), on peut choisir $\delta = 0$.

Démonstration du lemme 3.2. Nous désignerons par (ω_1, ω_2) un couple de périodes fondamental de la fonction $\wp$.

a) Nous allons d'abord établir la partie 1) du lemme dans le cas $l = 1$, et $\beta_1, \omega_1, \omega_2$ $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants.

On définit par récurrence une suite de polynômes P_h, $h \geqslant 1$, appartenant à $\boldsymbol{Q}[X, Y, T_2, T_3]$, par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1; \\ P_2 &= -Y; \\ P_3 &= 3X^4-\tfrac{3}{2}T_2X^2-3T_3X-\tfrac{1}{16}T_2^2; \\ P_4 &= Y(2X^6-\tfrac{5}{2}T_2X^4-10T_3X^3-\tfrac{5}{8}T_2^2X^2-\tfrac{1}{2}T_2T_3X+\tfrac{1}{32}T_2^3-T_3^2); \\ P_{2h+1} &= P_{h+2}P_h^3-P_{h-1}P_{h+1}^3 \quad \text{pour } h \geqslant 2; \\ P_{2h}P_2 &= P_h(P_{h+2}P_{h-1}^2-P_{h-2}P_{h+1}^2) \quad \text{pour } h \geqslant 3. \end{aligned}$$

La dernière relation est justifiée par le fait (immédiat par récurrence) que Y divise P_h quand h est pair.

On peut démontrer [12], également par récurrence, que pour tout entier $h \geqslant 1$, le polynôme

$$Q_h = 2^{h^2-h}P_h$$

a ses coefficients dans $\boldsymbol{Z}$ et a un degré total inférieur ou égal à h^2-h.

Nous allons montrer, en utilisant le lemme 2.1, qu'il existe une constante $A_0 > 0$ telle que

$$t(Q_h) \leqslant A_0(h^2-h) \quad \text{pour} \quad h \geqslant 2.$$

Cette relation est vraie pour $h = 2, 3, 4, 6$ dès que

$$A_0 \geqslant \max_{i=2,3,4,6} \{t(Q_i)/(i^2-i)\}.$$

On suppose que cette relation est vérifiée pour $h \leqslant n$, et on la vérifie pour $n+1$.

1. Si $n = 2h$, $h \geqslant 2$, on a, grâce à (2.2):

$$t(Q_{n+1}) \leqslant \max\{t(2^{2h-2}Q_{h+2}Q_h^3),\, t(2^{2h-2}Q_{h-1}Q_{h+1}^2)\} + \operatorname{Log} 2.$$

D'autre part, on déduit de (2.4) et de l'hypothèse de récurrence:

$$t(2^{2h-2}Q_{2h+2}Q_h^3) \leqslant t(2^{2h-2}) + t(Q_{h+2}) + 3t(Q_h) + c_1 \operatorname{Log} h,$$

où c_1 ne dépend pas de h. On utilise de nouveau l'hypothèse de récurrence:

$$t(2^{2h-2}Q_{h+2}Q_h^3) \leqslant A_0(4h^2+2) + 2h - 2 + c_1 \operatorname{Log} h \leqslant A_0(4h^2+2h) - \operatorname{Log} 2$$

dès que $A_0 \geqslant c_1 + 2$. De même:

$$t(2^{2h-2}Q_{h-1}Q_{h+1}^2) \leqslant A_0(4h^2+2h) - \operatorname{Log} 2,$$

d'où

$$t(Q_{n+1}) \leqslant A_0(n+1)^2 - (n+1) \quad \text{si} \quad n = 2h.$$

2. Si $n = 2h-1$, $h \geqslant 4$, on a:

$$t(Q_{2h}) \leqslant \max\{t(2^{2h-6}Q_hQ_{h+2}Q_{h-1}^2),\, t(2^{2h-6}Q_hQ_{h-2}Q_{h+1}^2)\} + \operatorname{Log} 2,$$

et

$$\begin{aligned} t(2^{2h-6}Q_hQ_{h+2}Q_{h-1}^2) &\leqslant A_0(4h^2-4h+6) + 2h - 6 + c_2 \operatorname{Log} h \\ &\leqslant A_0(4h^2-2h) - \operatorname{Log} 2, \end{aligned}$$

dès que $A_0 \geqslant c_2 + 2$; de même:

$$t(2^{2h-6}Q_hQ_{h+2}Q_{h-1}^2) \leqslant A_0(4h^2-2h) - \operatorname{Log} 2,$$

d'où

$$t(Q_{n+1}) \leqslant A_0(n+1)^2 - (n+1) \quad \text{si} \quad n = 2h-1.$$

On déduit de ce qui précède:

(3.11) $$t(P_h) \leqslant A_0(h^2-h) \quad \text{pour tout } h \geqslant 2.$$

b) On définit une suite de fonctions méromorphes $\psi_h(u)$ par la relation

(3.12) $$\psi_h(u) = P_h(\wp(u), \wp'(u), g_2, g_3).$$

Les formules d'addition et de duplication pour la fonction $\wp$:

(3.13) $$\wp(u+v) = -\wp(u) - \wp(v) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2 \quad \text{pour} \quad u \neq v,$$

et

(3.14) $$\wp(2u) = -2\wp(u) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}\right)^2,$$

et l'équation différentielle de la fonction $\wp$:

(3.15) $$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

permettent de montrer que pour tout $u \in \boldsymbol{C}$ et tout entier $h \geqslant 2$, on a [12]:

(3.16) $$\wp(hu) = \wp(u) - \frac{\psi_{h-1}(u)\psi_{h+1}(u)}{(\psi_h(u))^2}.$$

Comme $\beta_1, \omega_1, \omega_2$ sont $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants, on a $\wp(h\beta_1) \neq \wp(\beta_1)$ et $\wp'(\beta_1) \neq 0$. On déduit alors de la relation (3.16) par récurrence sur h que tous les nombres $\psi_h(\beta_1)$ sont non nuls; comme ils appartiennent à $K_1 = \boldsymbol{Q}(g_2, g_3, \wp(\beta_1), \wp'(\beta_1))$, le lemme 2.1, la remarque 2.3 et les relations (3.11) et (3.16) montrent que $\wp(h\beta_1) \in K_1$ pour tout $h \geqslant 1$, et qu'il existe $A_1 > 0$ tel que

$$t(\wp(h\beta_1)) \leqslant A_1h^2.$$

Grâce à (3.11), en dérivant (3.12) et (3.16), on obtient $\wp'(h\beta_1) \in K_1$ et il existe une constante A_2 indépendante de h telle que

$$t(\wp'(h\beta_1)) \leqslant A_2h^2.$$

c) Démonstration de la partie 1) du lemme 3.2. On procède par récurrence sur l en utilisant la relation (3.13). Le résultat étant vérifié pour $l = 1$ d'après ce qui précède, on le suppose démontré pour $l-1$. Soit $(m\beta) = m_1\beta_1 + \ldots + m_l\beta_l$ non pôle de $\wp$. On pose $u = m_1\beta_1 + \ldots + m_{l-1}\beta_{l-1}$, et $v = m_l\beta_l$. Quand $\wp(u)$ (ou $\wp(v)$) est infini, alors u (ou v) est une période de $\wp$, et le résultat est immédiat.

Supposons $\wp(u)$ et $\wp(v)$ finis; d'après l'hypothèse de récurrence $\wp(u) \in K_1$ et

$$t(\wp(u)) \ll (\max\{m_1, \ldots, m_{l-1}\})^2;$$

de même $\wp(v) \in K_1$ et $t(\wp(v)) \ll m_l^2$. Le seul cas délicat est alors celui où $\wp(u) = \wp(v)$. Mais l'ordre du zéro au point $z = u$ de la fonction $z \mapsto \wp(z) - \wp(v)$ est inférieur ou égal à 2, et l'un des trois nombres

$$\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}, \quad \frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}, \quad \frac{\wp'''(u)}{\wp''(u)}$$

est fini; ce nombre appartient alors à K_1, et a une taille $\ll (\max m_i)^2$, grâce à l'hypothèse de récurrence et à la relation

$$\wp'' = 6\wp^2 - \tfrac{1}{2}g_2,$$

obtenue en dérivant (3.15). Grâce à la règle de l'Hôpital, on en déduit

$$t\big(\wp(m\beta)\big) \ll \max\{m_1^2, \ldots, m_l^2\}.$$

Si on dérive (3.13), on obtient:

$$t\big(\wp'(m\beta)\big) \ll \max\{m_1^2, \ldots, m_l^2\}.$$

La remarque 3.6, justifiée par la relation (3.15), permet de terminer la démonstration de la partie 1) du lemme 3.2.

d) Démonstration de la partie 2) du lemme 3.2 dans le cas $l = 1$, et $\beta_1, \omega_1, \omega_2$ $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants.

Les formules d'addition et de duplication de la fonction zêta:

$$\zeta(a+b) = \zeta(a)+\zeta(b)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'(a)-\wp'(b)}{\wp(a)-\wp(b)} \quad \text{pour} \quad a \neq b,$$

et

$$\zeta(2a) = 2\zeta(a)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp''(a)}{\wp'(a)}$$

montrent que la fonction

$$f(z) = \alpha z+\zeta(z)$$

vérifie

$$f(x+y) = -f(x-y)+2f(x)+\frac{\wp'(x)}{\wp(x)-\wp(y)} \quad \text{pour} \quad x \neq y, \tag{3.17}$$

et

$$f(2x) = 2f(x)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp''(x)}{\wp'(x)}. \tag{3.18}$$

L'équation différentielle (3.15) de la fonction $\wp$ montre que, pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout $z \in \boldsymbol{C}$, on a:

$$f(2kz) = \frac{-4f(kz)\wp'(kz)+6\wp^2(kz)-g_2/2}{2\wp'(kz)} \tag{3.19}$$

et

(3.20)

$$f\big((2k+1)z\big) = -f(z)+\frac{2f\big((k+1)z\big)\big[\wp\big((k+1)z\big)-\wp(kz)\big]+\wp'\big((k+1)z\big)}{\wp\big((k+1)z\big)-\wp(kz)}.$$

Les relations (3.19) et (3.20) et la première partie de la démonstration montrent que pour tout entier $l \geqslant 1$, $f(l\beta_1) \in \boldsymbol{Q}\big(g_2, g_3, \wp(\beta_1), \wp'(\beta_1), f(\beta_1)\big) \subset K_2$. Nous allons établir la relation $t\big(f(k\beta_1)\big) \ll k^2$ par récurrence sur k.

Soit $(x_1, \ldots, x_q, y)$ un système générateur de K_2 sur $\boldsymbol{Q}$. Pour tout $l \geqslant 1$, soit d_l (resp. d'_l) le dénominateur de $\wp(l\beta_1)$ (resp. de $\wp'(l\beta_1)$), et soit $p_l = d_l\wp(l\beta_1)$, $p'_l = d'_l\wp'(l\beta_1)$. On sait déjà qu'il existe une constante c_3 indépendante de l telle que

$$\max[t(p_l), t(p'_l), t(d_l), t(d'_l)] \leqslant c_3 l^2 \quad \text{pour tout } l \geqslant 1.$$

Nous allons définir par récurrence des éléments q_l et r_l de $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$ vérifiant

$$f(l\beta_1) = q_l/r_l \quad \text{pour tout } l \geqslant 1.$$

Soit r_1 (resp. r_2) un dénominateur de $f(\beta_1)$ (resp. de $f(2\beta_1)$). Supposons $q_k, q_{k+1}, r_k, r_{k+1}$ définis. La relation (3.19) montre alors que l'on a:

$$f(2kz) = \frac{-8q_k p'_k d_k^2+12p_k^2 r_k d'_k - g_2 d_k^2 d'_k r_k}{4p'_k d_k^2 r_k}. \tag{3.21}$$

En multipliant numérateur et dénominateur de cette fraction par le dénominateur de g_2, on écrit (3.21) sous la forme

$$f(2kz) = \frac{q_{2k}}{r_{2k}} \quad \text{avec} \quad q_{2k} \quad \text{et} \quad r_{2k} \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y].$$

De même, à cause de (3.20), on définit:

$$\begin{aligned} q_{2k+1} &= -(p_{k+1}d_k - p_k d_{k+1})(q_1 r_{k+1}+2r_1 q_{k+1})d'_{k+1} + \\ &\qquad\qquad + p'_{k+1}d_{k+1}d_k r_{k+1} r_1; \\ r_{2k+1} &= (p_{k+1}d_k - p_k d_{k+1}) r_1 r_{k+1} d'_{k+1}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nous allons montrer l'existence d'une constante $c_4 > 0$, indépendante de k, telle que

$$\max\{t(q_k), t(r_k)\} \leqslant c_4 k^2 \quad \text{pour tout } k \geqslant 1. \tag{3.23}$$

Cette relation est vérifiée pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$ dès que

$$c_4 \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant 5}\{t(q_k), t(r_k)\}.$$

On suppose que la relation (3.23) est vérifiée pour k et $k+1$, et on la vérifie pour $2k$ et $2k+1$; on déduit de (3.21) et du lemme 2.1:

$$\begin{aligned} \max\{t(q_{2k}), t(r_{2k})\} &\leqslant \max\{t(q_k p'_k d_k^2), t(p_k^2 r_k d'_k), t(d_k^2 d'_k r_k), t(p'_k d_k^2 r_k)\} + c_5 \\ &\leqslant (c_4+3c_3)k^2 + c_6 \operatorname{Log} k \leqslant 4c_4 k^2, \end{aligned}$$

dès que $c_4 \geqslant c_3 + c_6 \operatorname{Log} 2/12$; de même, on déduit de (3.22):

$$\begin{aligned} \max\big(t(q_{2k+1}), t(r_{2k+1})\big) &\leqslant \max\{t(p_{k+1}d_k d'_{k+1} r_{k+1}), t(p_k d_{k+1} d'_{k+1} r_{k+1}), \\ &\qquad t(p_{k+1} d_k q_{k+1} d'_{k+1}), t(p_k d_{k+1} q_{k+1} d'_{k+1}), t(p'_{k+1} d_{k+1} d_k r_{k+1})\} + c_7 \\ &\leqslant (c_4+2c_3)(k+1)^2 + c_3 k^2 + c_8 \operatorname{Log} k \leqslant c_4(2k+1)^2, \end{aligned}$$

dès que $c_4 \geqslant 2c_3 + c_8$, ce qui démontre (3.23).

Grâce à la remarque 2.3, on en déduit $t(f(k\beta_1)) \leqslant k^2$.

e) La démonstration de la partie 2) du lemme 3.2 dans le cas $l \geqslant 1$ se fait par récurrence grâce à la relation (3.17) de la même manière que pour la partie c) de la démonstration, en utilisant la quasi-périodicité de la fonction f et la définition de δ (remarque 3.7).

Le lemme suivant permet de vérifier l'axiome 0.A.2 pour certaines fonctions possédant une propriété de pseudo-périodicité.

LEMME 3.3. *Soit G un sous-groupe discret de C de dimension 2; soient P un compact de $\boldsymbol{C}$ dont l'image dans le tore $\boldsymbol{C}/G$ est C/G, f une fonction entière, et E un ouvert de $\boldsymbol{C}$ ne contenant aucun zéro de f, et stable par translation par les éléments de G. Soient ϱ, ϱ' deux nombres réels, et $\{\varphi_g \mid g \in G\}$ un ensemble de fonctions entières vérifiant:*

$$(3.24)\qquad \begin{cases} f(z+g) = f(z)\exp\varphi_g(z), & \text{pour} \quad g \in G \ \text{et} \ z \in \boldsymbol{C};\\ \max\limits_{\substack{z \in P\\ |g| \leqslant m}} \operatorname{Re}(\varphi_g(z)) \leqslant m^{\varrho}(\operatorname{Log} m)^{\varrho'} & \text{pour} \quad m \to \infty. \end{cases}$$

Alors la fonction f est d'ordre inférieur ou égal à (ϱ, ϱ'), et on a:

$$\operatorname{Log}\max_{\substack{z \in E\\ |z| \leqslant n}} |1/f(z)| \leqslant n^{\varrho}(\operatorname{Log} n)^{\varrho'}.$$

Ce lemme se démontre de la même manière que le lemme 6 de [12].

Un exemple important de fonctions entières vérifiant (3.24) avec $(\varrho, \varrho') = (2, 0)$ est fourni par les fonctions sigma de Weierstrass: soient ω_1, ω_2 deux nombres complexes $\boldsymbol{R}$-linéairement indépendants; soit $\wp$ la fonction elliptique de Weierstrass de périodes fondamentales ω_1, ω_2; soient ζ et σ les fonctions zêta et sigma associées, et a un zéro de $\wp$ dans le parallélogramme P des périodes. On a les formules suivantes: [12], [14]:

$$\wp(z) = \frac{-\sigma(z-a)\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\sigma(a)}; \qquad \zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},$$

$$\sigma(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = \sigma(z)\exp\varphi_{m_1,m_2}(z) \qquad \text{pour} \qquad (m_1, m_2) \in \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z},$$

avec

$$\varphi_{m_1,m_2}(z) = (m_1+m_2+m_1m_2)i\pi + (z + \tfrac{1}{2}m_1\omega_1 + \tfrac{1}{2}m_2\omega_2)\big(m_1\zeta(\omega_1/2) + m_2\zeta(\omega_2/2)\big).$$

Démonstration de la proposition 1. Soit Λ_k le groupe des périodes de la fonction $\wp_k$ $(1 \leqslant k \leqslant d_3)$. A tout réel $\varepsilon > 0$ on associe le sous-ensemble Φ_ε de $\boldsymbol{C}$ défini par:

$$\begin{cases} \Phi_\varepsilon = \{z \in \boldsymbol{C} \mid \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant d_3} (\min\limits_{\omega \in \Lambda_k} |b_{d_1+d_2+k} z - \omega|) > \varepsilon\} & \text{si} \quad d_3 \geqslant 1;\\ \Phi = \boldsymbol{C} \quad \text{si} \quad d_3 = 0. \end{cases}$$

Soit Ω un sous-corps de $\boldsymbol{C}$, algébriquement clos, contenant les invariants $g_{2,k}$ et $g_{3,k}$ de $\wp_k$ $(1 \leqslant k \leqslant d_3)$, et soient $\beta_1, \ldots, \beta_l$ l nombres complexes, $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants, tels que, pour $1 \leqslant i \leqslant d$ et $1 \leqslant j \leqslant l$, on ait:

$$f_i(\beta_j) \in \Omega, \qquad \text{ou} \qquad f_i(\beta_j + z) = f_i(z) \qquad \text{pour tout } z \in \boldsymbol{C};$$

dans le cas $\theta = 1$, on choisit pour β_1 une période commune. On définit deux suites $(S_n(\varepsilon))$ et $(T_n(\varepsilon))$ de sous-ensembles de $\boldsymbol{C}$ par:

$$S_n(\varepsilon) = \begin{cases} \{(\lambda + \tfrac{1}{2})\beta_1 \mid 1 \leqslant \lambda \leqslant n\} & \text{si} \quad l = \theta = 1;\\ \{\lambda_1\beta_1 + \ldots + \lambda_l\beta_l \mid -n \leqslant \lambda_h \leqslant n, 1 \leqslant h \leqslant l\} \cap \Phi_\varepsilon & \text{sinon}; \end{cases}$$

$$T_n(\varepsilon) = \begin{cases} \{\beta_1/2\} & \text{si} \quad l = \theta = 1;\\ \{\lambda_2\beta_2 + \ldots + \lambda_l\beta_l \in S_n(\varepsilon)\} & \text{si} \quad \theta = 1 \ \text{et} \ l \geqslant 2;\\ S_n(\varepsilon) & \text{si} \quad \theta = 0. \end{cases}$$

Il existe un entier $\delta_0 \geqslant 0$ tel que, pour $1 \leqslant h \leqslant l$, $1 \leqslant i \leqslant d$ et $\delta \geqslant \delta_0$, le nombre $\beta_h/2^\delta$ ne soit pas pôle de f_i. Pour tout entier $\delta \geqslant \delta_0$, on considère le sous-corps L_δ de $\boldsymbol{C}$ obtenu en adjoignant à $\boldsymbol{Q}$ les nombres

$$g_{2,k},\ g_{3,k},\ f_i(\beta_h/2^\delta),\ \wp_k'(b_{d_1+d_2+k}\beta_h/2^\delta),$$

$1 \leqslant k \leqslant d_3, 1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant h \leqslant l$.

