RELATIONS DE DOMINATION ENTRE OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

PAR

FRANÇOIS TRÈVES

Paris

Table des matières

1 – 593801. *Acta mathematica*. 101. Imprimé le 7 avril 1959.

Introduction

L'objet de ce travail est l'étude d'une méthode de comparaison, que nous croyons nouvelle, des opérateurs différentiels. Dans le cas le plus important considéré ici, lorsque par exemple $P(D)$ et $Q(D)$ sont deux polynômes différentiels à coefficients constants et Ω est un ouvert de R^n, nous chercherons, pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction mesurable et localement bornée g_ε telle qu'on ait:

$$\| g_\varepsilon Q(D) \varphi \|_{L^2} \leqslant \varepsilon \| g_\varepsilon P(D) \varphi \|_{L^2} \tag{1}$$

pour toute fonction φ indéfiniment dérivable, à support compact contenu dans Ω; et si de telles fonctions g_ε existent, nous dirons que $P(D)$ domine $Q(D)$ sur Ω. Plus généralement, la domination consistera en des changements de norme, dans un espace fonctionnel, susceptibles de rendre la « contribution » d'un opérateur donné, arbitrairement petite si on la compare à celle d'un certain autre. Les deux premiers paragraphes du chapitre I précisent, dans une situation assez générale, cette notion de domination et en fournissent les premières règles de maniement.

Les fonctions g_ε pouvant figurer dans (1) forment, lorsque $\varepsilon \to 0$, ce que nous appelons une base de domination de $Q(D)$ par $P(D)$. Il nous a paru naturel, dans le cas des coefficients constants, de ne considérer, pour commencer, que des bases constituées d'exponentielles

$$\exp\,(h_1 x_1 + \cdots + h_n x_n) \qquad (h_1, \ldots, h_n \text{ réels}).\,(^1)$$

Ces fonctions sont en effet intimement liées à la structure de groupe additif de R^n et donc aux opérateurs différentiels invariants par le groupe, c'est-à-dire à coefficients constants. Il s'ensuit que leur utilisation bénéficie des techniques classiques, et, au premier rang d'entre elles, de la transformation de Fourier. Dans ce même ordre d'idées, les procédés mis au point par M. L. Hörmander dans sa thèse admettent une extension immédiate qui rend d'inappréciables services. Cette extension et ses premières conséquences font l'objet du paragraphe 3 du chapitre I. (2)

---

(1) La domination correspondante est dite « exponentielle ».

(2) Apres le ronéotypage du present travail, j'ai eu connaissance de l'article [7] de Mr. L. Nirenberg, dans lequel se trouve définie une notion assez voisine de la domination exponentielle. Cependant, les différences entre les définitions de Nirenberg et les nôtres sont assez profondes, ne serait-ce que par le rôle, joué dans la domination, par ε! Nirenberg utilise la relation par lui définie pour prouver l'unicité des solutions de certains problèmes de Cauchy. Sur le même sujet, est paru récemment un article de Hörmander ([3]), qui utilise à la fois les définitions de Nirenberg et notre théorème 4.4 (relatif à une domination multiplicative mais non exponentielle).

A l'origine, notre intention était d'exploiter l'existence d'une domination, du genre de celle que traduit (1), pour prouver l'inversibilité (au sens de certains espaces de fonctions ou de distributions) d'opérateurs du type $P(D)+a(x)Q(D)$, où $a(x)$ est mesurable et localement bornée. Mais évidemment, il convenait d'abord de reconnaître les opérateurs qui possèdent de bonnes propriétés de domination, propriétés dont deux s'imposaient, avant toute autre, à l'esprit : que l'opérateur étudié domine l'identité (qu'il soit ce que nous appelons *dominant*) ; qu'il domine tout opérateur d'ordre strictement inférieur au sien. Sur la première de ces questions, nous aboutissions au résultat suivant : les opérateurs qui ne dominent pas (pour des bases formées d'exponentielles) l'identité sont tous « fabriqués » à partir de l'un d'entre eux, qui n'est autre que l'opérateur de Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Ce résultat est précisé et démontré dans le paragraphe 4 du chapitre I.

Quant à la seconde question, elle nous a conduits à une nouvelle caractérisation des opérateurs hyperboliques : ce sont précisément ceux qui dominent tous les opérateurs d'ordre strictement inférieur au leur. Et cette caractérisation, à condition de rendre la domination locale, s'étend aux hyperboliques à coefficients variables. Par des techniques directement inspirées de celles qui nous ont conduits là, on obtient une caractérisation (toujours basée sur l'ensemble des opérateurs dominés) des opérateurs paraboliques, au sens de Petrowsky, à coefficients constants ou variables. Ces résultats se trouvent exposés dans le chapitre II.

Jusque là, les bases de domination restaient formées d'exponentielles. Il nous a semblé utile de les enrichir, en essayant de conserver les propriétés valables avec les exponentielles. C'est le but de la première partie du chapitre III. Toutefois, nous nous sommes limités aux opérateurs hyperboliques normaux ou paraboliques (tout ceci relativement à une direction privilégiée x_1) et aux bases formées de fonctions de la seule variable x_1. On constate alors que les propriétés du chapitre II se prolongent convenablement. Cet accroissement des bases de domination permet, dans le cas des coefficients variables, de sortir du cadre local, qui était celui du chapitre II, et d'établir les dominations pour une certaine classe d'ouverts non bornés. Du même coup, les dominations acquièrent une signification invariante par changement local de coordonnées.

Les caractérisations du chapitre II présentent cet intérêt, de ne plus faire intervenir les racines du polynôme associé à la partie principale de l'opérateur différentiel.

Elles suggèrent une définition des opérateurs hyperboliques ou paraboliques qui auraient comme coefficients des opérateurs d'un espace vectoriel topologique dans un autre. Sans nous avancer dans cette voie, nous avons cependant étudié une catégorie d'opérateurs différentiels à une variable, ayant comme coefficients (non constants) des opérateurs dans des espaces hilbertiens. Cette étude occupe la seconde partie du chapitre III. En utilisant systématiquement le fait que d^k/dt^k (k entier $\geqslant 0$ ou < 0) domine, suivant des bases formées de fonctions de t arbitrairement croissantes, tous les opérateurs d^h/dt^h pour $h < k$, nous établissons trois inégalités (prop. 3.1, 3.2 et 3.3), utilisées ensuite pour résoudre une classe de problèmes aux limities de type mixte (posés au sens de M. J. L. Lions). Ces problèmes ont déjà été résolus par divers auteurs. Cependant, le théorème central du traitement proposé ici (théorème 3.7) est, à notre connaissance, nouveau.

Dans le chapitre IV, nous considérons d'autres dominations que celles intervenues jusqu'ici: dans le premier paragraphe, les fonctions g_ε de (1) sont remplacées par des opérateurs multiplicatifs en x_1 et « convolutifs » en $x_2, \ldots, x_n$; dans le deuxième paragraphe, on prend pour g_ε, opérant de nouveau multiplicativement, des fonctions du type exp $(\varepsilon^{-2}|x|^2)$. On démontre un résultat vrai pour tout opérateur à coefficients constants $P(D)$, disant que, suivant des bases ainsi choisies, $P(D)$ domine tous ses dérivés $P^{(p)}(D)$, et cela, sur R^n entier. En particulier, en ce sens, $P(D)$ est dominant.

La plus grande partie de ce travail a été résumée dans les notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ([11], [12], [13], [14], [15]).

Nous tenons à exprimer notre vive gratitude à M. L. Schwartz pour ses encouragements et ses conseils. Sur la question des problèmes mixtes, nous avons eu la chance d'entrer en rapport avec M. J. L. Lions; ses nombreuses suggestions nous furent toutes précieuses. M. M. Schwartz et Lions ont revu et corrigé notre travail.

M. L. Hörmander a bien voulu nous communiquer une démonstration nouvelle du théorème de caractérisation des opérateurs dominants (th. 1.4), démonstration que nous nous sommes permis de substituer à celle d'origine, bien moins élégante.

Je tiens enfin à remercier M. M. Véron, sans lequel je n'aurais pu poursuivre les recherches qui ont trouvé leur aboutissement ici, et M. R. Pallu de la Barrière, sans lequel elles n'auraient jamais eu de début.

CHAPITRE I

Généralités sur la dom ation

§ 1. Définitions et énoncés eneraux

On considère un espace vectoriel E (sans topol gie) et un espace normé F, dont la norme sera notée $\| \ \|$; $L(E; F)$ désignera l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, $L_b(F)$ celui des opérateurs bornés e F, muni de la norme usuelle, notée elle aussi $\| \ \|$ (aucune confusion n'est à crai: dre); Aut (F) sera le groupe des opérateurs inversibles et bicontinus de F sur lui-mê e.

DÉFINITION 1.1. *Soient $\mathcal{S}$ un sous-ensemble T un élément de $L(E; F)$. Nous dirons que $\mathcal{S}$ domine uniformément T dans $L(E$;) si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $U \in$ Aut (F) tel que :*

$$\| U(Tx) \| \leqslant \varepsilon \sup_{S \in \mathcal{S}} \| U(Sx) \| \quad \textit{quel ue soit } x \in E.$$

Dans toute la suite, exception faite de la fin u présent chapitre, l'ensemble $\mathcal{S}$ se réduira à un seul élément S; nous dirons, dans ce cas, que S domine uniformément T dans $L(E; F)$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, on ut trouver $U \in$ Aut (F) tel que $\| U(Tx) \| \leqslant \varepsilon \| U(Sx) \|$ quel que soit $x \in E$.

DÉFINITION 1.2. *Supposons que E soit un sous-espace vectoriel de F. Nous dirons que $\mathcal{S} \subset L(E; F)$ est uniformément dominant d s $L(E; F)$ si $\mathcal{S}$ domine uniformément, dans $L(E; F)$, l'injection canonique de E dans F.*

Ici encore, lorsque $\mathcal{S}$ se réduit à un seul élém t S, nous dirons de S qu'il est uniformément dominant dans $L(E; F)$.

DÉFINITION 1.3. *Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ deux sous-en mbles de $L(E; F)$. Nous dirons que $\mathcal{S}$ équidomine uniformément $\mathcal{T}$ dans $L(E; F)$ si, tout $\varepsilon > 0$, correspond $U \in$ Aut (F) tel que :*

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \| U(Tx) \| \leqslant \varepsilon \sup_{S \in \mathcal{S}} \| T(Sx) \| \quad \textit{qu que soit } x \in E.$$

DÉFINITION 1.4. *Supposons que $\mathcal{S}$ équidomi uniformément $\mathcal{T}$ dans $L(E; F)$. Un sous-ensemble $\mathcal{U}$ de* Aut (F) *sera appelé une ba de domination de $\mathcal{T}$ par $\mathcal{S}$ dans $L(E; F)$ si, à tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre $\in \mathcal{U}$ tel que :*

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \| U(Tx) \| \leqslant \varepsilon \sup_{S \in \mathcal{S}} \| U(Sx) \| \quad \textit{qu que soit } x \in E.$$

Dans ce qui va suivre immédiatement, nous nous limiterons au cas où $\mathcal{S}$ est réduit à un élément unique $S \in L(E; F)$. Mais bon nombre des énoncés qu'on rencontrera se généralisent directement au cas où $\mathcal{S}$ contient un nombre quelconque d'éléments.

PROPOSITION 1.1. *Supposons que S équidomine uniformément $\mathcal{T}$ dans $L(E; F)$ suivant une base de domination $\mathcal{U}$. Alors :*

1° *Soient un espace vectoriel G et $u \in L(G; E)$. $S \circ u$ équidomine uniformément dans $L(G; F)$ l'ensemble des $T \circ u$, $T \in \mathcal{T}$, suivant la base $\mathcal{U}$.*

2° *Quel que soit $T_0 \in \mathcal{T}$, $S + T_0$ équidomine uniformément $\mathcal{T}$ dans $L(E; F)$ suivant la base $\mathcal{U}$.*

3° *Quel que soit l'entier $r \geqslant 1$, S équidomine uniformément dans $L(E; F)$ suivant la base $\mathcal{U}$ l'ensemble $\overbrace{\mathcal{T} + \cdots + \mathcal{T}}^{r}$.*

Bornons-nous à démontrer 2°, le reste étant à peu près évident. Par hypothèse, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\|U T x\| \leqslant \varepsilon \|U S x\|$ pour tout $x \in E$ et tout $T \in \mathcal{T}$. Donc : $\|U T x\| \leqslant \varepsilon (\|U (S + T_0) x\| + \|U T_0 x\|)$, qui, appliqué à $T = T_0$, donne :

$$\|U T_0 x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \|U (S + T_0) x\|.$$

En revenant en arrière,

$$\|U T x\| \leqslant \frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon} \|U (S + T_0) x\|,$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE. *Si S équidomine uniformément $\mathcal{T}$ dans $L(E; F)$ suivant une base de domination $\mathcal{U}$, quelle que soit la famille finie (T_i) $(1 \leqslant i \leqslant r)$ extraite de $\mathcal{T}$, S domine uniformément $T_1 + \cdots + T_r$ dans $L(E; F)$ suivant la base $\mathcal{U}$.*

PROPOSITION 1.2. *Supposons que S équidomine uniformément $\mathcal{T}$ dans $L(E; F)$ suivant une base de domination $\mathcal{U}$, et qu'on ait fait correspondre, à chaque $T \in \mathcal{T}$, un opérateur $A_T \in L_b(F)$ de manière que :*

a. *Il existe $M < +\infty$ tel que $\|A_T\| \leqslant M$ pour tout $T \in \mathcal{T}$.*

b. *A_T et U commutent, quels que soient $T \in \mathcal{T}$ et $U \in \mathcal{U}$.*

Dans ces conditions, S équidomine uniformément, dans $L(E; F)$, l'ensemble des $A_T \circ T$, T parcourant $\mathcal{T}$, suivant la base $\mathcal{U}$.

Immédiat, puisque $\|U (A_T T x)\| = \|A_T (U T x)\| \leqslant M \|U T x\|$ pour tout $x \in E$.

Un certain nombre d'applications de la domination tirent leur possibilité du théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. *Si S domine uniformément T dans $L(E; F)$, il existe deux constantes finies A_1, A_2 telles que :*

$$\|Sx\| \leqslant A_1 \|(S+T)x\| \leqslant A_2 \|Sx\| \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

Preuve immédiate : il existe $U \in \operatorname{Aut}(F)$ tel que $\|UTx\| \leqslant \frac{1}{2} \|USx\|$ pour tout $x \in E$. Mais alors $\|USx\| \leqslant \|U(S+T)x\| + \|UTx\|$ implique $\|USx\| \leqslant 2\|U(S+T)x\|$, d'où:

$$\|Sx\| \leqslant \|U^{-1}\| \, \|USx\| \leqslant 2\|U^{-1}\| \, \|U(S+T)x\| \leqslant 2\|U^{-1}\| \, \|U\| \, \|(S+T)x\|$$

ce qui fournit la première inégalité. Pour la seconde, remarquons qu'avec le même choix de U, on a:

$$\|U(S+T)x\| \leqslant \|USx\| + \tfrac{1}{2}\|USx\| = \tfrac{3}{2}\|USx\|.$$

D'où :
$$\|(S+T)x\| \leqslant \|U^{-1}\| \, \|U(S+T)x\| \leqslant \tfrac{3}{2}\|U^{-1}\| \, \|U\| \, \|Sx\|.$$

Voici maintenant quelques renseignements complémentaires :

PROPOSITION 1.3. *Supposons que S domine uniformément T dans $L(E; F)$ et que T ne soit pas nul. Alors, à tout $M < +\infty$, on peut faire correspondre $\varepsilon > 0$ tel que $\|UTx\| \leqslant \varepsilon \|USx\|$, pour tout $x \in E$, implique $\|U\| \, \|U^{-1}\| \geqslant M$ ($U \in \operatorname{Aut}(F)$).*

En effet, il existe $x_0 \in E$ tel que $Tx_0 \neq 0$. Puisque S domine uniformément T, on ne peut avoir $Sx_0 = 0$. Mais alors $\|UTx_0\| \leqslant \varepsilon \|USx_0\|$ implique :

$$\|Tx_0\| \leqslant \|U^{-1}\| \, \|UTx_0\| \leqslant \|U^{-1}\| \, \|U\| \, \|Sx_0\|$$

et en posant $c = \|Tx_0\| / \|Sx_0\|$, on voit que ceci implique $c/\varepsilon \leqslant \|U^{-1}\|$, d'où le résultat.

PROPOSITION 1.4. *Supposons que E soit un sous-espace vectoriel partout dense de F et que S soit uniformément dominant dans $L(E; F)$. Alors S ne peut être un opérateur borné (pour la norme $\| \ \|$) de E dans F.*

Supposons que S soit borné. A tout $\varepsilon > 0$ correspond $U_\varepsilon \in \operatorname{Aut}(F)$ tel que $\|U_\varepsilon x\| \leqslant \varepsilon \|U_\varepsilon Sx\|$ pour tout $x \in E$. Quel que soit $\eta > 0$, du fait que E est dense dans F, il existe un élément $x_{\varepsilon,\eta}$ de E, $\|x_{\varepsilon,\eta}\| = 1$, tel que $\|U_\varepsilon\| - \eta \leqslant \|U_\varepsilon x_{\varepsilon,\eta}\|$, d'où

$$\frac{1}{\varepsilon}(\|U_\varepsilon\| - \eta) \leqslant \|U_\varepsilon S x_{\varepsilon,\eta}\| \leqslant \|U_\varepsilon\| \, \|S\|$$

et comme η est arbitrairement petit, ceci signifie $1 \leqslant \varepsilon \| S \|$. Mais ε est aussi arbitrairement petit.

Remarque. La prop. 1.4 cesse d'être exacte si on supprime la condition : E dense dans F, ou bien si on remplace la condition : S uniformément dominant par : S domine uniformément au moins un élément T de $L(E; F)$.

PROPOSITION 1.5. *Supposons que E soit un sous-espace vectoriel de F et que S soit uniformément dominant dans $L(E; F)$. Alors S ne peut avoir de vecteur propre.*

Car si on avait $S x_0 = z x_0$ (z : nombre complexe) pour un certain $x_0 \in E$, on aurait $\| U x_0 \| \leqslant |z| \varepsilon \| U x_0 \|$ ($\varepsilon > 0$, $U \in \mathrm{Aut}\,(F)$), soit $1 \leqslant |z| \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui est absurde.

COROLLAIRE. *Si S est uniformément dominant dans $L(E; F)$, aucun sous-espace de dimension finie de E ne peut être stable par S.*

Dans tous les cas que nous aurons à considérer, F sera un espace hilbertien. Le th. 1.1 admet alors une interprétation commode, à savoir qu'il existe un opérateur borné G de F, de norme $\leqslant A_1$, tel que $G(T+S)x = Sx$ pour tout $x \in E$. On peut préciser cela ainsi :

THÉORÈME 1.2. *Supposons que F soit hilbertien et que S domine uniformément T dans $L(E; F)$. Il existe un isomorphisme vectoriel-topologique (pour la norme $\| \ \|$) de F sur lui-même, G, tel que $G(S+T)x = Sx$ pour tout $x \in E$.*

Il existe $U \in \mathrm{Aut}\,(F)$ tel que $\| U T x \| \leqslant \frac{1}{2} \| U S x \|$ pour tout $x \in E$. Définissons alors une application J de F dans lui-même de la façon habituelle : $J = 0$ sur l'orthogonal (dans F) de USE; si $y = USx$, $x \in E$, $Jy = UTx$ et par continuité, J se prolonge à l'adhérence de USE dans F. Ainsi J est définie sur F entier; $\| J \| \leqslant \frac{1}{2}$ d'après la majoration précédente. D'où résulte que la série $\sum_{k=0}^{\infty}{}' (-1)^k J^k$ converge vers $H \in L_b(F)$; H est l'inverse de $I + J$: c'est donc un élément de Aut (F) et $(I+J) U S x = U(S+T)x$ implique $Sx = U^{-1} H U (S+T) x$ (pour tout $x \in E$); $G = U^{-1} H U$ répond aux conditions de l'énoncé.

Il conviendrait maintenant d'introduire la dualité, en munissant E d'une topologie (assez fine : plus fine, par exemple lorsque E est plongé dans F, que celle induite par F), et les transposés ${}^tS$, ${}^tT$, etc. des opérateurs étudiés. Le théorème 1.2 permettrait alors, dans les circonstances favorables (le plus souvent réalisées en pratique) d'établir des isomorphies entre espaces de solutions des équations $({}^tS + {}^tT) f = 0$

et ${}^tS\,F=0$. Tout ceci demanderait bien entendu à être précisé mais ne comporte aucune difficulté.

La domination uniforme, qui vient d'être définie, est une notion beaucoup trop étroite pour les applications que nous avons en vue. Dans presque toutes les circonstances, il nous faudra faire appel à un concept plus large, qui constituera la domination proprement dite. Nous ne chercherons cependant pas à en donner une définition générale; nous nous bornerons au cas des opérateurs différentiels, avec des espaces E et F de fonctions et de distributions. Mais auparavant nous allons examiner rapidement un cas typique, qui indique, à lui tout seul, la voie à suivre.

Plaçons-nous sur la droite réelle, dont la variable sera notée t; soit L^2 l'espace des classes de fonctions de t de carré sommable et $\mathcal{D}$ le sous-espace de L^2 formé des classes qui ont un représentant indéfiniment dérivable à support compact.

Soit $p(t)$ une fonction une fois continûment dérivable sur la droite, à valeurs réelles, vérifiant $|p'(t)|>0$ pour tout t. On peut écrire :

$$(e^{-p(t)}\varphi', e^{-p(t)}\varphi)_{L^2} = -(e^{-p(t)}\varphi, e^{-p(t)}\varphi')_{L^2} + 2(p'(t)\,e^{-p(t)}\varphi, e^{-p(t)}\varphi)_{L^2}$$

quelle que soit $\varphi\in\mathcal{D}$; et donc :

$$\operatorname{Re}\left(e^{-p(t)}\frac{d\varphi}{dt}, e^{-p(t)}\varphi\right)_{L^2} = \int p'(t)\,|e^{-p(t)}\varphi|^2\,dt. \tag{1}$$

Soit alors un ouvert borné Ω de la droite. Il existe un nombre $c_\Omega>0$ tel que $|p'(t)|\geqslant c_\Omega$ pour tout $t\in\Omega$. En remarquant que $p'(t)$ ne change jamais de signe, et en appliquant l'inégalité de Schwarz au 1^er^ membre de (1), on voit que :

$$\|e^{-p(t)}\varphi\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{c_\Omega}\left\|e^{-p(t)}\frac{d\varphi}{dt}\right\|_{L^2} \tag{2}$$

pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ (i.e. $\varphi\in\mathcal{D}$ et a son support dans Ω). On peut d'ailleurs, dans cette inégalité, remplacer φ par $D^h\varphi$ (h : entier $\geqslant 0$ quelconque); par itération, on obtient aussitôt :

$$\|e^{-p(t)}D^h\varphi\|_{L^2} \leqslant c_\Omega^{-(k-h)}\|e^{-p(t)}D^k\varphi\|_{L^2} \tag{3}$$

pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ et tout couple d'entiers $0\leqslant h\leqslant k$.

Nous rencontrerons ultérieurement diverses généralisations de ce très simple résultat. Il résulte de (3) que D^k domine uniformément D^h dans $L(E;F)$ lorsqu'on choisit pour E $\mathcal{D}(\Omega)$ et pour F l'espace $L^2(\Omega)$ des classes de fonctions définies et de carré sommable dans Ω. Comme base de domination, on pourra prendre n'importe quelle suite de fonctions (opérant multiplicativement) $\exp p_n(t)$ $(n=1,\ldots)$, où $p_n(t)$

est à valeurs réelles, une fois continûment dérivable, vérifiant $|p_n'(t)|>0$ pour tout t réel et $|p_n'(t)|\geqslant n$ pour tout $t\in\Omega$.

