



相依随机变量的随机函数模型

陈建兵^{1*}, 万志强¹, 宋鹏彦²

1. 同济大学土木工程学院, 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092;

2. 河北大学建筑工程学院, 保定 071002

*联系人, E-mail: chenjb@tongji.edu.cn

收稿日期: 2017-04-14; 接受日期: 2017-07-19; 网络出版日期: 2017-09-03

国家自然科学基金(编号: 11672209)和科技部国家重点实验室基金(编号: SLDRCE14-B-17)资助项目

摘要 针对二维非独立随机变量的概率描述, 提出了随机函数模型, 将其转化为二维独立随机变量问题. 该模型中的待定函数恰好为条件均值函数与条件标准差函数, 可根据物理机制或实测数据确定. 特别地, 本文建议根据问题的物理机制确定待定函数的基本形式, 进而基于数据确定基本变量的概率分布. 以混凝土的弹性模量和抗压强度关系为例详细阐述了上述步骤. 其中, 考虑混凝土的一维损伤演化机制, 研究了混凝土弹性模量与抗压强度分布界限, 结合物理机制确定待定函数的形式并通过试验数据识别参数, 建立了实用随机函数模型的具体表达式. 与Copula函数模型的对比表明, 该模型可以很好地刻画数据的基本概率特征, 且避免了直接处理联合概率分布, 便于在工程中应用. 本文提出的方法可以推广到高维非独立随机变量的概率描述之中.

关键词 相关性, 随机函数模型, 混凝土, 抗压强度, 弹性模量, 试验数据

PACS: 02.70.Uu, 02.50.Ng, 02.50.-r, 46.65.+g, 46.70.-p

1 引言

在结构随机动力反应与可靠度分析中, 往往假定基本随机变量是相互独立的. 在正交多项式展开等随机问题分析方法中, 更是要求基本变量相互独立、至少是不相关的^[1]. 然而, 实际工程问题中的随机变量往往是非独立的^[2]. 已有研究表明, 随机变量的非独立性将对结构可靠度产生显著影响^[3]. 因此, 合理地定量反映随机变量的非独立性具有重要意义.

国内外研究者们已经对此进行了大量的研究, 其中具有代表性的有Rosenblatt变换^[4]、Copula函数^[5]和

混沌多项式展开^[6]等方法. Rosenblatt变换通过条件概率函数的逆变换将相关的非正态变量转化为独立标准随机变量, 得到了较为广泛的应用^[4]. 但这一变换将严重地增强问题本身的非线性程度, 使得问题的适定性变差, 从而可能导致分析出现较大的误差, 甚至得到错误的结果^[7]. 近十余年来, Copula函数引起了国内外研究者的重视^[5,8]. 遗憾的是, Copula函数形式的选择对具体问题有较大的主观性, 同时, 采用Copula函数处理高维问题较为困难. 基于混沌多项式展开的方法是将不同随机变量均展开为一系列独立标准化正态变量的正交多项式^[6]. 由于这些随机变量均为相同的独

引用格式: 陈建兵, 万志强, 宋鹏彦. 相依随机变量的随机函数模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 014609

Chen J B, Wan Z Q, Song P Y. Random function model for dependent random variables (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 014609, doi: 10.1360/SSPMA2017-00107

立标准化正态变量的函数, 因此内蕴了各变量之间的相关性. 然而在实际应用中, 这一方法也存在基本随机变量数目的增多导致计算工作量急剧增长等问题.

上述方法总体上都是基于现象学统计来描述不同随机变量之间的相关性. 本文针对非独立随机变量问题提出了一类随机函数模型, 并结合物理机制与观测数据, 确定了随机函数的形式与关键参数分布. 以混凝土的弹性模量与抗压强度关系为例, 对所建议的方法进行了具体示例. 结果表明, 本文建议的方法合理可行且便于工程应用.

2 相依随机变量的随机函数模型

2.1 基本模型

考虑二维非独立随机变量 X 和 Y . 不失一般性, 设 Y 和 X 之间存在如下函数关系:

$$Y = g_1(X) + \zeta g_2(X), \quad (1)$$

其中, ζ 为标准化随机变量, 即 $\mathbb{E}[\zeta] = 0$, $\mathbb{E}[\zeta^2] = 1$, 这里 $\mathbb{E}[\cdot]$ 表示数学期望. 假设 ζ 与 X 是相互独立的, 对式(1)取条件期望可得

$$\mathbb{E}[Y|X] = g_1(X). \quad (2)$$

此即条件均值函数. 在统计回归中, 条件均值函数是使得均方估计误差最小的最优函数^[9]. 类似地, 可得条件方差为

$$\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^2 | X] = g_2^2(X). \quad (3)$$

可见, $g_2(X)$ 为条件标准差函数.

一般来说, 式(2)和(3)的表达式与具体物理问题有关, 原则上可根据问题的物理机制给出. 当物理机制尚不清楚时, 可根据样本观测数据统计给出经验表达式. 相应地, 随机变量 ζ 的分布原则上亦可由问题的物理本质决定. 当难以通过物理机制获得该分布时, 可根据观测数据进行统计推断. 这时, ζ 的第 i 个样本值为

$$\zeta_i = \frac{y_i - g_1(x_i)}{g_2(x_i)}, \quad (4)$$

其中 x_i, y_i 为随机向量 (X, Y) 的第 i 个数据点.

注意到, 尽管 X, ζ 是独立的, 但通过随机函数(1)所决定的 Y 通常与 X 不独立. 因而, 通过对独立随机变量 X 和 ζ 进行边缘概率分布统计, 通过式(1)的随机函

数模型, 可将二维非独立随机变量问题转化为二维独立随机变量问题, 从而避免了直接处理二维联合分布函数问题, 这将为工程应用提供极大的便利.