L'inclusion $L_\delta \subset \Omega$ se déduit de (3.14), (3.15), (3.18) et de l'égalité:

$$4X^3 - g_2X - g_3 = 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3),$$

avec

$$e_i = \wp(\omega_i/2) \qquad \text{et} \qquad \omega_3 = (\omega_1+\omega_2)/2.$$

Le lemme 3.2 montre qu'il existe un entier $\delta \geqslant \delta_0$ tel que $f_i(S_n) \subset L_\delta$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$ et $n \geqslant 0$. Le lemme 5 de [12] montre l'existence d'un entier n_0 et d'un réel $\varepsilon > 0$ tels que $\operatorname{Card} S_n(\varepsilon) \geqslant n^l$ pour $n \geqslant n_0$.

Les axiomes 0.A.1 et 0.A.2 sont vérifiés grâce aux lemmes 3.2 et 3.3 respectivement. Enfin, pour obtenir la deuxième partie de la proposition 1, on pose:

$$f_{i,j} = f_i^{(j-1)}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant \nu_i$$

avec

$$\nu_i = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d_1 + d_2;\\ 2 & \text{pour} \quad d_1 + d_2 < i \leqslant d_1 + d_2 + d_3;\\ 3 & \text{pour} \quad d_1 + d_2 + d_3 < i \leqslant d. \end{cases}$$

5. Application du théorème de Ramachandra à l'étude de sous-groupes à un paramètre de certaines variétés de groupes. Les fonctions thêta, qui servent à paramétrer les variétés abéliennes, permettent de construire des suites pondérées relatives au corps des nombres algébriques (voir [11], chap. II, §§ 3 et 4). C'est ainsi que l'on peut déduire du théorème de Ramachandra le résultat suivant:

PROPOSITION 2. *Soit G une variété de groupe définie sur le corps des nombres algébriques; soit $\varphi\colon \boldsymbol{C} \to G_{\boldsymbol{C}}$ un sous-groupe à un paramètre de dimension algébrique d. Soit Γ un sous-groupe de $\boldsymbol{C}$, ayant au moins m éléments $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants. On suppose que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:*

— G est une variété de groupe linéaire, et $md > m+d$;

— G est une variété abélienne, et $md > m+2d$.

Alors $\varphi(\Gamma)$ n'est pas contenu dans le groupe des points algébriques de G.

La condition $md > m+d$ est équivalente à: $m \geqslant 3$ et $d \geqslant 2$, ou $m \geqslant 2$ et $d \geqslant 3$; la condition $md > m+2d$ peut s'écrire: $m \geqslant 5$ et $d \geqslant 2$, ou $m \geqslant 4$ et $d \geqslant 3$, ou $m \geqslant 3$ et $d \geqslant 4$. Lang conjecture [10] que chacune de ces conditions peut être remplacée par $m \geqslant 2$ et $d \geqslant 2$. (Voir à ce sujet § 7 corollaire 3 et [11], ch. III, § 4, th. 2 et 3). On peut déduire de la proposition 2 des conséquences analogues aux corollaires 1 et 2 de [11], chap. II, § 4 (où l'on peut donc remplacer 7 par 5).

Nous obtiendrons au § 7 une extension, dans le cas linéaire, de la proposition 2. Dans le cas abélien, la démonstration repose sur le lemme suivant:

LEMME 3.4. *Soient A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K, et $\varphi\colon \boldsymbol{C} \to A_{\boldsymbol{C}}$ un sous-groupe à un paramètre, de dimension algébrique d, représenté par des coordonnées projectives $(g_0, \ldots, g_N)$, la fonction g_0 n'étant pas identiquement nulle. Soit $(f_1, \ldots, f_d)$ une base de transcendance de $K[g_1/g_0, \ldots, g_N/g_0]$ sur K.*

Soient $\beta_1, \ldots, \beta_m$ des nombres complexes $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants, tels que $\varphi(\beta_\nu) \in A_K$ pour $1 \leqslant \nu \leqslant m$.

Alors il existe une suite pondérée relative à K et aux fonctions $f_1, \ldots, f_d$, de densité supérieure au moins égale à m.

Démonstration du lemme 3.4 (¹). On utilisera les résultats de [21], chap. VI. Soit D la dimension de A. Quitte à faire un changement de coordonnées, on supposera que $g_0(0) \neq 0$, et qu'il existe une fonction thêta holomorphe $\Theta_0\colon \boldsymbol{C}^D \to \boldsymbol{C}$ et un élément non nul $a \in \boldsymbol{C}^D$, tels que

$$g_0(t) = \Theta_0(ta) \quad \text{pour tout } t \in \boldsymbol{C}. \tag{3.25}$$

Alors il existe une forme quadratique q sur $\boldsymbol{C}^D$ telle que le groupe des périodes de la fonction

$$\psi(z) = |\Theta_0(z)|^2 \exp q(z) \tag{3.26}$$

soit un sous-groupe discret Λ de $\boldsymbol{C}^D$ de dimension $2D$. En particulier la fonction g_0 est d'ordre inférieur ou égal à $(2, 0)$.

(¹) La démonstration de ce lemme m'a été suggérée par J. P. Serre.

On notera $s\colon \boldsymbol{C}^D \to \boldsymbol{C}^D/\Lambda$ la surjection canonique.

Soit Δ un disque fermé de $\boldsymbol{C}^D$, de centre 0 et de rayon positif r, ne contenant aucun zéro de Θ_0. Pour tout entier $n > 0$, on définit un sous-ensemble S_n de $\boldsymbol{C}$ par

$$S_n = \{z = u_1\beta_1 + \ldots + u_m\beta_m \mid -n \leqslant u_j \leqslant n;\ s(za) \in s(\Delta)\}.$$

La fonction $1/\psi(z)$ étant bornée sur $s^{-1}(s(\Delta))$, on a, grâce à (3.25) et (3.26):

$$\operatorname{Log} \max_{z \in S_n} |1/g_0(z)| \ll n^2 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

D'autre part le lemme 1 de [11], chap. II, § 4 montre que l'axiome 0.A.1 est vérifié sur S_n pour les fonctions $f_1, \ldots, f_d$, avec $(\varrho_i, \varrho_i') = (2, 0)$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Il ne reste plus qu'à vérifier l'assertion concernant la densité supérieure de la suite pondérée (S_n, S_n).

Comme le tore $\boldsymbol{C}^D/\Lambda$ est compact, il existe un nombre fini de disques de $\boldsymbol{C}^D$, de rayon $r/2$, dont les images par s recouvrent $\boldsymbol{C}^D/\Lambda$. On utilise alors le principe de Dirichlet pour les éléments

$$s(u_1\beta_1 a + \ldots + u_m\beta_m a), \quad -n/2 \leqslant u_j \leqslant n/2, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

L'un des disques considérés a une image dans $\boldsymbol{C}^D/\Lambda$ qui contient un nombre $\gg n^m$ de ces points. En soustrayant un de ces points à tous les autres, on obtient

$$\operatorname{card} S_n \gg n^m.$$

§ 4. INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE ET TYPES DE TRANSCENDANCE

Les résultats dont nous avons parlé concernent tous les valeurs algébriques de fonctions méromorphes. On ne peut pas espérer obtenir d'aussi bons énoncés concernant l'indépendance algébrique de ces valeurs, ainsi que l'a remarqué Lang [11], p. 41, qui cite l'exemple des fonctions

$$t,\ \exp t,\ \exp t^2, \ldots$$

dont les valeurs sont dans $\boldsymbol{Q}(e)$ pour toute valeur entière de t. L'un des principes essentiels dans les démonstrations de transcendance étant l'inégalité (2.1), on est amené, pour considérer des extensions de $\boldsymbol{Q}$ de type fini et de degré de transcendance supérieur ou égal à 1, à introduire la définition suivante.

Définition du type de transcendance. Soient τ un nombre réel, K un sous-corps de Ξ. On dira que K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\boldsymbol{Q}$ si K est une extension de $\boldsymbol{Q}$ de degré de transcendance fini, et s'il existe une base de transcendance $(x_1, \ldots, x_q)$ de K sur $\boldsymbol{Q}$ $(q \geqslant 0)$

et une constante $C > 0$ telles que pour tout élément non nul α de $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$, on ait

$$-\big(t(\alpha)\big)^\tau \leqslant C \operatorname{Log}|\alpha|. \tag{4.1}$$

Par exemple, un corps de nombres a un type de transcendance inférieur ou égal à 1 sur $\boldsymbol{Q}$.

D'autre part, *si K est un sous-corps de $\boldsymbol{C}$, ou un sous-corps de la clôture algébrique $\overline{\boldsymbol{Q}}_p$ de $\boldsymbol{Q}_p$ dans Ξ, si K a un type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\boldsymbol{Q}$ et un degré de transcendance q sur $\boldsymbol{Q}$, alors $\tau \geqslant q+1$.*

Dans le cas complexe, ceci se déduit de l'énoncé suivant (qui résulte du principe de Dirichlet — voir par exemple [14], lemmes 27 et 28 — et qui remplace la relation

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)| < \exp -(1+\varepsilon)\operatorname{Log} H \prod_{i=1}^{s} d_i$$

de [18], p. 301, qui est incorrecte, comme me l'a fait remarquer Georges Rhin):

Soient $x_1, \ldots, x_q$ des nombres complexes algébriquement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$. Soit $\lambda = 3\cdot\max\{1, \operatorname{Log}|x_1|, \ldots, \operatorname{Log}|x_q|\}$. Pour tout $(q+1)$-uple $H, d_1, \ldots, d_q$ de nombres entiers positifs, il existe un polynôme non nul $P \in \boldsymbol{Z}[X_1, \ldots, X_q]$, de hauteur inférieure ou égale à H et de degré inférieur ou égal à d_i par rapport à X_i, tel que

$$|P(x_1, \ldots, x_q)| < e^{\lambda(d_1+\ldots+d_q)} H^{1-\frac{1}{2}\cdot\prod_{i=1}^{q}(1+d_i)}.$$

Si K est un sous-corps de $\overline{\boldsymbol{Q}}_p$ (²), alors le complété $\hat{K}$ de K a une valuation discrète et un corps des restes fini (soit p^f le nombre de ses éléments); le principe de Dirichlet montre que, si H, M, N, h sont des entiers positifs vérifiant

$$H^N > p^{fhM},$$

et si $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant M,\ 1 \leqslant j \leqslant N)$ sont des éléments de K de valeur absolue inférieure ou égale à A, alors il existe des entiers rationnels $X_1, \ldots, X_N$, non tous nuls, vérifiant:

$$-H < X_j < H \quad (1 \leqslant j \leqslant N) \qquad \text{et} \qquad \Big|\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} X_j\Big| < A p^{-h} \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant M.$$

L'inégalité $\tau \geqslant q+1$ s'en déduit quand on choisit $M = 1$, $N = (T+1)^q$, $t(\alpha) \leqslant T = \operatorname{Log} H$, et $\{a_{1,j} \mid 1 \leqslant j \leqslant N\} = \{x_1^{\lambda_1} \ldots x_q^{\lambda_q} \mid 0 \leqslant \lambda_k \leqslant T,\ 1 \leqslant k \leqslant q\}$.

Soit K un sous-corps de Ξ, de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\boldsymbol{Q}$; soit L un sous-corps de K de type fini sur $\boldsymbol{Q}$; alors il existe une constante $C_L > 0$ telle que, pour tout $a \in L$, on ait:

$$-\big(t_L(a)\big)^\tau \leqslant C_L \operatorname{Log}|a|, \tag{4.2}$$

(²) de type fini sur $\boldsymbol{Q}$.

où t_L est la taille sur L définie à partir d'un système générateur de L sur $\boldsymbol{Q}$, la constante C_L ne dépendant que de ce système.

La relation (4.2), qui est une conséquence immédiate de (4.1) et du lemme 2.2, montre que la définition de type de transcendance que nous venons d'introduire est intrinsèque (c'est-à-dire ne dépend que du corps K et non de la base de transcendance $(x_1, \ldots, x_q)$ permettant de vérifier (4.1)), et coïncide avec celle de Lang [11] dans le cas des extensions de $\boldsymbol{Q}$ de type fini (voir [11], Chap. V, § 2, lemme 3).

Cette définition permet de généraliser à des théorèmes d'indépendance algébrique de nombreux résultats de transcendance (voir par exemple [5], ainsi que le § 8). Ici, le théorème de Ramachandra se généralise par le:

THÉORÈME 1_a. *Soient τ un nombre réel, K un sous-corps de $\boldsymbol{C}$ de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\boldsymbol{Q}$, $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur K, d'ordre inférieur ou égal à $(\varrho_1, \varrho_1'), \ldots, (\varrho_d, \varrho_d')$ respectivement, et (S_n, T_n) une suite pondérée relative au corps K et aux fonctions $f_1, \ldots, f_d$, de densité supérieure au moins égale à $(\lambda\varrho, \lambda')$, et de densité inférieure au plus égale à $(\mu\varrho, \mu')$, avec $\varrho = (\varrho_1 + \ldots + \varrho_d)/d$, et $\varrho' = (\varrho_1' + \ldots + \varrho_d')/d$.*

Si $\tau > 1$, alors

$$d(\lambda, 1+\lambda') \leqslant \tau(\mu+d, \mu'+d\varrho').$$

Si $\tau = 1$, c'est-à-dire si K est une extension algébrique de $\boldsymbol{Q}$, alors

$$d(\lambda, \lambda') \leqslant (\mu+d, \mu'+d\varrho').$$

Remarque 4.1. D'après la définition de l'ordre sur le $\boldsymbol{R}$-espace vectoriel $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ que nous avons introduit au § 3.1, pour obtenir la conclusion il suffit que l'on montre que:

si $\tau > 1$ et $d(1+\lambda') > \tau(\mu'+d\varrho')$, alors $\lambda d < \tau(\mu+d)$;
si $\tau = 1$ et $d\lambda' > \tau(\mu'+d\varrho')$, alors $\lambda d < (\mu+d)$.

On retrouve en particulier le théorème de Ramachandra (§ 3.2).

Remarque 4.2. Quand $\lambda' = \mu' = 0$, $\tau > 1$ et $\varrho' < 1/\tau$, alors $\lambda d < \tau(\mu+d)$. On obtient ainsi les théorèmes 1 et 2 annoncés dans [20] (la condition $\lambda d \geqslant \tau(\lambda+d)$ entraîne $d > \tau$).

Remarque 4.3. Dans le cas $\tau = 1$, nous démontrerons que l'inégalité

$$d(\lambda, \lambda') \leqslant (\mu+d, \mu'+d\varrho')$$

reste valable si on remplace, dans toutes les majorations:

$$\ldots \leqslant x^a(\operatorname{Log} x)^{a'} \quad \text{pour} \quad x \to \infty,$$

la fonction Log par une fonction $L(x)$ vérifiant:

$$\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} L(x)/x^\varepsilon = 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Il serait extrêmement utile d'obtenir dans ces conditions l'inégalité stricte $d(\lambda, \lambda') < (\mu+d, \mu'+d\varrho')$.

Nous examinerons au § 8 le cas particulier où l'ensemble $S = \bigcup S_n$ admet un point d'accumulation.

Dans le cas où les fonctions satisfont une équation différentielle, à coefficients dans le corps K, on obtient le:

Théorème 1_b. *Sous les hypothèses du théorème 1_a on suppose que la suite pondérée (S_n, T_n) est spéciale.*

Si $\tau > 1$, *alors*

$$(d-1)(\lambda, \lambda') \leqslant (\tau-1)(\mu+d, \mu'+d\varrho'-1)+(d-\tau)\left(\frac{\varrho_*}{\varrho}, \varrho_*'-1\right).$$

Si $\tau = 1$ *et* $d \geqslant 2$, *alors*

$$(\lambda, \lambda') = (0, 0).$$

Les nombres ϱ_*, ϱ_*' associés à la suite pondérée spéciale (S_n, T_n) ont été définis au § 3.3.

Remarque 4.4. Pour obtenir la conclusion dans le cas $\tau > 1$, il suffira que l'on montre que, pour

$$\lambda'(d-1) > (\tau-1)(\mu'+d\varrho'-1)+(d-\tau)(\varrho_*'-1),$$

on a:

$$\lambda(d-1) < (\tau-1)(\mu+d)+(d-\tau)\frac{\varrho_*}{\varrho}.$$

On obtient alors le théorème 3 de [20], dans lequel il faut:

— ou bien ajouter l'hypothèse que la dérivation opère sur le K-espace vectoriel engendré par $f_1, \ldots, f_d$, et que pour tout entier $k \geqslant 0$, on a

$$\max_{z \in S_n} t\big(f_i^{(k)}(z)\big) \leqslant n^{\varrho_i}(\operatorname{Log} n)^{\varrho_i'}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d;$$

— ou bien supposer $\varrho_1 = \ldots = \varrho_d$, remplacer la conclusion par

$$\lambda(d-1) < (\tau-1)(\lambda'+d)+d-\tau.$$

Remarque 4.5. La relation $\lambda(d-1) \leqslant (\tau-1)(\mu+d)+(d-\tau)\dfrac{\varrho_*}{\varrho}$ peut s'écrire:

$$\lambda d \leqslant \tau(\mu+d)+\frac{d-\tau}{d-1}\left(d\frac{\varrho_*}{\varrho}-\mu-d\right).$$

Pour $d > \tau$ et $\dfrac{\varrho_*}{\varrho} < 1+\dfrac{\mu}{d}$, la conclusion du théorème 1_b améliore celle du théorème 1_a.

Enfin, dans le cas $\tau = 1$, le théorème 1_b est une conséquence du théorème de Schneider (§ 3.3).