Mais on peut tirer davantage de la majoration (3). Imposons en effet aux $p_n(t)$ de vérifier $|p_n'(t)|\geqslant n$ pour tout t réel ($n=1, \ldots$) et non seulement pour tout $t\in\Omega$. Cette suite de fonctions (opérant multiplicativement) constitue une base de domination de D^h par D^k dans $L(\mathcal{D}(\Omega);\, L^2(\Omega))$ *quel que soit l'ouvert* Ω *de la droite*. On a même :

$$\|e^{-p_n(t)}D^h\varphi\|_{L^2}\leqslant n^{-(k-h)}\|e^{-p_n(t)}D^k\varphi\|_{L^2} \tag{4}$$

pour *toute* $\varphi\in\mathcal{D}$. Mais cela ne signifie nullement que D^k domine uniformément D^h, suivant la base formée des $\exp p_n(t)$, dans $L(\mathcal{D};\, L^2)$. En effet, conformément à nos définitions, il faudrait pour cela que la multiplication par $\exp p_n(t)$ soit un isomorphisme vectoriel-topologique de L^2 sur lui-même, c'est-à-dire, par conséquent, que $p_n(t)$ soit bornée sur toute la droite, ce que contredit la condition $|p_n'(t)|\geqslant n$ pour tout t. Oublions le fait que la majoration (4) est valable pour toute $\varphi\in\mathcal{D}$, c'est-à-dire que le choix de $p_n(t)$, fixé par le désir d'avoir (4) avec $1/n$ aussi petit qu'on l'aura voulu, ne dépend pas du support de φ, ce qui constitue une circonstance très favorable et relativement exceptionnelle. Il reste que nous nous trouvons dans la situation suivante : nous avons affaire à deux opérateurs $S, T\in L(E;\, F)$; E s'exprime comme réunion de sous-espaces E_i $(i\in J)$, chaque E_i étant appliqué par S et T dans un sous-espace F_i de F. La restriction S_i de S à E_i domine uniformément la restriction T_i de T à E_i dans $L(E_i;\, F_i)$. De plus, il existe une famille $\mathcal{U}$ d'opérateurs de F, « non partout définis », mais définis sur la réunion F' des F_i $(i\in J)$, telle que, pour chaque $i\in J$, le passage à la restriction à F_i en fasse un ensemble d'opérateurs bornés et inversibles de F_i sur lui-même et une base de domination de T_i par S_i dans $L(E_i;\, F_i)$. Ceci décrit exactement, dans le cas général, ce que sera la domination telle que nous la rencontrerons dans la suite.

§ 2. Opérateurs différentiels et domination

Nous commencerons par exposer les notations qui seront utilisées dans tout le cours de ce travail.

Les opérateurs différentiels, les fonctions, les distributions, etc. seront définis dans R^n, dont la variable sera notée $x=(x_1, \ldots, x_n)$, ou bien $y=(y_1, \ldots, y_n)$, etc.

N désignera l'ensemble des entiers $\geqslant 0$; N^n celui des n-uplets $(p_1, \ldots, p_n)$ de tels entiers. On supposera N^n muni de la loi additive usuelle. Conformément à une coutume désormais bien établie, à $p\in N^n$ nous pourrons associer les « factorielles »

$p! = p_1! \ldots p_n!$ et l'entier $|p| = p_1 + \cdots + p_n$. Nous écrirons aussi $\binom{p}{q} = \binom{p_1}{q_1} \cdots \binom{p_n}{q_n}$ pour $p, q \in N^n$, $p_j \geqslant q_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Pour tout système $z = (z_1, \ldots, z_n)$ de n nombres complexes, il nous arrivera d'employer la notation z^p pour désigner le produit $z_1^{p_1} \ldots z_n^{p_n}$.

Voici maintenant une notation à laquelle nous aurons recours constamment : si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, nous poserons $x^0 = (x_2, \ldots, x_n)$ $(\in R^{n-1})$. Analogue pour y, ou bien pour $z \in C^n$. De même, si $p \in N^n$, $p^0 = (p_2, \ldots, p_n) \in N^{n-1}$. Et aussi, si X désigne un système de n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$, X^0 désignera le « sous-système » $X_2, \ldots, X_n$. Etc.

Pour les espaces fonctionnels, nous utiliserons les notations classiques en théorie des distributions. Par exemple, si T est une distribution tempérée sur R^n, i.e. si $T \in \mathcal{S}'_x$, nous noterons $\hat{T}$ sa transformée de Fourier. Le plus souvent, la variable côté image de Fourier sera y, celle côté objet étant x. Précisons néanmoins que la transformation de Fourier sera supposée opérer ainsi, sur $\mathcal{D}_x$ par exemple :

$$\hat{\varphi}(y) = \int \varphi(x) \exp(-2i\pi \langle x, y \rangle)\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

où $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Nous désignerons par $P(D)$ l'opérateur différentiel à coefficients constants sur R^n obtenu en substituant, dans le polynôme $P(X) \in C[X_1, \ldots, X_n]$ (i.e. à coefficients complexes, à n indéterminées) la dérivation $(1/2i\pi)(\partial/\partial x_j)$ à l'indéterminée X_j $(j = 1, \ldots, n)$. L'opérateur $P^{(p)}(D)$, $p \in N^n$, sera associé, conformément à cette règle, au polynôme

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{|p|} \frac{\partial^{p_1}}{\partial X_1^{p_1}} \cdots \frac{\partial^{p_n}}{\partial X_1^{p_n}} P(X).$$

Mais nous nous permettrons une importante dérogation à cette convention : nous désignerons par D^p le monôme de dérivation $\partial^{p_1}/\partial x_1^{p_1} \ldots \partial^{p_n}/\partial x_n^{p_n}$. Nous espérons que le lecteur éventuel voudra bien nous pardonner cette grave incohérence. La signification de D^p est désormais classique en théorie des distributions et nous est si familière que nous n'avons pas su nous en affranchir. Mais, d'autre part, l'emploi incessant de la transformation de Fourier nous a contraints à attribuer à $P(D)$ le sens défini ci-dessus.

Nous noterons $\tilde{P}(D)$ l'adjoint de $P(D)$, c'est-à-dire le conjugué du transposé de $P(D)$ (par exemple, pour la dualité entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$). Si $\bar{P}(X)$ désigne le polynôme obtenu en remplaçant, dans $P(X)$, chaque coefficient par son complexe conjugué, on aura $\tilde{P}(D) = \bar{P}(D)$.

Il faut faire attention au fait suivant : si $\tilde{P}(D)$ est l'adjoint de $P(D)$, celui de

$P^{(p)}(D)$ sera $(-1)^{|p|}(\tilde{P})^{(p)}(D)$ $(p \in N^n)$. Il suffit de faire la vérification pour $P(D) = = \partial/\partial x_1$ dont l'adjoint est $-\partial/\partial x_1$; or $P^{(1,0,\ldots,0)}(D) = 1$ et est son propre adjoint, alors que $(\tilde{P})^{(1,0,\ldots,0)}(D) = -1$.

On a intérêt à utiliser des notations analogues pour les opérateurs à coefficients variables. En notant $\mathfrak{F}(x)$ l'anneau des fonctions définies dans R^n, à valeurs complexes, soit $P(x, X)$ un élément quelconque de $\mathfrak{F}(x)[X_1, \ldots, X_n]$; $P(x, D)$ sera l'opérateur différentiel obtenu par les subsitutions $X_j \to (1/2i\pi)(\partial/\partial x_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ dans $P(x, X)$. On définit, comme on l'a fait dans le cas des coefficients constants, les opérateurs dérivés $P^{(p)}(x, D)$. On peut aussi le faire par récurrence, à partir de :

$$P^{(1,0,\ldots,0)}(x, D)\varphi = [P(x, D), x_1]\varphi = P(x, D)(x_1\varphi) - x_1 P(x, D)\varphi.$$

Généralisant ceci, voici la formule de Leibniz ([2], formule 2.1.6):

$$P(x, D)(uv) = \sum_{p \in N^n} \frac{1}{p!} D^p u \, P^{(p)}(x, D) v \quad (u, v \in \mathcal{E}_x \quad \text{par exemple}).$$

Nous noterons $\tilde{P}(x, D)$ l'adjoint (lorsqu'il existe) de $P(x, D)$; il se calcule en prolongeant par linéarité la formule $(a(x)D^p)^{\sim} = (-1)^{|p|} D^p \cdot \overline{a(x)}$.

Définition 1.5. *Soient deux opérateurs différentiels à coefficients constants $P(D)$, $Q(D)$ sur R^n. Nous dirons que $P(D)$ et $Q(D)$ sont semblables s'il existe un automorphisme vectoriel u de R^n tel que $Q(y) = P(u \cdot y)$.*

$u \cdot y$ a un sens évident : si l'automorphisme u est représenté, dans le système d'axes cartésiens Oy_j, par la matrice u_j^i, $u \cdot y$ a comme coordonnées les $\sum_{i=1}^{n} u_j^i y_i$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Nous allons maintenant aborder l'étude de la domination dans le cas des opérateurs différentiels.

Ω désignera un ouvert de R^n. Ce qui va jouer le rôle de l'espace E sera l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables dans R^n à support compact contenu dans Ω; F sera l'espace $L^2(\Omega)$ avec sa norme habituelle. Lorsque $\Omega = R^n$, nous omettrons le plus souvent la mention (R^n) : nous écrirons $\mathcal{D}$, L^2, etc.

Dans tout le présent travail, les fonctions et les distributions auront des valeurs scalaires (i.e. complexes), sauf dans la dernière partie du chapitre III, où nous considèrerons des distributions à valeurs dans un espace de Banach.

Il est bien évident que les coefficients des opérateurs différentiels qu'il nous arrivera d'étudier ne seront pas des fonctions quelconques. Il s'agira toujours de fonctions au moins localement-L^∞ et souvent soumises à des conditions supplémentaires. Nous désignerons par L^{∞}_{loc} l'algèbre des (classes de) fonctions dont la restriction à tout ouvert borné Ω de R^n oppartient à $L^{\infty}(\Omega)$.

Nous n'allons pas étudier la domination, entre opérateurs différentiels, au sens le plus général. Aussi nous faudra-t-il distinguer certaines catégories, commodes à manipuler, de dominations.

Soit un entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Considérons une distribution

$$T(x) \in \mathcal{D}_{x_1, \ldots, x_k} \hat{\otimes} S'_{x_{k+1}, \ldots, x_n}$$

(cela revient à dire que T est tempérée par rapport aux variables $x_{k+1}, \ldots, x_n$). On peut effectuer la transformation de Fourier partielle de T par rapport aux $x_{k+1}, \ldots, x_n$: le résultat sera noté $\ddot{T}(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)$.

Convenons d'appeler *k-borné* tout ouvert U de R^n dont la projection sur le sous-espace $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ est bornée (un ouvert 0-borné est un ouvert quelconque).

DÉFINITION 1.6. *Soit un entier k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Nous dirons qu'une distribution T sur R^n, appartenant à $\mathcal{D}'_{x_1, \ldots, x_k} \hat{\otimes} S'_{x_{k+1}, \ldots, x_n}$, est k-mixte, si $\ddot{T}(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)$ est une fonction des variables x_i et y_j $(1 \leqslant i \leqslant k,\ k+1 \leqslant j \leqslant n)$, dont la restriction à tout ouvert k-borné U de R^n appartient à $L^{\infty}(U)$.*

Nous dirons qu'un opérateur T^* de $\mathcal{D}$ dans L^2 est k-mixte s'il lui correspond une distribution $T(x)$ k-mixte, telle qu'on ait, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$T^* \varphi = \int T(x_1, \ldots, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} - u_{k+1}, \ldots, x_n - u_n)\, d u_{k+1} \ldots d u_n.$$

Nous noterons $\mathfrak{A}^{(k)}$ l'ensemble des opérateurs k-mixtes de $\mathcal{D}$ dans L^2. Il est à peu près évident que $\mathfrak{A}^{(k)}$ est un espace vectoriel et peut être muni d'une structure d'algèbre commutative (sur C). Si S^* et T^* sont deux opérateurs k-mixtes, correspondant respectivement aux distributions k-mixtes S et T, $S^* T^*$ correspondra au produit de S et de T multiplicatif par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_k$ et de convolution par rapport aux $x_{k+1}, \ldots, x_n$, ou, si on préfère, à la transformée de Fourier réciproque, par rapport aux y_j $(k+1 \leqslant j \leqslant n)$, du produit multiplicatif $\ddot{S}\ddot{T}$. $\mathfrak{A}^{(k)}$ est une algèbre avec unité : cette unité est l'opérateur défini par $1(x_1, \ldots, x_k) \otimes \delta(x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

On peut définir $\mathfrak{A}^{(k)}$ pour $k=0$ et pour $k=n$; $\mathfrak{A}^{(0)}$ sera l'algèbre des opérateurs définis par les distributions tempérées sur R^n dont la transformée de Fourier appartient à L^{∞}; son unité correspond à la mesure de Dirac; $\mathfrak{A}^{(n)}$ est tout simplement L^{∞}_{loc}, opérant multiplicativement de $\mathcal{D}$ dans L^2. Toutes les définitions qui suivent et qui portent sur $\mathfrak{A}^{(k)}$ vaudront pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Un ouvert n-borné sera tout simplement un ouvert borné.

Soit $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Nous noterons G_k le groupe des translations, opérant dans R^n, laissant stable le sous-espace $x_1 = \cdots = x_k = 0$. Nous noterons G_0 le groupe de toutes les translations de R^n et G_n le groupe réduit à la seule translation nulle.

Soit U un ouvert k-borné et stable par $G_k (0 \leqslant k \leqslant n)$. Si $k=0$, U est nécessairement identique à R^n (R^n est 0-borné!); si $k=n$, U est un ouvert borné quelconque. Soit T^* un opérateur k-mixte. La restriction de T^* à $\mathcal{D}(U)$ se prolonge en une application linéaire continue de $L^2(U)$ dans lui-même, comme on le vérifie facilement sur la déf. 1.6 (il y a deux choses à vérifier : 1° cette restriction se prolonge en une application linéaire continue de $L^2(U)$ dans L^2, ce qui résulte du fait que U est k-borné; 2° les images, par cette application, des éléments de $\mathcal{D}(U)$, sont des fonctions de L^2 ayant leur support dans U, ce qui résulte du fait que U est stable par G_k).

Supposons maintenant que T^* soit inversible dans $\mathfrak{A}^{(k)}$; alors la restriction de T^* à $\mathcal{D}(U)$ se prolonge en un isomorphisme vectoriel-topologique de $L^2(U)$ sur lui-même.

Tout ceci nous permet de formuler la définition générale de la domination telle qu'elle sera étudiée dans le cours de ce travail.

DÉFINITION 1.7. *Soient k un entier, $0 \leqslant k \leqslant n$, Ω un ouvert de R^n, stable par G_k. Soient des opérateurs différentiels sur R^n, $P_i(x, D)$ $(i \in I)$, $Q_j(x, D)$ $(j \in J)$, I et J étant des ensembles d'indices quelconques. Nous dirons que l'ensemble des $P_i(x, D)$ équidomine au sens k-mixte l'ensemble des $Q_j(x, D)$ sur l'ouvert Ω si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1° *Pour tout ouvert k-borné U, contenu dans Ω et stable par G_k, l'ensemble des $P_i(x, D)$ équidomine uniformément l'ensemble des $Q_j(x, D)$ dans $L(\mathcal{D}(U); L^2(U))$.*

2° *Il existe un sous-ensemble $\mathfrak{U}$ d'éléments inversibles de $\mathfrak{A}^{(k)}$ ayant la propriété suivante : pour chaque ouvert k-borné U, contenu dans Ω et stable par G_k, notons $\mathfrak{U}_U$ l'ensemble d'isomorphismes vectoriels topologiques de $L^2(U)$ sur lui-même défini par restriction à $\mathcal{D}(U)$ et ensuite prolongement par continuité des éléments de $\mathfrak{U}$. Alors $\mathfrak{U}_U$ est une base de domination des $Q_j(x, D)$ par les $P_i(x, D)$ dans $L(\mathcal{D}(U); L^2(U))$.*

DÉFINITION 1.8. *Tout sous-ensemble $\mathfrak{U}$ d'éléments inversibles de $\mathfrak{A}^{(k)}$ pouvant figurer dans la définition* 1.7, 2°, *sera appelé une base de domination k-mixte de l'ensemble des $Q_j(x, D)$ par l'ensemble des $P_i(x, D)$ sur Ω.*

En réalité, parce qu'il n'y aura pas de confusion à craindre, nous dirons toujours *base de domination* au lieu de *base de domination k-mixte*.

DÉFINITION 1.7 bis. *Soient k, $P_i(x, D)$ $(i \in I)$, $Q_j(x, D)$ $(j \in J)$, comme dans la définition 1.7. Soit Ω un ouvert quelconque de R^n. Nous dirons que l'ensemble des $P_i(x, D)$ équidomine au sens k-mixte l'ensemble des $Q_j(x, D)$ sur l'ouvert Ω s'il existe un ouvert Ω', contenant Ω et stable par G_k, tel que l'ensemble des $P_i(x, D)$ équidomine au sens k-mixte l'ensemble des $Q_j(x, D)$ sur Ω'. Dans ce cas, toute base de domination de l'ensemble des $Q_j(x, D)$ par l'ensemble des $P_i(x, D)$ sur Ω' s'appellera aussi une base de domination du premier ensemble par le second sur Ω.*

En vertu de l'importance de ce cas, il nous faut une définition spéciale lorsque $k = n$:

DÉFINITION 1.9. *Soit un ouvert Ω quelconque de R^n. Nous dirons que l'ensemble des $P_i(x, D)$ équidomine multiplicativement l'ensemble des $Q_j(x, D)$ sur Ω s'il l'équidomine au sens n-mixte sur Ω.*

Explicitions un peu cette définition. D'après la déf. 1.7 elle signifie qu'il existe une famille de fonctions $g(x)$ appartenant à L^∞_{loc} (car $\mathfrak{A}^{(n)}$ est l'algèbre d'operateurs définis par de telles fonctions opérant multiplicativement) telles que, pour tout ouvert borné U de R^n, il existe une constante c_U (dépendant de g) telle que $0 < c_U \leqslant |g(x)|$ pour presque tout $x \in \bar{U}$ (ceci correspond à l'inversibilité dans $\mathfrak{A}^{(n)}$), et jouissant de la propriété suivante :

Pour tout ouvert borné U contenu dans Ω et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g(x)$ de la famille telle que

$$\sup_{j \in J} \| g(x) Q_j(x, D) \varphi \|_{L^2} \leqslant \varepsilon \sup_{i \in I} \| g(x) P_i(x, D) \varphi \|_{L^2} \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Il conviendrait de donner, de même, une dénomination particulière à la domination 0-mixte, qui pourrait être appelée *domination convolutive*. Mais nous n'étudierons pas du tout ce genre de domination. En fait, nous n'étudierons qu'un seul type de domination mixte non multiplicative, une domination 1-mixte, avec des bases de domination constituées par des éléments de $\mathfrak{A}^{(1)}$ qui seront définis par des exponentielles en x_1 (chap. IV).

Les bases constituées d'exponentielles joueront un rôle très important dans la suite. Ceci nous incite à poser la définition suivante :

DÉFINITION 1.10. *Soient k, Ω, $P_i(x, D)$, $Q_j(x, D)$ $(i \in I,\ j \in J)$ comme dans la définition 1.7 bis. Nous dirons que l'ensemble des $P_i(x, D)$ équidomine au sens exponentiel k-mixte sur Ω l'ensemble des $Q_j(x, D)$ s'il l'équidomine au sens k-mixte sur Ω, suivant des bases de domination constituées par des éléments T de $\mathfrak{A}^{(k)}$ définis par des distributions T telles que $\ddot{T}$ puisse s'écrire :*

$$\exp\,(-x_1 h_1(y_{k+1}, \ldots, y_n) - \cdots - x_k h_k(y_{k+1}, \ldots, y_n))$$

où les $h_\nu(y_{k+1}, \ldots, y_k)$ $(1 \leqslant \nu \leqslant k)$ *sont des fonctions* L^∞ *des* $y_{k+1}, \ldots, y_n$.

Ici encore, par son importance, le cas $k=n$ a droit à une définition spéciale:

DÉFINITION 1.11. *Soit* Ω *un ouvert quelconque de* R^n. *Nous dirons que l'ensemble des* $P_i(x, D)$ *équidomine exponentiellement l'ensemble des* $Q_j(x, D)$ *sur* Ω *s'il l'équidomine au sens exponentiel n-mixte sur* Ω.

Donc la domination exponentielle est un cas particulier de domination multiplicative : les bases de domination y sont constituées par des fonctions de la forme $\exp\,(-\langle x, h\rangle)$, avec $h \in C^n$ $(\langle x, h\rangle = x_1 h_1 + \cdots + x_n h_n)$, opérant multiplicativement. En réalité, on peut se borner à supposer $h \in R^n$, car si $f \in L^2$ et est à support compact et si $h = h' + i h''$, $h', h'' \in R^n$,

$$\| e^{-\langle x, h\rangle} f \|_{L^2} = \| e^{-\langle x, h'\rangle} f \|_{L^2}.$$

Naturellement, dans chacun des cas correspondants à ces définitions, toutes les fois que l'ensemble d'opérateurs qui est dominé se réduit à un seul élément, nous dirons « domine » au lieu de « équidomine ». Si ce seul élément est l'application identique de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, nous dirons de l'ensemble d'opérateurs qui le domine, qu'il est *dominant sur* Ω (au sens k-mixte, multiplicativement, au sens exponentiel k-mixte, exponentiellement).

Avant d'aller plus loin, signalons quel parti permet de tirer le th. 1.1 de l'existence d'une domination k-mixte.

THÉORÈME 1.3. *Soient un entier k,* $0 \leqslant k \leqslant n$, Ω *un ouvert de* R^n. *Supposons qu'un opérateur différentiel* $P(x, D)$ *équidomine au sens k-mixte une famille finie d'opérateurs différentiels* $Q_j(x, D)$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. *Soit, pour chaque* $j = 1, \ldots, r$, *un élément quelconque* T_j *de* $\mathfrak{A}^{(k)}$. *Alors, pour tout ouvert k-borné* U, *contenu dans* Ω, *il existe une constante finie* C_U *telle qu'on ait pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(U)$:

$$\| P(x, D)\varphi \|_{L^2} \leqslant C_U \| P(x, D)\varphi + \sum_{j=1}^{r} T_j \cdot Q_j(x, D)\varphi \|_{L^2}.$$

Nous pouvons supposer, d'après la déf. 1.7 bis, que Ω est stable par G_k. Compte tenu de la déf. 1.7, il suffit d'appliquer le coroll. de la prop. 1.1, la prop. 1.2 et le th. 1 pour obtenir le résultat lorsque U est non seulement k-borné, mais aussi stable par G_k. Mais tout ouvert k-borné, contenu dans Ω, est contenu dans un ouvert k-borné et stable par G_k, contenu dans Ω (car Ω est lui-même stable par G_k).

Rappelons qu'un ouvert est dit k-borné si sa projection sur le sous-espace $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ est bornée (si $k = n$, cet ouvert doit être borné).

§ 3. Domination exponentielle et opérateurs différentiels a coefficients constants

Nous allons établir, dans ce paragraphe, divers résultats généraux sur la domination exponentielle déf. (1.11) appliquée aux opérateurs différentiels à coefficients constants. Certains de ces résultats nous serviront constamment dans la suite. Tous, ils admettent une généralisation, naturelle et immédiate (voir Trèves [11], [12]), à la domination exponentielle k-mixte, k quelconque, $1 \leqslant k \leqslant n$, généralisation que nous avons omise ici afin de ne pas trop alourdir l'exposé.

L e m m e 1.1. *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur R^n, quelconque; notons m_j le degré de $P(X)$ par rapport à X_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Soit Ω un ouvert borné quelconque de R^n; notons τ_j le diamètre de la projection de Ω sur l'axe $O x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tout vecteur h de R^n et tout $p \in N^n$, on a*

$$\frac{1}{p\,!} \| e^{\langle x, h \rangle} P^{(p)}(D) \varphi \|_{L^2} \leqslant \binom{m_1}{p_1} \cdots \binom{m_n}{p_n} \tau_1^{p_1} \cdots \tau_n^{p_n} \| e^{\langle x, h \rangle} P(D) \varphi \|_{L^2}.$$

$\varphi \to \varphi e^{\langle x, h \rangle}$ est une application biunivoque de $\mathcal{D}(\Omega)$ sur lui-même. Nous pouvons donc prouver le lemme 1.1 avec $\varphi e^{-\langle x, h \rangle}$ à la place de φ. Mais d'autre part, d'après la nature même de la majoration à démontrer, ça ne change rien de remplacer $P(X)$ par $P(X - z)$, $z \in C^n$ arbitraire. Or $e^{\langle x, h \rangle} Q(D) [e^{-\langle x, h \rangle} \varphi] = Q(D - h/2 i \pi) \varphi$. Ceci montre qu'on peut se borner au cas $h = 0$. Mais pour $h = 0$, le résultat n'est pas autre chose que le lemme 2.7 de Hörmander [2].

Le lemme suivant et sa démonstration sont tout aussi directement inspirés de Hörmander [2] (principalement th. 2.2).

