

### 三相鉄共振回路の概周期振動

#### Quasi-Periodic Oscillations in a Three Phase Ferro-Resonant Circuit

田所睦雄・山崎俊洋・小森宏一

東京電機大学, 東京都千代田区神田錦町 2-2 (〒101)

M. Tadokoro, T. Yamazaki and K. Komori

Tokyo Denki Univ., 2-2, Kanda-Nishikicho, Chiyoda-ku, Tokyo, 101

When a three-phase voltage is applied to ferro-resonant circuits connected in a Y-connection, the third harmonics voltage can be obtained in the zero-phase-sequence circuit.

Usually, the waveform of this voltage is almost sinusoidal and the oscillation is stable, but under some conditions the voltage changes to a state of quasi-periodic oscillations. This paper deals with the analysis of the mechanism of the quasi-periodic oscillations in a three-phase ferro-resonant circuits.

#### 1. ま え が き

星形に接続した鉄共振回路に三相電圧を印加すると、その零相回路に電源の周波数に対して三倍周波の電圧が発生する。通常、この電圧は正弦波に近く、かつ安定しているが、ある条件によりその周期性を失い概周期振動となる。

本文では、三相鉄共振回路に発生するこの概周期振動の発生機構の解析について報告する。

#### 2. 理 論

##### 2.1 回路方程式

三相鉄共振回路の構成を Fig. 1 に示す。電源は三相平衡電源とし、図中の  $r$  は巻線の抵抗を意味する。また、各相のリアクトルの磁化特性は次のような三次式で近似できるものとする。

$$n_1 i_k + n_2 i_0 = \alpha \phi_k + \beta \phi_k^3 \quad (k=a, b, c) \quad (1)$$

ここで、 $n_1, n_2$  はリアクトルの一次側及び二次側の巻線、 $i_k$  は  $k$  相の電流、 $i_0$  は二次電流、 $\phi_k$  は  $k$  相のリアクトル中の磁束、 $\alpha, \beta$  は定数である。

Fig. 1 より次の回路方程式が得られる。

$$n_1 \frac{d}{dt}(\phi_a - \phi_b) + r(i_a - i_b) = e_a - e_b \quad (2)$$

$$n_1 \frac{d}{dt}(\phi_b - \phi_c) + r(i_b - i_c) = e_b - e_c \quad (3)$$

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (4)$$

$$n_2 C_0 \sum_k \frac{d^2}{dt^2} \phi_k + n_2 G_0 \sum_k \frac{d}{dt} \phi_k + i_0 = 0 \quad (k=a, b, c) \quad (5)$$

また、式 (1), (4) より  $i_0, i_k$  は次式のようになる。

$$i_0 = \frac{1}{3n_2} (\alpha \sum_k \phi_k + \beta \sum_k \phi_k^3) \quad (6)$$

$$i_k = \frac{1}{n_1} (\alpha \phi_k + \beta \phi_k^3 - n_2 i_0) \quad (k=a, b, c) \quad (7)$$

上式の変数を、

$$\phi_1 = \phi_a - \phi_b, \quad \phi_2 = \phi_b - \phi_c$$

$$\phi_0 = \frac{1}{3}(\phi_a + \phi_b + \phi_c)$$

とおき、 $C_t = 3C_0, G_t = 3G_0$  とすると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{r}{n_1^2} \cdot f_1(\phi_1, \phi_2, \phi_0) &= \frac{1}{n_1}(e_a - e_b) \\ \frac{d\phi_2}{dt} + \frac{r}{n_1^2} \cdot f_2(\phi_1, \phi_2, \phi_0) &= \frac{1}{n_1}(e_b - e_c) \\ \frac{d^2\phi_0}{dt^2} + \frac{G_t}{C_t} \frac{d\phi_0}{dt} + \frac{\alpha}{n_2^2 C_t} \phi_0 + \frac{\beta}{3n_2^2 C_t} \\ &\times f_3(\phi_1, \phi_2, \phi_0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、

$$f_1(\phi_1, \phi_2, \phi_0) = \alpha \phi_1 + \beta \phi_1 \{ 3\phi_0^2 + (\phi_1 + 2\phi_2)\phi_0 \}$$

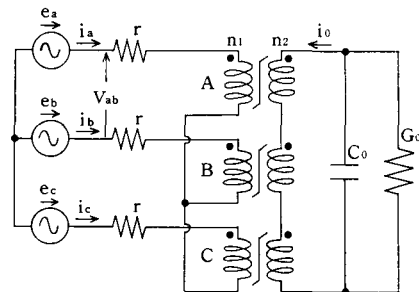


Fig. 1 Circuit diagram.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3}(\phi_1^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_2^2) \Big\} \\
f_2(\phi_1, \phi_2, \phi_0) &= \alpha\phi_2 + \beta\phi_2 \left\{ 3\phi_0^2 - (\phi_2 + 2\phi_1)\phi_0 \right. \\
& \left. + \frac{1}{3}(\phi_2^2 + \phi_2\phi_1 + \phi_1^2) \right\} \\
f_3(\phi_1, \phi_2, \phi_0) &= 3\phi_0^3 + 2(\phi_1^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_2^2)\phi_0 \\
& + \frac{1}{9}(2\phi_1^3 + 3\phi_1^2\phi_2 - 3\phi_1\phi_2^2 - 2\phi_2^3)
\end{aligned}$$