§ 5. TRANSCENDANCE ET INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DES VALEURS DE FONCTIONS ELLIPTIQUES

La proposition 1 (§ 3) et les théorèmes 1_a et 1_b (§ 4) vont nous permettre de retrouver les résultats de Schneider et de Ramachandra sur la transcendance des valeurs de fonctions elliptiques, de Hermite, Lindemann, Gelfond, Schneider, Lang et Ramachandra sur les valeurs algébriques de fonctions exponentielles, et de Schneider sur les fonctions zêta de Weierstrass. Nous obtiendrons de plus de nouveaux résultats de transcendance sur les fonctions zêta de Weierstrass, et nous généraliserons tous ces énoncés aux extensions de $\boldsymbol{Q}$ de type de transcendance fini.

Proposition 3. *Sous les hypothèses de la proposition* 1 (§ 3), *on considère un nombre réel* $\tau < d$.

1) *Si* Ω_1 *est une extension de* $\boldsymbol{Q}$ *de type de transcendance inférieur ou égal à* τ, *et si* $\tau > 1$, *alors* μ_1 *est fini et*

$$\mu_1 < \frac{\tau}{d-\tau}(\varrho_1+\ldots+\varrho_d-\theta). \tag{5.1}$$

2) *Si* Ω_2 *est une extension de* $\boldsymbol{Q}$ *de type de transcendance inférieur ou égal à* τ, $\tau \geqslant 1$, *alors* μ_2 *est fini et*

$$\begin{cases} \mu_2 < \dfrac{\tau-1}{d-\tau}d & \textit{si} \quad \tau > 1 \ \textit{et} \ d_1 = d_3 = 0 \ (d = d_2); \\ \mu_2 \leqslant \dfrac{\tau-1}{d-\tau}(d-1) & \textit{si} \quad d_1 = 1 \ \textit{et} \ d_3 = 0 \ (d = d_2+1); \\ \mu_2 < \dfrac{\tau-1}{d-\tau}(\varrho_1+\ldots+\varrho_d-\theta)+2 & \textit{si} \quad d_3 \geqslant 1. \end{cases} \tag{5.2}$$

Remarque 5.1. On déduit de la relation (5.2), dans le cas $d_3 = 0$, le théorème 1 de [11], chap. V, § 1, et les théorèmes 1 et 2 de [5].

Remarque 5.2. L'inclusion $\Omega_2 \subset \Omega_1$ montre que l'on a $\mu_2 \leqslant \mu_1$; d'autre part on a $\varrho_1+\ldots+\varrho_d = d_2+2d_3+2d_4$. Donc, quand $2d_1+d_2+ +\theta < 2\tau$ (en particulier quand $d_2 < 2(\tau-1)$), la relation (5.2) améliore (5.1).

Remarque 5.3. On déduit de la proposition 3 des propriétés d'indépendance algébrique de fonctions possédant un théorème d'addition algébrique, à condition que l'on détermine le type de transcendance d'un corps Ω pour lequel ces fonctions sont Ω-additives (en utilisant les notations de [20]):

Corollaire 1. *Soient τ un nombre réel, $\tau > 1$, Ω un sous-corps algébriquement clos de C, de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur Q, $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions méromorphes Ω-additives, algébriquement indépendantes sur Ω, d'ordre inférieur ou égal à $(\varrho_1, \varrho_1'), \ldots, (\varrho_d, \varrho_d')$ respectivement. L'ensemble des pseudo-Ω-points communs à $f_1, \ldots, f_d$ forme un sous-espace vectoriel de C sur Q, dont la dimension $\delta_\Omega(f_1, \ldots, f_d)$ est majorée par:*

$$\delta_\Omega(f_1, \ldots, f_d) \leqslant \frac{\tau}{d-\tau}(\varrho_1 + \ldots + \varrho_d - \theta),$$

où $\theta = 1$ si les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ ont une période commune, et $\theta = 0$ sinon.

Quand Ω est la clôture algébrique $\overline{Q}$ de Q dans C, on retrouve un théorème de Ramachandra [12] (th. 2).

Les remarques que nous avons faites au début du § 3.4 nous autorisent à énoncer la

Conjecture. *Sous les hypothèses de la proposition 1, on suppose que le degré de transcendance de Ω_1 (resp. de Ω_2) sur Q est fini. Alors μ_1 (resp. μ_2) est fini.*

Il serait intéressant, ensuite de majorer explicitement μ_h en fonction du degré de transcendance q_h de Ω_h sur Q ($h = 1$ ou 2); une majoration telle que

$$\mu_1 \leqslant q_1 + 1$$

contiendrait toutes les conjectures précédentes (par exemple, dans le cas $d_3 = 0$, elle est équivalente à la conjecture de Schanuel; dans le cas $d_4 = 0$ et $q_1 = 0$, elle est équivalente à une conjecture de Ramachandra).

Étude de la proposition 3 dans le cas algébrique. Quand $\Omega_1 = \overline{Q}$, le théorème de Ramachandra (§ 3.2) et la proposition 1 montrent que l'on a:

(5.3) $$\mu_1 \leqslant (\varrho_1 + \ldots + \varrho_d - \theta)/(d-1).$$

Cette relation (5.3) se déduit de la proposition 3 quand on remarque que (5.1) est vrai pour tout $\tau > 1$.

De plus, si $\Omega_2 = \overline{Q}$, le théorème de Schneider (§ 3.3) montre que l'on a:

(5.4) $$\mu_2 = 0.$$

On déduit de (5.4):

— le théorème de Hermite Lindemann sur la transcendance de e^a ([8], ch. II, § 1; [11], ch. III, § 1, corollaire 1 du théorème 1; [14], ch. II, th. 11);

— le théorème de Gel'fond Schneider sur la transcendance de a^b ([8], ch. III, § 2, th. 2; [11], ch. III, § 1, corollaire 2 du théorème 1; [14], ch. II, th. 14);

— de nombreux résultats de transcendance, dus essentiellement à Schneider, en rapport avec les fonctions elliptiques et la fonction modulaire ([8], ch. III, § 2, th. 3; [11], ch. III, § 1, corollaires 3 et 4; [14], ch. II, th. 15, 16, 17 et 18).

La relation (5.3), qui contient également le théorème sur la transcendance de a^b (dans le cas $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = d_4 = 0$) admet comme corollaires des résultats de Lang ([11], ch. II, th. 1, correspondant au cas $d_2 = 2$, $d_1 = d_3 = d_4 = 0$, ou, ce qui donne le même résultat, $d_2 = 3$, $d_1 = d_3 = d_4 = 0$) et de Ramachandra ([12], th. 2, correspondant à $d_4 = 0$).

Dans le cas $d_4 \geqslant 1$, on obtient de nouveaux résultats de transcendance sur les fonctions $az + \zeta(bz)$, où b est un nombre complexe non nul (la différence essentielle avec les résultats de Schneider: [14], th. 15, étant que a et b peuvent être transcendants). Par exemple, dans le cas $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = d_4 = 1$, $\theta = 1$, on déduit de (5.2) et de l'indépendance algébrique des deux fonctions

$$\wp(t) \quad \text{et} \quad ut + v\zeta(t),$$

pour u et v complexes avec $(u, v) \neq (0, 0)$ (cf. [14]) le

Corollaire 2. *Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass, de périodes fondamentales (ω_1, ω_2), dont les invariants g_2 et g_3 sont algébriques. Soit $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ une période non nulle de $\wp$, et soit $\eta = 2a_1\zeta(\omega_1/2) + 2a_2\zeta(\omega_2/2)$. Soient u_1, u_2, u_3 des nombres complexes. Si les quatre nombres u_1, u_2, u_3, ω sont Q-linéairement indépendants, alors l'un des six nombres*

$$\wp(u_i), \quad \zeta(u_i) - \frac{\eta}{\omega}u_i, \quad i = 1, 2, 3$$

est transcendant.

Dans le cas $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = 2$, $d_4 = 1$, $\theta = 1$, on obtient le:

Corollaire 3. *Soient $\wp$ et $\wp^*$ deux fonctions elliptiques de Weierstrass dont les invariants sont algébriques, $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ (resp. ω^*) une période non nulle de $\wp$ (resp. $\wp^*$), ζ la fonction zêta associée à $\wp$, et $\eta = 2a_1\zeta(\omega_1/2) + 2a_2\zeta(\omega_2/2)$. On suppose que les fonctions*

$$\wp(\omega z), \quad \zeta(\omega z) - \eta z, \quad \wp^*(\omega^* z)$$

sont algébriquement indépendantes sur C. Soient v_1 et v_2 deux nombres complexes non pôles de $\wp(\omega z)$, tels que $1, v_1, v_2$ soient Q-linéairement indépendants. Alors l'un au moins des six nombres

$$\wp(\omega v_i), \quad \zeta(\omega v_i) - \eta v_i, \quad \wp^*(\omega^* v_i), \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

est transcendant.

De la même manière que pour les théorèmes 15 et 16 de [14] ou le résultat de Ramachandra [12], p. 87, on peut énoncer les corollaires 2 et 3 sous forme invariante, en faisant intervenir la fonction modulaire $j(\omega_2/\omega_1)$.

§ 6. INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE ET CORPS $Q^{(s)}$

Pour utiliser les théorèmes 1_a et 1_b, il faut connaître le type de transcendance de certaines extensions de $\boldsymbol{Q}$ de type fini, et c'est là un problème difficile d'approximation diophantienne [10]. Nous allons remplacer, sous certaines hypothèses (concernant les fonctions $f_1, \ldots, f_d$, et non le corps K) cette condition par une autre moins restrictive, en particulier dans le cas des extensions de $\boldsymbol{Q}$ de degré de transcendance 1. En effet, dans ce cas, on connait un critère de transcendance valable pour tout nombre complexe et qui peut parfois remplacer l'inégalité (4.1) (voir [6], [8], [10], [17], [18]).

On définit alors un corps $\boldsymbol{Q}^{(s)}$ comme étant une extension de $\boldsymbol{Q}$ vérifiant un critère d'indépendance algébrique introduit par analogie:

DÉFINITION 1. *Soient q un entier positif, s un réel, $x_1, \ldots, x_q$ des nombres complexes. On dira que $(x_1, \ldots, x_q)$ vérifie $(\mathfrak{T}_s)$ si les conditions suivantes sont réalisées:*

Il existe $q+1$ suites $(\sigma_{0,n}), \ldots, (\sigma_{q,n})$ strictement croissantes de nombres réels, tendant vers l'infini avec n, et il existe un nombre a supérieur à 1, tels que

$$\sigma_{j,n} \leqslant \sigma_{0,n}; \quad \sigma_{j,n+1} \leqslant a\sigma_{j,n} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant q \text{ et tout } n;$$

il existe un nombre réel k (ne dépendant que de $a, x_1, \ldots, x_q$ et s) et, pour tout n, un polynôme $P_n \in \boldsymbol{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ non nul, de hauteur inférieure ou égale à $\exp \sigma_{0,n}$ et de degré par rapport à X_i inférieur à $\sigma_{i,n}$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$, tels que

$$\operatorname{Log}|P_n(x_1, \ldots, x_q)| < -k\Big(\prod_{i=0}^{q} \sigma_{i,n}\Big)^{(s+1)/(q+1)}.$$

DÉFINITION 2. *Soit K un sous-corps de $\boldsymbol{C}$ de degré de transcendance q supérieur ou égal à 1 sur $\boldsymbol{Q}$, et s un nombre réel. On dira que K est un corps $\boldsymbol{Q}^{(s)}$ s'il existe une base de transcendance de K sur $\boldsymbol{Q}$ ne vérifiant pas la condition $(\mathfrak{T}_s)$.*

Les propriétés essentielles des corps $\boldsymbol{Q}^{(s)}$ sont exposées dans [18] (§ 6, remarques 1 et 2 p. 302; il faut supprimer la remarque 3). En particulier, un corps K est un corps $\boldsymbol{Q}^{(1)}$ si et seulement si K est une extension de $\boldsymbol{Q}$ de degré de transcendance 1 ([6], [18]).

L'intérêt de cette définition dans le cas de la fonction exponentielle est dû à la possibilité de majorer le nombre de zéros dans un disque du plan complexe de fonctions du type

$$z \mapsto \sum_{i=1}^{l} P_i(z) e^{\omega_i z};$$

Ceci permet de vérifier l'hypothèse $\sigma_{j,n+1} \leqslant a\sigma_{j,n}$ dans la définition de la condition $(\mathfrak{T}_s)$.

Nous allons voir que c'est là la seule propriété particulière de la fonction exponentielle utilisée dans la démonstration.

Notations et hypothèses communes aux théorèmes 2_a et 2_b.

Soient:

1. $q_1, \ldots, q_d$ *des nombres entiers* $0 = q_0 \leqslant q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_d = q$;

2. $s, \gamma, \varrho_1, \ldots, \varrho_d, \varrho_1', \ldots, \varrho_d', r_1, \ldots, r_d, r_1', \ldots, r_d', a_1, \ldots, a_d, a_1', \ldots$ $\ldots, a_d', b, b', C, \lambda, \lambda', \mu, \mu'$ *des nombres réels, vérifiant:*

$$s \geqslant 0; \; C > 0; \; \gamma \geqslant 1; \; (0,0) \leqslant (r_i, r_i') \leqslant (\varrho_i, \varrho_i'), \; 1 \leqslant i \leqslant d;$$

$$(\lambda, \lambda') \geqslant (\mu, \mu') > (0, 0);$$

$$(a_i, a_i') \geqslant (0, 0); \; (b, b') \geqslant (0, 0); \; a_1 + \ldots + a_d = b + \mu\varrho;$$

$$a_1' + \ldots + a_d' = b' + \mu'.$$

On définit ϱ, ϱ', r, r' *par:*

$$\varrho = \frac{\varrho_1 + \ldots + \varrho_d}{d}; \; \varrho' = \frac{\varrho_1' + \ldots + \varrho_d'}{d}; \; r = \frac{r_1 + \ldots + r_d}{d}; \; r' = \frac{r_1' + \ldots + r_d'}{d};$$

3. $x_1, \ldots, x_q$ *des nombres complexes ne vérifiant pas la condition* $(\mathfrak{T}_s)$;

4. K_i *une extension algébrique de* $\boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_{q_i})$, $1 \leqslant i \leqslant d$;

5. $f_1, \ldots, f_d$ *des fonctions méromorphes, algébriquement indépendantes sur le compositum* $K = K_1 \ldots K_d$, *d'ordre inférieur ou égal à* $(\varrho_1, \varrho_1'), \ldots$ $\ldots, (\varrho_d, \varrho_d')$ *respectivement;*

6. (S_n, T_n) *une suite pondérée relative aux corps* $K_1, \ldots, K_d$ *et aux fonctions* $f_1, \ldots, f_d$, *de densité supérieure au moins égale à* $(\lambda\varrho, \lambda')$ *et de densité inférieure au plus égale à* $(\mu\varrho, \mu')$.

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées.

7. $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} (a_i + \gamma\varrho_i) < \lambda\varrho + b$;

8. $\max\limits_{z \in S_n} \deg(f_i(z)) \ll n^{r_i}(\operatorname{Log} n)^{r_i'}, \; 1 \leqslant i \leqslant d$;

9. *pour tout polynôme non nul* $P_n \in K[X_1, \ldots, X_d]$, *de degré* $D_{i,n}$ *par rapport à* X_i, *avec*

$$D_{i,n} \ll n^{a_i}(\operatorname{Log} n)^{a_i'}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d,$$

la fonction $F_n = P_n(f_1, \ldots, f_d)$ *possède la propriété suivante: l'un des nombres* $F_n^{(k)}(z)$, *pour* $0 \leqslant k \leqslant n^{\gamma b}(\operatorname{Log} n)^{b'}$ *et* $z \in S_{[Cn^\gamma]}$, *est non nul.*

Nous verrons que l'on peut généralement remplacer l'hypothèse 7 par $s > 0$; la condition: $(a_i, a_i') \geqslant (0, 0)$ et $(b, b') \geqslant (0, 0)$ sera discutée au § 10. Enfin, quand nous utiliserons l'hypothèse 9, nous connaîtrons un majorant Y_n de la taille des coefficients du polynôme P_n; ainsi, pour le théorème 2_a, nous aurons

$$Y_n \ll \max_{1\leqslant i\leqslant d}\{n^{a_i+\varrho_i}(\operatorname{Log} n)^{a_i'+\varrho_i'}\},$$

tandis que pour le théorème 2_b, nous aurons

$$Y_n \ll \max_{1\leqslant i\leqslant d}\{n^{a_i+\varrho_i}(\operatorname{Log} n)^{a_i'+\varrho_i'}\}+n^{b+\varrho_*}(\operatorname{Log} n)^{b'+\varrho_*'}.$$

Théorème 2_a. *On suppose $b = b' = 0$. Alors on a:*

$$(6.1)\qquad \frac{q+1}{s+1}(\lambda\varrho, 1+\lambda') \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant d}\{(a_i+\gamma\varrho_i, a_i'+\varrho_i')\}+ \\ +\sum_{h=1}^{d}(q_h-q_{h-1})\max_{h\leqslant k\leqslant d}\{(a_k+\gamma r_k, a_k'+r_k')\}.$$

Remarque 6.1. Choisissons

$$a_i = \frac{\mu+\gamma d}{d}\varrho-\gamma\varrho_i, \quad \text{et} \quad a_i' = \frac{\mu'}{d}+\varrho'-\varrho_i'.$$

La conclusion (6.1) devient:

$$d(\lambda, 1+\lambda') \leqslant (s+1)(\mu+\gamma d, \mu'+d\varrho'),$$

l'hypothèse 7, pouvant s'écrire: $s > 0$.

C'est le seul cas dans lequel nous utiliserons le théorème 2_a.

En particulier, quand $d > s+1$, $\lambda' = \mu' = 0$, $\varrho' \leqslant 1/d$, on obtient les théorèmes 1′ et 2′ de [20].

Théorème 2_b. *Sous les hypothèses 1, ..., 9 précédentes, on suppose que la suite pondérée (S_n, T_n) est spéciale; soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d, \varrho_*, \varrho_*'$ les nombres associés; on définit r_* et r_*' par:*

$$(r_*, r_*') = \max_{\varepsilon_i=1}(r_i, r_i') \ \text{si} \max_{1\leqslant i\leqslant d}\varepsilon_i = 1; \quad \text{et } (r_*, r_*') = (0, 1) \text{ si } \varepsilon_i = 0 \\ \text{pour } i = 1, \ldots, d.$$

Si $(\varrho_*, \varrho_*') < (\lambda\varrho, \lambda')$, alors on a:

$$(6.2)\quad \frac{q+1}{s+1}(\lambda\varrho+b, \lambda'+b'+1) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant d}\{(a_i+\gamma\varrho_i, a_i'+\varrho_i'); (\varrho_*\gamma+b, \varrho_*'+b')\} \\ +\sum_{h=1}^{d}(q_h-q_{h-1})\max_{h\leqslant k\leqslant d}\{(a_k+\gamma r_k, a_k'+r_k'); (b+\gamma\varepsilon_k r_*, b'+\varepsilon_k r_*')\}.$$

Chaque fois que nous utiliserons le théorème 2_b, nous choisirons:

$$r_i = \varrho_i \quad \text{et} \quad a_i = \frac{(\mu+\gamma d)\varrho-\gamma\varrho_*}{d-1}-\gamma\varrho_i, \quad \text{d'où } b = \frac{(\mu+\gamma d)\varrho-\gamma d\varrho_*}{d-1}.$$

Quand $s > 0$, la condition 7 est vérifiée, et on a $\lambda\varrho > \varrho_*$.