L e m m e 1.2. *Soit un ensemble d'opérateurs différentiels sur R^n, à coefficients constants, tous d'ordre inférieur à un entier m, $P_j(D)$ $(j \in J$; J est un ensemble d'indices quelconque) et $Q(D)$. Soit $g(h)$ une fonction positive, définie sur un sous-ensemble S de R^n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *Il existe un ouvert non vide U de R^n et une constante finie A_U tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et tout $h \in S$:*

$$\| e^{-\langle x, h \rangle} Q(D) \varphi \|_{L^2} \leqslant A_U g(h) \sup_{j \in J} \| e^{-\langle x, h \rangle} P_j(D) \varphi \|_{L^2}.$$

(b) *Il existe une constante finie A telle que, pour tout $y \in R^n$ et tout $h \in S$:*

$$\sum_p \left| Q^{(p)}\left(y + \frac{h}{2i\pi}\right)\right| \leqslant A\, g(h) \sup_{i \in J} \sum_p \left| P_j^{(p)}\left(y + \frac{h}{2i\pi}\right)\right|.$$

(c) *Il existe une constxnte finie B telle que, pour tout $y \in R^n$ et tout $h \in S$:*

$$\left| Q\left(y + \frac{h}{2i\pi}\right)\right| \leqslant B g(h) \sup_{j \in J} \sum_p \left| P^{(p)}\left(y + \frac{h}{2i\pi}\right)\right|.$$

(d) *Pour tout ouvert borné Ω de R^n, il existe une constante finie A_Ω telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $h \in S$:*

$$\| e^{-\langle x, h\rangle} Q(D)\varphi \|_{L^2} \leqslant A_\Omega g(h) \sup_{j \in J} \| e^{-\langle x, h\rangle} P_j(D)\varphi \|_{L^2}.$$

Les sommations, dans $\sum\limits_p$, sont étendues à tout $p \in N^n$, mais il est clair que, dans chacune de ces sommes, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls.

(b) $\Rightarrow$ (c) et (d) $\Rightarrow$ (a) sont triviaux ; nous démontrerons (a) $\Rightarrow$ (b) et (c) $\Rightarrow$ (d).

1° (a) $\Rightarrow$ (b)

Dans l'inégalité de (a), nous pouvons remplacer φ par $\varphi e^{-2i\pi\langle x, y + i\hbar\rangle}$ en posant $\hbar = h/2\pi$ (avec $y \in R^n$). On obtient aussitôt :

$$\| Q(D - y - i\hbar)\varphi \|_{L^2} \leqslant A_U g(h) \sup_{j \in J} \| P_j(D - y - i\hbar)\varphi \|_{L^2} \tag{1}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, tout $y \in R^n$ et tout $h \in S$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, non nulle. Posons $a_{p,q} = \int \frac{D^p \varphi}{p!} \frac{D^q \bar{\varphi}}{q!} dx$ $(p, q \in N^n)$. Pour tout entier m fini, la forme hermitienne $\sum\limits_{|p| \leqslant m} \sum\limits_{|q| \leqslant m} a_{p,q} z_p \bar{z}_q$ est définie positive, non dégénérée. En effet, elle est égale à

$$\sum_{|p| \leqslant m} \sum_{|q| \leqslant m} \int \frac{z_p}{p!} D^p \varphi \frac{\bar{z}_q}{q!} D^q \bar{\varphi}\, dx = \int \left| \sum_{|r| \leqslant m} \frac{z_r}{r!} D^r \varphi \right|^2 dx$$

qui ne peut être nulle que si tous les z_r le sont (parce qu'aucune fonction non nulle de $\mathcal{D}$ ne peut être solution d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants).

Ce fait implique qu'il existe une constante A_1 finie telle que :

$$\sum_p |z_p|^2 \leqslant A_1 \sum_{p,q} a_{p,q} z_p \bar{z}_q$$

pour tout système de nombres complexes (z^p) $(p \in N^n,\ |p| \leqslant m)$.

Soit alors $R(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, quelconque. On a :

$$R(D+z)\varphi = \sum_{|p|\leqslant m} R^{(p)}(z)\frac{D^p\varphi}{p!} \quad (m \geqslant \deg R(X)).$$

Le lecteur désireux de vérifier cette égalité n'aura qu'à effecteur la transformation de Fourier en x et à développer $R(y+z)$ en série de Taylor. On en déduit :

$$\sum_p |R^{(p)}(z)|^2 \leqslant A_1 \sum_{|p|\leqslant m}\sum_{|q|\leqslant m} a_{p,q} R^{(p)}(z)\overline{R^{(q)}(z)} = A_1 \| R(D+z)\varphi\|^2_{L^2} \tag{2}$$

ceci étant vrai quels que soient $R(D)$ (d'ordre $\leqslant m$) et $z \in C^n$.

Mais, d'autre part, il est évident qu'il existe $A_2 < +\infty$ telle que:

$$\| R(D+z)\varphi\|^2_{L^2} = \sum_{p,q} a_{p,q} R^{(p)}(z)\overline{R^{(q)}(z)} \leqslant A_2 \sum_p |R^{(p)}(z)|^2. \tag{3}$$

Remarquons que A_1 et A_2 ne dépendent que de m et de la function φ (qu'on peut choisir une fois pour toutes).

Il ne reste plus qu'à appliquer les inégalités (1), (2), (3), en prenant $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ arbitraire. Appliquons d'abord (2) avec $R=Q$ et $z=-y-i\hbar$, ensuite (3) avec $R=P_j\,(j\in J)$ (et $z=-y-i\hbar$), en tenant compte du fait que tous les $P_j(X)$ sont de degré $\leqslant m$. Compte tenu de (1) :

$$\sum_p |Q^{(p)}(-y-i\hbar)|^2 \leqslant A_1 A_2 A_U^2 g^2(h) \sup_{j\in J} \sum_p |P_j^{(p)}(-y-i\hbar)|^2$$

pour tout $y \in R^n$ et tout $h \in S$. De là se déduit facilement (*b*).

2°. (c) ⇒ (d)

D'après (c), il existe $B' < +\infty$ tel que, pour tout $y \in R^n$ et tout $h\in S$:

$$|Q(y-i\hbar)|^2 \leqslant B'^2 g^2(h) \sup_{j\in J}\sum_p |(P_j^{(p)}(y-i\hbar)|^2.$$

Multiplions, à gauche et à droite, cette inégalité par $|\hat{\varphi}(y-i\hbar)|^2$ avec $\varphi \in D(\Omega)$. Le théorème de Plancherel donne aussitôt :

$$\| e^{-\langle x,h\rangle} Q(D)\varphi\|^2_{L^2} \leqslant B'^2 g^2(h) \sup_{j\in J}\sum_p \| e^{-\langle x,h\rangle} P_j^{(p)}(D)\varphi\|^2_{L^2}. \tag{4}$$

Or, d'après le lemme 1.1, pour chaque $j \in J$ il existe $C_j < +\infty$ (ne dépendant que de Ω et de l'ordre de $P_j(D)$) telle que :

$$\sum_p \| e^{-\langle x,h\rangle} P_j^{(p)}(D)\varphi\|^2_{L^2} \leqslant C_j^2 \| e^{-\langle x,h\rangle} P_j(D)\varphi\|^2_{L^2}.$$

Posons alors $C = \sup_{j \in J} C_j$. Ici intervient de nouveau le fait que le degré des polynômes $P_j(X)$ est $\leqslant m$ pour tout $j \in J$. On déduit alors de (4) :

$$\| e^{-\langle x, h \rangle} Q(D) \varphi \|_{L^2}^2 \leqslant C^2 B'^2 g^2(h) \sup_{j \in J} \sum_p \| e^{-\langle x, h \rangle} P_j(D) \varphi \|_{L^2}^2$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $h \in S$, d'où facilement (d).

COROLLAIRE 1. *Soient deux ensembles* $\{P_j(D)\}$ $(i \in I)$, $\{Q_j(D)\}$ $(j \in J)$ *d'opérateurs différentiels à coefficients constants sur* R^n, *tous d'ordre* $\leqslant m$. *On suppose de plus que l'ensemble d'indices* J *est fini (alors que* I *est quelconque). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *L'ensemble des* $P_i(D)$ *équidomine exponentiellement l'ensemble des* $Q_j(D)$ *sur un ouvert non vide de* R^n.

(b) *A chaque* $\varepsilon > 0$ *correspond* $h \in R^n$ *tel que, pour tout* $y \in R^n$;

$$\sup_{j \in J} \sum_p | Q_j^{(p)}(y + ih) | \leqslant \varepsilon \sup_{i \in I} \sum_p | P_i^{(p)}(y + ih) |.$$

(c) *A chaque* $\varepsilon > 0$ *correspond* $h \in R^n$ *tel que, pour tout* $y \in R^n$:

$$\sup_{j \in J} | Q_j(y + ih) | \leqslant \varepsilon \sup_{i \in I} \sum_p | P_i^{(p)}(y + ih) |.$$

(d) *L'ensemble des* $P_i(D)$ *équidomine exponentiellement l'ensemble des* $Q_j(D)$ *sur* R^n.

COROLLAIRE 2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *L'ensemble des* $P_i(D)$ $(i \in I$; *les* $P_i(D)$ *sont tous d'ordre* $\leqslant m)$ *est exponentiellement dominant sur un ouvert non vide* Ω *de* R^n.

(b) *A chaque* $\varepsilon > 0$ *correspond* $h \in R^n$ *tel que, pour tout* $y \in R^n$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \sup_{i \in I} \sum_p | P_i^{(p)}(y + ih) |$$

(c) *L'ensemble des* $P_i(D)$ *est exponentiellement dominant sur* R^n.

Dorénavant, lorsque nous aurons à faire à des opérateurs à coefficients constants et à la domination exponentielle, nous dirons simplement équidomine, domine, etc. au lieu de équidomine sur Ω, domine sur Ω, etc.

COROLLAIRE 3. *Soient des opérateurs* $P_i(D)$, $Q_j(D)$ $(i \in I, j \in J)$ *comme dans le corollaire* 1. *Si l'ensemble des* $P_i(D)$ *équidomine exponentiellement l'ensemble des* $Q_j(D)$, *il équidomine exponentiellement aussi l'ensemble des* $Q_j^{(p)}(D)$ $(j \in J, p \in N^n)$.

COROLLAIRE 4. *Soient* $P_i(D)$, $Q_j(D)$ *comme dans le corollaire* 1. *Supposons qu'il existe une application* $i \rightarrow p_i$ *de* I *dans* N^n *telle que l'ensemble des* $P_i^{(p_i)}(D)$ *équidomine exponentiellement l'ensemble des* $Q_j(D)$. *Alors l'ensemble des* $P_i(D)$ *possède la même propriété.*

COROLLAIRE 5. *Soient* $Q_j(D)$ $(j \in J)$ *comme dans le corollaire* 1. *Soit un opérateur* $P(D)$ *à coefficients constants. Supposons que l'un des dérivés* $P^{(p)}(D)$ *de* $P(D)$ *équidomine exponentiellement l'ensemble des* $Q_j(D)$. *Alors* $P(D)$ *possède la même propriété.*

COROLLAIRE 6. *Si l'un des dérivés* $P^{(p)}(D)$ *d'un opérateur* $P(D)$ *est exponentiellement dominant, il en est de même de* $P(D)$.

Une conséquence immédiate du lemme 1.2 est que $P(D)$ ne peut dominer que des opérateurs d'ordre strictement inférieur au sien. Ceci peut être précisé, en considérant l'ordre de $P(D)$ par rapport à chaque variable, et plus généralement par rapport à chaque direction de l'espace; et on pourrait étendre ce genre de considérations au cas des coefficients variables, ainsi qu'à des dominations plus générales que l'exponentielle.

Des lemmes 1.1 et 1.2 découlent de multiples conséquences, dont toute la suite, à peu près, va témoigner. En voici cependant quelquesunes, très élémentaires.

PROPOSITION 1.6. *Soient* $P(D)$, $Q_i(D)$ $(i \in J)$ *comme précédemment. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $P(D)$ *équidomine exponentiellement les* $Q_i(D)$.

(b) $P(-D)$ *équidomine exponentiellement les* $Q_i(-D)$.

(c) $\tilde{P}(D)$ *équidomine exponentiellement les* $\tilde{Q}_i(D)$.

Immédiat, en vertu du lemme 1.2, compte tenu de ce que $\tilde{P}(D) = \overline{P}(D)$.

COROLLAIRE. *Il est équivalent de dire que* $P(D)$, *ou bien* $P(-D)$, *ou encore* $\tilde{P}(D)$, *est exponentiellement dominant.*

PROPOSITION 1.7. *Pour que* $P(D)Q(D)$ *domine exponentiellement* $Q(D)$, *il faut et il suffit que* $P(D)$ *soit exponentiellement dominant.*

Que ce soit suffisant est banal. Montrons que c'est nécessaire. Par hypothèse, à chaque $\varepsilon > 0$, correspond $h \in R^n$ tel que :

$$\sum_p |Q^{(p)}(y+ih)| \leqslant \varepsilon \sum_p |(PQ)^{(p)}(y+ih)| \quad \text{pour tout } y \in R^n.$$

Mais $$\sum_p |(PQ)^{(p)}(y+ih)| \leqslant M \sum_p |P^{(p)}(y+ih)| \sum_p |Q^{(p)}(y+ih)|$$

où M est une constante ne dépendant que des degrés de $P(X)$ et $Q(X)$. De là aussitôt
$$1 \leqslant \varepsilon M \sum_p |P^{(p)}(y+ih)| \quad \text{pour tout } y \in R^n.$$

PROPOSITION 1.8. *Si $P(D)$ domine exponentiellement un opérateur $Q(D)$ non nul, $P(D)$ est exponentiellement dominant..*

En effet, il existe $c>0$ tel que $c \leqslant \sum_p |Q^{(p)}(z)|$ pour tout $z \in C^n$.

COROLLAIRE. *Si $P(D)$ est exponentiellement dominant et $Q(D)$ non nul, alors $P(D)\,Q(D)$ est exponentiellement dominant.*

En effet, d'après la prop. 1.7, $P(D)\,Q(D)$ domine exponentiellement $Q(D)$ et donc est exponentiellement dominant, d'après la prop. 1.8.

LEMME 1.3. *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur R^n, d'ordre $\geqslant 1$. Soient deux polynômes quelconques R, S à coefficients complexes, à une seule indéterminée, tels que* deg $R \geqslant$ deg S. *Alors, à chaque ouvert borné Ω de R^n correspond $A(\Omega) < +\infty$ telle que, pour toute $\varphi \in D(\Omega)$ et tout $h \in R^n$, on ait :*
$$\| e^{\langle x, h \rangle} S(P(D))\,\varphi \|_{L^2} \leqslant A(\Omega)\, \| e^{\langle x, h \rangle} R(P(D))\,\varphi \|_{L^2}.$$

Posons $$R(X) = \sum_{j=0}^{r} A_j X^{r-j},\ S(X) = \sum_{j=0}^{s} B_j X^{s-j}, \quad A_0 \neq 0, \quad B_0 \neq 0, \quad s \leqslant r.$$

Le lemme 1.1 montre qu'il existe $C_\Omega < +\infty$ telle que :
$$\| e^{\langle x, h \rangle} \varphi \|_{L^2} \leqslant C_\Omega \| e^{\langle x, h \rangle} P(D)\,\varphi \|_{L^2}$$
pour toute $\varphi \in D(\Omega)$ et tout $h \in R^n$.

De plus, on peut prendre le diamètre de Ω assez petit pour que C_Ω soit aussi petit qu'on l'aura voulu. De cette inégalité découle :
$$\| e^{\langle x, h \rangle} P^{m-k}(D)\,\varphi \|_{L^2} \leqslant C_\Omega^k \| e^{\langle x, h \rangle} P^m(D)\,\varphi \|_{L^2}$$
pour toute $\varphi \in D(\Omega)$, tout $h \in R^n$, tout entier m, tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant m$. On déduit immédiatement de cela :
$$\| e^{\langle x, h \rangle} S(P(D))\,\varphi \|_{L^2} \leqslant \sum_{k=0}^{s} |B_k|\, C_\Omega^k \| e^{\langle x, h \rangle} P^s(D)\,\varphi \|_{L^2}$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{s} |B_k|\, C_\Omega^{k+(r-s)} \| e^{\langle x, h \rangle} P^r(D)\,\varphi \|_{L^2}.$$

Choisissons le diamètre de Ω assez petit pour avoir $\sum_{k=1}^{r} C_\Omega^k |A_k| \leq \frac{1}{2} |A_0|$. Alors :

$$|A_0| \, \| e^{\langle x, h\rangle} P^r(D) \varphi \|_{L^2} \leq \| e^{\langle x, h\rangle} R(P(D)) \varphi \|_{L^2} + \sum_{k=1}^{r} |A_k| \, \| e^{\langle x, h\rangle} P^{r-k}(D) \varphi \|_{L^2},$$

d'où l'on tire, compte tenu des diverses majorations rencontrées :

$$|A_0| \, \| e^{\langle x, h\rangle} P^r(D) \varphi \|_{L^2} \leq 2 \| e^{\langle x, h\rangle} R(P(D)) \varphi \|_{L^2}.$$

Et donc :

$$\| e^{\langle x, h\rangle} S(P(D)) \varphi \|_{L^2} \leq \sum_{k=0}^{s} |B_k| \, C_\Omega^{k+(r-s)} \frac{1}{2|A_0|} \| e^{\langle x, h\rangle} R(P(D)) \varphi \|_{L^2}$$

ceci pour toute $\varphi \in D(\Omega)$ et tout $h \in R^n$. C'est là le résultat relatif à un ouvert particulier non vide. Mais alors le lemme 1.2 (équivalence de (a) de (d)) prouve le lemme 1.3 dans le cas général.

PROPOSITION 1.9. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *$P(D)$ équidomine exponentiellement les $Q_j(D)$ $(1 \leq j \leq r)$.*

(b) *Quels que soient les $(r+1)$ polynômes R, $R_j \in C[X_1]$ $(1 \leq j \leq r)$ tels que* deg $R \geq 1$, deg $R \geq$ deg R_j *pour tout $j = 1, \ldots, r$, $R(P(D))$ équidomine exponentiellement les $R_j(Q_j(D))$ $(1 \leq j \leq r)$.*

(c) *Il existe $(r+1)$ polynômes R, $R_j \in C[X_1]$ $(1 \leq j \leq r)$, non tous nuls, avec* deg $R \leq$ deg R_j *pour tout $j = 1, \ldots, r$, tels que $R(P(D))$ équidomine exponentiellement les $R_j(Q_j(D))$ $(1 \leq j \leq r)$*

(b) $\Rightarrow$ (c) étant banal, nous prouverons (a) $\Rightarrow$ (b) et (c) $\Rightarrow$ (a).

1° (a) $\Rightarrow$ (b)

Posons $m =$ deg R; et soit un ouvert borné quelconque Ω de R^n. Il est évident que si $P(D)$ équidomine exponentiellement les $Q_j(D)$, $P^m(D)$ équidomine exponentiellement les $Q_j^m(D)$ $(1 \leq j \leq r)$. A tout $\varepsilon > 0$ correspond donc $h \in R^n$ tel que :

$$\| e^{\langle x, h\rangle} Q_j^m(D) \varphi \|_{L^2} \leq \varepsilon \| e^{\langle x, h\rangle} P^m(D) \varphi \|_{L^2} \tag{1}$$

pour toute $\varphi \in D(\Omega)$ et tout $1 \leq j \leq r$.

Appliquons le lemme 1.3. Puisque deg $R_j \leq m$, il existe $A_j(\Omega) < +\infty$ tel que :

$$\| e^{\langle x, h\rangle} R_j(Q_j(D)) \varphi \|_{L^2} \leq A_j(\Omega) \| e^{\langle x, h\rangle} Q_j^m(D) \varphi \|_{L^2} \quad (j = 1, \ldots, r)$$

et $A(\Omega) < +\infty$ tel que :

$$\| e^{\langle x, h \rangle} P^m (D) \varphi \|_{L^2} \leqslant A (\Omega) \| e^{\langle x, h \rangle} R (P (D)) \varphi \|_{L^2}$$

ceci pour toute $\varphi \in D (\Omega)$ et tout $h \in R^n$.

En combinant ces inégalités avec (1), on obtient le résultat cherché.

2° (c) ⇒ (a)

Puisque les R, R_j ne sont pas tous nuls et que deg $R \leqslant$ deg R_j, l'un des R_j n'est pas nul, et comme $R (P (D))$ domine exponentiellement $R_j (Q_j (D))$, donc (prop. 1.8) est exponentiellement dominant, nous pouvons supposer $m =$ deg $R_j \geqslant 1$.

Alors, en appliquant le lemme 1.3 comme dans 1°, on voit que $P^m (D)$ équi-domine exponentiellement les $Q_j^m (D)$ $(j = 1, \ldots, r)$.

D'après le lemme 1.2, à tout $\varepsilon > 0$ correspond $h \in R^n$ tel que :

$$\sum_q | (Q_j^m)^{(q)} (y + i h) | \leqslant \varepsilon \sum_p | (P^m)^{(p)} (y + i h) |$$

pour tout $y \in R^n$ (et tout $j = 1, \ldots, r$). Or il existe $B_m < +\infty$ tel que :

$$\sum_p | (P^m)^{(p)} (y + i h) | \leqslant B_m [\sum_p | P^{(p)} (y + i h) |]^m$$

où B_m ne dépend que de m. On en déduit :

$$| Q_j^m (y + i h) | = | Q_j (y + i h) |^m \leqslant \varepsilon \, B_m [\sum_p | P^{(p)} (y + i h) |]^m$$

soit enfin :

$$| Q_j (y + i h) | \leqslant (B_m \varepsilon)^{\frac{1}{m}} \sum_p | P^{(p)} (y + i h) |$$

pour tout $y \in R^n$ et tout $j = 1, \ldots, r$. Mais alors le lemme 1.2 (équivalence (c) ⇒ (d) du coroll. 1) implique le résultat.

Voici maintenant une conséquence de la prop. 1.3 :

PROPOSITION 1.10. *Soient deux opérateurs différentiels $P (D)$, $Q (D)$ à coefficients constants sur R^n. On suppose que $P (D)$ domine exponentiellement $Q (D)$ et que $Q (D)$ n'est pas nul. Alors, pour tout nombre fini M et tout ouvert non vide U de R^n, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que si :*

$$\| e^{-\langle x, h \rangle} Q (D) \varphi \|_{L^2} \leqslant \varepsilon \| e^{-\langle x, h \rangle} P (D) \varphi \|_{L^2} \quad \textit{pour toute } \varphi \in \mathcal{D} (U),$$

alors nécessairement $| h | \geqslant M$.

En effet, soit Ω un ouvert borné non vide contenu dans U; $P (D)$ domine uniformément $Q (D)$ dans $L (\mathcal{D} (\Omega); L^2 (\Omega))$. Nous pouvons appliquer la prop. 1.3. On doit avoir :

$$\frac{c}{\varepsilon} \leqslant \| e^{\langle x, h \rangle} \|_{L^\infty(\Omega)} \| e^{-\langle x, h \rangle} \|_{L^\infty(\Omega)} \quad (c > 0).$$

Mais en posant $\tau = \sup |x|$:

$$\| e^{\langle x, h \rangle} \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant e^{\tau |h|}, \qquad \| e^{-\langle x, h \rangle} \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant e^{\tau |h|},$$

et donc $e^{2\tau |h|} \geqslant c/\varepsilon$, d'où le résultat.

Voici un résultat qui nous servira à plusieurs reprises, dans la suite :

Lemme 1.4. *Soient p, $q \in N^n$, $q_1 \leqslant p_1$, $q_j = p_j$ pour tout $2 \leqslant j \leqslant n$. On a :*

$$|h_1|^{p_1 - q_1} \| e^{-\langle x, h \rangle} D^q \varphi \|_{L^2} \leqslant \| e^{-\langle x, h \rangle} D^p \varphi \|_{L^2} \quad \textit{pour toute } \varphi \in D.$$

Il suffit de démontrer le résultat lorsque

$$p_2 = \cdots = p_n = q_2 = \cdots = q_n = 0 \text{ et } h_2 = \cdots = h_n = 0$$

(car ensuite on n'aura plus qu'à substituer $\exp(-(x_2 h_2 - \cdots - x_n h_n) D^{(0, p_2, \ldots, p_n)} \varphi$ à φ). Mais alors c'est un cas particulier du résultat démontré p. 9 : il suffit d'y choisir $p(t) = h_1 t$, ce qui permet de prendre $c_\Omega = |h_1|$ (donc indépendant de Ω).

Nous terminerons ce paragraphe par un exemple : nous allons montrer que le laplacien $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ est exponentiellement dominant, mais que si $n \geqslant 2$, il ne domine exponentiellement aucun opérateur à coefficients constants du 1^er^ ordre.

D'abord, en vertu du corollaire 6 du lemme 1.2, si l'un des dérivés $P^{(p)}(D)$ ($p \in N^n$) de $P(D)$ est exponentiellement dominant, il en est de même de $P(D)$. Or si $P(D) = \Delta$, alors $P^{(1, 0, \ldots, 0)}(D) = 2(\partial / \partial x_1)$ qui est exponentiellement dominant (comme il résulte immédiatement du lemme 1.4, ou du coroll. 2 du lemme 1.2, ou comme on peut le voir directement).