2.2 边界条件

大量实测数据表明, 工程实际中的非独立二维随机变量的样本观测值, 分布范围往往是有限的(图1). 从物理意义上看, 二维随机变量分布存在某种边界是由内在物理机制所决定的.

设二维随机变量 X 和 Y 具有下限边界 $g_{\text{inf}}(X)$ 和上限边界 $g_{\text{sup}}(X)$, 即随机变量 Y 满足:

$$g_{\text{inf}}(X) < Y < g_{\text{sup}}(X). \quad (5)$$

将式(1)代入式(5)中可得

$$\frac{g_{\text{inf}}(X) - g_1(X)}{g_2(X)} < \zeta < \frac{g_{\text{sup}}(X) - g_1(X)}{g_2(X)}. \quad (6)$$

从式(6)可见, 随机函数模型引入的随机变量 ζ 原则上应服从有界分布.

3 随机函数模型的确定

为了具体说明如何确定上述随机函数模型中的函数形式和关键参数, 本文以混凝土的弹性模量和抗压强度为例. 试验数据来自文献[10](图1).

3.1 试验数据分析

通过对图1中的试验数据进行回归分析, 文献[10]给出了混凝土弹性模量 E_c (10^4 MPa)与抗压强度 f_c (MPa)的经验关系:

$$E_c = \frac{10}{2.2 + \frac{34.7}{f_c}}. \quad (7)$$

由此给出了我国现行《混凝土结构设计规范》^[11]中混凝土弹性模量计算的公式.

观察数据可以发现, 大部分的试验数据(84%)均落在均值(式(7), 图1红色实线)加、减1倍标准差的范围内, 全部数据落在均值加、减2倍标准差的范围内. 从统计意义上看, 对于正态分布, 2倍标准差范围内的概率为95.45%, 而不应是100%. 出现这一偏离的原因, 可能是试验数据量不够大, 也可能是常方差回归不合

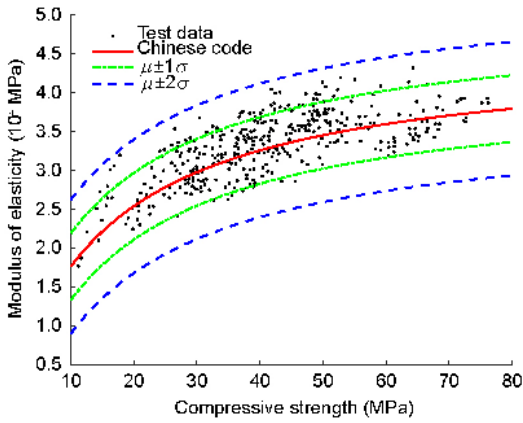


图1 (网络版彩图) 试验数据^[10]
Figure 1 (Color online) Experimental data [10].

理或其分布不服从正态分布.

3.2 基于物理机制确定的下限

考虑混凝土单轴受压损伤本构关系表达式^[11,12]:

$$\sigma = (1 - d_c)E_c \varepsilon,$$

其中, d_c 为混凝土单轴损伤演化参数, E_c 为受压初始弹性模量, σ 和 ε 分别为应力和应变.

根据文献[12], d_c (上升段)由下式给出

$$d_c = 1 - \frac{\rho_c}{n - 1 + x^n},$$

其中, $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}$, $\rho_c = \frac{f_c}{E_c \varepsilon_c}$, $n = \frac{E_c}{E_c - \frac{f_c}{\varepsilon_c}}$, f_c 和 ε_c 分别为峰值应力和峰值应变, 如图2所示.

对于稳定材料(如混凝土处于加载上升段时), 应满足Drucker公设^[13]:

$$(\sigma - \sigma^0)d\varepsilon^p > 0, \\ d\sigma d\varepsilon^p \geq 0.$$

在此条件下, 加载曲面必定是外凸的. 对一维情况, 混凝土上升段曲线必定是外凸的, 即有

$$E_c > E_{\text{sec}}, \quad (8)$$

其中 $E_{\text{sec}} = f_c / \varepsilon_c$ 为峰值点的割线模量. 注意到, 峰值应变 ε_c 与抗压强度 f_c 存在统计关系^[11]:

$$\varepsilon_c = (700 + 172\sqrt{f_c}) \times 10^{-6}, \quad (9)$$

其中, f_c 单位为MPa. 将式(9)代入不等式(8)中可得

$$E_c > f_c \times 10^6 / (700 + 172\sqrt{f_c}).$$

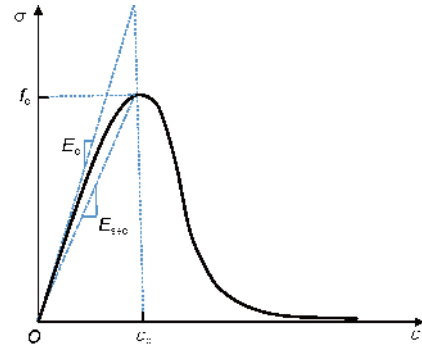


图2 (网络版彩图) 混凝土单轴受压本构关系
Figure 2 (Color online) Uniaxial constitutive relation of concrete in compression.

类似地, 考虑混凝土单轴受拉损伤本构关系表达式, 有

$$\sigma = (1 - d_t)E_t \varepsilon.$$

注意这里引入了拉、压初始模量相同的假定. 根据混凝土抗拉强度 f_t 与抗压强度 f_c 的经验关系

$$f_t = 0.26f_c^{2/3}.$$

和单轴受拉峰值应变 ε_t 与抗拉强度 f_t 的经验关系:

$$\varepsilon_t = f_t^{0.54} \times 65 \times 10^{-6},$$

其中 f_t 的单位为MPa, 与单轴受压情况类似, 在满足Drucker公设时有

$$E_c > (0.26f_c^{2/3})^{0.46} \times 10^6 / 65 = 0.83f_c^{0.31} \times 10^4.$$

图3给出了加入边界约束后试验数据的分布情况. 可见, 大部分试验数据满足下限边界约束要求, 仅有3个数据点处于下限边界上. 这可能是由于弹性模量测试方法本质上给出的是某种割线模量, 因而小于初始弹性模量, 也可能是由于实验误差造成的. 在下文中将去除这些低于下限值的数据点.