Remarque 6.2. Si, de plus, on choisit $a_i' = \dfrac{\mu'+d\varrho'-\varrho_*'}{d-1}-\varrho_i'$, la conclusion devient:

$$(d-1)(\lambda, \lambda') \leqslant s(\mu+\gamma d, \mu'+d\varrho'-1)+(d-s-1)\left(\frac{\gamma\varrho_*}{\varrho}, \varrho_*'-1\right).$$

On obtient alors le théorème 3′ de [20], où il faut lire $\gamma = 1$ au lieu de $\lambda = 1$, et où il faut:

— ou bien supposer que la dérivation opère sur le K-espace vectoriel $Kf_1+\ldots+Kf_d$, et que, pour tout $k \geqslant 0$, et $1 \leqslant i \leqslant d$, la fonction $f_i^{(k)}$ est d'ordre arithmétique inférieur ou égal à (ϱ_i, ϱ_i') sur (S_n);

— ou bien supposer $\varrho_1 = \ldots = \varrho_d$ et remplacer la conclusion par $\lambda(d-1) < \lambda'+2d-2$.

Remarque 6.3. Supposons $(\varrho_*, \varrho_*') = (0, 1)$, $r_i = \varrho_i$ et $r_i' \geqslant \varrho_i'-1$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$; choisissons

$$a_i = \frac{\mu+\gamma d}{d-1}\varrho-\gamma\varrho_i; \qquad a_i' = \frac{\mu'+dr'}{d-1}-r_i'.$$

La conclusion devient:

$$(d-1)(\lambda, \lambda') \leqslant s\left(\mu+\gamma d, \mu'+dr'+(d-1)\frac{s-q}{s(q+1)}\right).$$

Remarque 6.4. Si on remplace l'hypothèse 3 par la suivante:

III. *$x_1, \ldots, x_q$ sont des nombres complexes algébriquement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$, et il existe une extension L de $\boldsymbol{Q}$ de type de transcendance inférieur ou égal à τ, telle que $\boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)$ soit une extension de L de degré de transcendance 1;*

alors la conclusion (6.1) du théorème 2_a devient:

$$\frac{1}{\tau}(\lambda\varrho, 1+\lambda') \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant d}\{(a_i+\gamma\varrho_i, a_i'+\varrho_i')\}+\max_{1\leqslant k\leqslant d}\{(a_k+\gamma r_k, a_k'+r_k')\},$$

et la conclusion (6.2) du théorème 2_b devient:

$$\frac{1}{\tau}(\lambda\varrho+b, 1+\lambda') \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant d}\{(a_i+\gamma\varrho_i, a_i'+\varrho_i'); (\gamma\varrho_*+b, \varrho_*'+b')\}+ \\ +\max_{1\leqslant k\leqslant d}\{(a_k+\gamma r_k, a_k'+r_k'); (b+\gamma\varepsilon_k r_k, b'+\varepsilon_k r_*')\}.$$

La démonstration de cette remarque utilise un théorème de Brownawell sur les suites d'approximations diophantiennes dans un corps $Q(x_1, \ldots, x_q)$, où $x_1, \ldots, x_q$ vérifient la condition III.

§ 7. APPLICATION À L'INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DES VALEURS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Une condition difficile à vérifier pour utiliser les théorèmes 2_a et 2_b est la condition 9, concernant les zéros de la fonction $F = P(f_1, \ldots, f_d)$. Ceci n'a pas encore été fait dans le cas $d_3 \geqslant 1$ pour les fonctions de la proposition 1; cependant, dans le cas où les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ sont des sommes polynômiales d'exponentielles:

$$f_i\colon\ z \mapsto \sum_{j=1}^{l} P_{i,j}(z)\exp(w_j z), \quad \text{où} \quad P_{i,j} \in C[X] \text{ et } w_j \in \boldsymbol{C},$$

on peut majorer le nombre de zéros de la fonction F dans un disque de $\boldsymbol{C}$, grâce au résultat suivant dû à Tijdeman [17] (voir aussi [18], lemme 3):

LEMME 7.1. *Soient $A_{k,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant q,\ 1 \leqslant k \leqslant p)$ des nombres complexes non tous nuls, et a_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ des nombres complexes deux à deux distincts. Soit $\Delta = \max_{1 \leqslant j \leqslant q} |a_j|$. Le nombre de zéros de la fonction*

$$z \mapsto \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} A_{k,j} z^{k-1}\exp(a_j z),$$

comptés avec leur ordre de multiplicité, dans le disque $|z| \leqslant R$, est inférieur ou égal à

$$3pq + 4R\Delta.$$

Grâce à ce résultat, les théorèmes 2_a et 2_b admettent le

COROLLAIRE 1 ([18]). *Soient $X_1, \ldots, X_N$ (resp. $Y_1, \ldots, Y_M$) des nombres complexes $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants, et soit K un corps $\boldsymbol{Q}^{(s)}$, $s \geqslant 1$. Si les MN nombres*

$$\exp(X_i Y_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant M,$$

appartiennent à K, alors $MN < (s+1)(M+N)$;

si, de plus, les nombres Y_j $(1 \leqslant j \leqslant M)$ appartiennent à K, alors $(M-1)N < s(M+N)$; enfin, si les nombres

$$X_i,\ Y_j,\ \exp(X_i Y_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant M,$$

appartiennent tous à K, alors $MN \leqslant s(M+N)$.

Le corollaire 1 contient en particulier des résultats de Gel'fond [8], Lang [11], Smelev, Tijdeman [17], Brownawell [5] et Waldschmidt [18].

Les principales conséquences concernant le cas $s = 1$ (c'est-à-dire le cas où K est une extension de $\boldsymbol{Q}$ de degré de transcendance 1) sont exposés dans [17].

Démonstration du corollaire 1. On pourrait utiliser la proposition 1 avec $d_3 = 0$, mais il est aussi simple d'expliciter les ensembles S_n et T_n que nous utilisons.

On choisit $K_1 = \ldots = K_d = K$, $q_1 = q_d = q$, $\gamma = 1$, $T_n = S_n$, $r'_i = \varrho'_i$, $r_i = \varrho_i$.

a) La relation $MN < (s+1)(M+N)$ se déduit du théorème 2_a, grâce à la remarque 6.1 avec

$$f_j(z) = \exp(Y_j z),\ 1 \leqslant j \leqslant d = M, \qquad S_n = \{u_1 X_1 + \ldots + u_N X_N|\ 1 \leqslant u_i \leqslant n\}.$$

Comme $(\varrho_j, \varrho'_j) = (1, 0)$, on a

$$(\lambda, \lambda') = (\mu, \mu') = (N, 0), \quad \text{et} \quad \lambda d < (s+1)(\mu + d).$$

b) On peut démontrer la relation $(M-1)N < s(M+N)$ de deux manières différentes:

– ou bien en utilisant le théorème 2_a et la remarque 6.1, avec

$$f_1(z) = z, \quad (\varrho_1, \varrho'_1) = (0, 1);$$

$$f_i(z) = \exp(X_{i-1} z), \quad (\varrho_i, \varrho'_i) = (1, 0), \quad 1 < i \leqslant d = N+1;$$

$$S_n = \{u_1 Y_1 + \ldots + u_M Y_M|\ 1 \leqslant u_j \leqslant n\};$$

$$\varrho = N/(N+1), \quad \varrho' = 1/(N+1), \quad \lambda = \mu = M(N+1)/N, \quad \lambda' = \mu' = 0.$$

Comme il n'y a pas de restriction à supposer $N > s$, on en déduit $M(N+1) < (s+1)(M+N)$.

– ou bien en utilisant le théorème 2_b et la remarque 6.2, avec:

$$f_j(z) = \exp(Y_j z), \quad 1 \leqslant j \leqslant d = M,$$

$$S_n = \{u_1 X_1 + \ldots + u_N X_N|\ 1 \leqslant u_i \leqslant n\}; \quad \lambda = \mu = N, \quad \lambda' = \mu' = \varrho' = 0.$$

c) La relation $MN \leqslant s(M+N)$ se déduit du théorème 2_b et de la remarque 6.2 quand on choisit par exemple;

$$f_1(z) = z, \quad (\varrho_1, \varrho'_1) = (\varepsilon, 0);$$

$$f_j(z) = \exp(Y_{j-1} z), \quad (\varrho_j, \varrho'_j) = (1, 0), \quad 1 < j \leqslant d = M+1;$$

$$S_n = \{u_1 X_1 + \ldots + u_N X_N|\ 1 \leqslant u_i \leqslant n\}; \quad \lambda = \mu = N(M+1)/(M+\varepsilon).$$

La relation que l'on obtient: $MN < s(M+N) + s\varepsilon$ est vraie pour tout ε positif, d'où le résultat (il suffit même de choisir $\varepsilon = 1/s$ si s est entier).

Remarque 7.1. La remarque 6.4 montre qu'on peut remplacer, dans le corollaire 1, l'hypothèse "K est un corps $\boldsymbol{Q}_s$" par la condition "il existe une extension L de $\boldsymbol{Q}$, de type de transcendance inférieur ou égal à $(s+1)/2$, telle que K soit une extension de L de degré de transcendance 1".

Les résultats que l'on obtient ainsi sont les théorèmes 3, 4, et 5 de [5].

Le théorème 2_b admet également le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2 ([7], [19]). *Soient X_1, X_2 (resp. Y_1, Y_2) des nombres complexes $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants. Si les deux nombres*

$$e^{X_1Y_1},\ e^{X_2Y_1}$$

sont algébriques, alors deux des nombres

$$X_1,\ X_2,\ Y_1,\ Y_2,\ e^{X_1Y_2},\ e^{X_2Y_2}$$

sont algébriquement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$.

Le corollaire 2 contient en particulier la transcendance de chacun des nombres suivants (pour $r\in\boldsymbol{Q}$ et $P\in\boldsymbol{Q}[X, Y]$, P non constant):

$$e^{e^r}+ie^{e^{2r}};\ e^{\pi^r}+ie^{\pi^{2-r}};\ \operatorname{Log}\pi+i\exp\left(\frac{\pi^2}{\operatorname{Log}\pi}\right);\ e^{\pi^2}+iP(e, \pi).$$

D'autres conséquences du corollaire 2 sont exposées dans [7] et [19].

Démonstration du corollaire 2. Ici encore on peut effectuer la démonstration de deux manières différentes.

a) La première méthode, qui est celle de [7] et [19], consiste à utiliser la remarque 6.3 avec:

$$f_1(z) = e^{X_1z},\quad f_2(z) = e^{X_2z},\quad f_3(z) = z;$$

$$K = K_1 = K_2 = K_3 = \boldsymbol{Q}(X_1, X_2, Y_1, Y_2, e^{X_1Y_1}, e^{X_1Y_2}, e^{X_2Y_1}, e^{X_2Y_2});$$

$$S_n = T_n = \{u_1Y_1+u_2Y_2|\ 1\leqslant u_1\leqslant n,\ 1\leqslant u_2\leqslant n(\operatorname{Log}n)^{-1}\}.$$

Les différent paramètres prennent les valeurs suivantes:

$$(\varrho_1, \varrho_1') = (\varrho_2, \varrho_2') = (1, 0);\quad (\varrho_3, \varrho_3') = (0, 1);$$
$$(\varrho, \varrho') = (2/3, 1/3);\quad \lambda = \mu = 3;\quad \lambda' = \mu' = -1,$$
$$(r_1, r_1') = (r_2, r_2') = (1, -1);\quad (r_3, r_3') = (0, 0);$$
$$(r, r') = (2/3, -2/3);\quad \gamma = s = q = 1.$$

On obtient ainsi

$$(d-1)(\lambda, \lambda') = (6, -2)$$

et

$$s\left(\mu+\gamma d,\ \mu'+dr'+(d-1)\frac{s-q}{s(q+1)}\right) = (6, -3).$$

b) On peut également utiliser les fonctions

$$f_1(z) = \exp(Y_1z);\quad f_2(z) = \exp(Y_2z);\quad f_3(z) = z,$$

avec:

$$K_1 = \boldsymbol{Q}(\exp X_1Y_1; \exp X_2Y_1);$$

$$K_2 = K_3 = \boldsymbol{Q}(X_1, X_2, Y_1, Y_2, \exp X_1Y_2, \exp X_2Y_2);$$

$$S_n = T_n = \{u_1X_1+u_2X_2|\ 1\leqslant u_1\leqslant n,\ 1\leqslant u_2\leqslant n\}.$$

On obtient comme valeurs des paramètres:

$$(\varrho_1, \varrho_1') = (\varrho_2, \varrho_2') = (r_1, r_1') = (r_2, r_2') = (1, 0);$$
$$(\varrho_3, \varrho_3') = (0, 1);\quad (r_3, r_3') = (0, 0);$$
$$d = 3;\quad (\varrho, \varrho') = (2/3, 1/3);\quad (\lambda, \lambda') = (\mu, \mu') = (3, 0);$$
$$q_1 = 0,\quad s = q_2 = q_3 = q = \gamma = 1;$$

On choisit alors par exemple: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_1' = \frac{1}{2}$, $a_2' = a_3' = -\frac{3}{4}$, d'où $b = 2$, $b' = -1$. Le premier membre de la relation (6.2) est égal à $(4, 0)$, et le deuxième à $(2, \frac{1}{2})+(2, -\frac{3}{4})$. La relation (6.2) n'étant pas vérifiée, le degré de transcendance de K sur $\boldsymbol{Q}$ est supérieur à 1.

Remarque 7.2. Soit n un entier positif. Notons $M_n(\boldsymbol{C})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\boldsymbol{C}$, et $\mathrm{Gl}_n(\boldsymbol{C})$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $M_n(\boldsymbol{C})$.

Soit $\varphi: t\mapsto(\varphi_{i,j}(t))$ un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{Gl}_n(\boldsymbol{C})$ de dimension algébrique d. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $\varphi'(0)$, et $a_1, \ldots, a_\delta$ une base du sous-$\boldsymbol{Z}$-module de $\boldsymbol{C}$ engendré par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit Ω_1 un sous-corps de $\boldsymbol{C}$ algébriquement clos tel que $\varphi'(0)\in M_n(\Omega_1)$. Si $\varphi'(0)$ est diagonalisable, alors

$$\Omega_1[\{\varphi_{i,j}(t)\}] = \Omega_1[\exp(a_1t), \ldots, \exp(a_\delta t)],\quad \textit{donc } d = \delta.$$

Sinon,

$$\Omega_1[\{\varphi_{i,j}(t)\}] = \Omega_1[t, \exp(a_1t), \ldots, \exp(a_\delta t)],\quad \textit{donc } d = \delta+1.$$

D'autre part, soit $\gamma\in\boldsymbol{C}$ tel que $\lambda_i\neq\lambda_j$ entraîne $\exp\lambda_i\gamma\neq\exp\lambda_j\gamma$. Si Ω_2 est un sous-corps de $\boldsymbol{C}$ algébriquement clos tel que $\varphi(\gamma)\in\mathrm{Gl}_n(\Omega_2)$, alors

$$\Omega_2[\{\varphi_{i,j}(t)\}]\subset\Omega_2[t/\gamma, \exp(a_1t), \ldots, \exp(a_\delta t)].$$

De plus, si $d = \delta$, alors

$$\Omega_2[\{\varphi_{i,j}(t)\}] = \Omega_2[\exp(a_1t), \ldots, \exp(a_\delta t)].$$

Cette remarque permet d'énoncer sous forme de propriétés de sous-groupes à un paramètre dans un groupe linéaire les résultats classiques de transcendance ([10], [11]). On peut également traduire le théorème de Lindemann–Weierstrass sur l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle en des points algébriques, ou encore la conjecture de Schanuel.

Ici, le corollaire 1 peut s'énoncer, grâce aux remarques 5.1 et 7.1 (cf. [18]):

COROLLAIRE 3. *Soient s un nombre réel positif, K un sous-corps algébriquement clos de C, vérifiant une des propriétés suivantes:*

— *K a un type de transcendance sur Q inférieur ou égal à $s+1$;*

— *K est un corps $Q^{(s)}$;*

— *il existe une extension L de Q, de type de transcendance inférieur ou égal à $\frac{s+1}{2}$, telle que K soit une extension de L de degré de transcendance 1.*

Soient G un groupe linéaire sur K, et $\varphi\colon C \to G_C$ un sous-groupe à un paramètre de G de dimension algébrique d. Soit Γ un sous-groupe de C contenant m éléments Q-linéairement indépendants, tel que $\varphi(\Gamma) \subset G_K$.

Alors $md < (s+1)(m+d)$.

De plus, si $\Gamma \subset K$, alors $md < (s+1)(m+d-1)$;

si $\varphi'(0) \in G_K$, alors $md < (s+1)m+sd$;

si $\Gamma \subset K$ et $\varphi'(0) \in G_K$, alors $md \leqslant (s+1)m+s(d-1)$.

§ 8. DÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DES VALEURS DE FONCTIONS ANALYTIQUES DANS UN DISQUE

Les théorèmes que nous avons vus précédemment concernaient des fonctions méromorphes dans C; on peut obtenir des propriétés analogues pour des fonctions méromorphes dans un disque; pour simplifier, nous nous bornerons, dans ce paragraphe, à l'étude de fonctions analytiques dans un tel disque. Les énoncés que nous obtiendrons seront valables quelle que soit la valuation de Ξ; nous étudierons dans le paragraphe suivant les conséquences de ces résultats dans le cas où la valuation est ultramétrique. Examinons ici le cas $\Xi = C$.

Plusieurs critères de dépendance algébrique de fonctions complexes $f_1, \ldots, f_d$ analytiques en un même point ω ont été obtenus par Schneider, Içen et Hilliker [9]; si les fonctions considérées prennent des valeurs algébriques en une suite (z_n) de points convergeant suffisamment rapidement vers ω, il suffit que l'on connaisse une bonne majoration de la hauteur $H(f_i(z_n))$ et du degré $[Q(f_i(z_n)):Q]$ pour en déduire la dépendance algébrique, sur le corps $\overline{Q}$ des nombres algébriques, des fonctions $f_1, \ldots, f_d$. En particulier, pour $d=2$ et $f_1(z) = z$, on déduit de ces énoncés des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction analytique en un point soit algébrique au sens arithmétique.