Supposons que Δ domine exponentiellement l'opérateur

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\alpha_j \in C, \ \alpha_j = A_j + i B_j, \ A_j, \ B_j \in R, \quad j = 1, \ldots, n).$$

Dans ce cas, le coroll. 1 du lemme 1.2 exige qu'à chaque $\varepsilon > 0$ corresponde $h \in R^n$ tel que :

$$16 \pi^4 |(y_1 - i h_1)^2 + \cdots + (y_n - i h_n)^2|^2 + 16 \pi^2 \sum_{j=1}^{n} |y_j + i h_j|^2 + 2n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (y_j + i h_j) \right|^2 \quad \text{pour tout } y \in R^n. \tag{1}$$

Imposons d'abord les conditions $|y|=|h|$ (rappelons que pour $z \in C^n$, $|z|^2=|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2$) et $\langle y, h\rangle = y_1 h_1+\cdots+y_n h_n=0$.

D'autre part, remarquons que :

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (y_j+i h_j)\right|^2 = \left\{\sum_{j=1}^{n} (A_j y_j - B_j h_j)\right\}^2 + \left\{\sum_{j=1}^{n} (B_j y_j - A_j h_j)\right\}^2$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} A_j y_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} B_j y_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} A_j h_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} B_j h_j\right)^2 + \sum_{j \neq k} (B_j A_k - A_j B_k)\, y_j h_k.$$

Puisque tous les α_j ne sont pas nuls, nous pouvons supposer par exemple que l'un des A_j n'est pas nul. Prenons alors y dans le plan (à deux dimensions!) engendré par h et par le vecteur $a=(A_1, \ldots, A_n)$. D'après les conditions imposées

$$\left(\sum_{j=1}^{n} A_j y_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} A_j h_j\right)^2 = (\langle a, y\rangle)^2 + (\langle a, h\rangle)^2 = |a|^2\, |h|^2.$$

Si y vérifie ces diverses conditions, $-y$ les vérifie aussi. Nous pouvons donc imposer la condition supplémentaire :

$$\sum_{j \neq k} (B_j A_k - A_j B_k)\, y_j h_k \geqslant 0.$$

Avec ce choix de y, on voit que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (y_j+i h_j)\right|^2 \geqslant |a|^2\, |h|^2.$$

Remarquons que $|a|^2=A_1^2+\cdots+A_n^2$ ne dépend que de l'opérateur $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Mais si $\langle y, h\rangle=0$ et $|y|=|h|$, le 1er membre de (1) devient égal à $32\pi^2 |h|^2+2n$. Au total, nous avons montré que, quel que soit $h \in R^n$ vérifiant (1), on pouvait choisir $y \in R^n$ tel que l'inégalité (1) s'écrive :

$$c\,|h|^2 + c' \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\,|h|^2 \quad (c,\ c'>0 \text{ indépendantes de } h \text{ et de } \varepsilon).$$

Or, d'après la prop. 1.10, lorsque $\varepsilon \to 0$, $|h| \to +\infty$. Pour ε assez petit, la majoration précédente est donc absurde.

§ 4. Opérateurs différentiels a coefficients constants exponentiellement dominants

Dès que la domination exponentielle est introduite, la première question qui vient à l'esprit est de savoir s'il existe des opérateurs à coefficients constants $P(D)$ qui ne soient pas dominants (i.e. qui ne dominent pas l'identité). Or c'est le cas pour un opérateur aussi simple que $\partial/\partial x_1 + i(\partial/\partial x_2)$. Sinon (coroll. 2 du lemme 1.2), pour chaque $\varepsilon > 0$, il existerait $h = (h_1, h_2) \in R^2$ tel que $|P(y+ih)| \geqslant \varepsilon^{-1}$ pour tout $y \in R^2$. Mais ceci est impossible, car $y_1 = h_2$, $y_2 = -h_1$ implique $P(y+ih) = 0$. En passant, remarquons la profonde hétérogénéité que cet exemple révèle entre domination exponentielle et ellipticité, puisque l'un des opérateurs elliptiques les plus simples n'est pas dominant (alors que la laplacien, lui, l'est).

L'objet à peu près unique de ce paragraphe est la caractérisation des familles finies d'opérateurs différentiels à coefficients constants qui sont dominantes (cfr. déf. 1.2).

Cette caractérisation (du moins pour un opérateur) a été formulée dans Tréves [12]. La démonstration que nous en possédions devait normalement prendre place dans le présent exposé. Son texte ayant été soumis, au dernier moment, à M. L. Hörmander, celui-ci a bien voulu nous communiquer une nouvelle preuve, par lui trouvée, du même résultat. La méthode suivie par Hörmander est tout-à-fait différente de celle de l'ancienne démonstration. Elle comporte de nombreux avantages : elle semble beaucoup plus proche du fond des phénomènes et (probablement pour cette raison) elle est considérablement plus simple; en outre, elle permet de préciser les bases de domination. C'est pourquoi nous nous sommes permis de la substituer à la démonstration originelle, sûrs que le lecteur y verrait sa tâche fortement facilitée.

Nous allons commencer par établir quelques résultats préliminaires, de nature purement algébrique.

Nous allons considérer une algèbre de polynômes à coefficients complexes, à n indéterminées, c'est-à-dire une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $C[X_1, \ldots, X_n]$. Nous supposerons toujours que $\mathcal{A}$ n'est pas réduite à $\{0\}$ et qu'elle vérifie la condition suivante :

(SD) *Si* $P(X) \in \mathcal{A}$, *alors* $P^{(p)}(X) \in \mathcal{A}$ *pour tout* $p \in N^n$.

LEMME 1.5. *$\mathcal{A}$ est engendrée (en tant qu'algèbre) par l'ensemble formé du polynôme 1 et de r polynômes homogènes de degré 1, appartenant à $\mathcal{A}$ et linéairement indépendants (ce qui exige $r \leqslant n$).*

Puisque $\mathcal{A}$ n'est pas réduite à $\{0\}$, $\mathcal{A}$ contient un polynôme non nul. L'un au moins des dérivés de ce polynôme est une constante non nulle. Puisque $\mathcal{A}$ est une algèbre sur C, il en résulte que le polynôme 1 appartient à $\mathcal{A}$.

Prenons alors un système linéairement indépendant maximal dans l'ensemble des éléments homogènes de degré 1 de $\mathcal{A}$; par un changement linéaire de variables, nous pouvons supposer que les éléments de ce système sont les monômes $X_1, \ldots, X_r$ $(r \leqslant n)$. Raisonnons par l'absurde : supposons que l'ensemble $(1, X_1, \ldots, X_r)$ n'engendre pas $\mathcal{A}$. Cela signifie qu'il existe un polynôme $P(X)$ dans $\mathcal{A}$ contenant effectivement l'une des indéterminées $X_{r+1}, \ldots, X_n$ (avec notre hypothèse, on doit évidemment avoir $r < n$). On peut dériver $P(X)$ jusqu'à obtenir un polynôme de la forme :

$$c_{r+1} X_{r+1} + \cdots + c_n X_n + Q(X_1, \ldots, X_r)$$

(l'un au moins des nombres complexes $c_{r+1}, \ldots, c_n$ étant $\neq 0$).

En vertu de (SD), ce polynôme appartient à $\mathcal{A}$; et il en est de même de Q qui appartient à l'algèbre engendrée par les X_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$; donc $c_{r+1} X_{r+1} + \cdots + c_n X_n$ appartient à $\mathcal{A}$, contrairement à l'hypothèse que tout élément homogène de degré 1 de $\mathcal{A}$ est une combinaison linéaire des $X_1, \ldots, X_r$.

Nous désignerons par V l'ensemble des vecteurs v de C^n tels que

$$P(X + \lambda v) = P(X)$$

pour tout λ complexe et tout polynôme $P(X)$ de $\mathcal{A}$. Il est clair que V est un sous-espace vectoriel de C^n (en prenant C comme corps des scalaires).

L E M M E 1.6. *Tout polynôme $Q(X) \in C[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $Q(X+v) = Q(X)$ pour tout $v \in V$, appartient à $\mathcal{A}$.*

Par passage au quotient C^n/V, on se ramène aussitôt au cas $V = \{0\}$. Il suffit alors de démontrer que tout polynôme homogène du 1er degré appartient à $\mathcal{A}$. Si cela était faux, le nombre r du lemme 1.5 serait $< n$. Mais alors, d'après ce lemme 1.5, il existerait un vecteur non nul v tel que $P(X + \lambda v) = P(X)$ pour tout $\lambda \in C$ et tout $P \in \mathcal{A}$: il suffirait de prendre pour v un vecteur non nul annulant r polynômes de degré 1 de $\mathcal{A}$ qui, joints à 1, engendrent $\mathcal{A}$.

L E M M E 1.7. *Notons $L_j(X) = R_j(X) + i J_j(X)$ $(j = 1, \ldots, r)$ r polynômes homogènes de degré 1 de $\mathcal{A}$, linéairement indépendants sur C, qui engendrent $\mathcal{A}$ lorsqu'on leur adjoint le polynôme 1; $R_j(X)$ et $J_j(X)$ sont des polynômes à coefficients réels. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Le système des $R_j(X)$, $J_j(X)$ $(j = 1, \ldots, r)$ est linéairement indépendant.*

(b) *Il n'existe aucun vecteur $h \in R^n$ non nul vérifiant $\langle h, v \rangle = h_1 v_1 + \cdots + h_n v_n = 0$ pour tout $v \in V$.*

1° (a) ⇒ (b)

On peut effectuer un changement de variables linéaire, à coefficients *réels*, de manière à ramener $R_j(X)$ à la forme X_j et $J_j(X)$ à la forme X_{r+j} ($1 \leqslant j \leqslant r$; remarquer que (a) implique $2r \leqslant n$). Donnons-nous un vecteur $h' \in R^n$ arbitraire; soit g' un vecteur de R^n vérifiant : $g'_j = -h'_{2j}$, $g'_{2j} = h'_j$ ($j = 1, \ldots, r$); les autres composantes, s'il y en a, de g' sont choisies arbitrairement. On a :

$$(h'_j + i g'_j) + i(h'_{2j} + i g'_{2j}) = 0 \quad \text{pour tout } j = 1, \ldots, r.$$

Faisons le changement de variable inverse du précédent : appelons h et g les transformés respectifs de h' et de g'; remarquons que h est encore arbitraire dans R^n. On a :

$$R_j(h + ig) + i J_j(h + ig) = 0 \text{ pour tout } j = 1, \ldots, r.$$

Il en résulte immédiatement que $h + ig \in V$. Nous avons donc prouvé ceci :

(b′) *Pour tout* $h \in R^n$, *il existe* $g \in R^n$ *tel que* $h + ig \in V$.

Montrons alors que (b′) est équivalent à (b) : (b′) implique (b), car supposons que $\langle h, v\rangle = 0$ pour tout $v \in V$; prenons $v = h + ig$. On obtient $|h|^2 + i\langle h, g\rangle = 0$, d'où $h = 0$. (b) implique (b′). En effet, pour $z \in C^n$, posons $\mathrm{Re}\, z = (\mathrm{Re}\, z_1, \ldots, \mathrm{Re}\, z_n)$; $\mathrm{Re}\, z \in R^n$. Il nous suffira de montrer que, si (b) est vrai, alors le sous-espace vectoriel de R^n formé des vecteurs $\mathrm{Re}\, v$, v parcourant V, est identique à R^n entier. Sinon il existerait $h \in R^n$ orthogonal à ce sous-espace; or si $v = v' + iv'' \in V$ ($v', v'' \in R^n$), on a aussi $-iv \in V$. Comme $\mathrm{Re}\, v = v'$ et $\mathrm{Re}(-iv) = v''$, h serait orthogonal à la fois à v' et à v'', donc à v. Comme v est arbitraire dans V, ceci contredit (b).

2° (b) ⇒ (a)

Plus exactement, nous allons prouver que (b′) ⇒ (a). Raisonnons par l'absurde : supposons que le système des R_j, J_j ne soit pas linéairement indépendant, par exemple qu'il existe $2r - 1$ constantes réelles b_1, a_j, b_j ($2 \leqslant j \leqslant r$) telles que:

$$R_1 = b_1 J_1 + \sum_{j=2}^{r} (a_j R_j + b_j J_j). \tag{1}$$

Prenons $h \in R^n$ arbitraire; d'après (b′), il existe $g \in R^n$ tel que $g + ih \in V$, donc tel que $L_j(g + ih) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, r$. Ceci équivaut au système d'équations :

$$R_j(g) = -J_j(h), \; J_j(g) = R_j(h) \quad (j = 1, \ldots, r). \tag{2}$$

L'égalité (1) donne :

$$R_1(g) = b_1 J_1(g) + \sum_{j=2}^{r} [a_j R_j(g) + b_j J_j(g)].$$

ce qui peut encore s'écrire, compte tenu des égalités (2) :

$$-J_1(h) = b_1 R_1(h) - \sum_{j=2}^{r} [a_j J_j(h) - b_j R_j(h)]$$

soit, puisque h est arbitraire dans R^n :

$$-J_1 = b_1 R_1 - \sum_{j=2}^{r} (a_j J_j - b_j R_j). \tag{3}$$

Multiplions les deux membres de (3) par $+i$ et retranchons le résultat, membre à membre, de (1). Il vient :

$$R_1 + i J_1 = b_1 (J_1 - i R_1) + \sum_{j=2}^{r} [a_j (R_j + i J_j) + b_j (J_j - i R_j)]$$

d'où l'on tire :
$$(1 + i b_1) L_1 = \sum_{j=2}^{r} (a_j + i b_j) L_j,$$

ce qui contredit le fait que les L_j sont linéairement indépendants (sur C). C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.4. *Soit une famille finie d'opérateurs différentiels sur R^n, à coefficients constants, $P_1(D), \dots, P_r(D)$.*

Pour que cette famille ne soit pas exponentiellement dominante, il faut et il suffit qu'existent un automorphisme vectoriel u de R^n et r polynômes $\prod_j \in C[Z_1, \dots, Z_\nu]$, avec $2\nu \leqslant n$, tels que :

$$P_j(u \cdot X) = \prod_j (X_1 + i X_{\nu+1}, \dots, X_\nu + i X_{2\nu}) \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, r. \text{ (}^1\text{)}$$

Si la famille considérée est exponentiellement dominante, il existe un sous-espace vectoriel W de R^n, un nombre $s > 0$ et pour chaque $h \in \complement W$, une constante finie A_h tels que :

$$t^s \leqslant A_h \sup_{1 \leqslant j \leqslant r} \sum_p |P_j^{(p)}(x + i t h)|$$

pour tout $y \in R^n$ et tout $t > 0$.

(1) Si u s'exprime, dans la base de R^n choisie, par la matrice (u_j^i), $P(u \cdot X)$ est le polynôme $P(u_1^1 X_1 + \cdots + u_1^n X_n, \dots, u_n^1 X_1 + \cdots + u_n^n X_n)$.

Nous allons appliquer les lemmes 1.5, 1.6 et 1.7 à l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les $P_j^{(p)}(X)$ ($p \in N^n$; $j=1, \ldots, r$); V est attaché à $\mathcal{A}$ comme il a été dit. Il nous faut distinguer deux cas :

1° *Il y a un vecteur $h' \in R^n$ non nul orthogonal à V* (i.e. tel que $h'_1 v_1 + \cdots + h'_n v_n = 0$ pour tout $v \in V$).

Dans ce cas, le polynôme $\langle h, X\rangle = h'_1 X_1 + \cdots + h'_n X_n$ vérifie la condition du lemme 1.6 et par conséquent appartient à $\mathcal{A}$. Il s'exprime donc comme un polynôme en les $P_j^{(p)}(X)$ ($p \in N^n$; $j=1, \ldots, r$), d'où résulte aussitôt qu'il existe deux constantes positives finies A, M telles que, pour tout $z \in C^n$:

$$|\langle h, z\rangle| \leqslant A\left(\sum_{j=1}^{r}\sum_{p}|P_j^{(p)}(z)|\right)^M.$$

Prenons $z = y + ith$, avec $\langle h, h'\rangle \neq 0$. On a, en posant $s = 1/M$:

$$t^s \leqslant \left(\frac{1}{|\langle h, h'\rangle|}\right)^s \sum_{j=1}^{r}\sum_{p}|P_j^{(p)}(y+ith)|$$

pour tout $y \in R^n$ et tout $t > 0$. Ceci, moyennant le coroll. 2 du lemme 1.2, (1) va prouver la dernière partie de l'énoncé, quand nous aurons prouvé que la négation de 1° équivaut à dire que la famille $\{P_j(D)\}$ est non exponentiellement dominante. On peut prendre pour W le sous-espace vectoriel de R^n orthogonal à l'ensemble des $h' \in R^n$ orthogonaux à V, ou, si l'on préfère, l'image de V par l'application $v \to \operatorname{Re} v$.

2° *Il n'existe pas de vecteur non nul de R^n orthogonal à V.*

Nous avons vu que cela est équivalent au fait que pour tout $h \in R^n$ il existe $g \in R^n$ tel que $h + ig \in V$. Si la famille $\{P_j(D)\}$ était dominante, d'après le coroll. 2 du lemme 1.2, pour tout $\varepsilon > 0$, on pourrait trouver $h \in R^n$ tel que :

$$\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \sum_{j=1}^{r}\sum_{p}|P_j^{(p)}(y+ih)| \quad \text{pour tout } y \in R^n.$$

Mais, dans le 2e membre de cette inégalité, on peut remplacer y par $y+g$ (g choisi de sorte que $g + ih \in V$). D'après la définition de V, ce second membre devient alors égal à

(1) On peut appliquer ici le coroll. 2 du lemme 1.2 en tenant compte du fait que :

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sum_{p}|P_j^{(p)}(z)| \leqslant \sum_{j=1}^{r}\sum_{p}|P_j^{(p)}(z)| \leqslant r_1 \sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sum_{p}|P_j^{(p)}(z)|$$

quel que soit $z \in C^n$.

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{p} |P_j^{(p)}(y)|$$

où y peut être fixé arbitrairement dans R^n. Mais $1/\varepsilon$ peut être arbitrairement grand, ce qui est absurde.

Compte tenu de 1°, il résulte de cela que, pour la famille $\{P_j(D)\}$, être exponentiellement dominante équivaut au fait qu'il existe un vecteur de R^n orthogonal à V. Ainsi se trouve démontrée la deuxième partie de l'énoncé. Pour la première, il suffit d'appliquer le lemme 1.7 (dans lequel ce qui est noté r est sans rapport avec la signification actuelle de r et doit maintenant être noté ν). L'automorphisme vectoriel u du th. 1.4 sera n'importe quel automorphisme transformant $R_j(X)$ en X_j et $J_j(X)$ en $X_{\nu+j}$ pour tout $j=1, \ldots, \nu$.

COROLLAIRE. *Pour que $P(D)$ ne soit pas dominant, il faut et il suffit qu'il soit semblable à un opérateur différentiel de la forme :*

$$\Pi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_{\nu+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_\nu}+i\frac{\partial}{\partial x_{2\nu}}\right), \quad 2\nu\leqslant n, \quad \pi\in C[Z_1, \ldots, Z_\nu].$$

PROPOSITION 1.11. *Tout $P(D)$ auto-adjoint, d'ordre $\geqslant 1$, est dominant.*

En effet, $P(X)$ est un polynôme à coefficients réels, ce qui serait exclu par le coroll. du th. 1.4 si $P(D)$ était non dominant.

De tout cela résulte que sont exponentiellement dominants le laplacien, l'opérateur de la chaleur, celui de Schrödinger, tous les opérateurs de type principal dont la partie homogène de plus haut degré est réelle (à un facteur près), tous les opérateurs différentiels à une variable, etc. Un opérateur comme $\partial^2/\partial x_1^2+i(\partial^2/\partial x_2^2)$ est aussi dominant.

Si la partie homogène de plus haut degré d'un opérateur est dominante, cet opérateur est dominant. Mais la réciproque n'est pas exacte, comme le prouve

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Un opérateur peut être dominant, sans qu'aucun de ses dérivés ne le soit. Exemple :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2i\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Le produit de deux opérateurs non dominants peut être dominant. Exemple : le laplacien sur R^2.

Pour ce qui est du nombre s du th. 1.4, voici un cas important où on peut le prendre égal à 1 :

PROPOSITION 1.12. *Soit $P(X) \in C[X_1, \dots, X_n]$ de degré m. Notons $P_m(X)$ la partie homogène de degré m de $P(X)$. Pour que $P_m(D)$ soit dominant, il faut et il suffit qu'existe un vecteur $h \in R^n$ et une constante finie A tels que :*

$$|t| \leqslant A \sum_{|p| \geqslant m-1} |P^{(p)}(y+ith)| \quad \text{pour tout } y \in R^n \text{ et tout } t \text{ réel.}$$

Que la condition soit suffisante est à peu près évident, compte tenu de ce que, si $|p| = m-1$,

$$P_m^{(p)}(X) - P^{(p)}(X) = P^{(p)}(0). \tag{1}$$

Montrons que la condition est necessaire. Par hypothèse, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $h \in R^n$ tel que :

$$\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \sum_p |P_m^{(p)}(y+ih)| \quad \text{pout tout } y \in R^n.$$

On peut prendre ε assez petit, et h en conséquence, pour n'avoir à sommer, dans le 2e membre de l'inégalité précédente, que par rapport aux $p \in N^n$ vérifiant $|p| \leqslant m-1$ (à un facteur 2 près, devant la somme). Or, s'il existait $y_h \in R^n$ tel que $P_m^{(p)}(y_h + ih) = 0$ pour tout p, $|p| = m-1$, en vertu de l'égalité d'Euler, ce serait encore vrai pour tout p, $|p| \leqslant m-1$. Donc il existe $c > 0$ tel qu'on ait :

$$\sum_{|p|=m-1} |P_m^{(p)}(y+ih)| \geqslant c \quad \text{quel que soit } y \in R^n.$$

En remplaçant y par $y/t\ (t \neq 0)$ et en repassant à P (compte tenu de (1)), on obtient facilement le résultat.

CHAPITRE II

Opérateurs hyperboliques, opérateurs paraboliques et domination exponentielle

La domination [1] suggère une classification des opérateurs différentiels, basée sur ce principe, que la classe d'un opérateur donné puisse se reconnaître par le seul examen de ceux qu'il domine. La comparaison des opérateurs différentiels introduite

[1] Dans le présent chapitre, toutes les fois qu'il sera question de domination, il s'agira de domination exponentielle; nous omettrons toujours la mention « exponentielle » ou « exponentiellement ».

par Hörmander, la relation « plus fort que », donne lieu à un procédé de ce genre, qui retrouve très simplement des catégories admettant d'autres définitions, telle celle des elliptiques, qui sont les opérateurs plus forts que tout opérateur du même ordre. Rien évidemment n'interdit de définir de façon analogue, mais à l'aide de la domination, des classes d'opérateurs différentiels : par exemple, ceux qui dominent tout opérateur d'ordre strictement inférieur. Mais dans quelle mesure peut-on espérer recouper ainsi les classifications traditionnelles?

Peu d'espoir nous est laissé du côté des elliptiques. Nous avons vu, au chapitre I, qu'un opérateur elliptique très simple, $\partial/\partial \bar{z}$, n'a, en fait de propriétés de domination, même pas le minimum, à savoir qu'il domine l'identité. Bien au contraire, il s'est révélé être l'élément constitutif typique de tous les opérateurs non dominants. D'autres elliptiques, comme le laplacien, possèdent de relativement bonnes propriétés de domination (encore que le laplacien, par exemple, ne domine aucun opérateur du premier ordre).

De là résulte qu'il serait insensé, à fortiori, de chercher à définir l'hypoellipticité (1) à l'aide de la domination. Mais heureusement la situation se trouve renversée si l'on examine une sous-catégorie des hypoelliptiques, les paraboliques. Ces opérateurs, ainsi que les hyperboliques, non seulement jouissent d'excellentes propriétés de domination, mais encore celles-ci sont caractéristiques, et la caractérisation qu'elles fournissent s'étend, dans sa presque totalité, aux opérateurs hyperboliques et paraboliques à coefficients variables. Les dominations qui se trouvent associées à l'hyperbolicité d'une part, à la parabolicité de l'autre, ne sont en aucune façon anarchiques :

1° les bases de domination sont typiques; elles sont constituées par des $\exp(-\langle x, h\rangle)$, où l'on peut prendre, comme ensemble de vecteurs h, le cône de lumière dans le cas hyperbolique, l'axe des temps positifs dans le cas parabolique;

2° chaque fois, la domination est réalisée à l'aide d'une forme sesqui-linéaire remarquable sur $\mathcal{D}$;

3° et, du moins dans le cas des coefficients constants, la domination est réalisée globalement, c'est-à-dire par des majorations valables quel que soit le support des fonctions de $\mathcal{D}$ qui interviennent (et non pas, comme dans le cas général, seulement sur les ouverts bornés).