3.3 条件均值函数建模

尽管可以采用一般的线性与非线性回归分析进行条件均值函数的估计^[2], 但基于现象学统计面临函数形式选择具有任意性等困难. 在具有一定物理机制的场合, 首先应根据物理机制确定函数的形式, 进而基于数据识别关键参数的分布信息^[14,15], 这将更为合理、高效.

文献[16,17]用不同的混凝土流变模型作为研究混

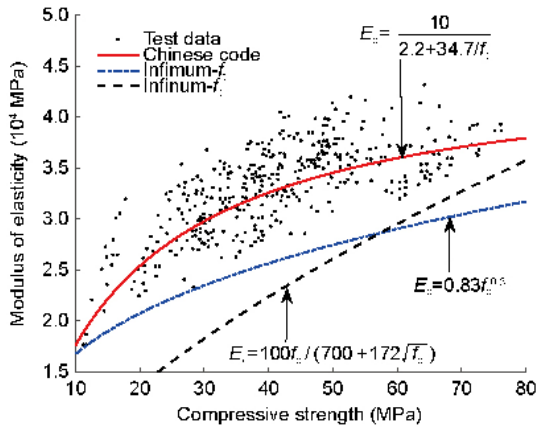


图3 (网络版彩图)下边界约束
Figure 3 (Color online) Lower limit constraint.

凝土弹性模量与抗压强度关系的理论基础. 若对混凝土采用黏-弹性模型, 则有^[16]

$$\frac{1}{E_c} = A + B \frac{1}{f_c} (1 - e^{-Cf_c}), \quad (10)$$

其中参数 A, B 和 C 均为常数. 当 $e^{-Cf_c} \rightarrow 0$ 时, 式(10)揭示了混凝土抗压强度的倒数与弹性模量的倒数存在线性相关性这一特征. 事实上, 在文献[10]的统计中, 就采用了这一倒数变换关系.

以此为基础, 可建立条件均值函数(即回归函数):

$$\frac{1}{E_c} = a + b \frac{1}{f_c}, \quad (11)$$

其中, 参数 a 和 b 为待识别的参数. 采用最小二乘法, 可得 $a = 0.2234, b = 3.0305$, 相关系数 $\rho = 0.795$. 这一结果与式(7)是基本一致的. 因此, 有

$$g_1(f_c) = \frac{1}{a + b \frac{1}{f_c}}.$$

3.4 条件标准差函数建模

从式(3)可知, 为了确定条件标准差函数 $g_2(f_c)$, 需要由原始数据扣除条件均值之后进行统计. 需要注意的是, 条件标准差函数的确定依然依赖于对试验数据的观察与物理机制的考量.

图4给出残差绝对值 $|\Delta| = |E_c - g_1(f_c)|$ 数据. 由式(3)可知

$$g_2(f_c) = \sqrt{E[|\Delta|^2]}.$$

根据式(10)与(11), 可得

$$|\Delta| = \left| E_c - \frac{1}{A + B \frac{1}{f_c}} \right| \approx \frac{Bf_c}{(A + Bf_c)^2} \cdot \exp(-Cf_c). \quad (12)$$

可以认为, 式(12)是在上述基本物理机制下给出的函数形式, 条件标准差函数 $g_2(f_c)$ 可取其形式. 在此基础上, 根据图4中的数据给出参数具体估计值. 由于标准差值数值较小, 本文将标准差绝对值取对数后再进行拟合, 结果如图5所示.

进而, 由式(4)可得到随机变量 ζ 的观测数据集. 通过K-S检验, 可以认为随机变量 ζ 服从标准正态分布(图6).

至此, 给出混凝土弹性模量 E_c (10^4 MPa) 与抗压强

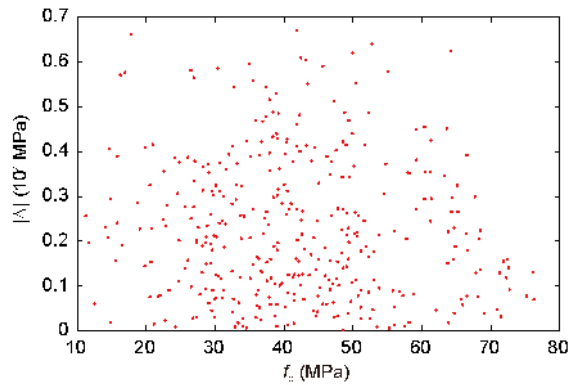


图4 (网络版彩图)残差绝对值
Figure 4 (Color online) The absolute value of residual values.

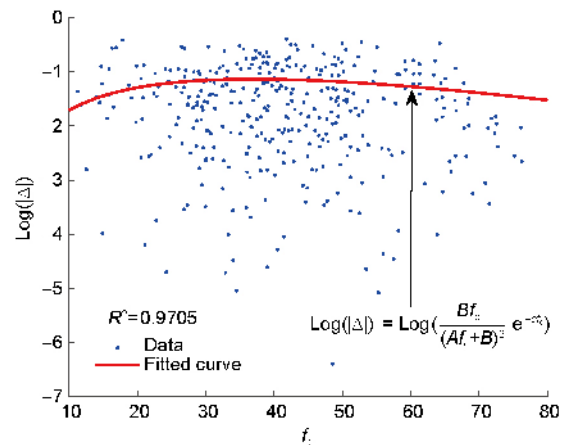


图5 (网络版彩图)标准差拟合结果
Figure 5 (Color online) Fitted result of standard deviation.