Nous allons étendre certains de ces résultats aux extensions de Q de type de transcendance inférieur ou égal à τ, en considérant le cas plus général où la suite (z_n) possède un ou plusieurs points d'accumulation, et nous améliorerons ces résultats dans le cas où les fonctions étudiées satisfont une équation différentielle. On pourrait de plus formuler les analogues aux théorèmes 2_a et 2_b. Enfin nous nous limiterons au cas où tous les nombres $f_i(z_n)$ appartiennent à une même extension de Q de type fini; on peut étendre ces résultats au cas où les nombres $f_i(z_n)$ sont tous algébriques sur une extension K de Q de type fini, à condition de majorer convenablement la croissance des fonctions

$$n \mapsto [K(f_i(z_n)):K] \quad \text{pour} \quad n \to +\infty;$$

(cf. remarque 3.1).

THÉORÈME 3_a. *Soient α, β, τ, R_0 des nombres réels, $0 < \alpha < \beta < 1 \leqslant \tau$, et $R_0 > 0$. On note Δ le disque ouvert de Ξ, de centre 0 et de rayon R_0. Soit K un sous-corps de Ξ, de type fini sur Q et de type de transcendance inférieur ou égal à τ.*

Soient $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions analytiques dans Δ, algébriquement indépendantes sur K, et (z_n) une suite d'éléments de Δ, deux à deux distincts, tels que

$$\limsup_{n\to+\infty} |z_n| < \alpha R_0.$$

On suppose que pour tout $n \geqslant 0$ et $i = 1, \ldots, d$, on a $f_i(z_n) \in K$.

Alors il existe $C > 0$ et $n_0 \geqslant 0$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait:

$$\min_{\nu \geqslant n} \left\{ \frac{\left(\sum_{h=0}^{\nu-1} -\mathrm{Log}\left(\frac{|z_\nu - z_h|}{(\beta-\alpha)R_0}\right)\right)^{d/\tau}}{\prod_{j=0}^{d} \max_{1\leqslant k\leqslant \nu} t(f_j(z_k))} \right\} \leqslant Cn. \tag{8.1}$$

Remarque 8.1. Quand la valuation de Ξ est ultramétrique, on peut remplacer le coefficient $(\beta-\alpha)R_0$ dans (8.1) par αR_0. On déduit alors de (8.1) la relation

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{-d/\tau+1} \prod_{i=1}^{d} \max_{1\leqslant m\leqslant n} t(f_i(z_m)) > 0. \tag{8.2}$$

La relation (8.2) est également une conséquence de (8.1) dans le cas $\Xi = C$ et $\alpha < \frac{1}{3}$.

Remarque 8.2. Quand la suite (z_n) est convergente, la relation (8.1) est plus précise que (8.2); on a en effet ([9], lemme 7):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{Log}|z_n - z_h| = -\infty.$$

Remarque 8.3. Les majorations (8.1) et (8.2) sont effectives. Par exemple, si $\Xi = \mathbf{C}$, K est un corps de nombres, $d = 2$, $f_1(z) = z$ et $(z_n) = (1/n)$, on a le résultat suivant ([9], théorème 1):

$$\limsup \frac{t\big(f_2(1/n)\big)}{n \operatorname{Log} n} \geqslant 1/(20d^3 + 12d^2 - 13d + 2),$$

avec $d = [K:\mathbf{Q}]$.

Remarque 8.4. On peut élargir l'hypothèse sur le type de transcendance de K de la même manière qu'au paragraphe 6 (théorèmes 2_a et 2_b et remarque 6.4), à condition que l'on sache majorer convenablement, pour tout polynôme non nul $P \in K[X_1, \ldots, X_d]$, le nombre $n \geqslant 1$ tel que la fonction $F = P(f_1, \ldots, f_d)$ vérifie:

$$F(z_m) = 0 \quad \text{pour} \quad m < n \quad \text{et} \quad F(z_n) \neq 0.$$

Dans le cas où les fonctions satisfont une équation différentielle, on a le résultat suivant.

Théorème 3_b. *Soient $a, \beta, \tau, a, a', c_1, c_2, R_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_d, \varrho'_1, \ldots, \varrho'_d$ des nombres réels vérifiant:*

$$0 < a < \beta < 1 \leqslant \tau; \quad R_0 > 0; \quad c_1 > 0; \ c_2 > 0; \quad (a, a') \geqslant (1, 0);$$
$$(\varrho_i, \varrho'_i) \geqslant (0, 1) \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

On note Δ le disque non circonférencié de Ξ, de centre 0 et de rayon R_0. Soit (z_n) une suite d'éléments de Δ, deux à deux distincts, tels que

$$(8.3) \qquad \limsup_{n \to +\infty} |z_n| < aR_0 \quad \textit{et} \quad \sum_{m=1}^{n-1} \operatorname{Log}\left(\frac{|z_n - z_m|}{(\beta - a)R_0}\right) \leqslant -c_1 n^a (\operatorname{Log} n)^{a'}.$$

Soient K un sous-corps de Ξ, de type fini et de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbf{Q}$, et $f_{i,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant \nu_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d)$ des fonctions analytiques dans Δ, vérifiant les propriétés suivantes.

1) *Les fonctions $f_{1,1}, \ldots, f_{d,1}$ sont algébriquement indépendantes sur K.*

2) *Pour tout $n \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, \nu_i$ et $i = 1, \ldots, d$, on a $f_{i,j}(z_n) \in K$ avec:*

$$(8.4) \qquad t\big(f_{i,j}(z_n)\big) \leqslant c_2 n^{\varrho_i} (\operatorname{Log} n)^{\varrho'_i}.$$

3) *Il existe une dérivation D sur l'anneau $R = K[f_{i,j}]_{(1 \leqslant j \leqslant \nu_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d)}$, qui opère sur chacun des sous-anneaux $K[f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i}]$, $1 \leqslant i \leqslant d$, et telle que pour tout $g \in R$, $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, l'hypothèse:*

$$D^h g(z_n) = 0 \quad \textit{pour} \quad h = 0, \ldots, k$$

entraîne:

$$d^h/dz^h g(z_n) = 0 \quad \textit{pour} \quad h = 0, \ldots, k.$$

On suppose qu'il existe un prolongement de D à l'anneau $R[z]$ tel que

$$(8.5) \qquad \operatorname{Log} |D^k (z - z_n)^k|_{z = z_n} \ll k \operatorname{Log}(k + n) \quad \textit{pour} \quad k + n \to +\infty.$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant \nu_i$, $1 \leqslant i \leqslant d$, soient $R_{i,j} \in K[X_{i,1}, \ldots, X_{i,\nu_i}]$, tels que

$$Df_{i,j} = R_{i,j}(f_{i,1}, \ldots, f_{i,\nu_i}).$$

Soient $\delta_{i,j}$ le degré total de $R_{i,j}$, et

$$\varepsilon_i = 0 \ \textit{si} \ \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu_i} \delta_{i,j} \leqslant 1; \quad \varepsilon_i = 1 \ \textit{si} \ \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu_i} \delta_{i,j} \geqslant 2;$$
$$(\varrho_*, \varrho'_*) = \max_{l,\, \varepsilon_l = 1} \{(\varrho_l, \varrho'_l)\} \quad \textit{si} \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \varepsilon_i = 1;$$
$$(\varrho_*, \varrho'_*) = (0, 1) \quad \textit{si} \quad \varepsilon_i = 0 \ \textit{pour} \ i = 1, \ldots, d.$$

Alors on a:

$$(d-1)(a, a') \leqslant (\tau - 1)(1 + \varrho_1 + \ldots + \varrho_d,\ \varrho'_1 + \ldots + \varrho'_d) + (d - \tau)(\varrho_*, \varrho'_*).$$

Remarque 8.5. Quand la valuation de Ξ est ultramétrique, on peut remplacer le coefficient $(\beta - a)R_0$ de l'hypothèse (8.3) par aR_0.

D'autre part nous verrons au § 10 comment il est possible de restreindre l'hypothèse (8.5).

Remarque 8.6. Supposons $d > \tau = 1$; la conclusion est alors $(\varrho_*, \varrho'_*) \geqslant (a, a')$. Dans le cas p-adique et $(a, a') = (1, 0)$, ce résultat est dû à Adams ([1], théorème 1 cas 1).

Remarque 8.7. Supposons $d > \tau$ et $(\varrho_*, \varrho'_*) < (1, 0)$. La conclusion est alors $\tau > 1$, donc le degré de transcendance de K sur $\mathbf{Q}$ est supérieur ou égal à 1 (cf. [1], théorème 1 cas 2 et remarque p. 285).

On peut démontrer que dans le cas $d > \tau$ et $(\varrho_*, \varrho'_*) = (0, 1)$, la conclusion $\tau > 1$ reste valable si on remplace l'hypothèse (8.4) par

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} t\big(f_{i,j}(z_n)\big) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d,\ 1 \leqslant j \leqslant \nu_i.$$

Remarque 8.8. Les théorèmes 3_a et 3_b peuvent s'étendre aux fonctions méromorphes dans Δ. Par exemple, pour le théorème 3_b, si $D = d/dz$, la seule hypothèse à ajouter est l'existence de fonctions $h_{i,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant \nu_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d)$, telles que $h_{i,j}$ et $h_{i,j} f_{i,j}$ soient analytiques dans Δ, et que l'on ait:

$$\operatorname{Log} |1/h_{i,j}(z_n)| \leqslant c_3 n^{\varrho_i} (\operatorname{Log} n)^{\varrho'_i} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d,\ 1 \leqslant j \leqslant \nu_i \ \text{et} \ n \geqslant 0.$$

§ 9. PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE FONCTIONS p-ADIQUES

1. Aperçu historique. L'étude de la transcendance de nombres p-adiques a débuté en 1932 avec la démonstration de Mahler de la transcendance de e^a (pour a nombre algébrique p-adique, divisible par p si $p \neq 2$ et par 4 si $p = 2$). Puis, en 1935, Mahler utilisait la méthode de Gel'fond pour démontrer la transcendance de $(\operatorname{Log}\alpha)/(\operatorname{Log}\beta)$ (où α et β sont des nombres algébriques, avec $\alpha \neq 0, 1$, $\beta \neq 0, 1$, $0 < |\alpha-1| \leqslant 1/p$, $0 < |\beta-1| \leqslant 1/p$, $\operatorname{Log}\alpha/\operatorname{Log}\beta \notin \boldsymbol{Q}$, et où Log désigne le logarithme p-adique; si $p = 2$, on suppose de plus $\alpha \neq -1$ et $\beta \neq -1$). En 1940, Veldkamp démontrait de nouveau ce résultat, mais en utilisant la méthode de Schneider.

De la même manière que dans le cas complexe (avec le théorème de Schneider, voir remarque 4.5), les propriétés de transcendance de e^a et a^b peuvent se déduire d'un énoncé général sur les valeurs algébriques de fonctions analytiques algébriquement indépendantes, et vérifiant une équation différentielle à coefficients algébriques. Ceci a été montré par Günther en 1953, Içen en 1957, puis Adams en 1964, qui obtenait de nombreux autres résultats, en particulier l'analogue p-adique de deux théorèmes de Gel'fond, l'un sur l'indépendance algébrique de $a^b, a^{b^2}, \ldots$, l'autre sur une mesure de transcendance de a^b. Enfin, plus récemment, des travaux dans ce domaine ont été faits par Brumer (sur les travaux de Baker) et par Shorey (sur l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle) [16].

Un exposé détaillé a été fait par Adams dans sa thèse (voir [1]); une bibliographie plus récente a été donnée par Lang [10].

Le but de ce paragraphe est d'énoncer les analogues p-adiques des principaux résultats complexes obtenus dans les paragraphes précédents. Nous verrons que d'une manière générale, les énoncés p-adiques sont plus faibles que les énoncés complexes; ceci n'est pas nouveau et avait déjà été remarqué par Adams ([1], p. 280; voir aussi [11] appendice) qui signalait que le problème de la transcendance de $\wp(\alpha)$ pour α algébrique non nul n'était pas résolu dans le cas p-adique (où la fonction $\wp$ est définie par sa série de Laurent dans un voisinage de l'origine). La raison de cet affaiblissement relatif des résultats p-adiques réside dans le fait que les fonctions considérées sont définies localement.

Les démonstrations peuvent se faire en transposant celles du cas complexe, grâce à l'intégrale de Šnirelman ([1], [16]); mais il est souvent plus facile d'utiliser les propriétés spécifiques des fonctions analytiques p-adiques ([2], [15]), et c'est ce second point de vue que nous adopterons.

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que la valuation de Ξ est ultramétrique, et nous désignerons par p la caractéristique résiduelle.

2. Indépendance algébrique et type de transcendance. Le théorème 3_a admet, grâce à la relation (8.2), les corollaires suivants.

COROLLAIRE 1 (Mahler). *Soient α et β deux éléments de Ξ, $\alpha \neq 0$, α non racine de l'unité et β irrationnel, tels que $|\alpha-1| < 1$ et $|\beta \operatorname{Log}\alpha| < p^{-1/(p-1)}$. Alors l'un des trois nombres*

$$\alpha, \ \beta, \ \alpha^\beta$$

est transcendant.

COROLLAIRE 2 (Serre [15] et [11] appendice). *Soient $X_1, \ldots, X_M$ (resp. $Y_1, \ldots, Y_N$) des éléments de Ξ, $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants, tels que*

$$|X_i Y_j| < p^{-1/(p-1)} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant M \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Si $MN > M+N$, alors un au moins des nombres

$$\exp(X_i Y_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant M, \ 1 \leqslant j \leqslant N$$

est transcendant.

On peut également déduire du théorème 3_a des propriétés de transcendance de fonctions $\wp$ (analogues p-adiques des fonctions elliptiques de Weierstrass), définies de la manière suivante.

Soient g_2 et g_3 deux éléments de Ξ; on définit par récurrence une suite (c_n), $n \geqslant 1$, d'éléments de $\boldsymbol{Q}[g_2, g_3]$ par les relations

$$c_1 = \tfrac{1}{20} g_2, \qquad c_2 = \tfrac{1}{28} g_3,$$
$$(n-2)(2n+3)c_n = 3(c_1 c_{n-2} + c_2 c_{n-3} + \ldots + c_{n-2} c_1) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 3.$$

Soit Δ le disque de convergence de la série

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 1} c_n z^{2n}.$$

On vérifie que le rayon de ce disque (qui dépend de g_2, g_3 et p) est non nul. Quand les deux fonctions z et $S(z)$ sont algébriquement indépendantes sur la clôture algébrique $\overline{\boldsymbol{Q}}$ de $\boldsymbol{Q}$ dans Ξ, on note $\wp$ la fonction définie dans $\Delta - \{0\}$ par

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + S(z).$$

Le corollaire suivant est la transcription p-adique d'un résultat de Ramachandra [12] (cf. § 5).

COROLLAIRE 3. *On suppose que les deux nombres g_2 et g_3 sont algébriques sur $\boldsymbol{Q}$. Soient b un élément non nul de Ξ, et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des éléments $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants de Ξ, tels que $b\alpha_1, b\alpha_2$ et $b\alpha_3$ appartiennent à Δ.*

Alors l'un des six nombres

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \wp(b\alpha_1), \ \wp(b\alpha_2), \ \wp(b\alpha_3)$$

est transcendant sur $\boldsymbol{Q}$.

Le théorème 3_b contient également le théorème de Mahler sur la transcendance de a^b, ainsi que le corollaire suivant:

COROLLAIRE 4 (Mahler). *Soit α un nombre algébrique non nul, tel que*

$$|\alpha| < p^{-1/(p-1)}.$$

Alors e^α est transcendant sur $\boldsymbol{Q}$.

3. Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle p-adique. On peut obtenir les analogues p-adiques des résultats obtenus aux paragraphes 6 et 7, après avoir défini l'équivalent p-adique des corps $Q^{(s)}$. De la même manière que dans le cas complexe intervient une hypothèse supplémentaire sur le nombre de zéros d'une fonction $P(f_1, \ldots, f_d)$, où P est un polynôme; pour appliquer ces résultats à la fonction exponentielle, il faut démontrer le résultat de Tijdeman (lemme 7.1) dans le cas p-adique (voir aussi [1], lemme 8 et [16], lemme 2).

LEMME 9.1. *Soient $p_1, \ldots, p_h$ des nombres entiers positifs, $n = p_1 + \ldots + p_h$, $w_1, \ldots, w_h$ des éléments de Ξ deux à deux distincts, tels que $|w_i| < 1/p$ pour tout $i = 1, \ldots, h$; $b_{i,j}$ des éléments de Ξ, non tous nuls $(1 \leqslant j \leqslant p_i,\ 1 \leqslant i \leqslant h)$.*

Le nombre de zéros de la fonction

$$z \mapsto f(z) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{p_i} b_{i,j} z^{j-1} \exp(w_i z),$$

dans le disque $|z| < p^{-2/(p-1)}$ est inférieur à $2n$.

Pour démontrer le lemme 9.1, on procède de la même manière que dans le cas complexe ([17], [18]), mais en utilisant les deux résultats suivants:

LEMME 9.2. *Soit f une fonction analytique dans un disque $|z| < R$ de Ξ, avec $R > 1$. Soit $P \in \Xi[X]$ un polynôme tel que le nombre de zéros de la fonction*

$$z \mapsto f(z) - P(z)$$

dans le disque $|z| < 1$ soit supérieur au degré de P. Alors

$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \leqslant \sup_{|z|=1} |f(z)|.$$

LEMME 9.3. *On désigne par G l'image de Ξ^* dans $\mathbf{R}_+^*$ par l'application $z \mapsto |z|$. Soit f une fonction analytique dans un disque $|z| < R_1$. Soient r et R deux éléments de G, avec $0 < r < R < R_1$; soit σ le nombre de zéros de f dans le disque $|z| \leqslant r$. Pour tout entier $s \geqslant 0$, on a:*

$$\sup_{|z|<r} |f^{(s)}(z)| \leqslant \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} \left(\frac{1}{r}\right)^{s} \sup_{|z|=R} |f(z)|.$$

Le lemme 9.3 permet de majorer une fonction analytique ayant de nombreux zéros. Il est une conséquence immédiate des inégalités de Cauchy [2] et d'un théorème de Mahler [15].

Le lemme 9.1 permet de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 4. *Soient X et Y deux sous-groupes de Ξ, libres de rang supérieur ou égal à N et M respectivement sur $\mathbf{Z}$, et tels que la fonction $z \mapsto \exp z$ converge sur XY. Soient L un sous-corps de Ξ, de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\boldsymbol{Q}$, et K une extension de L de degré de transcendance 1, contenant $\exp(XY)$. Alors*

$$MN \leqslant 2\tau(M+N).$$

Si, de plus, $X \subset K$, alors

$$MN \leqslant 2\tau M + (2\tau - 1)N.$$

Enfin, si $X \subset K$ et $Y \subset K$, alors

$$MN \leqslant (2\tau - 1)(M+N).$$

Dans le cas $\tau = 1$, on déduit de la proposition 4 plusieurs résultats de Shorey [16], en particulier:

COROLLAIRE 1. *Soient α et β des éléments de Ξ, algébriques sur $\boldsymbol{Q}$, $\alpha \neq 0$ n'étant pas racine de l'unité, et β étant irrationnel de degré $r \geqslant 4$. On suppose $|\alpha - 1| < 1$ et $|\beta^l \operatorname{Log} \alpha| < p^{-1/(p-1)}$ pour tout $l = 1, \ldots, r$. Alors deux des nombres*

$$\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^5}$$

sont algébriquement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$.