Notre propos, dans ce chapitre, sera de préciser et de démontrer ces divers points.

---

(1) Un polynôme différentiel $P(D)$ est dit hypoelliptique si toutes les solutions distributions de l'équation $P(D)T=0$ sont des fonctions indéfiniment différentiables. Hörmander, dans [2], a caracterisé tous les polynômes différentiels hypoelliptiques. Tout opérateur elliptique est hypoelliptique.

§ 1. Opérateurs hyperboliques à coefficients constants

Soit $P(D)$ un opérateur différentiel sur R^n, à coefficients constants, d'ordre m. Nous noterons $P_m(D)$ sa partie homogène d'ordre m.

PROPOSITON 2.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a_1) *$P(D)$ équidomine les D^p ($|p| \leqslant m-1$).*

(b_1) *Il existe $h \in R^n$, $A < +\infty$ tels que, pour tout $y \in R^n$:*

$$|y+ih|^{m-1} \leqslant A\,|P_m(y+ih)|.$$

(c_1) *Il existe $h \in R^n$, $B < +\infty$ tels que, pour tous $t \geqslant 1$ et $\varphi \in \mathcal{D}$:*

$$\sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{t\langle x, h\rangle} D^p \varphi \|_{L^2} \leqslant \frac{B}{t} \| e^{t\langle x, h\rangle} P(D) \varphi \|_{L^2}.$$

En outre, le même vecteur h peut figurer dans (b_1) et (c_1).

(c_1) $\Rightarrow$ (a_1) est banal. Nous démontrerons (a_1) $\Rightarrow$ (b_1) et (b_1) $\Rightarrow$ (c_1).

1° (a_1) $\Rightarrow$ (b_1).

D'après le coroll. 1 du lemme 1.2, à tout $\varepsilon > 0$ correspond $h_\varepsilon \in R^n$ tel que :

$$|y+ih_\varepsilon|^{m-1} \leqslant \varepsilon \sum_p |P^{(p)}(y+ih_\varepsilon)| \quad \text{pour tout } y \in R^n.$$

Mais il existe M, $B < +\infty$ tels que $z \in C^n$, $|z| \geqslant M$, implique

$$|P(z) - P_m(z)| + \sum_{|p| \geqslant 1} |P^{(p)}(z)| \leqslant B\,|z|^{m-1}. \tag{1}$$

Or, d'après la prop. 1.10, quel que soit $\varrho < +\infty$, on peut lui faire correspondre $\varepsilon > 0$ tel que nécessairement $|h_\varepsilon| \geqslant \varrho$. Ceci nous autorise à choisir $\varepsilon = (2B)^{-1}$ et $|h_\varepsilon| \geqslant M$. Avec ce choix :

$$|y+ih_\varepsilon|^{m-1} \leqslant \varepsilon\,|P_m(y+ih_\varepsilon)| + \varepsilon B\,|y+ih_\varepsilon|^{m-1},$$

soit : $|y+ih_\varepsilon|^{m-1} \leqslant 2\varepsilon\,|P_m(y+ih_\varepsilon)|$ pour tout $y \in R^n$. On pourra choisir pour h l'un de ces vecteurs h_ε (alors $A = B^{-1}$).

2° (b_1) $\Rightarrow$ (c_1).

Dans (b_1), on peut remplacer y par $t^{-1}y$ ($t \geqslant 1$) et en déduire, grâce à l'homogénéité de $P_m(X)$:

$$t\,|y+ith|^{m-1} \leqslant A\,|P_m(y+ith)| \quad \text{pour tout } y \in R^n.$$

Remarquons que cette inégalité exige $h \neq 0$ (pour $t \geqslant 1$ fixé arbitrairement). Sinon on aurait $|y|^{m-1} \leqslant A'\,|P_m(y)|$ pour tout $y \in R^n$, ce qui est exclu, puisque $P_m(X)$ est homogène de degré m.

Utilisons de nouveau l'inégalité (1). Pour $t \geqslant M|h|^{-1}+2AB$, elle implique aussitôt, pour tout $y \in R^n$:

$$t|y+ith|^{m-1} \leqslant 2A|P(y+ith)|.$$

Mais dès que t est assez grand, on a, pour tout $y \in R^n$:

$$t\sum_{k=0}^{m-1}|y+ith|^k \leqslant 2t|y+ith|^{m-1}.$$

Ce qui nous conduit finalement au résultat suivant :

Il existe deux constantes positives finies C, T telles que, pour tout $t \geqslant T$ et tout $y \in R^n$:

$$\sum_{k=0}^{m-1}|y+ith|^{2k} \leqslant \frac{C}{t^2}|P(y+ith|^2. \tag{2}$$

Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}$ quelconque En posant, comme d'habitude,

$$\hat{\varphi}(z)=\int \varphi(x)\exp(-2i\pi\langle x, z\rangle)\,dx \quad (z \in C^n),$$

on peut multiplier les deux membres de (2) par $|\hat{\varphi}(y+ith)|^2$. Tenons compte de :

1) $$\hat{\varphi}(y+ith)=\int [\exp(2\pi t\langle x, h\rangle)\varphi(x)]\exp(-2i\pi\langle x, y\rangle)\,dy;$$

2) $$\sum_{|p|=k}|z_1^{p_1}\dots z_n^{p_n}|^2 \leqslant |z|^{2k} \quad \text{pour tout } z \in C^n.$$

En appliquant le théorème de Plancherel, qui entraîne

$$\int |(y_1+ith_1)^{p_1}\dots(y_n+ith_n)^{p_n}\hat{\varphi}(y+ith)|^2\,dy=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|p|}\int |e^{2\pi t\langle x, h\rangle}D^p\varphi|^2\,dx,$$

on obtient immédiatement la condition (c_1) (on se ramène du cas $t \geqslant T$ au cas $t \geqslant 1$ par une homothétie sur h).

Nous dirons que $P(D)$ est *normal* (sous-entendu : en x_1) si $P(y)=ay_1^m+Q(y)$, avec $\deg_{y_1} Q(y) \leqslant m-1$ et a complexe non nul.

DÉFINITION 2.1. *On dit que $P(D)$ est hyperbolique normal si $P(D)$ est normal et de plus, lorsque $n \geqslant 2$, si $P_m(D)$ vérifie la condition suivante :*

Quel que soit $y^0=(y_2, \dots, y_n) \in R^{n-1}$ non nul, le polynôme $P_m(y_1, y^0)$ en y_1 a toutes ses racines réelles et distinctes.

DÉFINITION 2.2. *On dit que $P(D)$ est hyperbolique si $P(D)$ est semblable à un opérateur hyperbolique normal.*

Il est clair, d'après ces définitions, que les propriétés « $P(D)$ est hyperbolique » (resp. hyperbolique normal) et « $P_m(D)$ est hyperbolique » (resp. hyperbolique normal) sont équivalentes.

D'autre part, on remarque que si $P(D)$ est hyperbolique, alors, à un facteur constant près, $P_m(D)$ est un opérateur réel (i.e. à coefficients réels). En effet, ramenons $P_m(D)$ à la forme hyperbolique normale. Alors

$$P_m(y) = a\,(y_1 - r_1(y^0)) \,\dots\, (y_1 - r_m(y^0)),$$

où les $r_j(y^0)$ sont les racines du polynôme en y_1 $P_m(y_1, y^0)$ (en supposant y^0 fixé). D'après la déf. 2.1, les $r_j(y^0)$ sont toutes réelles, quel que soit $y^0 \in R^{n-1}$, d'où il suit que $a^{-1}(2\,i\,\pi)^m P_m(D)$ a ses coefficients réels.

THÉORÈME 2.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *$P(D)$ est hyperbolique.*

(b) *$P(D)$ équidomine les D^p ($|p| \leqslant m-1$).*

(c) *Il existe $h \in R^n$, $0 < A < +\infty$ tels que, pour tout $t \geqslant 1$ et toute $\varphi \in \mathcal{D}$:*

$$\sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-t\langle x,\,h\rangle} D^p \varphi \|^2_{L^2} \leqslant \frac{A}{t} \operatorname{Re}\,(e^{-t\langle x,\,h\rangle} P(D)\,\varphi,\; e^{-t\langle x,\,h\rangle} P_h(D)\,\varphi)_{L^2}$$

où
$$P_h(y) = \frac{1}{2\,i\,\pi}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial y_n}\right) P(y).$$

(c) implique la propriété (c_1) de la prop. 2.1 par application de l'inégalité de Schwarz et compte tenu de ce que $P_h(D)$ est d'ordre $m-1$; et donc, en vertu de cette proposition, (c) $\Rightarrow$ (b). Toujours d'après la prop. 2.1, (b) implique la propriété (b_1) de cette proposition. Nous démontrerons que (b_1) implique que $P(D)$ est hyperbolique, c'est-à-dire (a), et que (a) $\Rightarrow$ (c).

1° (b_1) $\Rightarrow$ (a).

Faisons un changement de variables linéaire dans R^n de sorte que h devienne le vecteur $(1, 0, \dots, 0)$. Notons encore $P(D)$ l'opérateur transformé; $P(D)$ est normal, sinon $y^0 = 0$ impliquerait $P_m(y) = 0$ quel que soit y_1 réel ou complexe, ce qui est en contradiction avec $|y_1 + i|^{m-1} \leqslant A\,|P_m(y_1 + i, 0)|$. Deuxièmement, toutes les racines du polynôme $P_m(z_1, y^0)$ en z_1 (y^0 fixé arbitrairement dans R^{n-1}) sont réelles. Car si $z_1 = y_1 + i\,t$, $t \neq 0$, était une racine, on aurait :

$$|z_1|^{m-1} = |t|^{m-1}\left|\frac{y_1}{t} + i\right|^{m-1} \leqslant A\,|t|^{m-1}\left|P_m\left(\frac{y_1}{t} + i,\; \frac{y^0}{t}\right)\right| = \frac{A}{|t|}\,|P_m(z_1, y^0)| = 0$$

ce qui est absurde. Enfin, lorsque $y_0 \neq 0$, les racines de $P_m(z_1, y^0)$ sons toutes distinctes. Car supposons que y_1 soit racine double. Quel que soit $t \geqslant 1$, on aurait :

$$(|t y_1 + i| + |t y^0|)^{m-1} \leqslant A\,|P_m(t y_1 + i,\, t y^0)| \leqslant A \sum_{k=2}^{m} \frac{t^{m-k}}{k!} \left| \frac{\partial^k P_m}{\partial y_1^k}(y) \right|.$$

Or, en divisant les deux membres extrêmes par t^{m-1} et en faisant tendre t vers $+\infty$, le dernier tend vers 0 et le premier vers $|y|^{m-1}$.

2° (a) ⇒ (c)

Moyennant éventuellement un automorphisme de R^n, ramenons $P(D)$ à la forme hyperbolique normale, avec $a_0 = 1$. En outre, commençons par supposer $P(D)$ homogène d'ordre m. Posons $P_1(y) = (1/2i\pi)\ (\partial P/\partial y_1)(y)$. Fixons arbitrairement y^0 dans R^{n-1} et notons $r_k(y^0)$ les racines (réelles et distinctes si $y^0 \neq 0$) de $P(y_1, y_0)$ en tant que polynôme en y_1. Posons, pour $z_1 \in C$ quelconque :

$$Q_k(z_1, y^0) = \prod_{j=1, j\neq k}^{m} (z_1 - r_j(y^0)) \quad (k = 1, \ldots, m).$$

On a :

$$2 i\pi P_1(z_1, y^0) = Q_1(z_1, y^0) + \cdots + Q_m(z_1, y_0);$$

et quel que soit $k = 1, \ldots, m$,

$$P(z_1, y^0) = (z_1 - r_k(y^0))\, Q_k(z_1, y^0).$$

On en tire :

$$P(z_1, y^0)\,\overline{P_1(z_1, y^0)} = \frac{-1}{2 i\pi} \sum_k (z_1 - r_k(y^0))\,|Q_k(z_1, y^0)|^2,$$

d'où enfin, pour tout $z_1 \in C$:

$$\operatorname{Re} P(z_1, y^0)\,\overline{P_1(z_1, y^0)} = -\frac{\operatorname{Im} z_1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} |Q_k(z_1, y^0)|^2.$$

Pour tout ceci, cfr. [1], p. 40.

Prenons $z_1 = y_1 + (2i\pi)^{-1} t$ $(t > 0)$. On voit que :

$$4\pi^2 \operatorname{Re} P(z_1, y^0)\,\overline{P_1(z_1, y^0)} = t \sum_{k=0}^{m} |Q_k(z_1, y^0)|^2.$$

Notons $F(y, t)$ le second membre divisé par t : c'est une fonction continue, positive et positivement homogène de degré $2(m-1)$ de $y_1, \ldots, y_n, t$. La continuité de $F(y, t)$ résulte ce que les $r_k(y^0)$, étant toutes distinctes quel que soit $y^0 \neq 0$, peuvent être indiciées de façon à être, chacune, une fonction continue de y^0 sur R^{n-1}. L'unique zéro de $F(y, t)$ dans R^{n+1} est l'origine, car $F(y, t)=0$ implique $P(z_1, y^0)=P_1(z_1, y^0)=0$. Par conséquent, il existe $c>0$ tel que :

$$c^2 \sum_{k=0}^{m-1} |(z_1, y^0)|^{2k} \leqslant F(y, t) \quad \text{pour tout } y \in R^n \text{ et tout } t \geqslant 1.$$

Cette inégalité peut encore s'écrire:

$$t \sum_{k=0}^{m-1} |(z_1, y^0)|^{2k} \leqslant \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \operatorname{Re} P(z_1, y^0) \overline{P_1(z_1, y^0)} \tag{1}$$

pour tout $y \in R^n$ et tout $t \geqslant 1$ (rappelons que $z_1 = y_1 - i(t/2\pi)$).

Supposons maintenant $P(D)$ non nécessairement homogène. On a :

$$P(z)\overline{P_1(z)} = P_m(z)\overline{(P_m)_1(z)} + P(z)[\overline{P_1(z)-(P_m)_1(z)}] + [P(z)-P_m(z)]\overline{(P_m)_1(z)} \quad (z \in C^n).$$

Or $\deg P(X)[\overline{P_1(X)-(P_m)_1(X)}] \leqslant 2(m-1)$ et aussi $\deg [P(X)-P_m(X)]\overline{(P_m)_1(X)} \leqslant 2(m-1)$.

Il existe donc une constante $M < +\infty$ telle que, pour tout $z \in C^n$:

$$|P(z)\overline{P_1(z)} - P_m(Z)\overline{(P_m)_1(z)}| \leqslant M \sum_{k=0}^{m-1} |z|^{2k}. \tag{2}$$

Appliquons (1) à $P_m(D)$ et prenons $t \geqslant 2(2\pi/c)^2 M$. Alors (2) implique directement :

$$t \sum_{k=0}^{m-1} |(z_1, y^0)|^{2k} \leqslant \frac{8\pi^2}{c^2} \operatorname{Re} P(z_1, y^0) \overline{P_1(z_1, y^0)} \tag{3}$$

pour tout $y \in R^n$ et tout $t \geqslant (8\pi^2/c^2)M$ $(z_1 = y_1 - i(t/2\pi))$. Dans cette majoration, $P(D)$ n'est plus nécessairement homogène.

Si, à priori, $P(D)$ était hyperbolique, mais non hyperbolique normal, considérons un automorphisme vectoriel u de R^n tel que $Q(y) = P(u \cdot y)$ soit hyperbolique normal, et appliquons (3) avec Q au lieu de P. Cette inégalité étant exacte pour tout $y \in R^n$, nous pouvons remplacer y par $u^{-1}y'$, $y' \in R^n$ quelconque. Notons h le vecteur transformé par u de $(1, 0, \ldots, 0)$ et posons $\hbar = h/2\pi$. Alors (3) donne, pour tout $y' \in R^n$ et tout $t \geqslant 8\pi^2 M/c^2$:

$$t \sum_{k=0}^{m-1} |u^{-1}(y' - it\hbar)|^{2k} \leqslant \frac{8\pi^2}{c^2} \operatorname{Re} Q(u^{-1}(y' - it\hbar)) \overline{Q_1(u^{-1}(y' - it\hbar))}. \tag{4}$$

Mais évidemment, si $(uz)_j = \sum_{k=1}^{n} u_j^k z_k$ $(j = 1, \ldots, n)$, on aura

$$Q_1(X) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial Q}{\partial X_1}(X) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^{n} u_j^1 \frac{\partial P}{\partial Y_j}(u \cdot X).$$

Prenons $z=(1,0,\dots,0)$; alors $uz=h$ et, pour chaque $j=1,\dots,n$, $(uz)_j=u_j^1$, d'où $u_j^1=h_j$. Par conséquent, $Q_1(X)=P_h(u\cdot X)$ ou $P_h(Y)=Q_1(u^{-1}\cdot Y)$. En tenant compte de ceci dans (4), en remarquant qu'il existe $c>0$ tel que $c|z|\leqslant|u^{-1}(z)|$ pour tout $z\in C^n$, enfin, en supprimant l'apostrophe dans y', on conclut qu'il existe $0<A<+\infty$ tel que, pour tout $y\in R^n$ et tout $t\geqslant 8\pi^2 M/c^2$:

$$\sum_{k=0}^{m-1}|y-it\hbar|^{2k}\leqslant\frac{A}{t}\operatorname{Re}P(y-it\hbar)\overline{P_h(y-it\hbar)}. \tag{5}$$

Prenons maintenant $\varphi\in\mathcal{D}$ arbitraire. On a :

$$\hat{\varphi}(y-it\hbar)=\int[\varphi(x)\exp(-t\langle x,h\rangle)]\exp(-2i\pi\langle x,y\rangle)\,dx.$$

Appliquons aux deux membres de (5), préalablement multipliés par $|\hat{\varphi}(y-it\hbar)|^2$, le théorème de Parseval : le 2[e] devient égal à

$$\frac{A}{t}\operatorname{Re}(e^{-t\langle x,h\rangle}P(D)\varphi,\ e^{-t\langle x,h\rangle}P_h(D)\varphi)_{L^2}:$$

le 1[er] majore (cf. preuve de la prop. 2.1)

$$\sum_{|p|\leqslant m-1}\|e^{-t\langle x,h\rangle}D^p\varphi\|_{L^2}^2.$$

Posons enfin $t'=(8\pi^2M/c^2)^{-1}t$, $h'=(8\pi^2M/c^2)h$; nous obtenons :

$$\sum_{|p|\leqslant m-1}\|e^{-t'\langle x,h'\rangle}D^p\varphi\|_{L^2}^2\leqslant\frac{A}{t'}\operatorname{Re}(e^{-t'\langle x,h'\rangle}P(D)\varphi,\ e^{-t'\langle x,h'\rangle}\frac{c^2}{8\pi^2M}P_h(D)\varphi)_{L^2}.$$

Comme $P_{h'}(D)=(c^2/8\pi^2M)P_h(D)$ et que cette dernière majoration est valable pour tout $t'\geqslant 1$ (et pour toute $\varphi\in\mathcal{D}$), on a exactement obtenu (c). C.Q,F.D.

Remarques. 1. Soulignons le fait que la constante A, dans la condition (c) du th. 2.1, ainsi que B dans la condition (c_1) de la prop. 2.1, est indépendante du support de φ. C'est là un fait remarquable, que la simple équidomination des D^p ($|p|\leqslant m-1$) ne laissait pas prévoir.

2. On remarque aussi que cette équidomination implique qu'à un facteur constant près, $P_m(D)$ soit un opérateur réel.

3. La condition (c) est équivalente à la suivante :

(c′) *Il existe* $h\in R^n$, $0<A<+\infty$ *et* $t_0<+\infty$ *tels qu'on ait :*

$$\sum_{|p|\leqslant m-1}\|e^{-t\langle x,h\rangle}D^p\varphi\|_{L^2}^2\leqslant\frac{A}{t}\operatorname{Re}(e^{-t\langle x,h\rangle}P(D)\varphi,\ e^{-t\langle x,h\rangle}P_h(D)\varphi)_{L^2}$$

pour toute $\varphi\in\mathcal{D}$ *et tout* $t\geqslant t_0$.

Il résulte de la preuve du th. 2.1 que les vecteurs h pouvant figurer dans (c′) (avec A et t_0 dépendant de h) sont ceux tels que tout automorphisme vectoriel de R^n, amenant h sur $(1, 0, \ldots, 0)$, amène $P(D)$ à la forme hyperbolique normale. Ces h forment un cône ouvert de R^n, qui contient l'intérieur du cône lumière de $P(D)$.

4. On peut se demander si $P_h(D)$ n'est pas remplaçable, dans les conditions (c) et (c′), par un autre polynome différentiel (d'ordre $m-1$). Sur cette question, on peut dire ceci :

Soit $P(D)$ un opérateur hyperbolique normal, d'ordre m. Choissons les indices $k=1, \ldots, m$, de façon à ranger, pour tout $y^0 \in R^{n-1}$, les racines $r_k(y^0)$ du polynôme $P_m(y_1, y^0)$ en y_1 dans l'ordre croissant. Disons, avec Leray, qu'un opérateur normal $Q(D)$ d'ordre $m-1$, *sépare* $P(D)$, si pour chaque $y^0 \in R^{n-1}$, $y^0 \neq 0$, tout intervalle ouvert $(r_k(y^0), r_{k+1}(y^0))$ $(k=1, \ldots, m-1)$ de la droite réelle contient une racine du polynôme $Q_{m-1}(y_1, y^0)$ en y_1.

Il suit de cette définition que si $Q(D)$ sépare $P(D)$, $Q(D)$ est lui-même hyperbolique normal.

Posons, comme plus haut, $P_1(y) = (1/2 i\pi)(\partial P/\partial y_1)(y)$. Supposons toujours $P(D)$ hyperbolique normal. Alors $P_1(D)$ sépare $P(D)$. On peut se borner au cas homogène. Fixons arbitrairement $y^0 \neq 0$. Puisque $P(y_1, y^0)$, s'annulle en $r_k(y^0)$ et en $r_{k+1}(y^0)$ sa dérivée première s'annulle dans l'intervalle fermé $(r_k(y^0), r_{k+1}(y^0))$ mais nécessairement pas aux bornes de cet intervalle, sinon $P(y_1, y^0)$ aurait une racine multiple. D'où le résultat. En particulier, $P_1(D)$ est hyperbolique normal.

Notons a le coefficient de y_1^m dans $P(y)$; celui de y_1^{m-1} dans $P_1(y)$ est $ma/2i\pi$. Remarquons que $i(ma/2i\pi)\bar{a} > 0$. Ceci observé, signalons qu'on peut démontrer le résultat suivant :

Soit $P(D)$ hyperbolique normal d'ordre m. Soit $Q(D)$ normal d'ordre $m-1$; notons a (resp. b) le coefficient de y_1^m (resp. y_1^{m-1}) dans $P(y)$ (resp. $Q(y)$). On suppose que $Q(D)$ sépare $P(D)$ et que $ib\bar{a} > 0$. Alors il existe deux constantes positives finies A, t_0 telles que :

$$\sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-tx_1} D^p \varphi \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{A}{t} \operatorname{Re} (e^{-tx_1} P(D) \varphi,\ e^{-tx_1} Q(D) \varphi)_{L_2}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $t \geqslant t_0$.

§ 2. Opérateurs hyperboliques à coefficients variables

Dans ce paragraphe, nous allons essentiellement démontrer que le théorème 2.1 se généralise de façon satisfaisante aux opérateurs hyperboliques à coefficients variables. La possibilité de cette généralisation tient surtout au lemme suivant :

LEMME 2.1 *Soient p, $q \in N^n$, $|p| = m$, $|q| = m-1$. Soit $a(x) \in \mathcal{E}$ à valeurs réelles, avec $a(0) = 0$. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un voisinage ouvert Ω_ε de 0 dans R^n et un nombre M_ε fini tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$ et tout $t \geqslant M_\varepsilon$:*

$$|\operatorname{Re}(e^{-tx_1} a(x) D^p \varphi, \; e^{-tx_1} D^q \varphi)_{L^2}| \leqslant \varepsilon t \sum_{|r| \leqslant m-1} \| e^{-tx_1} D^r \varphi \|_{L^2}^2.$$

Nous omettrons l'indice L^2 au cours de toute la preuve. Commençons par démontrer le résultat lorsque $m = 1$. Alors D^p est une dérivation $D_j = \partial/\partial x_j$ ($1 \leqslant j \leqslant n$; cette notation sera encore utilisée dans la suite). On a :

$$(e^{-tx_1} a D_j \varphi, \; e^{-tx_1} \varphi) = -(\varphi, D_j [a e^{-2tx_1}] \varphi) - (e^{-tx_1} \varphi, \; e^{-tx_1} a D_j \varphi).$$

Si $j \neq 1$,
$$2 \operatorname{Re}(e^{-tx_1} a D_j \varphi, \; e^{-tx_1} \varphi) = -\int D_j a(x) \, |e^{-tx_1} \varphi(x)|^2 \, dx.$$

Si $j = 1$,
$$\operatorname{Re}(e^{-tx_1} a D_j \varphi, \; e^{-tx_1} \varphi) = \int (-\tfrac{1}{2} D_1 a + t a) \, |e^{-tx_1} \varphi|^2 \, dx.$$

Soit Ω un voisinage ouvert borné de 0, contenant le support de φ. Dans tous les cas :

$$|\operatorname{Re}(e^{-tx_1} a D_j \varphi, \; e^{-tx_1} \varphi)| \leqslant \sup_{x \in \Omega} \left(|a(x)| + \frac{1}{2t} |D_j a(x)|\right) t \, \| e^{-tx_1} \varphi \|^2.$$

On choisit d'abord Ω de manière que $\sup |a(x)| \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon$. Ensuite, en posant

$$B = \sup_{|r| \leqslant m} \; \sup_{x \in \Omega} |D^r a(x)|$$

(B servira plus loin), on prend $M_\varepsilon = B/\varepsilon$; M_ε et $\Omega_\varepsilon = \Omega$ ainsi choisis remplissent les conditions de l'énoncé.