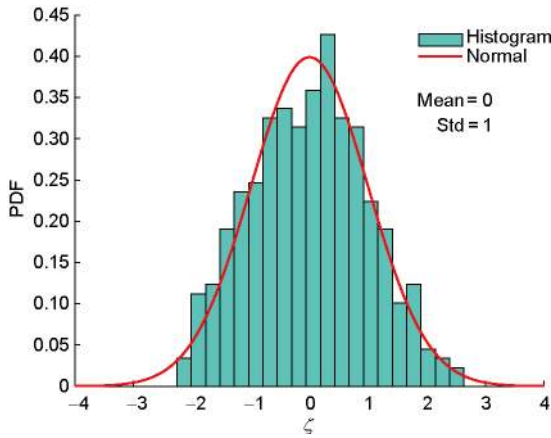


图6 (网络版彩图)随机变量 ζ 的频率分布直方图
Figure 6 (Color online) Histogram of the random variable ζ .

度 f_c (MPa)的随机函数模型表达式为

$$E_c = \frac{1}{a + b/f_c} + (\zeta\sigma + \mu) \frac{Bf_c}{(Af_c + B)^2} \cdot \frac{1}{\exp(Cf_c)}. \quad (13)$$

其中各参数取值见表1.

4 与经典方法的对比与验证

本节将通过随机函数模型建立混凝土弹性模量与抗压强度的联合概率密度函数, 并与基于Copula原理建立的联合概率密度函数对比, 以验证随机函数模型的合理性.

4.1 随机函数模型给出的联合概率密度函数

考虑二维随机变量 X 和 Y , 设其为随机向量 (ξ, ζ) 的函数:

$$X = h(\xi, \zeta), Y = g(\xi, \zeta). \quad (14)$$

若已知 (ξ, ζ) 的联合概率密度函数 $p_{\xi\zeta}(\xi, \zeta)$, 则可得 (X, Y) 的联合概率密度函数^[9]:

$$p_{XY}(x, y) = \sum_i |J(\xi_i, \zeta_i)| p_{\xi\zeta}(\xi_i, \zeta_i), \quad (15)$$

其中, $\xi_i(x, y), \zeta_i(x, y)$ 为方程(14)的第 i 个解;

$|J(\xi, \zeta)| = \left| \frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(x, y)} \right|$ 为Jacobi行列式. 特别地, 若随机变量 ξ 与 ζ 相互独立, 有 $p_{\xi\zeta}(\xi, \zeta) = p_{\xi}(\xi)p_{\zeta}(\zeta)$, 这里 $p_{\xi}(\xi)$ 和 $p_{\zeta}(\zeta)$ 分别为 ξ 与 ζ 的边缘概率密度函数.

表1 随机函数模型参数值

Table 1 Parameters in the random function model

参数	数值
a	0.2234
b	3.0305
A	1.057
B	24.09
C	0.00152
σ	1.38
μ	0.118

将式(1)的随机函数模型改写为

$$\begin{cases} X = \xi, \\ Y = g_1(\zeta) + \zeta g_2(\zeta). \end{cases} \quad (16)$$

则其解为

$$\begin{cases} \xi = X, \\ \zeta = \frac{Y - g_1(X)}{g_2(X)}. \end{cases} \quad (17)$$

因此, Jacobi行列式为

$$|J(\xi, \zeta)| = \left| \frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \partial\zeta/\partial x & 1/g_2(x) \end{vmatrix} = 1/g_2(x).$$

将其代入式(15)中可得

$$p_{XY}(x, y) = \frac{1}{|g_2(x)|} p_X(x) p_{\zeta} \left(\zeta = \frac{y - g_1(x)}{g_2(x)} \right). \quad (18)$$

在随机函数模型(式(13))中, 随机变量 ζ 与随机变量 f_c 是相互独立的, 且 ζ 服从标准正态分布. 根据图1中的数据进行统计检验, f_c 亦可认为服从正态分布(图7), 其分布参数(均值和标准差)分别为 $\mu_f = 41.81$ 及 $\sigma_f = 14.14$. 因此, 由式(18)可得随机变量 f_c 与 E_c 的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} p_{XY}(x, y) &= \frac{(Ax + B)^2}{B\sigma x} \exp(Cx) \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi\sigma_f} \exp \left\{ -\frac{\sigma_f^2 \zeta^2 + (x - \mu_f)^2}{2\sigma_f^2} \right\}, \quad (19) \\ \zeta &= \frac{y - \frac{10}{a + b/x} - \frac{\mu Bx}{(Ax + B)^2 \exp(Cx)}}{\frac{\sigma Bx}{(Ax + B)^2 \exp(Cx)}}. \end{aligned}$$

为方便起见, 式(19)中用随机变量 X 代表 f_c 、随机变量 Y 代表 E_c .

基于上述方法获得的混凝土弹性模量与抗压强度的联合概率密度函数等值线如图8所示.

4.2 基于Copula原理的联合概率密度函数

任何一个 n 维联合概率分布函数 F 都可以由其 n 个对应的1维边缘概率分布函数 (F_1, F_2, \dots, F_n) 和1个Copula函数 C 构成^[5], 即

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

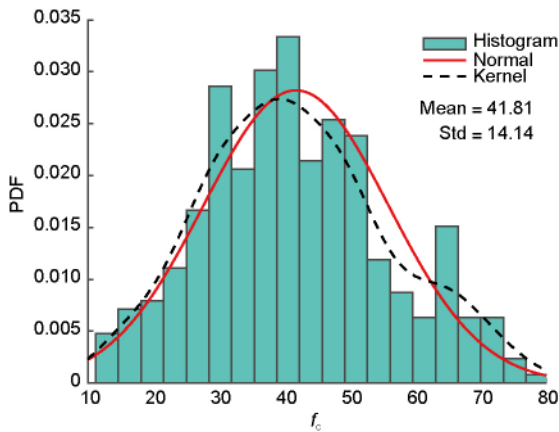


图7 (网络版彩图)混凝土抗压强度直方图及概率密度函数拟合

Figure 7 (Color online) Histogram of the compressive strength of concrete and fitted curve of PDF.