である。

## 2.2 回路方程式の基準化

解析結果に一般性を持たせるために、リアクトルの磁化特性を示す  $\alpha, \beta$  を各変数の中に組み込み、この  $\alpha, \beta$  が直接回路方程式に現れないように次のような基準化を行う。

$$\phi_j = M y_j \quad (j=1, 2), \quad \phi_0 = M X_0, \quad E = 3\omega n_1 n_2 M Z \quad (9)$$

ここで、

$$M = \sqrt{2} \left( \frac{2\omega n_1^2 X}{\beta} \right)^{1/2}, \quad X = 3\omega C_1 - \alpha_0,$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{3\omega n_2^2}$$

であり、 $E$  は電源の相電圧の実効値である。

式(8)に式(9)を代入すると、次の回路方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} + \omega \cdot \tau \cdot F_1(y_1, y_2, x_0) &= \frac{Z}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{t}{3}\right) \\
\frac{dy_2}{dt} + \omega \cdot \tau \cdot F_2(y_1, y_2, x_0) \\
&= \frac{Z}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{t}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \\
\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \left(\frac{n-1}{n}\right) P \frac{dx_0}{dt} + \frac{1}{n} x_0 \\
&+ \left(\frac{n-1}{n}\right) F_3(y_1, y_2, x_0) = 0
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
F_1(y_1, y_2, x_0) &= \left(\frac{1}{n-1}\right) y_1 + 4y_1 \left\{ x_0^2 + \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2)x_0 \right. \\
& \left. + \frac{1}{9}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(y_1, y_2, x_0) &= \left(\frac{1}{n-1}\right) y_2 + 4y_2 \left\{ x_0^2 - \frac{1}{3}(y_2 + 2y_1)x_0 \right. \\
& \left. + \frac{1}{9}(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$F_3(y_1, y_2, x_0) = \frac{8}{9}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)x_0 + \frac{4}{3}x_0^3$$

$$+ \frac{4}{81}(2y_1^3 + 3y_1^2 y_2 - 3y_1 y_2^2 - 2y_2^3)$$

$$n = \frac{3\omega C_1}{\alpha_0}, \quad P = \frac{G_1}{X}, \quad \tau = \frac{(n_2/n_1)^2 \cdot r \cdot X}{\omega}$$

である。容量が十分大きい場合は  $1/n \approx 0$  であるので今回は解析を簡単にするために  $1/n=0$  の場合について記すことにする。

## 2.3 概周期振動

Fig. 2 は  $P=0.03$  の時、 $Z-\omega\tau$  平面上に概周期振動の発生領域を示したものである。ここの概周期振動の判定基準は式(10)の解の位相平面を描き、その変動率が5%を越えたものを概周期振動とみなした。この図によれば、 $\omega\tau$  が0.1を越えても、概周期振動は発生するが、その定常解は  $\omega\tau=0$  の場合と著しく異なってくる。今回は、一次側抵抗は巻線抵抗のみの場合を想定して  $\omega\tau$  が  $10^{-3}$  程度の場合を検討することにする。この程度の  $\omega\tau$  であれば、 $\omega\tau=0$  の場合とその定常解の差は  $10^{-4} \sim 10^{-5}$  程度と小さい。

Fig. 3 に  $\omega\tau=0.005, P=0.03$  の場合の出力波形を示した。(a)(b)はそれぞれ  $Z=0.83$  及び  $Z=0.85$  の場合である。Fig. 4 に  $Z=0.85$  の場合のリアクトル中の磁束の低周波振動成分の波形を示す。ここで、 $V_{ab}$  は電源の線間電圧で、 $Y_{a0}, Y_{b0}$  は  $a$  相、 $b$  相のリアクトル中の磁束の低周波成分である。

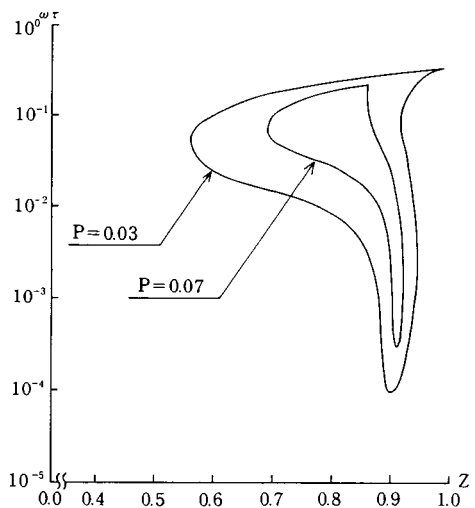


Fig. 2 Regions of quasi-periodic oscillations in  $Z$  vs.  $\omega\tau$  plane.