Nous raisonnerons ensuite par récurrence sur m. Nous supposerons $m \geqslant 2$ et le résultat exact jusqu'à $m-1$.

1° Cas $p_1 \geqslant 1$ et $q_1 \geqslant 1$

On peut écrire $D^p \varphi = D^{p'}(D_1 \varphi)$, $D^q \varphi = D^{q'}(D_1 \varphi)$, avec $p' = (p_1 - 1, p^0)$, $q' = (q_1 - 1, q^0)$. On peut alors appliquer la récurrence à $D_1 \varphi$, puisque $|p'| = m-1$, $|q'| = m-2$.

2° Cas $p_1 \geqslant 2$ et $q_1 = 0$

On peut encore écrire $D^p = D_1 D^{p'}$, $p' = (p_1 - 1, p^0)$. On a :

$$(e^{-tx_1} a D^p \varphi, \; e^{-tx_1} D^q \varphi) = -(e^{-tx_1} a D^{p'} \varphi, \; e^{-tx_1} D^q D_1 \varphi) -$$
$$-(e^{-tx_1} (D_1 a) D^{p'} \varphi, \; e^{-tx_1} D^q \varphi) + 2t (e^{-tx_1} a D^{p'} \varphi, \; e^{-tx_1} D^q \varphi).$$

Puisque $|p'|=|q|=m-1$, les deux derniers termes sont majorés, en valeur absolue, par

$$\sup\,(2\,|a(x)|+\frac{1}{t}\,|D_1 a(x)|)\,t\sum_{|r|\leqslant m-1}\|e^{-tx_1}D^r\varphi\|^2_{L^2},$$

et on choisit Ω_ε et M_ε de la même façon que lorsque $m=1$.

Reste le 1^er^ terme. Mais $|p'|=m-1$ et $|q|+1=m$; comme $p_1'=1$, nous nous trouvons dans le cas 1°, avec p' à la place de q et (q_1+1, q^0) à celle de p.

3° Cas $p_1=q_1=0$

Dans ce cas, D^p, D^q et e^{-tx_1} commutent. Posons $\psi=\varphi\,e^{-tx_1}$. On a :

$$(a\,D^p\psi,\,D^q\psi)=-(D^q(a\,\psi),\,D^p\psi)-\sum_{\substack{|p'|\geqslant 1\\ p_j'\leqslant p_j,\,j=1,\ldots,n}}\binom{p}{p'}\;([D^{p'}a]\,D^{p-p'}\psi,\,D^q\psi).$$

Or: $$(D^q(a\,\psi),\,D^p\psi)=(D^q\psi,\,a\,D^p\psi)+\sum_{\substack{|q'|\geqslant 1\\ q_j'\leqslant q_j,\,j=1,\ldots,n}}\binom{q}{q'}\;([D^{q'}a]\,D^{q-q'}\psi,\,D^p\psi).$$

Mais $D^p=D_jD^{p''}\;(2\leqslant j\leqslant n)$ et donc :

$$([D^{q'}a]\,D^{q-q'}\psi,\,D^p\psi)=-([D_jD^{q'}a]\,D^{q-q'}\psi,\,D^{p''}\psi)-([D^{q'}a]\,D_jD^{q-q'}\psi,\,D^{p''}\psi)$$

de sorte qu'en définitive, $\operatorname{Re}(a\,D^p\psi,\,D^q\psi)$ est une somme de termes de la forme $(b(x)\,D^r\psi,\,D^s\psi)$, avec $|r|\leqslant m-1$, $|s|\leqslant m-1$ et $b(x)\in\mathcal{E}$ (à un facteur entier près, b est une dérivée de a). On a donc :

$$|\operatorname{Re}\,(a(x)\,D^p\psi,\,D^q\psi)|\leqslant\frac{B'}{t}\,t\sum_{|r|\leqslant m-1,\,r_1=0}\|D^r\psi\|^2,$$

d'où le résultat, en remplaçant ψ par $\varphi\,e^{-tx_1}$ et en choisissant $M_\varepsilon=B'/\varepsilon$ (B' est une constante finie, dont on vérifie facilement qu'elle peut être prise égale à $4^m B$, où

$$B=\sup_{|r|\leqslant m}\;\sup_{x\in\Omega}\,|D^r a(x)|).$$

4° Cas $p_1=1,\ q_1=0$

Posons $D^p=D_1D^{p'}$, $p'=(0,p^0)$. On a :

$$(e^{-tx_1}a\,D^p\varphi,\ e^{-tx_1}D^q\varphi)=-(e^{-tx_1}a\,D^{p'}\varphi,\ e^{-tx_1}D^qD_1\varphi)-$$
$$-(e^{-tx_1}(D_1a)\,D^{p'}\varphi,\ e^{-tx_1}D^q\varphi)+2\,t\,(e^{-tx_1}a\,D^{p'}\varphi,\ e^{-tx_1}D^q\varphi).$$

La majoration des valeurs absolues des deux derniers termes du second membre a déjà été effectuée, en 2°. Occupons-nous donc du premier, qui est égal à :

$$-(e^{-tx_1}D^q(a\varphi),\ e^{-tx_1}D^p\varphi)+\sum_{|p''|\geqslant 1}\binom{p'}{p''}(e^{-tx_1}(D^{p''}a)D^{p'-p''}\varphi,\ e^{-tx_1}D^qD_1\varphi)$$

ce qui est encore égal à $-(e^{-tx_1}D^q\varphi,\ e^{-tx_1}a\,D^p\varphi)+$ des termes de la forme

$$(e^{-tx_1}b(x)\,D^r\varphi,\ e^{-tx_1}D^s\varphi),$$

avec $|r|\leqslant m-2$, $|s|=m$, $s_1=1$. Comme $m\geqslant 2$, nous pouvons poser $D^s=D_jD^{s'}$, $2\leqslant j\leqslant n$. Ce terme peut s'écrire :

$$-(e^{-tx_1}(D_jb)\,D^r\varphi,\ e^{-tx_1}D^{s'}\varphi)-(e^{-tx_1}b\,D^rD_j\varphi,\ e^{-tx_1}D^{s'}\varphi),$$

ce qui prouve, au total, que :

Re $(e^{-tx_1}a(x)\,D^p\varphi,\ e^{-tx_1}D^q\varphi)=t(e^{-tx_1}a(x)\,D^{p'}\varphi,\ e^{-tx_1}D^q\varphi)+$ des termes de la forme $(e^{-tx_1}b(x)\,D^r\varphi,\ e^{-tx_1}D^s\varphi)$ avec $|r|\leqslant m-1$, $|s|\leqslant m-1$.

$b(x)$ représente (à des facteurs entiers près, ne dépendant que de m) des dérivées d'ordre $\leqslant m$ de $a(x)$. On conclut alors sans peine, compte tenu de ce que $|a(x)|\to 0$ lorsque $|x|\to 0$.

5° Cas $p_1=0$, $q_1=1$

Se traite de façon en tous points analogue au cas 4°.

Remarque. Dans les cas 3°, 4° et 5° de la preuve précédente, nous n'avons pas eu à utiliser la récurrence; il nous a suffi de supposer $a(x)$ m fois continûment différentiable (i.e. $a(x)\in\mathcal{E}^m$). Nous avons utilisé la récurrence en 1° et 2°, où il nous a suffi de supposer $a(x)\in\mathcal{E}^1$. Il en résulte que nous aurions pu nous borner à supposer, dans l'énoncé, $a(x)\in\mathcal{E}^m$.

Nous allons considérer des opérateurs à coefficients variables sur R^n. Dans la suite de ce paragraphe, sans que cela soit à chaque fois répété, $\mathrm{P}(x, D)$ désignera un opérateur d'ordre m; sa partie homogène d'ordre m sera notée $P_m(x, D)$. On supposera que les coefficients de $P_m(x, D)$ sont des fonctions de $\mathcal{E}^m$; ceux de $P(x, D)-P_m(x, D)$ seront dans $\mathcal{E}^1$.

Si $Q(x, D)$ est un opérateur différentiel à coefficients variables, $Q(x_0, D)$ désignera l'opérateur à coefficients constants obtenu en faisant $x=x_0$ dans les coefficients de $Q(x, D)$. Nous poserons en outre: $R\,Q(x_0;\,x, D)=Q(x, D)-Q(x_0, D)$.

Nous dirons que $P(x, D)$ est *normal* (resp. *hyperbolique normal*, resp. *hyperbolique*) *au point* x_0 si cela est vrai pour $P(x_0, D)$, et que $P(x, D)$ est *normal* (resp. *hyperbolique normal*, resp. *hyperbolique*) dans un ensemble E de R^n si cela est vrai en tout point de E. D'après nos hypothèses sur les coefficients de $P(x, D)$, si chacune de ces propriétés est vraie en un point, alors elle l'est aussi sur un voisinage convenable de ce point. Remarquons enfin que l'hyperbolicité *en un point* est une propriété invariante par changement (suffisamment différentiable) de coordonnées au voisinage de ce point.

Nous allons avoir besoin d'une nouvelle domination, plus particulière que la domination exponentielle (et dont il est probable que l'introduction est superflue; mais nous n'avons pas réussi à l'éviter).

DÉFINITION 2.3. *Soient $P(x, D)$, $Q(x, D)$ deux opérateurs différentiels sur R^n, à coefficients continus. Nous dirons que $P(x, D)$ domine normalement $Q(x, D)$ sur un ouvert Ω de R^n si, pour tout ouvert borné U contenu dans Ω, il existe une constante A finie et une suite $\{h_k\}$ $(k=1, \ldots)$ de vecteurs de R^n, $|h_k| \to +\infty$ si $k \to +\infty$, tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et tout k :*

$$\| e^{-\langle x, h_k\rangle} Q(x, D) \|_{L^2} \leqslant A\, |h_k|^{-1} \| e^{-\langle x, h_k\rangle} P(x, D)\varphi \|_{L^2}.$$

On définit de façon analogue le sens de « équidomine normalement ». Concernant cette domination, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 2.2. *Soient $P(x, D)$ un opérateur homogène d'ordre m et $\{Q_i(x, D)\}$ $(i \in J)$ une famille d'opérateurs homogènes d'ordre $m-1$. Soit U un voisinage ouvert borné équilibré de 0 dans R^n. On suppose que $P(x, D)$ équidomine normalement les $Q_i(x, D)$ sur U, suivant une base de domination formée de fonctions $\exp(-\langle x, h_k\rangle)$ avec $|h_k| \to +\infty$ si $k \to +\infty$. Soit h un point adhérant quelconque à la suite $\{h_k/|h_k|\}$. Il existe alors une constante finie A telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et tout $i \in J$:*

$$\| e^{-t\langle x, h\rangle} Q_i(0, D)\varphi \|_{L^2} \leqslant \frac{A}{t} \| e^{-t\langle x, h\rangle} P(0, D)\varphi \|_{L^2}.$$

En particulier, $P(0, D)$ équidomine les $Q_i(0, D)$.

On va voir que la constante A est déterminée par l'équidomination des $Q_i(x, D)$ par $P(x, D)$. Il en résultera que l'on peut faire la preuve lorsque J n'a qu'un seul élément, c'est-à-dire que la famille dominée se réduit à un seul opérateur $Q(x, D)$.

On peut supposer que $h = \lim\limits_k h_k/|h_k|$. Soit $t > 0$; on a :

$$\left\| e^{-t\langle x, h_k/|h_k|\rangle} P\left(t \frac{x}{|h_k|}, D\right) \varphi \right\|_{L^2} = \left(\frac{t}{|h_k|}\right)^{m-\frac{1}{2}n} \left\| e^{-\langle x, h_k\rangle} P(x, D)\, \varphi\left(\frac{|h_k|}{t} x\right) \right\|_{L^2}.$$

Puisque U est équilibré, $t\,|h_k|^{-1}\,U \subset U$ dès que k est assez grand, donc le 2ᵉ membre de l'inégalité précédente majore :

$$\frac{|h_k|}{A}\left(\frac{t}{|h_k|}\right)^{m-\frac{1}{2}n}\left\| e^{-\langle x, h_k\rangle} Q(x, D)\varphi\left(\frac{|h_k|}{t}x\right)\right\|_{L^2} = \frac{t}{A}\left\| e^{-t\langle x, h_k/|h_k|\rangle} Q\left(t\frac{x}{h_k}, D\right)\varphi\right\|_{L^2}.$$

Par passage à la limite suivant k, on obtient :

$$A\,\| e^{-t\langle x, h\rangle} P(0, D)\varphi\|_{L^2} \geqslant t\,\| e^{-t\langle x, h\rangle} Q(0, D)\varphi\|_{L^2}.$$

Cette majoration étant valable pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, c'est là exactement le résultat que nous désirions.

THÉORÈME 2.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *$P(x, D)$ est hyperbolique dans l'ouvert Ω.*

(b) *Chaque point x_0 de Ω possède un voisinage ouvert $U(x_0)$ sur lequel $P(x, D)$ équidomine normalement les D^p ($|p| \leqslant m-1$).*

(c) *Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert $U(x_0)$ de x_0, un vecteur h de R^n et une constante positive finie A, tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U(x_0))$ et tout $t \geqslant 1$:*

$$\sum_{|p|\leqslant m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p\varphi\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{A}{t}\,\mathrm{Re}\,(e^{-t\langle x, h\rangle} P(x, D)\varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} P_h(x, D)\varphi)_{L^2},$$

vic où
$$P_h(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\left(h_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right)P(x, y).$$

(c) implique banalement (b). Si (b) est vérifié, c'est que $P_m(x, D)$ équidomine normalement les D^p ($|p| \leqslant m-1$) sur $U(x_0)$. Mais alors, d'après le lemme 2.2, $P_m(x_0, D)$ équidomine les D^p ($|p| = m-1$), et donc aussi les D^p pour tout p, $|p| \leqslant m-1$. Le th. 2.1 exige donc que $P_m(x_0, D)$ soit hyperbolique et, par suite, aussi $P(x_0, D)$, d'où (a). Tout revient ainsi à démontrer que (a) implique (c).

Soit $x_0 \in \Omega$ quelconque; supposons $P(x_0, D)$ hyperbolique, et ramené à la forme hyperbolique normale. Moyennent une division éventuelle, nous povons même supposer que le coefficient de $\partial^m/\partial x_1^m$ dans $P(x, D)$ est égal à 1, du moins sur un voisinage convenable de x_0. Alors, l'hyperbolicité en chaque point de ce voisinage implique que $P_m(x, D)$ est à coefficients réels.

D'après le th. 3.1, il existe une constante positive finie A_0 telle que :

$$\sum_{|p|\leqslant m-1} \| e^{-tx_1} D^p\varphi\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{A_0}{t}\,\mathrm{Re}\,(e^{-tx_1} P(x_0, D)\varphi,\ e^{-tx_1} P_1(x_0, D)\varphi)_{L^2}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ et tout $t \geqslant 1$. Tout reviendra donc à montrer qu'il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 tel que :

$$|\operatorname{Re}(e^{-tx_1} P(x, D)\varphi,\ e^{-xt_1} P_1(x, D)\varphi)_{L^2} - \operatorname{Re}(e^{-tx_1} P(x_0, D)\varphi,\ e^{-tx_1} P_1(x_0, D)\varphi)_{L^2}|$$
$$\leqslant \frac{1}{2A_0} t \sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-tx_1} D^p \varphi \|_{L^2}^2$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U(x_0))$ et tout t suffisamment grand. Cela résultera essentiellement du lemme 2.1. Dans la suite de la preuve, nous omettrons les indices L^2. On a :

$$\operatorname{Re}(e^{-tx_1} P(x, D)\varphi,\ e^{-tx_1} P_1(x, D)\varphi) = \operatorname{Re}(e^{-tx_1} P(x_0, D)\varphi,\ e^{-tx_1} P_1(x_0, D)\varphi)$$
$$+ \operatorname{Re}(e^{-tx_1} R P(x_0; x, D)\varphi,\ e^{-tx_1} P_1(x, D)\varphi) + \operatorname{Re}(e^{-tx_1} P(x_0, D)\varphi,\ e^{-tx_1} R(P_1)(x_0; x, D)\varphi).$$

1° Cas de $P(x, D)$ homogène (d'ordre m)

Dans ce cas, $RP(x_0; x, D) = P(x, D) - P(x_0, D)$ est une somme d'opérateurs $a(x) D^p$, avec $|p| = m$ et $a(x) \in \mathcal{E}^m$, à valeurs réelles, $a(x_0) = 0$; $R(P_1)(x_0; x, D)$ est une somme d'opérateurs $b(x) D^q$, avec $|q| = m-1$, $b(x)$ réelle, $b(x) \in \mathcal{E}^m$. Il résulte alors immédiatement du lemme 2.1 qu'on peut trouver un voisinage (borné, ouvert) $V(x_0)$ de x_0 et un nombre $M < +\infty$ tels que :

$$|\operatorname{Re}(e^{-tx_1} R P(x_0; x, D)\varphi, e^{-tx_1} P_1(x, D)\varphi)| + |\operatorname{Re}(e^{-tx_1} P(x_0, D)\varphi, e^{-tx_1} R(P_1)(x_0; x, D)\varphi)|$$
$$\leqslant \frac{1}{4A_0} t \sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-tx_1} D^p \varphi \|_{L^2}^2 \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}(V(x_0)) \text{ et tout } t \geqslant M. \tag{1}$$

2° Cas de $P(x, D)$ non homogène

Posons $Q(x, D) = P(x, D) - P_m(x, D)$, $Q_1(x, D) = P_1(x, D) - (P_1)_{m-1}(x, D)$. On a :

$$(e^{-tx_1} P(x, D)\varphi,\ e^{-tx_1} P_1(x, D)\varphi) = (e^{-tx_1} P_m(x, D)\varphi,\ e^{-tx_1}(P_1)_{m-1}(x, D)\varphi) +$$
$$+ (e^{-tx_1} Q(x, D)\varphi,\ e^{-tx_1} P_1(x, D)\varphi) + (e^{-tx_1} P_m(x, D)\varphi,\ e^{-tx_1} Q_1(x, D)\varphi).$$

Les majorations qui nous restent à faire sont bien plus banales que celles de 1° ; elles ne font pas intervenir le lemme 2.1 (elles ne portent pas sur les parties réelles des produits hermitiens, mais directement sur leurs valeurs absolues).

D'abord, puisque $V(x_0)$ est borné et que l'ordre de $Q(x, D)$ et celui de $P_1(x, D)$ sont $\leqslant m-1$, il existe évidemment $B_1 < +\infty$ tel que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(V(x_0))$ et tout $t > 0$:

$$|(e^{-tx_1} Q(x, D)\varphi,\ e^{-tx_1} P_1(x, D)\varphi)| \leqslant B_1 \sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-tx_1} D^p \varphi \|^2. \tag{2}$$

Quant à $(e^{-tx_1}P_m(x, D)\varphi,\ e^{-tx_1}Q_1(x, D)\varphi)$, c'est une somme finies de termes de la forme $(e^{-tx_1}a(x)D^p\varphi,\ e^{-tx_1}D^q\varphi)$, où $a(x)$ est une fois continûment différentiable, et où $|p| = m$ et $|q| \leqslant m-2$. Ce terme-type peut s'écrire, en posant $D^p = D_j D^{p'}$ ($D_j = \partial/\partial x_j$ pour un j convenable, $1 \leqslant j \leqslant n$) :

$$-(e^{-tx_1}(D_j a)D^{p'}\varphi,\ e^{-tx_1}D^q\varphi) - (e^{-tx_1}a\,D^{p'}\varphi,\ e^{-tx_1}D_jD^q\varphi) + 2\delta_{1j}t(e^{-tx_1}a\,D^{p'}\varphi,\ e^{-tx_1}D^q\varphi),$$

avec $$\delta_{1j} = 1 \text{ si } j = 1, \quad = 0 \text{ si } j \neq 1.$$

Posons $q' = (q_1, \ldots, q_{j-1}, q_j + 1, q_{j+1}, \ldots, q_k)$; $|q'| \leqslant m-1$. Il existe $B_2 < +\infty$ tel que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(V(x_0))$ et tout $t > 0$:

$$|(e^{-tx_1}(D_j a)D^{p'}\varphi,\ e^{-tx_1}D^q\varphi)| \leqslant B_2 \sum_{|r| \leqslant m-1} \|e^{-tx_1}D^r\varphi\|^2;$$

$$|(e^{-tx_1}a\,D^{p'}\varphi,\ e^{-tx_1}D^{q'}\varphi)| \leqslant B_2 \sum_{|r| \leqslant m-1} \|e^{-tx_1}D^r\varphi\|^2;$$

$$|\delta_{1j}t(e^{-tx_1}a\,D^{p'}\varphi,\ e^{-tx_1}D^q\varphi)| \leqslant B_2 \|e^{-tx_1}D^{p'}\varphi\|\,\delta_{1j}t\|e^{-tx_1}D^q\varphi\|.$$

Mais $$\delta_{1j}t\|e^{-tx_1}D^q\varphi\| \leqslant \|e^{-tx_1}D^{q'}\varphi\|.$$

Ceci est vrai si $j \neq 1$ car alors $\delta_{1j} = 0$; c'est vrai si $j = 1$ en vertu du lemme 1.4. Comme $|p'| \leqslant m-1$, $|q'| \leqslant m-1$, on en conclut qu'il existe $B_3 < +\infty$ tel que :

$$|(e^{-tx_1}P_m(x, D)\varphi,\ e^{-tx_1}Q_1(x, D)\varphi)| \leqslant B_3 \sum_{|p| \leqslant m-1} \|e^{-tx_1}D^p\varphi\|^2 \tag{3}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(V(x_0))$ et tout $t > 0$.

Prenons alors $M \geqslant 4A_0(B_1 + B_3)$. En tenant compte de (2) et de (3), on peut écrire :

$$|(e^{-tx_1}P(x, D)\varphi,\ e^{-tx_1}P_1(x, D)\varphi) - (e^{-tx_1}P_m(x, D)\varphi,\ e^{-tx_1}(P_1)_{m-1}(x, D)\varphi)|$$
$$\leqslant \frac{1}{4A_0}t \sum_{|p| \leqslant m-1} \|e^{-tx_1}D^p\varphi\|^2 \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}(V(x_0)) \text{ et tout } t \geqslant M.$$

En faisant la conjonction de ceci avec la majoration (1) appliquée à $P_m(x, D)$ (au lieu de $P(x, D)$; se rappeler que $P_1(x, y) = (1/2i\pi)(\partial/\partial y_1)P(x, y)$, d'où $(P_1)_{m-1} = (P_m)_1$), on obtient aussitôt la majoration cherchée et, par conséquent, la condition (c) de l'énoncé, du moins dans le cas où $h = (1, 0, \ldots, 0)$ et pour $t \geqslant M$. Mais en revenant au cas général (pour h) par un automorphisme vectoriel de R^n, et en faisant ensuite une homothétie sur h (cf. preuve ou th. 2.1), on obtient (c) dans son intégrité.

Remarques. 1. Nous ignorons si le simple fait, pour $P(x, D)$, d'équidominer localement les D^p ($|p| \leqslant m-1$), sans les équidominer normalement, suffit à entraîner l'hyperbolicité de $P(x, D)$.

2. Dans la condition (c) du th. 3.2, l'opérateur $P_h(x, D)$ peut être remplacé par n'importe quel opérateur $Q(x, D)$ d'ordre $m-1$ jouissant de la propriété suivante :

Effectuons un automorphisme, dans R^n, ramenant h sur $(1, 0, \dots, 0)$. Notons encore $P(x, D)$ et $Q(x, D)$ les opérateurs après transformation; et désignons par $a(x_0)$ (resp. $b(x_0)$) le coefficient de y_1^m (resp. y_1^{m-1}) dans $P(x_0, y)$ (resp. $Q(x_0, y)$).