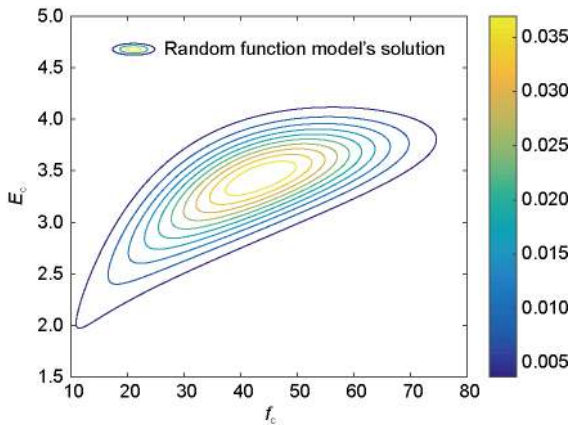


图8 (网络版彩图)基于随机函数模型的混凝土抗压强度与弹性模量联合概率密度函数等值线

Figure 8 (Color online) Contour of joint probability density function of compressive strength and modulus of elasticity based on random function model.

对应的联合概率密度函数为

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (20)$$

其中 $c(\cdot)$ 称为Copula密度函数. 常用的Copula函数有二元正态Copula函数、二元t-Copula函数、Gumbel Copula函数、Clayton Copula函数和Frank Copula函数等. 不同类型的Copula函数各具特点, 且对数据尾部的信息捕捉分辨率不同. 本文选用Gumbel Copula函数和Clayton Copula函数进行组合, 形成混合Copula函数对试验数据的联合概率密度函数进行数值求解. 具体步骤如下: (1) 利用核密度估计方法, 获得抗压强度 f_c 和弹性模量 E_c 的概率密度函数. 核函数选用Gauss核函数. 核密度估计结果如图7和9所示. (2) 选用Clayton Copula函数 $c_{Cl}(\cdot)$ 和Gumbel Copula函数 $c_{Gum}(\cdot)$ 作为混合Copula函数 $c_M(\cdot)$ 的组合, 取组合系数 $\alpha = 0.8$, 有

$$c_M(u, v; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \alpha c_{Cl}(u, v; \beta_1) + (1 - \alpha) c_{Gum}(u, v; \beta_2),$$

其中 β_1 和 β_2 为待拟合的参数. 采用极大似然法估计可得 $\beta_1 = 1.9369, \beta_2 = 1.8772$. (3) 由式(20)计算联合概率密度的数值解. 结果如图10所示. 从图中可见, 基于Copula函数的计算结果与基于随机函数模型的计算结果总体上相符, 但也略有不同. 前文已提到, Copula函数的选取和参数设置对计算结果有较大影响. 同时, 由于Copula函数参数的识别来源于观测数据, 因此样本值的优劣对其计算结果也影响显著. 例如, 在图10中联合概率密度函数等值线具有局部“内凹”和“不光滑”现象. 通过本文的随机函数模型得到的联合概率密度函数则几乎不受局部试验数据的影响, 且其联合概率密度函数等值线更光滑.

4.3 其他参数对比

二维随机变量相关性的经典描述是线性相关系数:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

其中 $\text{cov}(X, Y)$ 是随机变量 (X, Y) 的协方差函数. 下文将分别考虑随机函数模型中, 弹性模量 E_c 与条件均值

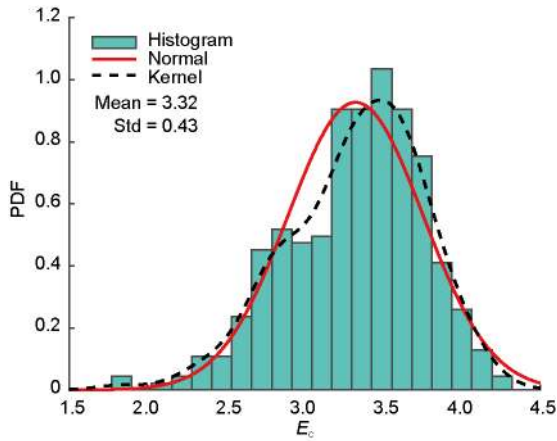


图9 (网络版彩图)混凝土弹性模量直方图及概率密度函数拟合
Figure 9 (Color online) Histogram of modulus of elasticity concrete and fitted PDF curve.

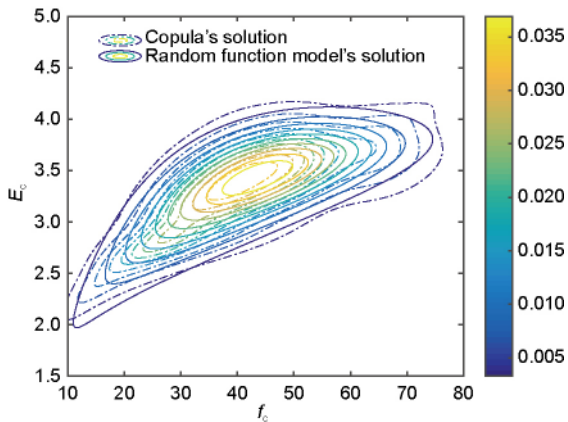


图10 (网络版彩图)基于Copula函数的混凝土抗压强度与弹性模量联合概率密度函数等值线
Figure 10 (Color online) Contour of joint probability density function of compressive strength and modulus of elasticity of concrete based on Copula function.