Cet énoncé améliore un résultat précédent de Adams [1]. Pour $r = 3$, la proposition 4 montre seulement l'indépendance algébrique de deux des nombres

$$\operatorname{Log} \alpha,\ \alpha^{\beta},\ \alpha^{\beta^2}.$$

Parmi les autres conséquences de la proposition 4 dans le cas $\tau = 1$, citons les deux corollaires suivants.

COROLLAIRE 2. *Soient x_1, x_2, x_3 (resp. $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$) des éléments $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants de Ξ, tels que*

$$|x_i y_j| < p^{-1/(p-1)} \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, 3 \ \textit{et}\ j = 1, \ldots, 7.$$

Alors deux des 21 nombres

$$\exp(x_i y_j), \quad i = 1, 2, 3,\ j = 1, \ldots, 7$$

sont algébriquement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$.

COROLLAIRE 3. *Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) des éléments de Ξ, $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants, tels que*

$$|x_i y_j| < p^{-1/(p-1)} \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2 \ \textit{et}\ j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Alors deux des 15 nombres

$$y_j,\ \exp(x_i y_j), \quad i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3, 4, 5$$

sont algébriquement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$.

On déduit du corollaire 3 les deux résultats suivants, analogues au corollaire 5 de [16] et au corollaire 3.2 de [17].

COROLLAIRE 4. *Soient* $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4$ *des éléments de* Ξ, *algébriques sur* $\boldsymbol{Q}$, *tels que:*

$$|a_j - 1| < 1 \quad \text{et} \quad |b_i \operatorname{Log} a_j| < p^{-1/(p-1)} \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ et } j = 1, 2, \text{ avec } b_0 = 1;$$

b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 *sont* $\boldsymbol{Q}$-*linéairement indépendants, de même que* $\operatorname{Log} a_1$, $\operatorname{Log} a_2$.

Alors deux des huit nombres

$$a_i^{b_j}, \quad i = 1, 2, \ j = 1, 2, 3, 4$$

sont algébriquement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$.

COROLLAIRE 5. *Soient* a_0, a_1 *des nombres algébriques*, $|a_j - 1| < p^{-1/(p-1)}$, $j = 0, 1$, *dont les logarithmes p-adiques sont linéairement indépendants sur* $\boldsymbol{Q}$. *Soit* b *un nombre algébrique de degré supérieur ou égal à* 3 *sur* $\boldsymbol{Q}$, *tel que* $|b| \leqslant 1$. *Alors le degré de transcendance sur* $\boldsymbol{Q}$ *du corps*

$$\boldsymbol{Q}\left(\frac{\operatorname{Log} a_1}{\operatorname{Log} a_0}, a_0^b, a_0^{b^2}, a_1^b, a_1^{b^2}, a_1^{b^3}\right)$$

est supérieur ou égal à 2.

4. Sous-groupes à un paramètre de certaines variétés de groupes. L'analogue p-adique de la proposition 2 § 3 et du corollaire 3 § 7 est donné par les deux propositions suivantes, qui sont une extension de [11], appendice théorème 2.

PROPOSITION 5. *Soient* A *une variété abélienne définie sur le corps* $\overline{\boldsymbol{Q}}$ *des nombres algébriques* (clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}$ dans Ξ), $\varphi\colon \Delta \to A_\Xi$ *un sous-groupe à un paramètre défini dans un disque* Δ *autour de l'origine dans* Ξ, *de dimension algébrique* d, Γ *un sous-groupe de* Ξ, *ayant au moins* m *éléments* $\boldsymbol{Q}$-*linéairement indépendants, et tel que* $\varphi(\Gamma)$ *soit inclus dans le sous-groupe des points algébriques de* A.

Alors on a

$$md \leqslant m + 2d.$$

PROPOSITION 6. *Soient* $\tau \geqslant 1$ *un nombre réel*, Ω *un sous-corps algébriquement clos de* Ξ, G *une variété de groupe linéaire définie sur* Ω, $\varphi\colon \Delta \to G_\Xi$ *un sous-groupe à un paramètre défini dans un disque* Δ *autour de l'origine dans* Ξ, *de dimension algébrique* d, *et* Γ *un sous-groupe de* Ξ, *ayant au moins* m *éléments* $\boldsymbol{Q}$-*linéairement indépendants, tel que* $\varphi(\Gamma)$ *soit contenu dans* G_Ω. *On suppose que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.*

1) Ω *est une extension de* $\boldsymbol{Q}$ *de type de transcendance inférieur ou égal à* τ.

2) Ω *est une extension, de degré de transcendance* 1, *d'un corps de type de transcendance inférieur ou égal à* $\tau/2$ *sur* $\boldsymbol{Q}$ $(\tau \geqslant 2)$.

Alors

$$md \leqslant \tau(m + d).$$

De plus, si $\Gamma \subset \Omega$, *on a*

$$md \leqslant \tau(m + d - 1);$$

si $\varphi'(0) \in G_\Omega$, *on a*

$$md \leqslant \tau m + (\tau - 1)d;$$

si $\varphi'(0) \in G_\Omega$ *et* $\Gamma \subset \Omega$, *on a*

$$md \leqslant \tau m + (\tau - 1)(d - 1).$$

§ 10. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES

Dans ce paragraphe, nous énoncerons un résultat général (théorème A) dont nous montrerons qu'il contient les théorèmes 1_a et 1_b (§ 4), 2_a et 2_b (§ 6), 3_a et 3_b (§ 8). Puis nous démontrerons le théorème A.

1. Enoncé du théorème A. Le résultat suivant est une extension du théorème 3 de [13].

THÉORÈME A. *Soient*

1. Ξ *un corps algébriquement clos, de caractéristique nulle, complet pour une valeur absolue.*

2. K *un sous-corps de* Ξ, *de type fini sur* $\boldsymbol{Q}$, *et* $(x_1, \ldots, x_q, y)$ *un système générateur de* K *sur* $\boldsymbol{Q}$; *on note* A *l'anneau* $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$.

3. R_0 *un nombre, réel ou* $+\infty$, *et* Δ *le disque non circonférencié de* Ξ, *de centre* 0 *et de rayon* R_0 (*avec* $\Delta = \Xi$ *si* $R_0 = +\infty$).

4. $(w_1, \ldots, w_m, \ldots)$ *et* $(\omega_1, \ldots, \omega_\mu, \ldots)$ *deux suites d'éléments de* Δ; *pour* $m \geqslant 1$ (*resp.* $\mu \geqslant 1$), *on note* $z_0, \ldots, z_{k_m}$ (*resp.* $\zeta_0, \ldots, \zeta_{\varkappa_\mu}$) *les éléments distincts de l'ensemble* $\{w_1, \ldots, w_m\}$ (*resp.* $\{\omega_1, \ldots, \omega_\mu\}$), *et* $s_0^{(m)}+1, \ldots, s_{k_m}^{(m)}+1$ (*resp.* $\sigma_0^{(\mu)}+1, \ldots, \sigma_{\varkappa_\mu}^{(\mu)}+1$) *leur ordre de multiplicité; on a ainsi les égalités suivantes dans* $\Xi[X]$:

$$(X - w_1)\ldots(X - w_m) = \prod_{k=0}^{k_m} (X - z_k)^{s_k^{(m)}+1};$$

$$(X - \omega_1)\ldots(X - \omega_\mu) = \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa_\mu} (X - \zeta_\varkappa)^{\sigma_\varkappa^{(\mu)}+1}.$$

5. $\theta, V_1, \ldots, V_d$ *des applications de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{Z}$, *non décroissantes, telles que*

$$V_1(m) \ldots V_d(m) = 2m \quad \textit{pour tout } m \geqslant 1.$$

6. $f_1, \ldots, f_d$ *des fonctions méromorphes dans* Δ, *algébriquement indépendantes sur* K, *sans pôle aux points* w_m.

7. $h_1, \ldots, h_d$ *des fonctions analytiques dans* Δ, *sans zéros aux points* ω_μ, *telles que les fonctions* $h_i f_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ *soient analytiques dans* Δ.

8. D *une dérivation sur le corps des fonctions méromorphes dans* Δ, *telle que*

$$D^s f_i(z_k) \in K \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d,\ 0 \leqslant s \leqslant s_k^{(m)},\ 0 \leqslant k \leqslant k_m,\ m \geqslant 1;$$

on suppose que pour tout $m \geqslant 1$, *si* g *est une fonction, méromorphe dans* Δ *et analytique en* w_m, *alors* Dg *est analytique en* w_m.

On suppose que pour tout polynôme $P \in K[X_1, \ldots, X_d]$, *la fonction* $F = P(f_1, \ldots, f_d)$ *possède les deux propriétés* 9 *et* 10 *suivantes.*

9. *Si* $F \neq 0$, *l'un des nombres*

$$\frac{d^\sigma}{dz^\sigma} F(\zeta_\varkappa), \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_\varkappa^{(\mu)}, \quad 0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_\mu,\ \mu \geqslant 1,$$

est non nul.

10. *Si, pour un entier* $m \geqslant 1$, *on a*

$$D^s F(z_k) = 0 \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant s_k^{(m)},\ 0 \leqslant k \leqslant k_m,$$

alors, pour $\mu = \theta(m)$, *on a*

$$\frac{d^\sigma}{dz^\sigma} F(\zeta_\varkappa) = 0 \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_\varkappa^{(\mu)},\ 0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_\mu.$$

L'hypothèse 8 *montre que les nombres*

$$D^s(f_1^{\lambda_1} \ldots f_d^{\lambda_d})(z_k) = \sum_{\mu_1 + \ldots + \mu_d = s} \frac{s!}{\mu_1! \ldots \mu_d!} D^{\mu_1} f_1^{\lambda_1}(z_k) \ldots D^{\mu_d} f_d^{\lambda_d}(z_k),$$

pour

$$0 \leqslant s \leqslant s_k^{(m)},\ 0 \leqslant k \leqslant k_m, \quad 0 \leqslant \lambda_i < V_i(m),\ 1 \leqslant i \leqslant d,\ m \geqslant 1,$$

appartiennent à K. *Soient* $u_{s,k}^{(m)}$ $(0 \leqslant s \leqslant s_k^{(m)},\ 0 \leqslant k \leqslant k_m,\ m \geqslant 1)$ *des éléments non nuls de* A, *tels que*

$$u_{s,k}^{(m)} D^s(f_1^{\lambda_1} \ldots f_d^{\lambda_d})(z_k) \in A \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant \lambda_i < V_i(m),\ 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Pour $m' \geqslant m \geqslant 1$, *on note:*

$$T(m, m') = \max_{s,k,(\lambda)} \{t[u_{s,k}^{(m')} D^s(f_1^{\lambda_1} \ldots f_d^{\lambda_d})(z_k)]\} + \operatorname{Log} m;$$

$$\Delta_h(m, m') = \max_{s,k,(\lambda)} \{\deg_{x_h}[u_{s,k}^{(m')} D^s(f_1^{\lambda_1} \ldots f_d^{\lambda_d})(z_k)]\}, \quad 1 \leqslant h \leqslant q,$$

où $\max\limits_{s,k,(\lambda)}$ *est le maximum sur l'ensemble*

$$\{0 \leqslant s \leqslant s_k^{(m')},\ 0 \leqslant k \leqslant k_{m'},\ (\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d),\ 0 \leqslant \lambda_i < V_i(m),\ 1 \leqslant i \leqslant d\}.$$

Conclusion: Il existe une suite $(P_m)_{m \geqslant 1}$ *de polynômes de* $A[X_1, \ldots, X_d]$, *de degré par rapport à* X_i *inférieur à* $V_i(m)$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$, *et dont les coefficients ont une taille* $\leqslant T(m, m)$ *et un degré* $\leqslant \Delta_h(m, m)$ *par rapport à* x_h $(1 \leqslant h \leqslant q)$, *telle que la suite de fonctions* $F_m = P_m(f_1, \ldots, f_d)$ *possède la propriété suivante. Soit* m' *le plus petit entier positif pour lequel il existe des entiers* t *et* l *vérifiant*

$$0 \leqslant t \leqslant s_l^{(m')}; \quad 0 \leqslant l \leqslant k_m; \quad D^t F_m(z_l) \neq 0.$$

Alors on a $m \leqslant m' < +\infty$, *et:*

$$t\big(u_{t,l}^{(m')} D^t F_m(z_l)\big) \leqslant T(m, m'); \tag{10.1}$$

$$\deg_{x_h}\big(u_{t,l}^{(m')} D^t F_m(z_l)\big) \leqslant \Delta_h(m, m'), \quad 1 \leqslant h \leqslant q. \tag{10.2}$$

Enfin, si la propriété

$$\frac{d^\tau}{dz^\tau} F_m(z_l) = 0 \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t-1$$

est vérifiée, alors pour tout réel R, *avec*

$$\max_{1 \leqslant \nu \leqslant \theta(m'-1)} \{|\omega_\nu|, |z_l|\} < R < R_0,$$

on a:

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}|D^t F_m(z_l)| + \operatorname{Log}\frac{|Q|_R}{|Q(z_l)|} \leqslant T(m, m) + \operatorname{Log}|D^t(z-z_l)^t|_{z=z_l} + \\ + t \operatorname{Log}\left(\frac{1}{R-|z_l|}\right) + \sum_{i=1}^d V_i(m) \operatorname{Log}\left(|h_i|_R + |h_i f_i|_R + \frac{1}{|h_i(z_l)|}\right), \end{aligned} \tag{10.3}$$

où

$$Q(X) = \prod_{\substack{0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_\mu \\ \zeta_\varkappa \neq z_l}} (X - \zeta_\varkappa)^{\sigma_\varkappa(\mu)+1} \quad \textit{et} \quad \mu = \theta(m'-1).$$

Remarque 10.1. L'hypothèse 9 est vérifiée en particulier dans chacun des deux cas suivants.

1 er cas:

$$\limsup_{\mu\to+\infty} |\omega_\mu| < R_0;$$

en effet, une fonction non nulle analytique dans Δ n'a qu'un nombre fini de zéros dans un disque $|z| < R$ pour $R < R_0$.

2 ème cas:

$$R_0 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{R\to+\infty} \frac{\max\{\operatorname{Log}|h_i|_R, \operatorname{Log}|h_i f_i|_R\}}{\operatorname{Card}\{\nu \geqslant 1;\ |\omega_\nu| < R\}} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Dans ce cas, en effet, si v_i est le degré par rapport à X_i du polynôme P, la fonction

$$H = \prod_{i=1}^{d} h_i^{v_i} F$$

est analytique dans Δ, et le nombre N_R de zéros de F dans un disque $|z| \leqslant R$ vérifie:

$$N_R \ll \operatorname{Log}|H|_R \ll \max_{1\leqslant i\leqslant d} \{\operatorname{Log}|h_i f_i|_R, \operatorname{Log}|h_i|_R\} \quad \text{pour} \quad R \to +\infty.$$

Remarque 10.2. Les constantes $\ll$ qui interviennent dans les relations (10.1), (10.2) et (10.3) sont indépendantes de m et R, et sont effectivement calculables.

Remarque 10.3. Si (w_m) est une sous-suite de la suite (ω_μ), alors la condition

$$\frac{d^\tau}{dz^\tau} F_m(z_l) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t-1$$

est une conséquence de l'hypothèse 10 et de la minimalité de m'.

Remarque 10.4. Dans les applications du théorème A, le choix de R se fera toujours de telle manière que la majoration (10.3) se réduise à

$$\operatorname{Log}|D^t F_m(z_l)| \ll -\operatorname{Log}\frac{|Q|_R}{|Q(z_l)|}.$$

2. Conséquences du théorème A. Nous allons montrer comment on peut déduire les théorèmes 1, 2 et 3 du théorème A.

Démonstration du théorème 3_a. On choisit $z_{i-1} = w_i = \omega_i = \zeta_{i-1}$, $i \geqslant 1$; $s_k^{(m)} = \sigma_\varkappa^{(\mu)} = 0$, d'où $k_m = m-1$, $\varkappa_\mu = \mu-1$. On définit les fonctions $V_1(m), \ldots, V_d(m)$ par les relations

$$V_i(m) \max_{1\leqslant h\leqslant m} t(f_i(z_h)) \gg \ll m^{1/d} \prod_{j=0}^{d} \max_{1\leqslant k\leqslant m} \big(t(f_j(z_k))\big)^{1/d},$$

les constantes $\gg \ll$ étant choisies de telle manière que $V_1(m), \ldots, V_d(m)$ soient entiers, et $V_1(m) \ldots V_d(m) = 2m$ pour $m \geqslant 1$.

Soit $\Pi_{i,k}$ le dénominateur (par rapport au système générateur $(x_1, \ldots, x_q, y)$) de $f_i(z_k)$ $(1 \leqslant i \leqslant d,\ k \geqslant 0)$. Pour $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $m \geqslant 1$, on pose:

$$u_{0,k}^{(m)} = \prod_{i=1}^{d} \Pi_{i,k}^{V_i(m)}.$$

De la relation

$$t(f_i(z_k)) = \max\{t(\Pi_{i,k}),\ t(\Pi_{i,k} f_i(z_k))\},$$

on déduit

$$T(m, m') \ll m^{1/d} \prod_{j=0}^{d} \max_{1\leqslant k\leqslant m'} \big(t(f_j(z_k))\big)^{1/d}.$$

La condition 9 est vérifiée, comme le montre la remarque 10.1. Pour utiliser la majoration (10.3), on choisit deux nombres réels R_1 et R vérifiant

$$\sup_{m\geqslant 1} |z_m| \leqslant R_1 < R < R_0.$$

Le choix de $V_i(m)$ montre que l'on a:

$$V_i(m) \ll T(m, m), \quad m \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant d.$$

On obtient ainsi

$$\operatorname{Log}|F_m(z_l)| \ll \sup_{|z|=R} \sum_{i=1}^{m'-1} \operatorname{Log}\left|\frac{w_{m'} - w_i}{z - w_i}\right| + T(m, m), \tag{10.4}$$

la constante $\ll$ dépendant de R (mais non de m).

Comme on peut supprimer les premiers termes de la suite (z_n) sans modifier l'énoncé du théorème 3_a, nous pouvons supposer $R_1 < \alpha R_0$ et choisir $R = \beta R_0$. Ainsi

$$|z - w_i| > (\beta - \alpha) R_0.$$

La relation (4.2) et le théorème A montrent que pour tout entier n assez grand, il existe $\nu \geqslant n$ tel que

$$n \prod_{j=1}^{d} \max_{1\leqslant k\leqslant \nu} t(f_j(z_k)) \gg \left[\sum_{h=0}^{\nu-1} -\operatorname{Log}\frac{|z_\nu - z_h|}{(\beta-\alpha)R_0}\right]^{d/\tau}.$$

Dans le cas où la valuation de Ξ est ultramétrique, la relation (10.4) s'écrit:

$$\operatorname{Log}|F_m(z_l)| \ll \sum_{i=1}^{m'-1} \operatorname{Log}\frac{|w_{m'} - w_i|}{R} + T(m, m).$$

Pour démontrer la remarque 8.1, on choisit $R = \alpha R_0$.