Alors, pour tout $x_0 \in \Omega$, $Q(x_0, D)$ sépare (cf. Remarque 4, à la fin de la preuve du th. 2.1) $P(x_0, D)$ et $i\, b(x_0)\, \overline{a(x_0)} > 0$.

Remarquer que si $Q(x_0, D)$ sépare $P(x_0, D)$, $Q(x_1, D)$ sépare $P(x_1, D)$ pour tout x_1 assez voisin de x_0.

3. Dans la condition (c) du th. 3.2, le vecteur h et la constante A dépendent en général de x_0 et de $U(x_0)$.

4. Remplaçons cette condition (c) par la suivante :

(c′) *Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert $U(x_0)$ de x_0, un vecteur h de R^n et deux constantes positives finies A, T, tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U(x_0))$ et tout $t \geqslant T$,*

$$\sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{A}{t} \operatorname{Re} (e^{-t\langle x, h\rangle} P(x, D)\varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} P_h(x, D)\varphi)_{L^2}.$$

Dans (c′), A, T, h dépendent de x_0 et de $U(x_0)$ (qui, lui-même, dépend de x_0!). Les vecteurs h, pouvant figurer dans (c′), sont les h tels que tout automorphisme vectoriel de R^n amenant h sur $(1, 0, \dots, 0)$ amène $P(x_0, D)$ à la forme hyperbolique normale; ils forment un cône ouvert, contenant l'intérieur du cône lumière de $P(x_0, D)$, que nous noterons $\Gamma(x_0)$.

Ceci dit, soit $P(x, D)$ un opérateur hyperbolique.

Définition 2.4. *Nous dirons que $P(x, D)$ est hyperbolique lié dans un ouvert Ω de R^n si, pour tout compact $K \subset \Omega$, l'intersection des cônes $\Gamma(x_0)$, x_0 parcourant K, n'est pas vide.*

Dire que $P(x, D)$ est hyperbolique lié dans Ω revient donc à dire que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un automorphisme u_K de R^n ramenant simultanément tous les $P(x_0, D)$, $x_0 \in K$, à la forme hyperbolique normale. Evidemment, tout $P(x, D)$ hyperbolique normal dans Ω y est à fortiori hyperbolique lié.

Proposition 2.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *$P(x, D)$ est hyperbolique lié dans l'ouvert Ω.*

(b) *Quel que soit l'ouvert borné U, $\bar{U} \subset \Omega$, $P(x, D)$ équidomine normalement les D^p ($|p| \leqslant m-1$) dans U.*

(c) *Quel que soit l'ouvert borné U, $\bar{U} \subset \Omega$, il existe $h \in R^n$ et $0 < A < +\infty$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et tout $t \geq 1$:*

$$\sum_{|p| \leq m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi \|_{L^2}^2 \leq \frac{A}{t} \operatorname{Re} (e^{-t\langle x, h\rangle} P(x, D) \varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} P_h(x, D) \varphi)_{L^2}.$$

(c) implique banalement (b), par application de l'inégalité de Schwarz et grâce au fait que $P_h(x, D)$ est d'ordre $m-1$.

(b) implique (a) d'après le lemme 2.2 : il résulte, en effet, de ce lemme, que, pour tout $x_0 \in U$, $P(x_0, D)$ équidomine les D^p ($|p| \leq m-1$) suivant une base de domination constituée par des $\exp(-t\langle x, h\rangle)$, où h est indépendent de x_0 (d'après le lemme 2.2, h peut être déterminé à l'aide seulement d'une base de domination normale, *sur* U, des D^p par $P(x, D)$). D'après la remarque 4 ci-dessus, cela équivaut exactement à dire que $h \in \Gamma(x_0)$, quel que soit $x_0 \in U$, d'où (a).

Reste à prouver que (a) $\Rightarrow$ (c).

Par hypothèse, lorsque x_0 parcourt $\bar{U}$, qui est un compact inclus dans Ω, l'intersection des cônes $\Gamma(x_0)$ n'est pas vide; soit h un vecteur (nécessairement non nul) de cette intersection; h peut figurer dans la condition (c'), où se trouvent associés à lui, pour chaque $x_0 \in \bar{U}$, un voisinage $U(x_0)$ et des constantes que nous noterons ici, pour éviter toute confusion, $A(x_0)$ et $T(x_0)$. Les $U(x_0)$ formant un recouvrement ouvert de $\bar{U}$, il existe un nombre fini de points x_j ($1 \leq j \leq r$) de $\bar{U}$ tels que l'ensemble des $U(x_j)$ recouvre $\bar{U}$; posons $A = \sup_{1 \leq j \leq r} A(x_j)$ et $T = \sup_{1 \leq j \leq r} T(x_j)$. Dans ce qui suit, t sera un nombre réel $\geq T$.

Ceci fait, donnons-nous une partition de l'unité dans $\mathcal{D}$, sur un voisinage convenable de $\bar{U}$, subordonnée au recouvrement $\{U(x_j)\}$ ($1 \leq j \leq r$); notons $\alpha_j(x)$ ($j = 1, \ldots, r$) les éléments de cette partition. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ quelconque. On a :

$$P(x, D)(\alpha_j \varphi) = \alpha_j P(x, D) \varphi + \sum_{|p| \geq 1} \frac{1}{p!} D^p \alpha_j P^{(p)}(x, D) \varphi.$$

Comme $\alpha_j \varphi \in \mathcal{D}(U(x_j))$, le th. 2.2 nous permet d'écrire:

$$\sum_{|p| \leq m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p (\alpha_j \varphi) \| \leq \frac{A}{t} \operatorname{Re} (e^{-t\langle x, h\rangle} \alpha_j P(x, D) \varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} \times$$
$$\times P_h(x, D)(\alpha_j \varphi)) + \frac{B}{t} \sum_{|p| \leq m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi \|^2,$$

en omettant les indices L^2, ce que nous continuerons de faire dans la suite.

Par un raisonnement analogue à celui de la preuve du th. 2.2 (démonstration de (a) $\Rightarrow$ (c), 2°), on montre facilement qu'il existe $B_1 < +\infty$ tel que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$:

$$|(e^{-t\langle x,h\rangle}\alpha_j P(x,D)\varphi,\ e^{-t\langle x,h\rangle}[P_h(x,D)(\alpha_j\varphi)-\alpha_j P_h(x,D)\varphi])|\leqslant B_1\sum_{|p|\leqslant m-1}\|e^{-t\langle x,h\rangle}D^p\varphi\|^2.$$

De sorte que finalement :

$$\sum_{|p|\leqslant m-1}\|e^{-t\langle x,h\rangle}D^p(\alpha_j\varphi)\|^2\leqslant\frac{B'}{t}\sum_{|p|\leqslant m-1}\|e^{-t\langle x,h\rangle}D^p\varphi\|^2+$$
$$+\frac{A}{t}\operatorname{Re}(e^{-t\langle x,h\rangle}\alpha_j^2 P(x,D)\varphi,\ e^{-t\langle x,h\rangle}P_h(x,D)\varphi)\qquad(B'<+\infty);$$

et donc, pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(U)$ et tout $t\geqslant M$, on sommant sur j :

$$\sum_{|p|\leqslant m-1}\sum_{j=1}^{r}\|e^{-t\langle x,h\rangle}D^p(\alpha_j\varphi)\|^2$$
$$\leqslant r\frac{B'}{t}\sum_{|p|\leqslant m-1}\|e^{-t\langle x,h\rangle}D^p\varphi\|^2+\frac{A}{t}\operatorname{Re}(g^2(x)\,e^{-t\langle x,h\rangle}P(x,D)\varphi,\ e^{-t\langle x,h\rangle}P_h(x,D)\varphi),$$

où l'on a posé $g(x)=\sqrt{\alpha_1^2(x)+\cdots+\alpha_r^2(x)}$. Mais pour tout $p\in N^n$:

$$\|e^{-t\langle x,h\rangle}D^p\varphi\|\leqslant\sum_{j=1}^{r}\|e^{-t\langle x,h\rangle}D^p(\alpha_j\varphi)\|.$$

On en conclut qu'il existe T', A' positifs finis tels que, pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(U)$ et tout $t\geqslant T'$:

$$\sum_{|p|\leqslant m-1}\|e^{-t\langle x,h\rangle}D^p\varphi\|^2\leqslant\frac{A'}{t}\operatorname{Re}(g^2e^{-t\langle x,h\rangle}P(x,D)\varphi,\ e^{-t\langle x,h\rangle}P_h(x,D)\varphi).\tag{1}$$

Ceci n'est pas encore tout-à-fait ce que nous désirons. Nous devons maintenant procéder à l'élimination de g; que cela soit possible tient à l'essence même de la domination. Le raisonnement que nous allons faire (sans qu'il présente aucune nouveauté) sera typique. Nous recourrerons de nouveau, dans ce chapitre (th. 2.5) et le suivant (th. 3.3 et th. 3.4), à un procédé tout à fait du même genre, sans en refaire chaque fois l'exposé.

Elimination de $g(x)$

On a $0<g(x)\leqslant 1$ pour tout x dans un voisinage V de $\bar{U}$; en particulier, $\varphi\to g\varphi$ est une application biunivoque de $\mathcal{D}(U)$ sur lui-même. Soit $\beta\in\mathcal{D}(V)$, $\beta(x)=1$ pour tout $x\in\bar{U}$. Posons $f(x)=g^{-1}(x)\beta(x)$. On a $1\leqslant f(x)$ pour tout $x\in\bar{U}$, et il est visible que $f\in\mathcal{D}$. Nous pouvons remplacer, dans (1), φ par $f\varphi$.

1° *Minoration du 1^er membre de* (1) (avec $f\varphi$ à la place de φ)

Du fait que $f \in \mathcal{D}$, il existe $M < +\infty$ tel que :

$$\sum_{|p| \leqslant m-1} \| f e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi \|^2$$

$$\leqslant \sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p (f\varphi) \|^2 + M \sum_{|p| \leqslant m-2} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi \|^2 \quad \text{(ceci pour toute } \varphi \in \mathcal{D}).$$

Mais d'autre part, il existe une constante finie $B(h)$ ne dépendant que de h, telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\sum_{|p| \leqslant m-2} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi \|^2 \leqslant \frac{B(h)}{t^2} \sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi \|^2.$$

Compte tenu de ce que $f \geqslant 1$ sur $\bar{U}$, on obtient, en prenant $t^2 \geqslant 2MB(h)$, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$:

$$\sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi \|^2 \leqslant 2 \sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p (f\varphi) \|^2. \tag{2}$$

2° *Majoration du 2^e membre de* (1) (avec $f\varphi$ au lieu de φ)

Pour simplifier, écrivons P (resp. P_h) au lieu de $P(x, D)$ (resp. $P_h(x, D)$). On a :

$$(g^2 e^{-t\langle x, h\rangle} P(f\varphi),\ e^{-t\langle x, h\rangle} P_h(f\varphi)) = (e^{-t\langle x, h\rangle} P\varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} P_h\varphi) +$$

$$+ (e^{-t\langle x, h\rangle} [gP(f\varphi) - P\varphi],\ e^{-t\langle x, h\rangle} g P_h(f\varphi)) + (e^{-t\langle x, h\rangle} P\varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} [gP_h(f\varphi) - P_h\varphi]).$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $gP(f\varphi) - P\varphi$ ne contient que des dérivées d'ordre $\leqslant m-1$ de φ; et $gP_h(f\varphi) - P_h\varphi$ ne contient que des dérivées d'ordre $\leqslant m-2$ de φ. En effet, $f = g^{-1}$ sur $\bar{U}$. Il en résulte tout d'abord qu'il existe $M_1 < +\infty$ tel que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$:

$$|(e^{-t\langle x, h\rangle}[gP(f\varphi) - P\varphi], e^{-t\langle x, h\rangle} g P_h(f\varphi))| + |(e^{-t\langle x, h\rangle}[P\varphi - P_m\varphi], e^{-t\langle x, h\rangle}[gP_h(f\varphi) - P_h\varphi])|$$

$$\leqslant M_1 \sum_{|p| \leqslant m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi \|^2 \quad (P_m \text{ désigne } P_m(x, D)). \tag{3}$$

Pour majorer $|(e^{-t\langle x, h\rangle} P_m\varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} [gP_h(f\varphi) - P_h\varphi])|$, considérer une expression du type $(e^{-t\langle x, h\rangle} a(x) D^p\varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} D^q\varphi)$, avec $|p| = m$, $|q| \leqslant m-2$ et $a(x) \in \mathcal{E}^m$. Posons $D_j = \partial/\partial x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ et supposons par exemple que $p_j \geqslant 1$. Posons $D^p = D_j D^{p'}$, avec $p' = (p_1, \ldots, p_j^{-1}, p_j^{-1}, p_{j+1}, \ldots, p_n)$; on a :

$$(e^{-t\langle x, h\rangle} a D^p\varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} D^q\varphi) = -(e^{-t\langle x, h\rangle} a D^{p'}\varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} D_j D^q\varphi) -$$

$$-(e^{-t\langle x, h\rangle} (D_j a) D^{p'}\varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} D^q\varphi) + 2th_j (e^{-t\langle x, h\rangle} a D^{p'}\varphi,\ e^{-t\langle x, h\rangle} D^q\varphi).$$

Les deux premiers termes du 2^e membre sont majorés, en valeur absolue, par $M_2 \sum_{|r| \leqslant m-1} \| e^{-t\langle x, h\rangle} D^r\varphi \|^2$ (M_2 : const. finie). D'un autre côté, en vertu du lemme 1.4 et puisque $|q| \leqslant m-2$:

$$|t h_j| \, \|e^{-t\langle x, h\rangle} D^q \varphi\| \leqslant \sum_{|r| \leqslant m-1} \|e^{-t\langle x, h\rangle} D^r \varphi\| \quad (\text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}),$$

de sorte qu'au total on a bien, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$|(e^{-t\langle x, h\rangle} a(x) D^p \varphi, \; e^{-t\langle x, h\rangle} D^q \varphi)| \leqslant M_3 \sum_{|r| \leqslant m-1} \|e^{-t\langle x, h\rangle} D^r \varphi\|^2,$$

où M_3 est une constante finie. En définitive, il existe M_4 finie telle qu'on ait, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$:

$$|(e^{-t\langle x, h\rangle} P_m \varphi, \; e^{-t\langle x, h\rangle} [g P_h(f\varphi) - P_h \varphi])| \leqslant M_4 \sum_{|p| \leqslant m-1} \|e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi\|^2. \tag{4}$$

Pour terminer, il suffit de faire la conjonction des inégalités (3) et (4). On trouve qu'il existe une constante $C(h)$ finie, telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{A'}{t} \operatorname{Re}(g^2 e^{-t\langle x, h\rangle} P(f\varphi), \; e^{-t\langle x, h\rangle} P_h(f\varphi)) \\ &\qquad \leqslant \frac{A'}{t} \operatorname{Re}(e^{-t\langle x, h\rangle} P\varphi, \; e^{-t\langle x, h\rangle} P_h \varphi) + \frac{C(h)}{t} \sum_{|q| \leqslant m-1} \|e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi\|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

3° *Elimination de g*

Il suffit de faire la conjonction de (2) et de (5). Imposons $t \geqslant 4\,C(h)$ (outre les conditions déjà imposées). Compte tenu de (1), on voit qu'il existe $H(h) < +\infty$ tel que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et tout $t \geqslant H(h)$:

$$\sum_{|p| \leqslant m-1} \|e^{-t\langle x, h\rangle} D^p \varphi\|^2 \leqslant \frac{4\,A'}{t} \operatorname{Re}(e^{-t\langle x, h\rangle} P\varphi, \; e^{-t\langle x, h\rangle} P_h \varphi).$$

Posons enfin $t' = t/H(h)$, $h' = H(h)\,h$ et $A'' = 4\,A'$. Nous obtenons exactement (c).

§ 3. Opérateurs paraboliques à coefficients constants

Nous nous proposons de montrer, dans ce paragraphe, que les opérateurs paraboliques à coefficients constants donnent lieu à un théorème de domination analogue à celui établi dans le paragraphe 1 (th. 2.1), avec, bien entendu, les modifications qu'impose la nature différente des opérateurs étudiés. On verra qu'outre à ces modifications, prévisibles, un fait nouveau apparaît, intéressant les dérivations d'ordre non entier, qui joue à l'avantage, en un certain sens, des paraboliques.

Nous n'aurons à considérer que des opérateurs $P(D)$ normaux, d'ordre m en x_1, mais dont l'ordre total sera toujours $> m$. Nous noterons $P_{m,k}(y)$ la partie de $P(y)$ telle que $P_{m,k}(y_1^k, y^0)$ soit homogène de degré $m k$.

DÉFINITION 2.5. *(Pétrowsky). Nous dirons qu'un opérateur normal $P(D)$ est p-parabolique s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

(P_{I}) *Il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que* $\deg P(y_1^p, y^0) = mp$.

(P_{II}) *Il existe un nombre $\delta > 0$ tel que les parties imaginaires des racines du polynôme $P_{m,p}(y_1, y^0)$ en y_1 soient $\geqslant \delta$ pour tout $y^0 \in R^{n-1}$, $|y^0| = 1$.*

(P_{II}) exige p pair et $\geqslant 2$, ce que nous supposerons toujours dorénavant, même lorsque p ne sera pas rattaché à priori à un opérateur différentiel.

DÉFINITION 2.6. *Nous dirons que $P(D)$ est p-anti-parabolique si $P(-D)$ est p-parabolique.*

PROPOSITION 2.3. *Supposons vérifiée la condition (P_{I}) de la définition 2.5. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *$P(D)$ équidomine les D^r, $pr_1 + |r^0| \leqslant mp - 1$, suivant la base de domination constituée par les fonctions* $\exp(-hx_1)$, $h > 0$.

(b) *Il existe une constante finie A telle que :*

$$(|y_1 - ih| + |y^0|^p)^m \leqslant A\,|P_{m,p}(y_1 - ih, y^0) \quad \textit{pour tout } y \in R^n \textit{ et tout } h > 0.$$

(c) *Il existe deux constantes finies A, H telles qu'on ait, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $h \geqslant H$:*

$$\sum_{k=0}^{p} h^{k/p} \sum\nolimits_k \|e^{-hx_1} D^r \varphi\|_{L^2} \leqslant A\,\|e^{-hx_1} P(D)\varphi\|_{L^2},$$

où l'on somme, dans $\sum_k$, sur $r \in N^n$, $pr_1 + |r^0| \leqslant mp - k$.

Nous ferons simultanément la preuve de cette proposition et celle du théorème suivant :

THÉORÈME 2.3. *Supposons vérifiée la condition (P_{I}) de la définition 2.5. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(â) *$P(D)$ est p-parabolique.*

($\hat{\mathrm{b}}$) *$P(D)$ équidomine les D^r, $pr_1 + |r^0| \leqslant mp - 1$, suivant la base de domination constituée par les fonctions* $\exp(-hx_1)$, $h > 0$.

(ĉ) *Il existe deux constantes positives finies A, H telles qu'on ait, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $h \geqslant H$:*

$$\sum\nolimits_{\frac{1}{2}p} \|e^{-hx_1} D^r \varphi\|_{L^2}^2 + h \sum\nolimits_p \|e^{-hx_1} D^r \varphi\|_{L^2}^2 \leqslant A \operatorname{Re}\,(e^{-hx_1} P(D)\varphi,\ e^{-hx_1} P_1(D)\varphi)_{L^2}.$$

$P_1(y) = \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\partial P}{\partial y_1}(y)$ *et on somme dans $\sum_p$ (resp. $\sum_{\frac{1}{2}p}$) par rapport aux $r \in N^n$ vérifiant $pr_1 + |r^0| \leqslant (m-1)p$ (resp. $\leqslant mp - \frac{1}{2}p$).*

Avant d'entreprendre la démonstration, signalons que ces deux énoncés admettent des homologues pour le cas anti-parabolique. Pour obtenir la formulation précise de ces homologues, il suffit de remplacer partout $\exp(-hx_1)$ par $\exp(hx_1)$; en outre, il convient de remplacer h par $-h$ dans l'inégalité de (b) et A par $-A$ dans l'inégalité de (ĉ); (â) devient : *$P(D)$ est p-anti-parabolique.*

Nous ferons la démonstration suivant le schéma :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathrm{b}) & \Leftarrow & (\hat{\mathrm{a}}) & \Rightarrow & (\hat{\mathrm{c}}) \\ \Downarrow & & & & \Downarrow \\ (\mathrm{c}) \Rightarrow (\mathrm{a}) & = & (\hat{\mathrm{b}}) & \Rightarrow & (\hat{\mathrm{a}}). \end{array}$$

L'implication (c) $\Rightarrow$ (a) est banale. Nous ferons, dans l'ordre, les preuves de :

$$(\mathrm{b}) \Rightarrow (\mathrm{c}), \quad (\hat{\mathrm{a}}) \Rightarrow (\hat{\mathrm{c}}), \quad (\hat{\mathrm{a}}) \Rightarrow (\mathrm{b}), \quad (\hat{\mathrm{c}}) \Rightarrow (\hat{\mathrm{a}}), \quad (\hat{\mathrm{b}}) \Rightarrow (\hat{\mathrm{a}}).$$

1° (b) $\Rightarrow$ (c)

En vertu de (P_{I}), il existe $M < +\infty$ tel que $z \in C^n$, $|z| \geqslant M$, implique

$$|P(z) - P_{m,p}(z)| \leqslant B(|z_1| + |z^0|^p)^{m-1/p} \leqslant \frac{1}{2A}(|z_1| + |z^0|^p)^m$$

(B : const. finie). Si donc $h \geqslant M$, (b) implique :

$$(|y_1 - ih| + |y^0|^p)^m \leqslant 2A\,|P(y_1 - ih, y^0)| \quad \text{pour tout } y \in R^n.$$

Le carré du 1er membre majore (à un facteur constant près, indépendant de y et de h) $[(|y_1 - ih| + |y^0|^p)^2 + h^2]^m$. Or, il existe $c > 0$ tel que $(a+b)^m \geqslant c\,a^{sm}\,b^{(1-s)m}$ pour tous a, $b \geqslant 0$ et $0 \leqslant s \leqslant 1$. En appliquant ceci, on voit qu'il existe $A' < +\infty$ tel que, pour tout $y \in R^n$ et tout $h \in M$:

$$\sum_{k=0}^{p} h^{2(k/p)} (|y_1 - ih| + |y^0|^p)^{2(m-k/p)} \leqslant A'\,|P(y_1 - ih, y^0)|^2.$$

De là, par le théorème de Plancherel, se déduit aisément (c).

2° (â) $\Rightarrow$ (ĉ)

Supposons égal à 1 le coefficient de y_1^m dans $P(y)$. Fixons arbitrairement y^0, $|y^0| = 1$. Notons $r_j(y^0) + i\,s_j(y^0)$ les racines du polynôme $P_{m,p}(z_1, y^0)$ en z_1. Il ne nous intéresse pas ici de savoir si on peut désigner m fonctions $r_j(y^0) + i\,s_j(y^0)$ sur la sphère unité de R^{n-1} qui, en chaque point, y représenteraient les m racines de $P_{m,p}(z_1, y^0)$. Ce dont nous avons besoin, ce sont les $Q_k(z_1, y^0)$ définis dans la preuve du th. 2.1 :

$$Q_k(z_1, y^0) = \prod_{j=1,\, j \neq k}^{m} [z_1 - r_j(y^0) - i\,s_j(y^0)] \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Posons $F(z_1, y^0) = \sum_{k=1}^{m} |Q_k(z_1, y^0)|^2$; $F(z_1, y^0)$ est une véritable fonction de z_1 et de y^0 dans $C^1 \times R^{n-1}$. On a d'ailleurs : $F(t^p z_1, t y^0) = t^{2(m-1)p} F(z_1, y^0)$ pour tout $t > 0$, du fait que :

$$P_{m,p}(t^p X_1, t X^0) = t^{mp} P_{m,p}(X).$$

En vertu de la déf. 2.5, si $|y^0| = 1$ et si $\operatorname{Im} z_1 \leqslant 0$: $F(z_1, y^0) \geqslant m\delta^{2(m-1)}$, d'où, pour tout $y^0 \in R^{n-1}$ (si $\operatorname{Im} z_1 \leqslant 0$) :

$$F(z_1, y^0) \geqslant m\delta^{2(m-1)} |y^0|^{2(m-1)p} \tag{1}$$

en vertu de la pseudo-homogénéité de $F(z_1, y^0)$.