函数 $g_1(f_c)$ 的相关系数, 以及弹性模量 E_c 与抗压强度 f_c 的相关系数的理论值.

情况1: 弹性模量 E_c 和条件均值函数 $g_1(f_c)$ 的相关系数.

分别考虑 E_c 和 $g_1(f_c)$ 的均值, 有

$$\mu_{E_c} = \mathbb{E}[g_1(f_c)] = \mu_{g_1(f_c)}.$$

对应的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_{E_c}^2 &= \mathbb{E} \left\{ \left[g_1(f_c) + \zeta g_2(f_c) - \mu_{g_1(f_c)} \right]^2 \right\} \\ &= \sigma_{g_1(f_c)}^2 + \mathbb{E} \left\{ \left[\zeta g_2(f_c) \right]^2 \right\} \\ &= \sigma_{g_1(f_c)}^2 + \mathbb{E} \left[g_2^2(f_c) \right]. \end{aligned}$$

其协方差函数为

$$\begin{aligned} \text{cov}[E_c, g_1(f_c)] &= \mathbb{E} \left\{ \left[g_1(f_c) + \zeta g_2(f_c) - \mu_{g_1(f_c)} \right] \left[g_1(f_c) - \mu_{g_1(f_c)} \right] \right\} \\ &= \sigma_{g_1(f_c)}^2. \end{aligned}$$

因此, 弹性模量 E_c 和条件均值函数 $g_1(f_c)$ 的相关系数为

$$\rho_{E_c, g_1(f_c)} = \frac{\text{cov}[E_c, g_1(f_c)]}{\sigma_{E_c} \sigma_{g_1(f_c)}} = \frac{\sigma_{g_1(f_c)}}{\sqrt{\sigma_{g_1(f_c)}^2 + \mathbb{E}[g_2^2(f_c)]}}. \quad (21)$$

可以看到, 当 $g_2(f_c) \rightarrow 0$ 时(即标准差为零时), $\rho_{E_c, g_1(f_c)} \rightarrow 1$. 这是显然的, 因为此时混凝土弹性模量与抗压强度的关系是确定性的.

采用图1中试验数据计算式(21)可得

$$\rho_{E_c, g_1(f_c)} = 0.7620.$$

情况2: 弹性模量 E_c 和抗压强度 f_c 的相关系数.

考虑其协方差函数为

$$\begin{aligned} \text{cov}[E_c, f_c] &= \mathbb{E} \left\{ \left[g_1(f_c) + \zeta g_2(f_c) - \mu_{g_1(f_c)} \right] \left[f_c - \mu_{f_c} \right] \right\} \\ &= \mathbb{E}[f_c, g_1(f_c)] - \mathbb{E}[f_c] \mathbb{E}[g_1(f_c)]. \end{aligned}$$

则弹性模量 E_c 和抗压强度 f_c 的相关系数为

$$\rho_{E_c, f_c} = \frac{\text{cov}[E_c, f_c]}{\sigma_{E_c} \sigma_{f_c}} = \frac{\mathbb{E}[f_c, g_1(f_c)] - \mathbb{E}[f_c] \mathbb{E}[g_1(f_c)]}{\sigma_{f_c} \sqrt{\sigma_{g_1(f_c)}^2 + \mathbb{E}[g_2^2(f_c)]}}. \quad (22)$$

采用图1试验数据计算式(22)可得

$$\rho_{E_c, f_c} = 0.7164.$$

根据试验数据统计获得的线性相关系数 $\rho_{\text{data}} = 0.7168$. 可见, 采用随机函数模型计算得到的相关系数和试验数据的统计结果几乎完全一致.