Démonstration du théorème 3_b. Soit (z_n) la suite donnée par l'énoncé du théorème 3_b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose:

$$s_n = [n^{(1+d\varrho-d\varrho_*)/(d-1)}(\operatorname{Log} n)^{(d\varrho'-d\varrho'_*)/(d-1)}],$$

$$m_n = (n+1)(s_n+1); \quad k_{m_n} = n; \quad s_k^{(m_n)} = s_n, \quad 0 \leqslant k \leqslant k_{m_n},$$

avec

$$\varrho = (\varrho_1+\ldots+\varrho_d)/d \quad \text{et} \quad \varrho' = (\varrho'_1+\ldots+\varrho'_d)/d.$$

On définit la suite (w_m) par récurrence sur m; supposons $w_1, \ldots, w_m$ définis; soit $n \geqslant 1$ tel que

$$m_{n-1} \leqslant m < m_n;$$

on définit alors $w_{m+1}, \ldots, w_{m_n}$ de telle manière que l'on ait

$$(X-w_1)\ldots(X-w_{m_n}) = \prod_{k=0}^{n}(X-z_k)^{s_n+1}.$$

On choisit ensuite:

$$\zeta_k = z_k, \quad \omega_m = w_m, \quad \theta(m) = m,$$

et

$$V_i(m) \gg \ll [n^{\frac{1+d\varrho-\varrho_*}{d-1}-\varrho_i}(\operatorname{Log} n)^{\frac{d\varrho'-\varrho'_*}{d-1}-\varrho'_i}], \quad 1 \leqslant i \leqslant d,\ m_{n-1} < m \leqslant m_n.$$

Précisons que les valeurs de s_n et $V_i(m)$ ont été choisies de telle manière que l'on ait:

$$V_1(m)\ldots V_d(m) \gg \ll m,$$

et

$$V_i(m_n)n^{\varrho_i}(\operatorname{Log} n)^{\varrho'_i} \gg \ll s_n n^{\varrho_*}(\operatorname{Log} n)^{\varrho'_*}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

D'après le lemme 3.1, si on note $\varDelta_{i,k}$ $(1 \leqslant i \leqslant d,\ 0 \leqslant k \leqslant k_m,\ m \geqslant 1)$ le produit des dénominateurs de $f_{i,1}(z_k), \ldots, f_{i,\nu_i}(z_k)$, on peut définir $u_{s,k}^{(m)}$ par

$$u_{s,k}^{(m)} = \prod_{i=1}^{d} \varDelta_{i,k}^{V_i(m)+s\delta_i}.$$

Les relations (3.2) et (8.4) montrent que l'on a

$$T(m, m') \ll V_i(m)n'^{\varrho_i}(\operatorname{Log} n')^{\varrho'_i} + s_{n'}n'^{\varrho_*}(\operatorname{Log} n')^{\varrho'_*}$$
$$\ll n'^{\frac{1+d\varrho-\varrho_*}{d-1}}(\operatorname{Log} n')^{\frac{d\varrho'-\varrho'_*}{d-1}}, \quad \text{pour} \quad m_{n'-1} < m' \leqslant m_{n'}.$$

On utilise alors la majoration (10.3) avec $R = \beta R_0$ (de la même manière que pour la remarque 8.1, on choisirait $R = \alpha R_0$ si on voulait démontrer la remarque 8.5).

On obtient ainsi, grâce à (8.3):

$$\operatorname{Log}|D^l F_m(z_l)| \leqslant -s_{n'}n'^{a}(\operatorname{Log} n')^{a'} + T(m, m), \quad \text{si} \quad m_{n'-1} < m' \leqslant m_{n'}.$$

Remarquons que l'hypothèse (8.5) sert uniquement à assurer la relation

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{0\leqslant k\leqslant s_n} \frac{|D^k(z-z_n)^k|_{z=z_n}}{s_n n^a(\operatorname{Log} n)^{a'}} = 0.$$

D'autre part, la conclusion du théorème 3_b étant vérifiée quand $(a, a') \leqslant (\varrho_*, \varrho'_*)$, on peut supposer $(a, a') > (\varrho_*, \varrho'_*)$, d'où

$$\operatorname{Log}|D^l F_m(z_l)| \leqslant -s_{n'}n'^{a}(\operatorname{Log} n')^{a'},$$

et la relation (4.2) permet de conclure:

$$\tau\left(\frac{1+d\varrho-\varrho_*}{d-1}, \frac{d\varrho'-\varrho'_*}{d-1}\right) \geqslant \left(\frac{1+d\varrho-d\varrho_*}{d-1}+a,\ \frac{d\varrho'-d\varrho'_*}{d-1}+a'\right).$$

Démonstration des théorèmes 1_a, 1_b, 2_a, et 2_b. Pour n'avoir à effectuer qu'une seule démonstration, nous introduisons les notations suivantes.

Pour obtenir le théorème 1_a, on pose:

$$(a_i, a'_i) = \left(\frac{\mu}{d}\varrho+\varrho-\varrho_i,\ \frac{\mu'}{d}+\varrho'-\varrho'_i\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant d; \quad (b, b') = (0, 0).$$

Pour obtenir le théorème 1_b, on pose

$$(a_i, a'_i) = \left(\frac{(\mu+d)\varrho-\varrho_*}{d-1}-\varrho_i,\ \frac{\mu'+d\varrho'-\varrho'_*}{d-1}-\varrho'_i\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant d;$$

$$(b, b') = \left(\frac{(\mu+d)\varrho-d\varrho_*}{d-1},\ \frac{\mu'+d\varrho'-d\varrho'_*}{d-1}\right).$$

On pourra ainsi utiliser les notations des théorèmes 2_a et 2_b, en supposant

$$q_1 = \ldots = q_d = q, \quad r_i = \varrho_i, \quad r'_i = \varrho'_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \quad \tau = s+1, \quad \gamma = 1.$$

Remarquons que sous les hypothèses du théorème 2_a ou 2_b par exemple, il existe un sous-corps L de Ξ de type fini sur $\boldsymbol{Q}$, tel que (S_n, T_n) soit une suite pondérée relative aux corps $K_1 \cap L, \ldots, K_d \cap L$. En considérant, pour $1 \leqslant j \leqslant d$, le compositum $(K_1 \cap L)\ldots(K_j \cap L)$, on se ramène au cas où K_j est une extension algébrique finie de $\boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_{a_j})$, pour $j = 1, \ldots, d$, et $K_i \subset K_{i+1}$, pour $1 \leqslant i < d$. Montrons qu'il n'y a pas de restriction à supposer $(a_i, a'_i) > (0, 0)$ pour tout $i = 1, \ldots, d$, et $(b, b') \geqslant (0, 0)$.

En effet, si, pour un entier u, $1 \leqslant u \leqslant d$, on a: $(a_u, a'_u) \leqslant (0, 0)$, on pose:

$$\bar{d} = d-1; \quad \bar{\varrho} = (d\varrho - \varrho_u)/(d-1); \quad \bar{\lambda} = \lambda\varrho/\bar{\varrho}; \quad \bar{\mu} = \mu\varrho/\bar{\varrho};$$

$$\bar{a}_i = a_i + a_u/(d-1); \quad \bar{a}'_i = a'_i + a'_u/(d-1), \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \ i \neq u;$$

$$\bar{q}_i = q_i \quad \text{pour} \quad i \neq u, \quad \text{et} \quad \bar{q}_u = q_{u-1}; \quad \bar{s} = (s+1)(\bar{q}_{\bar{d}}+1)/(q+1)-1;$$

On remarque alors que, si K_d est un corps $\boldsymbol{Q}^{(s)}$, alors $K_{\bar{d}}$ est un corps $\boldsymbol{Q}^{(\bar{s})}$. On constate ainsi qu'il suffit que l'on démontre le résultat pour les $d-1$ fonctions f_i, $1 \leqslant i \leqslant d$, $i \neq u$. On se ramène ainsi par récurrence au cas où $(a_i, a'_i) > (0, 0)$ pour tout $i = 1, \ldots, d$.

Si $(b, b') \leqslant (0, 0)$, le théorème 1_b (resp. 2_b) est une conséquence du théorème 1_a (resp. 2_a).

Enfin, dans la démonstration du théorème 1_b, nous supposerons $\tau > 1$, et $\lambda < \mu + d$, les autres cas étant résolus soit par le théorème de Schneider (§ 3.3), soit par le théorème 1_a.

Nous effectuerons la démonstration par l'absurde: sous les hypothèses précédentes, on suppose que la relation suivante est vérifiée:

pour le théorème 1_a dans le cas $\tau = 1$:

$$d(\lambda, \lambda') > (\mu + d, \mu' + d\varrho');$$

pour le théorème 1_a, dans le cas $\tau > 1$, et pour le théorème 2_a:

$$\frac{q+1}{s+1}(\lambda\varrho, 1+\lambda') > \max_{1 \leqslant i \leqslant d}\{(a_i + \gamma\varrho_i, a'_i + \varrho'_i)\} + \sum_{h=1}^{d}(q_h - q_{h-1}) \max_{h \leqslant k \leqslant d}\{(a_k + \gamma r_k, a'_k + r'_k)\};$$

pour les théorèmes 1_b et 2_b,

$$\frac{q+1}{s+1}(\lambda\varrho + b, \lambda' + b' + 1) > \max_{1 \leqslant i \leqslant d}\{(a_i + \gamma\varrho_i, a'_i + \varrho'_i); (\gamma\varrho_* + b, \varrho'_* + b')\} + \sum_{h=1}^{d}(q_h - q_{h-1}) \max_{h \leqslant k \leqslant d}\{(a_k + \gamma r_k, a'_k + r'_k); (b + \gamma\varepsilon_k r_*, b' + \varepsilon_k r'_*)\}.$$

Nous voulons obtenir une contradiction.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose:

$$s_n = [n^b(\mathrm{Log}\, n)^{b'}] - 1; \quad m_n = (s_n+1)\,\mathrm{Card}\, T_n; \quad k_{m_n} = \mathrm{Card}\, T_n - 1;$$

$$s_k^{(m_n)} = s_n = \sigma_\varkappa^{(\mu_n)}, \quad 0 \leqslant k \leqslant k_{m_n}, \ 0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_{\mu_n};$$

$$\mu_n = (s_n+1)\,\mathrm{Card}\, S_n, \quad \text{et} \quad \varkappa_{\mu_n} = \mathrm{Card}\, S_n - 1.$$

Ceci permet de définir une suite (ω_μ), et une sous-suite (w_m), telles que

$$\prod_{j=1}^{\mu_n}(X - \omega_j) = \prod_{z \in S_n}(X - z)^{s_n+1}, \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{m_n}(X - w_i) = \prod_{z \in T_n}(X - z)^{s_n+1}.$$

On considère une application θ non décroissante de $\boldsymbol{N}$ dans $\boldsymbol{N}$, vérifiant

$$\theta(m) = \mu_{n-1} \quad \text{pour} \quad m_{n-1} < m \leqslant m_n, \quad n \geqslant 1.$$

Soit

$$V_i(m) \gg\ll n^{a_i}(\mathrm{Log}\, n)^{a'_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \quad m_{n-1} < m \leqslant m_n.$$

En notant $\Delta_{i,k}$ $(1 \leqslant i \leqslant d,\ 0 \leqslant k \leqslant k_m,\ m \geqslant 1)$ le produit des dénominateurs de $f_{i,1}(z_k), \ldots, f_{i,\nu_i}(z_k)$ (avec $\nu_i = 1$ pour les théorèmes 1_a et 2_a), on peut choisir

$$u_{s,k}^{(m)} = \prod_{i=1}^{d} \Delta_{i,k}^{V_i(m) + s\delta_i};$$

on aura ainsi, pour $m_{n'-1} < m' \leqslant m_{n'}$:

— pour les théorèmes 1_a et 2_a:

$$T(m, m') \ll \max_{1 \leqslant i \leqslant d}\{V_i(m)n'^{\varrho_i}(\mathrm{Log}\, n')^{\varrho'_i}\},$$

$$\Lambda_h(m, m') \ll \max_{j \leqslant i \leqslant d}\{V_i(m)n'^{r_i}(\mathrm{Log}\, n')^{r'_i}\}, \quad q_{j-1} < h \leqslant q_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant d;$$

— pour les théorèmes 1_b et 2_b:

$$T(m, m') \ll \max_{1 \leqslant i \leqslant d}\{V_i(m)n'^{\varrho_i}(\mathrm{Log}\, n')^{\varrho'_i}\} + s_n n'^{\varrho_*}(\mathrm{Log}\, n')^{\varrho'_*},$$

$$\Lambda_h(m, m') \ll \max_{j \leqslant i \leqslant d}\{V_i(m)n'^{r_i}(\mathrm{Log}\, n')^{r'_i} + s_n n'^{\varepsilon_i r_*}(\mathrm{Log}\, n')^{\varepsilon_i r'_*}\}, \quad q_{j-1} < h \leqslant q_j.$$

Etudions les conséquences de la relation (10.3).

Soit n' le nombre entier tel que $m_{n'-1} < m' \leqslant m_{n'}$, et n tel que $m_{n-1} < m \leqslant m_n$.

Pour le théorème 1_a dans le cas $\tau = 1$, on a par hypothèse

$$(a_i + \varrho_i, a'_i + \varrho'_i) = \left(\left(\frac{\mu}{d} + 1\right)\varrho, \frac{\mu'}{d} + \varrho'\right) < (\lambda\varrho, \lambda').$$

Si on choisit $R \gg\ll n'$, on obtient

(10.5) $$\mathrm{Log}\,|D^t F_m(z_l)| \ll -n'^{\lambda\varrho}(\mathrm{Log}\, n')^{\lambda'}.$$

Notons que les seules propriétés de la fonction Logarithme utilisées dans ce cas sont bien celles indiquées dans la remarque 4.3.

Dans tous les autres cas, on choisit un nombre $\varepsilon > 0$ (indépendant de m) vérifiant:

$$\varepsilon \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \varrho_i + \max_{1 \leqslant i \leqslant d}\{a_i + \varrho_i\} < \lambda\varrho + b.$$

Ceci est permis par l'hypothèse 7 pour les théorèmes 2_a et 2_b, par les conditions

$$\lambda d \geqslant \tau(\mu+d) \quad \text{et} \quad \tau > 1$$

pour le théorème 1_a, et par les relations

$$\lambda\varrho + \frac{(\mu+d)\varrho - d\varrho_*}{d-1} \geqslant \tau\frac{(\mu+d)\varrho-\varrho_*}{d-1} \quad \text{et} \quad \tau > 1$$

(qui entraînent $\lambda\varrho > \varrho_*$) pour le théorème 1_b.

On choisit ensuite

$$R \gg \ll n'^{1+\varepsilon},$$

de telle manière que l'on ait

$$-\mathrm{Log}\frac{|Q|_R}{|Q(z_l)|} \ll -n'^{\lambda\varrho+b}(\mathrm{Log}\, n')^{\lambda'+b'+1}.$$

On majore le terme $T(m, m)$, dans la relation (10.3), en utilisant l'hypothèse $(\lambda\varrho, \lambda') > (\varrho_*, \varrho'_*)$ pour les théorèmes 1_b et 2_b, et on obtient la relation

$$\mathrm{Log}\,|D^t F_m(z_l)| \ll -n'^{\lambda\varrho+b}(\mathrm{Log}\, n')^{\lambda'+b'+1}. \tag{10.6}$$

On obtient alors les théorèmes 1_a ($\tau \geqslant 1$) et 1_b par une application immédiate des relations (4.2), (10.1), (10.5) et (10.6).

Pour démontrer les théorèmes 2_a et 2_b, on remarque que la relation (10.6) entraîne

$$\mathrm{Log}\,|D^t F_m(z_l)| \ll -n^{\lambda\varrho+b}(\mathrm{Log}\, n)^{\lambda'+b'+1}, \quad \text{car } n \leqslant n'.$$

On utilise le lemme 2.2 pour construire un élément non nul π_m de $A_0 = \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$, et vérifiant

$$\mathrm{Log}\,|\pi_m| \ll -n^{\lambda\varrho+b}(\mathrm{Log}\, n)^{\lambda'+b'+1},$$

$$t(\pi_m) \ll T(m, m'), \quad \deg_{x_h}(\pi_m) \ll \Delta_h(m, m');$$

de plus, l'hypothèse 9 des théorèmes 2_a et 2_b peut s'écrire: $n' \ll n^\gamma$.

On obtient ainsi une contradiction avec la définition des corps $Q^{(s)}$.

3. Résolution d'un système d'équations linéaires. Le lemme suivant, qui repose sur un lemme de Siegel (voir par exemple [7], [8], [11], [14]), permet de résoudre un système d'équations linéaires homogènes à coefficients dans une extension de $\boldsymbol{Q}$ de type fini.

Lemme 10.1. *Soient K une extension de $\boldsymbol{Q}$ de type fini, $(x_1, \ldots, x_q, y)$ un système générateur de K sur $\boldsymbol{Q}$, A l'anneau $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$. Il existe deux constantes h_1 et h_2 positives ayant la propriété suivante.*

Soient n et r deux nombres entiers, $n \geqslant 2r > 0$, et $a_{i,j}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant r$) des éléments de A.

Il existe des éléments $X_1, \ldots, X_n$, non tous nuls de A, tels que

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j}X_i = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant r);$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} t(X_i) \leqslant h_1 \max_{i,j} t(a_{i,j}) + \mathrm{Log}\, n;$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \deg_{x_h} X_i \leqslant h_2 \max_{i,j}(1+\deg_{x_h} a_{i,j}), \quad 1 \leqslant h \leqslant q.$$

Démonstration du lemme 10.1. Nous désignerons par $h_1, \ldots$ des constantes, effectivement calculables, ne dépendant que de $x_1, \ldots, x_q, y$.

Soient $A_0 = \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$, et $\delta = [K: \boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)]$ le degré de y sur A_0. Ecrivant $X_1, \ldots, X_n$ dans $A = A_0[y]$, nous introduisons les nouvelles inconnues $Y_{i,l}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant \delta$, avec:

$$X_i = \sum_{l=1}^\delta Y_{i,l}y^{l-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

De même, on écrit les coefficients $a_{i,j}$ sous la forme

$$a_{i,j} = \sum_{\lambda=1}^\delta b_{i,j,\lambda}y^{\lambda-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant r,$$

où $b_{i,j,\lambda} \in A_0$.

De la même manière que dans la démonstration du lemme 2.1 (partie a), on définit des éléments $\pi_{u,k}$ de A_0 ($1 \leqslant k \leqslant n$, $u \geqslant 0$) par les relations

$$y^{\delta+u} = \sum_{k=1}^\delta \pi_{u,k}y^{k-1}, \quad u \geqslant 0.$$

Le système d'équations

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j}X_i = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant r,$$

s'écrit alors:

$$\sum_{i=1}^n L_{i,j,k} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant r,\ 1 \leqslant k \leqslant \delta,$$

avec

$$L_{i,j,k} = \sum_{h+l=k+1} b_{i,j,h}Y_{i,l} + \sum_{u=0}^{n-2}\sum_{h+l=\delta+u+2}\pi_{u,k}b_{i,j,h}Y_{i,l},$$

$1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant r$, $1 \leqslant k \leqslant \delta$.