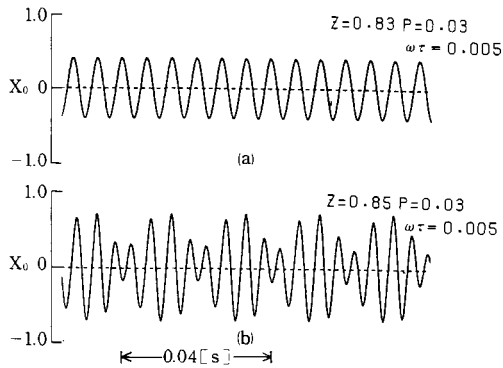


Fig. 3 Waveforms of magnetic flux.

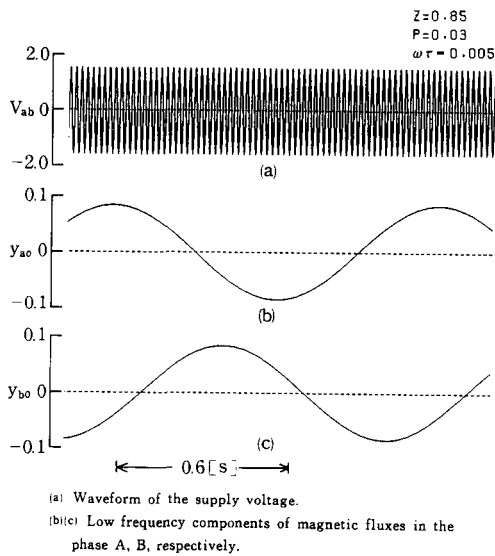


Fig. 4 Waveforms of the low frequency components of magnetic fluxes.

### 3. 概周期振動発生領域

#### 3.1 解析結果

式(10)を直接ルンゲークッタ法により解くと、概周期振動の発生していない領域では、 $y_1, y_2$ , と  $x_0$  は周期振動でほぼ正弦波であるので、解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A(t) \sin\left(\frac{t}{3}\right) + B(t) \cos\left(\frac{t}{3}\right) \\ y_2 &= C(t) \sin\left(\frac{t}{3}\right) + D(t) \cos\left(\frac{t}{3}\right) \\ x_0 &= F(t) \sin(t) + G(t) \cos(t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(11)を式(10)に代入して整理すると次の式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \\ \dot{D} \\ \dot{F} \\ \dot{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_A(A, B, C, D, F, G, \omega\tau) \\ F_B(A, B, C, D, F, G, \omega\tau, Z) \\ F_C(A, B, C, D, F, G, \omega\tau, Z) \\ F_D(A, B, C, D, F, G, \omega\tau, Z) \\ F_F(A, B, C, D, F, G, P) \\ F_G(A, B, C, D, F, G, P) \end{bmatrix} \quad (12)$$

定常解は式(12)の左辺のベクトルを  $[0]$  とすることにより求まる。

一次電圧、二次電圧に相当する  $Z, Y = \sqrt{x_0^2 + x_0^2}$  の平面で概周期振動の発生領域を求めるため、式(12)より求めた定常解  $A_0 \sim G_0$  に次式に示すように摂動成分  $a \sim g$  を加える。

$$\begin{aligned} A &= A_0 + a, & B &= B_0 + b, & C &= C_0 + c \\ D &= D_0 + d, & F &= F_0 + f, & G &= G_0 + g \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)を式(12)に代入すると、摂動成分の方程式として式(14)を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \\ \dot{d} \\ \dot{f} \\ \dot{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{61} & \cdots & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(a, b, c, d, f, g) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_6(a, b, c, d, f, g) \end{bmatrix} \quad (14)$$

この式の第1項の行列の特性根の実部の正負を調べることにより定常解の安定判別ができる<sup>6)</sup>。

この結果を Fig. 5 に示した。同図の (a) に示した点線

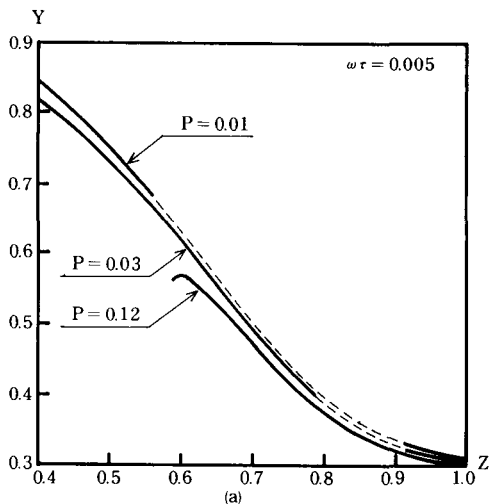


Fig. 5(a) Regions of quasi-periodic oscillations in steady state solutions.