为了进一步验证随机函数模型的有效性, 下文将展示在给定抗压强度值时, 对弹性模量的随机模拟结

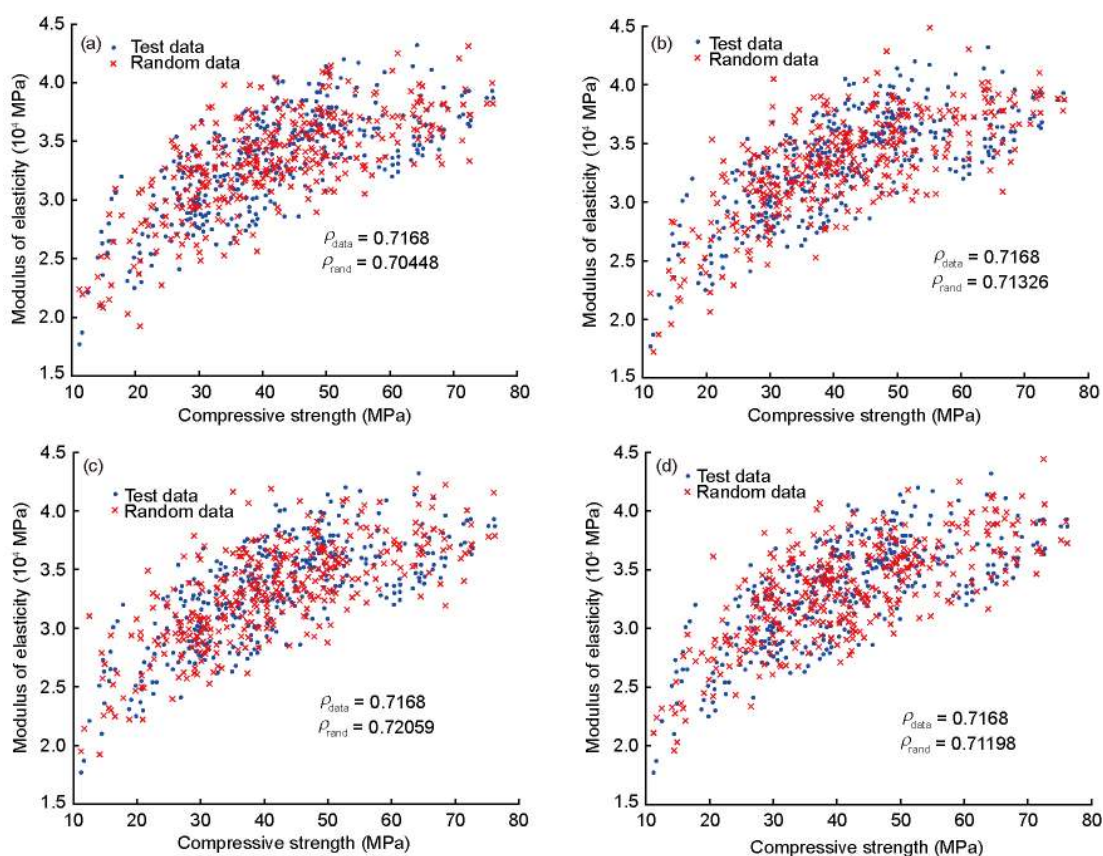


图 11 (网络版彩图) 4次随机样本生成——基于随机函数模型(图中, “×”数据为由随机函数模型随机生成的数值结果, “·”数据为试验数据)

Figure 11 (Color online) Four random samples based on random function model (in the figure, “×” data is the simulation result by random function model, “·” data is the experimental data).

果, 详见图11(a)–(d). 其中, ρ_{data} 为试验数据给出的前述线性相关系数, ρ_{rand} 为模拟数据的线性相关系数. 图12为10000次Monte Carlo模拟结果下, 由随机函数模型生成的随机样本的相关系数的频率分布直方图, 其统计均值和标准差反映出随机函数模型数值模拟的稳健性. 显然, 随机函数模型能够反映混凝土抗压强度与弹性模量数据所体现的相关性.

需要指出的是, 虽然这里基于随机函数模型给出了混凝土弹性模量-抗压强度的二维联合概率密度函数, 但在具体使用过程中, 并不需要这一联合概率密度函数, 而是直接采用随机函数模型及独立随机变量 ζ 和 X 的概率密度函数. 由于条件均值函数 $g_1(\cdot)$ 和条件标准差函数 $g_2(\cdot)$ 一般都是弱非线性的, 这一变换不会显著增强问题的非线性程度, 因而不改变问题的适定性, 避免了Rosenblatt变换带来的问题. 因此, 便于结合上述随机函数模型与结构随机分析方法, 如概率

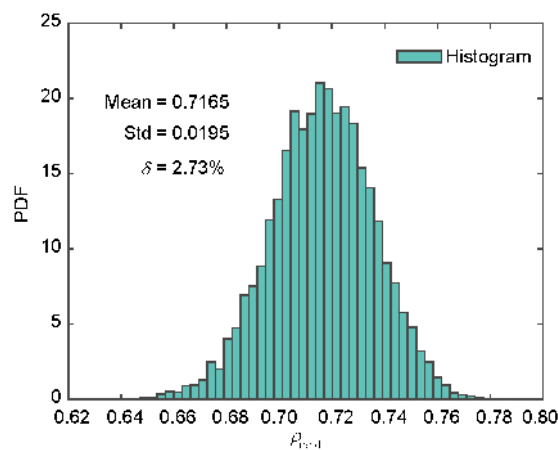


图 12 (网络版彩图) 10000次Monte Carlo模拟结果
Figure 12 (Color online) 10000 Monte Carlo simulation results.

密度演化理论^[18], 进一步进行结构随机反应与可靠度分析.

应当注意, 式(19)给出的联合概率密度函数是依

依赖于边缘分布的. 在本文的例子中, 混凝土试验数据涵盖了多个强度等级, 因而所得的随机函数模型可认为对不同的强度等级均实用. 但在具体工程实际中, 强度等级是给定的, 因此混凝土强度的边缘分布是与强度等级有关的, 而不是上述数据给出的边缘分布. 同时, 本文所提出的随机函数模型, 在理论基础部分论述了随机变量的有界性, 但基于数据经检验给出的 ζ 和 X 的分布均为正态分布, 本质上应为截尾正态分布. 由于截尾部分影响较小, 在上述实例中没有专门讨论.

5 结论

针对二维非独立随机变量的建模, 提出了一类随机函数模型, 将二维非独立随机变量转化为两个独立

随机变量问题, 并给出了基于内蕴物理机制与观测数据确定随机函数的具体示例. 特别地, 结合观测数据与内蕴物理机制, 具体建立了混凝土弹性模量与抗压强度之间的随机函数模型. 通过与Copula函数模型的对比, 验证了随机函数模型的合理性. 主要结论如下. (1) 随机函数模型的待定函数恰为条件均值函数和条件标准差函数, 具有明确的意义. 同时, 它们一般是弱非线性函数, 不改变问题的适定性. (2) 条件均值函数与条件标准差函数的形式可基于内蕴物理规律确定, 并结合观测数据识别具体参数. (3) 基于随机函数模型可以方便地获得非独立随机变量的二维联合概率密度函数. 在工程实际中, 避免了直接处理多维联合概率密度函数这一难题, 便于工程应用. 本文的基本思想可以推广到含有多个非独立随机变量的问题之中去.