On remarque que les $L_{i,j,k}$ sont des formes linéaires en $Y_{i,l}$, dont les coefficients ont une taille majorée par

$$h_3 \max_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant r} t(a_{i,j}),$$

et un degré par rapport à x_h $(1 \leqslant h \leqslant q)$ majoré par

$$h_3 \max_{i,j}(1+\deg_{x_h} a_{i,j}).$$

On a ainsi multiplié le nombre d'équations et le nombre d'inconnues par δ; il suffit donc que l'on démontre le lemme 10.1 dans le cas $\delta = 1$.

Alors les coefficients $a_{i,j}$ appartiennent à A_0; décomposons — les en utilisant le système générateur $(x_1, \ldots, x_q)$:

$$a_{i,j} = \sum_{l_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{l_q=0}^{d_q-1} a_{i,j,(l)} x_1^{l_1} \ldots x_q^{l_q}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant r,$$

où $(l) = (l_1, \ldots, l_q)$, $a_{i,j,(l)} \in \boldsymbol{Z}$, et $d_k = 1 + \max_{i,j} \deg_{x_k}(a_{i,j})$, $1 \leqslant k \leqslant q$.

On introduit de même les nouvelles inconnues $\xi_{i,(\lambda)} \in \boldsymbol{Z}$, définies par les relations

$$X_i = \sum_{\lambda_1=0}^{h_2 d_1 - 1} \cdots \sum_{\lambda_q=0}^{h_2 d_q - 1} \xi_{i,(\lambda)} x_1^{\lambda_1} \ldots x_q^{\lambda_q}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Le système devient alors:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\lambda_1 + l_1 = A_1} \cdots \sum_{\lambda_q + l_q = A_q} a_{i,j,(l)} \xi_{i,(\lambda)} = 0,$$

pour $0 \leqslant A_k \leqslant (h_2+1) d_k - 1$, $1 \leqslant k \leqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

On obtient un système de $(h_2+1)^q d_1 \ldots d_q r = R$ équations à $h_2^q d_1 \ldots \ldots d_q n = N$ inconnues, à coefficients dans $\boldsymbol{Z}$.

Le lemme de Siegel montre que, si $N > R$, il existe une solution $(\xi_{i,(\lambda)})$ vérifiant

$$\max_{i,(\lambda)} \operatorname{Log} |\xi_{i,(\lambda)}| \leqslant \frac{R}{N-R} (\operatorname{Log} N + T) + 1,$$

avec

$$T = \max_{i,j} t(a_{i,j}).$$

Comme on a supposé $n \geqslant 2r$, il suffit que l'on choisisse

$$h_1 = 3, \quad h_2 = [(\tfrac{3}{2})^{1/q} - 1]^{-1}$$

pour obtenir le résultat.

Remarque 10.5. On a calculé les constantes h_1 et h_2 effectivement dans le cas où K est une extension transcendante pure de $\boldsymbol{Q}$; dans le cas général, ces constantes se calculent à partir du polynôme minimal de y sur $\boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q)$ (c'est-à-dire en fonction des $\pi_{u,k}$).

Notons d'autre part que le lemme 10.1 permet de résoudre, dans l'anneau A, un système d'équations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} X_i = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant r,$$

à coefficients dans K; il suffit pour cela que l'on multiplie la j-ième équation par Π_j, où $\Pi_j \in A$ est tel que

$$\Pi_j a_{i,j} \in A \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant r$$

(cf. [11], ch. I, § 2, lemme 3).

4. Démonstration du théorème A. Supposons les hypothèses du théorème A vérifiées.

1) *Il existe des constantes, indépendantes de m (et désignées par le symbole $\ll$), et, pour tout $m \geqslant 1$, un polynôme non nul $P_m \in A[X_1, \ldots, X_d]$, de degré par rapport à X_i inférieur à $V_i(m)$, et dont les coefficients ont une taille $\ll T(m, m)$ et un degré $\ll \Lambda_h(m, m)$ par rapport à x_h $(1 \leqslant h \leqslant q)$, tel que la fonction $F_m = P_m(f_1, \ldots, f_d)$ vérifie:*

$$D^s F_m(z_k) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant s_k^{(m)},\ 0 \leqslant k \leqslant k_m. \tag{10.7}$$

En effet, rechercher l'existence d'éléments $p(\lambda)$ de A, non tous nuls, vérifiant

$$t\big(p(\lambda)\big) \ll T(m, m); \quad \deg_{x_h}\big(p(\lambda)\big) \ll \Lambda_h(m, m),$$

pour $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, $0 \leqslant \lambda_i < V_i(m)$, $1 \leqslant i \leqslant d$ et $1 \leqslant h \leqslant q$, et tels que la fonction

$$F = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) f_1^{\lambda_1} \ldots f_d^{\lambda_d}$$

vérifie (10.7), revient à résoudre un système de m équations à $V_1(m) \ldots \ldots V_d(m) = 2m$ inconnues, dont les coefficients

$$u_{s,k}^{(m)} D^s (f_1^{\lambda_1} \ldots f_d^{\lambda_d})(z_k)$$

appartiennent à A et ont une taille majorée par $\ll T(m, m)$ et un degré par rapport à x_h majoré par $\ll \Lambda_h(m, m)$.

Le lemme 10.1 donne le résultat.

2) *Il existe un entier $m' \geqslant m$ vérifiant les conditions suivantes. Il existe des entiers t, l tels que*

$$0 \leqslant t \leqslant s_l^{(m')}, \quad 0 \leqslant l \leqslant k_{m'}, \quad \text{et} \quad D^t F_m(z_l) \neq 0. \tag{10.8}$$

Alors le nombre $D^t F_m(z_l)$ vérifie (10.1) *et* (10.2).

Les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ sont algébriquement indépendantes sur K, et le polynôme $P_m \in K[X_1, \ldots, X_d]$ est non nul, donc la fonction F_m n'est pas nulle, et l'hypothèse 9 montre que l'un des nombres

$$\frac{d^\sigma}{dz^\sigma} F_m(\zeta_\varkappa), \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_\varkappa^{(\mu)},\ 0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_\mu,\ \mu \geqslant 1$$

est non nul. L'hypothèse 10 montre alors qu'il existe un entier $m' \geqslant m$ vérifiant (10.6).

Les majorations (10.1) et (10.2) sont des conséquences immédiates des définitions de $T(m, m')$ et $\Lambda_h(m, m')$, et du lemme 2.1.

3) *Soit m' le plus petit entier supérieur ou égal à m, qui vérifie les propriétés* (10.8). *On suppose que l'on a*

$$\frac{d^\tau}{dz^\tau} F_m(z_l) = 0 \quad \textit{pour} \quad \tau = 0, \ldots, t-1.$$

Alors le nombre $D^t F_m(z_l)$ vérifie la relation (10.3).

Soit $\mu = \theta(m'-1)$; d'après la minimalité de m' et l'hypothèse 10, la fonction F_m vérifie

$$\frac{d^\sigma}{dz^\sigma} F_m(\zeta_\varkappa) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_\varkappa^{(\mu)},\ 0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_\mu;$$

donc il existe une fonction entière G_m qui vérifie

$$G_m(z) Q(z)(z-z_l)^t = F_m(z) \prod_{i=1}^{d} h_i(z)^{V_i(m)}, \tag{10.9}$$

où

$$Q(z) = \prod_{\substack{0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_\mu \\ \zeta_\varkappa \neq z_l}} (X - \zeta_\varkappa)^{\sigma_\varkappa(\mu)+1}.$$

Appliquons D^t aux deux membres de (10.9), et étudions la valeur au point z_l. Le premier membre devient

$$G_m(z_l) Q(z_l) D^t(z-z_l)^t_{z=z_l},$$

car on a

$$D^\tau (z-z_l)^t_{z=z_l} = 0 \quad \text{pour} \quad \tau < t,$$

grâce au fait que, si g est analytique en z_l, alors Dg est analytique en z_l.

On effectue la même opération sur le second membre de (10.9), en utilisant la relation

$$D^\tau F_m(z_l) = 0 \quad \text{pour} \quad \tau < t,$$

grâce à la minimalité de m'.

On obtient ainsi:

$$D^t F_m(z_l) = Q(z_l) G_m(z_l) D^t(z-z_l)^t_{z=z_l} \prod_{i=1}^{d} h_i(z_l)^{-V_i(m)}.$$

On utilise ensuite le principe du maximum, pour la fonction G_m, sur le disque $|z| \leqslant R$ (qui contient z_l):

$$\operatorname{Log}|G_m(z_l)| \leqslant \operatorname{Log}|G_m|_R \leqslant \operatorname{Log}\Big| F_m \cdot \prod_{i=1}^{d} h_i^{V_i(m)} \Big|_R - \operatorname{Log}|Q|_R - \operatorname{Log}\big||z-z_l|^t\big|_R.$$

Grâce aux majorations

$$\operatorname{Log}\Big| F_m \prod_{i=1}^{d} h_i^{V_i(m)} \Big|_R \leqslant T(m, m) + \sum_{i=1}^{d} V_i(m) \operatorname{Log}(|h_i|_R + |h_i f_i|_R),$$

et

$$\operatorname{Log} \sup_{|z|=R} |z-z_l|^{-t} \leqslant t \operatorname{Log}\left(\frac{1}{R-|z_l|}\right),$$

on obtient

$$\operatorname{Log}\left(|D^t F_m(z_l)| \frac{|Q|_R}{|Q(z_l)|}\right) \leqslant T(m, m) + \operatorname{Log}|D^t(z-z_l)^t_{z=z_l}| +$$
$$+ t \operatorname{Log}(1/(R-|z_l|)) + \sum_{i=1}^{d} V_i(m) \operatorname{Log}\left(|h_i|_R + |h_i f_i|_R + \frac{1}{|h_i(z_l)|}\right).$$

Le théorème A est donc démontré.

Remarque 10.6. On aurait pu également obtenir la majoration (10.3) en utilisant une formule d'interpolation (voir par exemple [11], ch. VI, § 4, lemmes 6 et 7; dans ce lemme 7, la majoration de $D^r E(z')$ est inexacte, mais elle devient correcte si on remplace le terme $(1/\delta)^{ml}$ par $(2R_1/\delta)^{ml}$, d'autre part, p. 34 et 35 de [11], il faut remplacer les coefficients $1/2i\pi$ par $2i\pi$).

§ 11. PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Nous terminerons cette étude en remarquant que les résultats précédents peuvent s'étendre aux fonctions de plusieurs variables, grâce à la notion de λ-distribution dans le cas complexe (Bombieri, Lang [4]), et à la notion de λ-densité dans le cas p-adique (Serre [15]), qui remplacent, dans la démonstration, le lemme de Schwarz et le principe du maximum (voir la majoration (10.3)). Nous citerons simplement deux exemples, le premier concernant les fonctions de plusieurs variables complexes, le second les fonctions exponentielles p-adiques.

THÉORÈME 4. *Soient K un sous-corps de $\mathbf{C}$, de type fini sur $\mathbf{Q}$ et de type de transcendance inférieur ou égal à τ $(\tau \geqslant 1)$, $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions holomorphes dans une balle B_R de $\mathbf{C}^m$, algébriquement indépendantes sur K. Soit (S_n) une suite de sous-ensembles de B_r (avec $0 < r < R/4$), qui est λ-distribuée dans B_r, telle que l'on ait:*

$$f_i(z) \in K \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d \text{ et } z \in S = \bigcup S_n,$$

et

$$\max_{z \in S_n} t(f_i(z)) \leqslant n^{\varrho_i} \quad \text{pour} \quad n \to +\infty \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Alors

$$2\lambda d \leqslant \tau(2\lambda m + \varrho_1 + \ldots + \varrho_d).$$

Si, de plus, les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ sont entières dans $\mathbf{C}^m$, d'ordre inférieur ou égal à $\varrho_1, \ldots, \varrho_d$ respectivement, et si $\tau > 1$, alors on a l'inégalité stricte:

$$2\lambda d < \tau(2\lambda m + \varrho_1 + \ldots + \varrho_d).$$

Le théorème 1 de [4] correspond à $\tau = 1$, $\varrho_1 = \ldots = \varrho_d$ et $d = m+1$. De la même manière que dans [4], on obtient le corollaire suivant (les théorèmes 2 et 3 de [4] s'en déduisent dans le cas $d = m+1$ et K corps de nombres):

COROLLAIRE. *Soit G une variété de groupe, définie sur un sous-corps algébriquement clos Ω de $\mathbf{C}$, de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbf{Q}$. Soit $\varphi\colon \mathbf{C}^m \to G_{\mathbf{C}}$ un sous-groupe à m paramètres de G, de dimension algébrique $d > \tau m$. Soit Γ un sous-groupe de type fini de $\mathbf{C}^m$, qui est λ-distribué dans une balle B_r.*

On suppose que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:

— G est une variété de groupe linéaire, et on a:

$$\tau > 1, \quad \text{et} \quad \lambda \geqslant \frac{\tau d}{2(d-\tau m)};$$

— G est une variété abélienne, et on a:

$$\tau = 1 \quad \text{et} \quad \lambda > \frac{d}{d-m}.$$

Alors $\varphi(\Gamma)$ n'est pas contenu dans G_Ω.

On peut améliorer le théorème 4 en raffinant la notion de λ-distribution, de la même manière que nous l'avons fait pour la notion d'ordre d'une fonction.

Dans le cas p-adique, on obtient le résultat suivant (qui est une extension du théorème 2 de [15]):

PROPOSITION 7. *On suppose que Ξ a une valeur absolue ultramétrique et une caractéristique résiduelle p.*

Soit K un sous-corps de Ξ, de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbf{Q}$ $(\tau \geqslant 1)$. Soit G un groupe topologique isomorphe à $(\mathbf{Z}_p)^m$, où $\mathbf{Z}_p$ désigne le groupe des entiers p-adiques. Soit A un sous-groupe libre de type fini de G, qui est λ-dense dans G. Soient $e_1, \ldots, e_d$ des homomorphismes continus de G dans Ξ^*, qui convergent sur A, et tels que tous les $e_i(x)$, $x \in A$, appartiennent à K.

Si $d > \tau(\lambda d + m)$, alors les e_i sont multiplicativement dépendants.

Les autres théorèmes que nous avons obtenus peuvent s'étendre de la même manière aux fonctions de plusieurs variables.

Bibliographie

[1] W. W. Adams, *Transcendental numbers in the p-adic domain*, Amer. J. Math. 88 (1966), p. 279–308.
[2] Y. Amice, *Analyse p-adique*, Sem. Delange–Pisot–Poitou, lère année (1959/60) nº 4 (78 p.).
[3] E. Bombieri, *Algebraic values of meromorphic maps*, Inventiones Math. 10 (1970), p. 267–287; 11 (1970), p. 163–166.
[4] — and S. Lang, *Analytic subgroups of group varieties*, Inventiones Math. 11 (1970), p. 1–14.
[5] D. Brownawell, *Some transcendence results for the exponential function*, Norske Vid. Selsk. Skr. 11(1972), 2p.
[6] — *Sequences of diophantine approximations*, J. Number Theory, à paraître.
[7] — *The algebraic independence of certain numbers related to the exponential function*, J. Number Theory, à paraître.
[8] A. O. Gel'fond, *Transcendental and algebraic numbers*, New York 1960.
[9] D. L. Hilliker, *On analytic functions which have algebraic values at a convergent sequence of points*, Trans. Amer. Math. Soc. 126 (1967), p. 534–550.
[10] S. Lang, *Transcendental numbers and diophantine approximations*, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), p. 635–677.
[11] — *Introduction to transcendental numbers*, New York 1966.
[12] K. Ramachandra, *Contributions to the theory of transcendental numbers*, I, Acta Arith. 14 (1968), p. 65–72; II, ibid., p. 73–88.
[13] Th. Schneider, *Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise*, Math. Ann. 121 (1949), p. 131–140.
[14] — *Introduction aux nombres transcendants*, Paris 1959.
[15] J. P. Serre, *Dépendance d'exponentielles p-adiques*, Sém. Delange–Pisot–Poitou, 7è année (1965/66) nº 15 (14 p.).

[16] T. N. Shorey, *Algebraic independence of certain numbers in p-adic domain*, Indag. Math. 34 (1972), p. 423–435 (Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 75).
[17] R. Tijdeman, *On the algebraic independence of certain numbers*, Indag. Math. 33 (1971), p. 146–162 (Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 74).
[18] M. Waldschmidt, *Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle*, Bull. Soc. Math. France 99 (1971), p. 285–304.
[19] — *Solution du huitième problème de Schneider*, J. Number Theory, à paraître.
[20] — *Propriétés arithmétiques de fonctions méromorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 273 (1971), p. 544–547.
[21] A. Weil, *Variétés kählériennes*, Paris 1958.

U. E. R. DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
Talence, France

Reçu le 15. 2. 1972 (255)

ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Prime k-th power non-residues

by

RICHARD H. HUDSON (Durham, North Carolina)

1. Introduction and summary. Throughout this paper k will denote an integer $\geqslant 2$ and p will be a prime such that $(k, p-1) = v_k(p) > 1$. We denote the nth prime kth power non-residue by $g_n(p, k)$, $n = 1, 2, \ldots$

We attack the problem of finding an upper bound for $g_2(p, k)$ from several vantage points and we consider, in addition, the case $n > 2$.

A large number of authors have given upper bounds for $g_1(p, k)$ under varying hypotheses.

Burgess [6] has shown that for each $\delta > 0$,

$$g_1(p, 2) = O_\delta(p^{1/(4e^{1/2})+\delta}). \tag{1.1}$$

In order to avoid any misunderstanding regarding the nature of our O-estimates, we will always use the notation O_δ to indicate an implied constant depending at most on δ, while O will indicate an absolute constant.

Wang Yuan [18] generalized the method of Burgess. Namely, for each $\delta > 0$, he has shown that

$$g_1(p, k) = O_\delta(p^{(1/(4e^{v-1/v}))+\delta}) \tag{1.2}$$

for every $v = v_k(p) \geqslant 2$,

$$g_1(p, k) < p^{1/12} \tag{1.3}$$

if $v_k(p) \geqslant 21$, and

$$g_1(p, k) < p^{(\log\log v+2)/4\log v} \tag{1.4}$$

if $v = v_k(p) > e^{33}$.

Wang's results (1.2), (1.3), and (1.4), essentially halve the exponent in the upper bounds for $g_1(p, k)$ given by Buchstab [5] and independently by Davenport and Erdös [8].

K. K. Norton [15] has recently generalized the above results by omitting the restriction that p be prime.

Employing analytic methods, Hua [10] and Erdös and Ko [9], have given upper bounds for $g_2(p, 2)$. In particular, Hua has shown that for each $p \geqslant e^{250}$,

$$g_2(p, 2) < (57600\, p)^{5/16}. \tag{1.5}$$