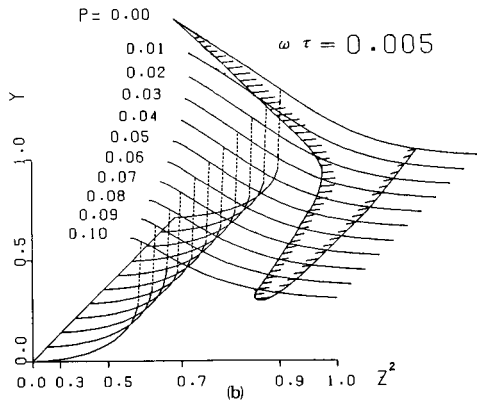


Fig. 5(b) Regions of quasi-periodic oscillations in steady state solutions.

部分が不安定な部分で、概周期振動の発生領域である。この図では、式の規準化の結果として、 $Z$ - $Y$  曲線群が密となり、この領域を明確に示すことができないので、(b)に  $Z^2$ - $Y$ - $P$  の三次元表示でその領域を示した。図中の斜線部分が概周期振動発生領域である。

### 3.2 実験結果

Fig. 6 に実験による概周期振動の発生領域を示す。ここで、横軸が入力電圧、縦軸が出力電圧である。Fig. 7 に概周期振動が発生している時の、入出力電圧波形とリアクトル中の磁束中の低周波振動成分の波形を示す。

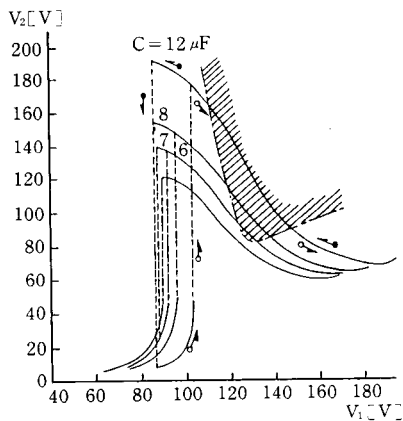


Fig. 6  $V_2$  (the secondary voltage) vs.  $V_1$  (the primary voltage) curves in the experiment.

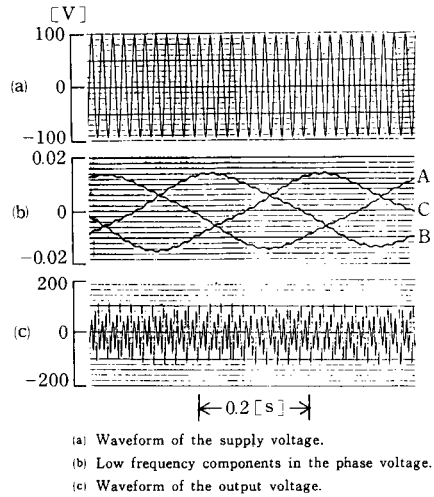


Fig. 7 Waveforms of voltages.

## 4. あとがき

本研究により、三相鉄共振回路には跳躍現象の他に概周期振動が発生する領域が存在することが確かめられた。

解析によれば、リアクトルの線形部の等価サセプタンスと回路の容量サセプタンスとの合成サセプタンスの値とリアクトルの一次巻線の抵抗値により、その振動の範囲が決定される。また、概周期振動発生時には、リアクトルの磁束中に電源周波数に対して低周波の振動成分が含まれることも分かった。

本研究は東京電機大学総合研究所の助成により行われたことを付記するとともに、同研究所長穂坂 衛先生及び東京電力(株) 鈴木宏和氏のご助言を深謝します。

## 文 献

- 1) 森田, 桜井: 電学誌, **89-3**, No. 996 (昭和 44 年論文 44-47).
- 2) 松本, 平井, 原田: 電学誌, **105-B**, No. 12 (昭和 60 年論文 60-B119).
- 3) G. J. Bendezak and P. Biringier: *IEEE Trans. Mag.*, **MAG-18**, No. 6 (1982).
- 4) 蓮見, 田所, 笠原: 電学誌, **87-9**, No. 948 (昭和 42 年論文 42-98).
- 5) 田所, 山崎, 小森: マグネティックス研究会 MAG-87-73 (昭和 62 年 6 月).
- 6) C. Hayashi: "Nonlinear Oscillations in Physical Systems", McGraw-Hill, 1964 (Princeton Univ. Press, 1985) 例えば Chapter 3.

1987 年 12 月 7 日受理, 1988 年 2 月 12 日採録