参考文献

- Ghanem R, Spanos P D. Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach. Berlin: Springer-Verlag, 1991
- Ang A H-S, Tang W. Probability Concepts in Engineering. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006 [Ang A H-S, Tang W. 工程中的概率概念. 陈建兵, 彭勇波, 刘威, 艾晓秋. 北京: 中国建筑工业出版社, 2017]
- Li G Q, Li J H. Method of second moment matrix—on the reliability calculation of dependent stochastic vector (in Chinese). J Chongqing Inst Architech Eng, 1987, 1: 55–67 [李国强, 李继华. 二阶矩矩阵法——关于相关随机向量的结构可靠度计算. 重庆建筑工程学院学报, 1987, 1: 55–67]
- Rosenblatt M. Remarks on a multivariate transformation. Ann Math Statist, 1952, 23: 470–472
- Nelsen R B. An Introduction to Copulas. 2nd ed. New York: Springer, 2006
- Das S, Ghanem R, Finette S. Polynomial chaos representation of spatio-temporal random fields from experimental measurements. J Comp Phys, 2009, 228: 8726–8751
- Xu L, Cheng G D. Discussion on: Moment methods for structural reliability. Struct Safety, 2003, 25: 193–199
- Li D Q, Zhang L, Tang X S, et al. Bivariate distribution of shear strength parameters using copulas and its impact on geotechnical system reliability. Comput Geotech, 2015, 68: 184–195
- Papoulis A, Pillai S U. Probability, Random Variables, and Stochastic Process. New York: McGraw-Hill, 2001 [Papoulis A, Pillai S U. 概率、随机变量与随机过程. 保铮, 冯大政, 水鹏朗. 西安: 西安交通大学出版社, 2015]
- China Academy of Building Research-Research Group on Basic Mechanical Properties of Concrete. Research report on reinforced concrete-some basic mechanical properties of concrete (in Chinese). Beijing: China Architecture & Building Press, 1977 [国家建委建筑科学研究院 混凝土基本力学性能研究组. 钢筋混凝土研究报告选集 混凝土的几个基本力学指标. 北京: 中国建筑工业出版社, 1977]
- Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. GB 50010-2010 Code for design of concrete structures (in Chinese). Beijing: China Architecture & Building Press, 2010 [中华人民共和国住房和城乡建设部组织. GB 50010-2010 混凝土结构设计规范. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010]
- Wan Z Y, Ren X D, Li J. Uniaxial elasto-plastic damage model for confined concrete (in Chinese). J Build Struct, 2014, 35: 178–184 [万增勇, 任晓丹, 李杰. 箍筋约束混凝土单轴拉压弹塑性损伤本构模型. 建筑结构学报, 2014, 35: 178–184]
- Li J, Wu J Y, Chen J B. Stochastic Damage Mechanics of Concrete Structures (in Chinese). Beijing: Science Press, 2014 [李杰, 吴建营, 陈建兵. 混凝土随机损伤力学. 北京: 科学出版社, 2014]
- Li J. Physical stochastic models for the dynamic excitations of engineering structures. In: Li J, Chen J B, eds. Advances in Theory and Application of Random Vibration (in Chinese). Shanghai: Tongji University Press, 2009: 119–132 [李杰. 工程结构随机动力激励的物理模型. 见: 李杰, 陈建兵, 编. 随机振动理论与应用新进展. 上海: 同济大学出版社, 2009. 119–132]

- 15 Li J, Yan Q, Chen J B. Stochastic modeling of engineering dynamic excitations for stochastic dynamics of structures. *Probab Eng Mech*, 2012, 27: 19–28
- 16 Wei J. An approach on the relation between elastic modulus and strength of concrete (in Chinese). *J Zhengzhou Univ (Eng Sci)*, 1987, 3: 13–16 [卫军. 关于砼的弹性模量与强度的关系之探讨. *郑州大学学报(工学版)*, 1987, 3: 13–16]
- 17 Wu L X, Huo J H. A theoretical basis of equation of correlation between strength and elastic modulus of concrete (in Chinese). *J Chongqing Instit Architect Eng*, 1993, 15: 31–35 [吴礼贤, 霍津海. 混凝土抗压强度与弹模关系式的理论基础. *重庆建筑工程学院学报*, 1993, 15: 31–35]
- 18 Li J, Chen J B. *Stochastic Dynamics of Structures*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009

Random function model for dependent random variables

CHEN JianBing^{1*}, WAN ZhiQiang¹ & SONG PengYan²

¹ *School of Civil Engineering & State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;*

² *College of Civil Engineering and Architecture, Hebei University, Baoding 071002, China*

To characterize the dependency between basic random variables is of paramount importance in engineering practice. However, it is usually difficult to deal with joint probability density function of dependent variates directly. In the present paper, a random function model is proposed for the probabilistic description of 2-dimensional dependent random variables. This random function converts a 2-dimensional dependent random vector into an independent random vector. The undetermined functions in the random function model are found to be the conditional mean and conditional standard deviation function, which could be further specified by observed data. Specifically, in the present paper it is suggested that the shape of the undetermined function, i.e., the conditional mean and standard deviation function in this case, be extracted based on the insight into the embedded physical mechanism, and then the undetermined parameters be identified from observed data. The procedure is illustrated in detail by adopting the relationship between the modulus of elasticity and compressive strength of concrete as an example. The one-dimensional damage evolution mechanism is firstly introduced, yielding the lower limit of the data. Then the viscoelasticity mechanism is advocated to determine the shapes of conditional mean and conditional standard deviation function. The parameters of the model are consequently identified from experimental data. Thereby, a pragmatic model, which could character the dependency between the modulus of elasticity and compressive strength, is proposed for engineering purposes. The comparison to the Copula model shows that the proposed model could capture the probabilistic characteristics of observed data. It is noted that in the proposed model the random function is weakly nonlinear and thus will not worsen the well-posedness of the problem. Besides, the direct dealing with joint probability density function is avoided. The proposed approach could be extended to the probabilistic description of more non-independent random variables.

correlation, random function model, concrete, compressive strength, modulus of elasticity, experimental data

PACS: 02.70.Uu, 02.50.Ng, 02.50.-r, 46.65.+g, 46.70.-p

doi: [10.1360/SSPMA2017-00107](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00107)