Mais $F(z_1, y^0)$ est un polynôme en z_1 et $\bar{z}_1$ dont le terme de plus haut degré est $m|z_1|^{2(m-1)}$. Comme $F(z_1, y^0) \geqslant m\delta^{2(m-1)}$ quels que soient $z_1 \in C$, $\operatorname{Im} z_1 \leqslant 0$ (et $|y^0| = 1$), il existe une constante finie M telle que, pour ces z_1 et ces y^0, on ait :

$$M F(z_1, y^0) \geqslant |z_1|^{2(m-1)}. \tag{2}$$

En vertu de la pseudo-homogénéité de $F(z_1, y^0)$, ceci est encore vrai pour tout $y^0 \in R^{n-1}$. La conjonction de (1) et de (2) donne, pour tout $y \in R^n$ et tout $h \geqslant 0$ (avec $M_1 < +\infty$) :

$$(|y_1 - ih| + |y^0|^p)^{2(m-1)} \leqslant M_1 F(y_1 - ih, y_0). \tag{3}$$

Ceci dit, remarquons (cf. preuve du th. 2.1) qu'on a :

$$\operatorname{Re}\, [P_{m,p}(z_1, y^0)\, \overline{(P_{m,p})_1 (z_1, y^0)}] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} [s_k(y^0) - \operatorname{Im} z_1]\, |Q_k(z_1, y^0)|^2.$$

En choisissant les indices $k = 1, \ldots, m$ des racines, de façon cohérente sur chaque droite de R^{n-1} passant par l'origine, la pseudo-homogénéité de $P_{m,p}(X)$ implique $s_k(t y^0) = t^p s_k(y^0)$. En conséquence, pour tout y^0 et quelle que soit la racine $r(y^0) + i s(y^0)$ de $P_{m,p}(z_1, y^0)$, on a : $s(y^0) \geqslant \delta |y^0|^p$. Compte tenu de (3), on voit qu'il existe $0 < M_2 < +\infty$, tel que pour tous $y \in R^n$ et $h > 0$:

$$(h + |y^0|^p)(|y_1 - ih| + |y^0|^p)^{2(m-1)} \leqslant M_2 \operatorname{Re}\, [P_{m,p}(y_1 - ih, y^0)\, \overline{(P_{m,p})_1 (y_1 - ih, y^0)}]. \tag{4}$$

On peut démontrer le résultat suivant :

Soient deux entiers μ, $\nu \geqslant 0$, $\mu \leqslant 2(m-1)$, $p\mu + \nu \leqslant (2m-1)p - 1$. Dans ces conditions, pour tout $a \geqslant 1$ et tout $b \geqslant 0$:

$$a^\mu b^\nu < (1 + b^p)(a + b^p)^{2(m-1)}.$$

Appliquons ceci à $a = h^{-1}|y_1 - ih|$, $b = h^{-1/p}|y^0|$, $\mu = k_1$, $\nu = |k^0|$. On suppose donc $k_1 \leqslant 2(m-1)$ et $p k_1 + |k^0| \leqslant (2m-1)p - 1$. Il vient :

$$|y_1 - ih|^{k_1} |y^0|^{|k^0|} \leqslant h^{-1/p} (h + |y^0|^p) (|y_1 - ih| + |y^0|^p)^{2(m-1)} \tag{5}$$

(dans tout ceci, on supposera $h > 0$).

Or il se trouve que

$$|P_{m,p}(z_1, y^0) \overline{[P_1(z_1, y^0) - (P_{m,p})_1(z_1, y^0)]}|$$

et

$$|[P(z_1, y^0) - P_{m,p}(z_1, y^0)] \overline{P_1(z_1, y^0)}|$$

sont majorés par des combinaisons linéaires de monômes $|z_1|^{k_1} |y^0|^{|k^0|}$, où précisément $k_1 \leqslant 2(m-1)$ et $pk_1 + |k^0| \leqslant (2m-1)p - 1$. En tenant compte de (5), on voit donc qu'il existe $B_1 \leqslant +\infty$ tel que :

$$|P(y_1 - ih, y^0) \overline{P_1(y_1 - ih, y^0)} - P_{m,p}(y_1 - ih, y^0) \overline{(P_{m,p})_1 (y_1 - ih, y^0)}|$$
$$\leqslant B_1 h^{-1/p} (h + |y^0|^p) (|y_1 - ih| + |y^0|^p)^{2(m-1)}$$

pour tout $y \in R^n$ et tout $h > 0$. Prenons alors $H > 0$ tel que $H^{1/p} \geqslant 2 B_1 M_2$. Compte tenu de (4), on a, pour tout $y \in R^n$ et tout $h \geqslant H$:

$$(h + |y^0|^p) \sum_{k=0}^{m-1} (|y_1 - ih|^2 + |y^0|^{2p})^k \leqslant 2 M_2 \operatorname{Re} P(y_1 - ih, y^0) \overline{P_1(y_1 - ih, y^0)}.$$

De là (ĉ), de la façon habituelle : par le théorème de Parseval.

3° (â) ⇒ (b)

Supposons donc $P(D)$ p-parabolique. Pour tout $|y^0| = 1$, y_1 réel et $h \geqslant 0$ arbitraires, $|P_{m,p}(y_1 - ih, y^0)| \geqslant \delta^m$. On en déduit, grâce à la pseudo-homogénéité de $P_{m,p}$, pour tout $y \in R^n$ et tout $h \geqslant 0$:

$$|P_{m,p}(y_1 - ih, y^0)| \geqslant \delta^m |y^0|^{mp}.$$

D'autre part, $P_{m,p}(z_1, y^0)$ est un polynôme en z_1 dont le terme de plus haut degré est z_1^m. Il existe donc $M < +\infty$ tel que, pour tout y_1 réel, tout $h > 0$ et tout y^0, $|y^0| = 1$: $|y_1 - ih|^m \leqslant M |P_{m,p}(y_1 - ih, y^0)|$. Ici encore, la pseudo-homogénéité de $P_{m,p}$ permet de dire que ceci reste vrai pour tout $y^0 \in R^{n-1}$.

4° (ĉ) ⇒ (â)

Comme $P_1(D)$ est combinaison linéaire de D^r, $pr_1 + |r^0| \leqslant (m-1)p$, on déduit de (ĉ), pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $h \geqslant H$:

$$\sqrt{h} \textstyle\sum_{\frac{1}{2}p} \|e^{-hx_1} D^r \varphi\| + h \sum_p \|e^{-hx_1} D^r \varphi\| \leqslant B \|e^{-hx_1} P(D) \varphi\| \quad (B < +\infty).$$

D'après le lemme 1.2, ceci équivaut à dire que, pour tout y et tout $h \geqslant H$ (avec $B' < +\infty$) :

$$h(h+|y^0|^p)(|y_1-ih|+|y^0|^p)^{2(m-1)} \leqslant B' \sum_{q \in N^n} |P^{(q)}(y_1-ih, y^0)|^2.$$

Remplaçons, dans cette inégalité, y^0 par ty^0, y_1 par $t^p y_1$ et h par $t^p h$, avec $t \geqslant 1$. Pour y et h fixés, on a :

$$t^{2mq} h(h+|y^0|^p)(|y_1-ih|+|y^0|^p)^{2(m-1)} \leqslant B' t^{2mp} |P_{m,p}(y_1-ih, y^0)|^2 + O(t^{2(mq-1)}).$$

Multiplions à gauche et à droite par t^{-2mp} et faisons tendre t vers $+\infty$; nous aboutissons à ce que, pour tous $y \in R^n$ et $h \geqslant H$:

$$h(h+|y^0|^p)(|y_1-ih|+|y^0|^p)^{2(m-1)} \leqslant B' |P_{m,p}(y_1-ih, y^0)|^2.$$

Remplaçons, dans cette inégalité, y_1 par $t^p y_1$, y^0 par ty^0 et posons $s=t^{-p}h$ $(t>0)$. On obtient :

$$s(s+|y^0|^p)(|y_1-is|+|y^0|^p)^{2(m-1)} \leqslant B' |P_{m,p}(y_1-is, y^0)|^2$$

et donc, pour tout y_1 réel, tout $y^0 \in R^{n-1}$, $|y^0|=1$, et tout $s>0$:

$$\sqrt{s} \leqslant B' |P_{m,p}(y_1-is, y^0|.$$

Nous allons montrer que cette inégalité entraîne (â). En effet, si elle est vraie, $P_{m,p}(z_1, y^0)$ ne peut avoir, en tant que polynôme en z_1, aucune racine, pour aucun y^0, $|y^0|=1$, dont la partie imaginaire soit <0. Car si r_j+is_j était une telle racine, en faisant $y_1=r_j$, $s=-s_j$, dans l'inégalité ci-dessus, le second membre serait nul, et non le premier. Supposons enfin que, pour tout $\eta>0$, on puisse trouver y^0, $|y^0|=1$, tel que $P_{m,p}(z_1, y^0)$ ait une racine r_j+is_j, avec $0 \leqslant s_j \leqslant \eta$. Prenons alors, dans l'inégalité ci-dessus, $y_1=r_j$, $s=\eta$; elle donne $\sqrt{\eta} \leqslant B''\eta$ (B'' : constante finie, indépendante de η). Comme η est arbitrairement petit, ceci est absurde.

5° $(\hat{\text{b}}) \Rightarrow (\hat{\text{a}})$

Le coroll. 2 du lemme 1.2 veut qu'à tout $\varepsilon>0$ corresponde $h>0$ tel que, pour tout $y \in R^n$:

$$(|y_1-ih|+|y^0|^p)^{m-1/p} \leqslant \varepsilon \sum_{q \in N^n} |P^{(q)}(y_1-ih, y^0)|.$$

Mais si $h \geqslant 1$, il existe $M<+\infty$ tel que :

$$|P(y_1-ih, y^0)-P_{m,p}(y_1-ih, y^0)|+\sum_{|q|\geqslant 1} |P^{(q)}(y_1-ih, y^0)| \leqslant M(|y_1-ih|+|y^0|^p)^{m-1/p} \quad \text{pour tout } y \in R^n,$$

d'où, en choisissant $\varepsilon>0$ assez petit (et h en conséquence, ce qui est compatible avec $h \geqslant 1$), pour tout $y \in R^n$:

$$(|y_1 - i h| + |y^0|^p)^{m-1/p} \leqslant 2\,\varepsilon\,|P_{m,p}(y_1 - i h, y^0)|.$$

Remplaçons, dans cette inégalité, y_1 par $t^p y_1$, y^0 par $t y^0$ et posons $s = t^{-p} h$ $(t > 0)$. Il vient, pour tout $y \in R^n$ et tout $s > 0$:

$$s^{1/p}(|y_1 - i s| + |y^0|^p)^{m-1/p} \leqslant 2\,\varepsilon\,|h|^{1/p}\,|P_{m,p}(y_1 - i s, y^0)|.$$

En laissant h fixe, on tire de là aussitôt, pour $|y^0| = 1$:

$$s^{1/p} \leqslant C\,|P_{m,p}(y_1 - i s, y^0)| \quad (C < +\infty)$$

et ceci est vrai pour tout $s > 0$ et tout y_1 réel. On raisonne, à partir de là, exactement comme on l'a fait à la fin de 4°), compte tenu de ce que $p \geqslant 2$.

Le théorème 2.3 et la proposition 2.3 sont complètement démontrés.

Introduisons les dérivations d'ordre non entier, de la façon suivante : soit $s \in R^n_+$ (i.e. un système de n nombres $\geqslant 0$). Nous poserons, pour $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$D^s \varphi(x) = \int e^{2 i \pi \langle x, h \rangle} (2 i \pi y_1)^{s_1} \dots (2 i \pi y_n)^{s_n} \hat{\varphi}(y)\, dy,$$

où, pour chaque $j = 1, \dots, n$, $(2 i \pi y_j)^{s_j}$ est la valeur de la fonction z^{s_j} en $2 i \pi y_j$, mettons de la branche de cette « fonction » qui est réelle positive pour z réel positif (bien entendu, ceci n'a aucune importance).

THÉORÈME 2.4. *Supposons vérifiée la condition* (P_{I}) *de la définition* 2.5. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $P(D)$ *est p-parabolique.*

(b) *Quel que soit k réel > 0, $P(D)$ équidomine les D^s, où $s \in R^n_+$ vérifie $p s_1 + |s^0| \leqslant m p - k$, sur la base de domination constituée par les fonctions* $\exp(-h x_1)$, $h > 0$.

(c) *Il existe deux constantes finies A, H telles que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, tout $h \geqslant H$, tout réel $k \geqslant 0$ et tout $s \in R^n_+$, $p s_1 + |s^0| = m p - k$, on ait :*

$$h^{k/p}\,\|e^{-h x_1} D^s \varphi\|_{L^2} \leqslant A\,\|e^{-h x_1} P(D)\varphi\|_{L^2}.$$

Bien entendu, le th. 2.4 admet aussi un énoncé homologue, valable pour les anti-paraboliques.

(c) $\Rightarrow$ (b) banalement et (b) $\Rightarrow$ (a) d'après le th. 2.3. D'autre part, la conjonction du th. 2.3 et de la prop. 2.3 fait que (a) implique : il existe $B < +\infty$ tel que, pour tous $y \in R^n$ et $h > 0$:

$$(|y_1 - ih| + |y^0|^p)^m \leqslant B\,|P_{m,p}(y_1 - ih, y^0)|,$$

d'où l'on déduit (comme il a déjà été fait) qu'il existe H fini tel que, pour tout $y \in R^n$ et tout $h \geqslant H$:

$$(|y_1 - ih| + |y^0|^p)^m \leqslant 2\,B\,|P(y_1 - ih, y^0)|.$$

Soit alors $s \in R^n_+$, $ps_1 + |s^0| = mp - k$, $k \geqslant 0$. On a :

$$h^{k/p}(|y_1 - ih| + |y^0|^p)^{m-k/p} \leqslant (|y_1 - ih| + |y^0|^p)^m \leqslant 2\,B\,|P(y_1 - ih, y^0)|,$$

et comme $$|y_1 - ih|^{s_1}\,|y_2|^{s_2} \ldots |y_n|^{s_n} \leqslant (|y_1 - ih| + |y^0|^p)^{m-k/p}$$

quels que soient y et h, le théorème de Plancherel donne immédiatement le résultat.

Remarques. 1. On constate par le théorème 2.4 combien exceptionnellement riches sont les propriétés de domination des opérateurs paraboliques : tout d'abord si on les compare aux elliptiques. Il suffit de noter, par exemple, que le laplacien ne domine aucune dérivation du 1er ordre, alors que l'opérateur de la chaleur $\partial/\partial t - \Delta_x$ domine toutes les dérivations en t d'ordre (non nécessairement entier) < 1, et toutes les dérivations en x d'ordre < 2!

Mais les propriétés de domination des paraboliques sont aussi plus riches (dans la mesure où une comparaison est permise) que celles des hyperboliques : $P(D)$ hyperbolique d'ordre m domine tous les opérateurs d'ordre $\leqslant m-1$, mais il est facile de voir qu'il n'en domine aucun, d'ordre (entier ou non) $> m-1$. Alors que $P(D)$ p-parabolique, d'ordre m en x_1, domine tous les D^s pourvu que $ps_1 + |s^0| < mp$. Ceci pouvait déjà se pressentir au vu de la condition (b) de la prop. 2.3, où figure, dans le 1er membre de l'inégalité, l'exposant m, alors que dans la condition homologue pour les hyperboliques (prop. 2.1, (b_1)), figurait l'exposant $m-1$.

Remarquons encore, dans cet ordre d'idées, que si $r \in N^n$ vérifie $pr_1 + |r^0| = mp$, on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $h \geqslant H$:

$$\|e^{-hx_1} D^r \varphi\|_{L^2} \leqslant A\,\|e^{-hx_1} P(D)\varphi\|_{L^2}.$$

Ceci réalise une nouvelle comparaison entre opérateurs différentiels, analogue à la domination, mais où ε est remplacé par une constante finie A, et analogue à la relation « plus fort que » d'Hörmander, mais où les opérateurs différentiels sont multipliés (à gauche) par une fonction.

2. On peut se demander, toujours sous l'hypothèse (P_I), si la propriété :

(b′) *$P(D)$ équidomine les D^r, $r \in N^n$, $pr_1 + |r^0| \leqslant mp - 1$*

est équivalente à la propriété (b) du th. 2.3 (ou 2.4), c'est-à-dire à la même, à cela près que dans (b′), on ne précise pas la base de domination, qui était précisée dans (b) (elle était formée des $\exp(-hx_1)$, $h > 0$). Nous n'avons pas su démontrer ce résultat, très probablement exact, dans le cas général (nous l'avons fait pour $n = 2$ et dans d'autres circonstances particulières).

§ 4. Opérateurs paraboliques à coefficients variables

Ce paragraphe est le pendant du § 2, relatif aux hyperboliques à coefficients variables. Nous continuerons de désigner par p un entier pair $\geqslant 2$. La rôle du lemme 2.1 sera joué par le lemme suivant :

LEMME 2.3. *Soient r, $s \in N^n$, $r_1 + s_1 \leqslant 2(m-1)$ et*

$$pr_1 + |r^0| \leqslant mp, \quad ps_1 + |s^0| \leqslant (m-1)p.$$

Soit $a(x) \in \mathcal{E}^{\frac{1}{2}p}$ vérifiant $a(0) = 0$. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un voisinage ouvert Ω_ε de 0 dans R^n et un nombre M_ε fini tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$ et tout $|h| \geqslant M_\varepsilon$:

$$|(e^{-hx_1} a(x) D^r \varphi, \; e^{-hx_1} D^s \varphi)_{L^2}| \leqslant \varepsilon \left(\textstyle\sum_{\frac{1}{2}p} \|e^{-hx_1} D^q \varphi\|^2_{L^2} + |h| \sum_p \|e^{-hx_1} D^q \varphi\|^2_{L^2}\right).$$

Rappelons que $\sum_k$ est la somme étendue aux $q \in N^n$ vérifiant $pq_1 + |q^0| \leqslant mp - k$ $(k \in N)$.

1° $r_1 \leqslant m - 1$

Posons $D^r = D^{r'} D^{r''}$, avec $|r'| \leqslant \frac{1}{2}p$, $r'_1 = 0$ et $pr''_1 + |r''^0| \leqslant (m-1)p + \frac{1}{2}p$. Ceci est toujours possible, parce que $r_1 \leqslant m - 1$. En transposant $D^{r'}$, on obtient (en omettant les indices L^2) :

$$|(e^{-hx_1} a(x) D^r \varphi, \; e^{-hx_1} D^s \varphi)| \leqslant \|e^{-hx_1} D^{r''} \varphi\| \; \|e^{-hx_1} D^{r'} [a(x) D^s \varphi]\|.$$

Or :

$$\|e^{-hx_1} D^{r'} [a(x) D^s \varphi]\| \leqslant \|a(x) e^{-hx_1} D^{r'+s} \varphi\| + \sum_{\substack{|q| \geqslant 1 \\ q_j \leqslant r_j \, (j=1, \ldots, n)}} \binom{r'}{q} \|(D^q a) e^{-hx_1} D^{r'+s-q} \varphi\|.$$

Soit ν un entier $\geqslant 1$. Prenons $\eta > 0$ (dépendant de ν et de ε) tel que $|x| \leqslant \eta$ implique

$a(x)|\leqslant 2^{-\nu}\varepsilon$. Comme $ps_1+|s^0+r'^0|\leqslant(m-\frac{1}{2})p$ (et $r'_1=0$), si $\varphi\in\mathcal{D}$ a son support dans la boule $|x|\leqslant\eta$, on aura :

$$\|a(x)\,e^{-hx_1}D^{r'+s}\varphi\|\leqslant 2^{-\nu}\varepsilon\sum_{\frac{1}{2}p}\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|.$$

D'autre part, si $|q|\geqslant 1$, $q_j\geqslant r'_j$ pour tout $j=1,\dots,n$:

$$\|D^q a(x)\cdot e^{-hx_1}D^{r'+s-q}\varphi\|_{L^2}\leqslant B\,\|e^{-hx_1}D^{r'+s-q}\varphi\|_{L^2},$$

où $B=\sup\limits_{|x|\geqslant\eta}|D^q a(x)|$, le sup portant aussi sur les q qui nous intéressent. Dans l'inégalité précédente, φ a son support dans la boule $|x|\leqslant\eta$.

Puisque $|r'|\leqslant\frac{1}{2}p$ et que $q_1=r'_1=0$, il existe un entier $k\geqslant 1$ tel que $2|r'^0-q^0|\leqslant$ $\leqslant p-2k$, d'où l'on déduit, pour tout $y^0\in R^{n-1}$ et tout h réel (c : constante >0 qui ne dépend que de p) :

$$c\,h^{2k/p}|y^0|^{2|r'-q|}\leqslant|h|+|y^0|^p.$$

Compte tenu de ce que $ps_1+|s^0|\leqslant(m-1)p$, on a, pour $|h|\geqslant 1$:

$$c\,h^{2k/p}|y_1-ih|^{s_1}|y^0|^{2|r'+s^0-q|}\leqslant(|h|+|y^0|^p)\,(|y_1-ih|+|y^0|^p)^{2(m-1)}$$

pour tout $y\in R^n$. Le théorème de Plancherel donne alors :

$$\|(D^q a)\,e^{-hx_1}D^{r'+s-q}\varphi\|\leqslant\frac{B'}{|h|^{k/p}}\Big(\sum_{\frac{1}{2}p}\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|^2+|h|\sum_p\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout h réel, $|h|\geqslant 1$, et toute $\varphi\in\mathcal{D}$ ayant son support dans la boule $|x|\leqslant\eta$. Alors en prenant $M_\varepsilon\geqslant(B'\,2^\nu\varepsilon^{-1})^p$ et $|h|\geqslant M_\varepsilon$, Ω_ε contenu dans la boule $|x|\leqslant\eta$, enfin avec un choix convenable de ν (rappelons que η dépend de ν), on obtient facilement le résultat désiré.

2° $r_1=m$

Dans ce cas, $r^0=0$ et $s_1\leqslant m-2$. Posons $D^r=D_1D^{r'}$ avec $D_1=\partial/\partial x_1$ et $r'=(m-1,0,\dots,0)$. On a :

$$(e^{-hx_1}a\,D^r\varphi,\ e^{-hx_1}D^s\varphi)=2h\,(e^{-hx_1}a\,D^{r'}\varphi,\ e^{-hx_1}D^s\varphi)-$$
$$-(D_1a\cdot e^{-hx_1}D^{r'}\varphi,\ e^{-hx_1}D^s\varphi)-(e^{-hx_1}a\,D^{r'}\varphi,\ e^{-hx_1}D_1D^s\varphi).$$

Compte tenu de ce que $pr'_1+|r'^0|\leqslant(m-1)p$ et $ps_1+|s^0|\leqslant(m-1)p$, avec les mêmes notations et définitions qu'en 1°) on peut écrire, pour tout $|h|\geqslant 1$ et toute $\varphi\in\mathcal{D}$ ayant son support dans la boule $|x|\leqslant\eta$:

$$|2h(e^{-hx_1}a D^{r'}\varphi,\ e^{-hx_1}D^s\varphi)-(D_1 a\cdot e^{-hx_1}D^{r'}\varphi,\ e^{-hx_1}D^s\varphi)|$$
$$\leqslant\left(2^{1-\nu}\varepsilon+\frac{B}{|h|}\right)|h|\textstyle\sum_p\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|^2$$

d'où ici aussi un choix possible de ν, de M_ε, etc.

Quant au terme $(e^{-hx_1}a D^{r'}\varphi,\ e^{-hx_1}D_1 D^s\varphi)$, remarquons que $p r_1'+|r'^0|\leqslant(m-1)p$ et $p(s_1+1)+|s^0|\leqslant mp$, avec $r_1'+(s_1+1)\leqslant 2(m-1)$: on se trouve dans le cas 1°.

C.Q.F.D.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

LEMME 2.4. *Soient* $r,\ s\in N^n$, $p r_1+|r^0|\leqslant mp$, $p s_1+|s^0|\leqslant(m-1)p$. *Soient* $a(x)$, $b(x)\in\mathcal{D}$ *quelconques. Quel que soit* $\varepsilon>0$, *on peut trouver un nombre* $M_\varepsilon<+\infty$ *tel que* $|h|\geqslant M_\varepsilon$ *implique :*

$$|e^{-hx_1}\{a(x)D^r\varphi-D^r[a(x)\varphi]\},\ e^{-hx_1}b(x)D^s\varphi)_{L^2}|$$
$$+|(e^{-hx_1}b(x)D^r\varphi,\ e^{-hx_1}\{a(x)D^s\varphi-D^s[a(x)\varphi]\})_{L^2}|$$
$$\leqslant\varepsilon\left(\textstyle\sum_{\frac12 p}\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|^2_{L^2}+|h|\sum_p\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|^2_{L^2}\right)$$

pour toute $\varphi\in\mathcal{D}$.

On a :
$$D^r(a\varphi)-a D^r\varphi=\sum_{\substack{|q|\geqslant 1\\ q_j\leqslant r_j,\ 1\leqslant j\leqslant n}}\binom{r}{q}D^q a\cdot D^{r-q}\varphi.$$

Formule analogue avec s à la place de r. Remarquons qu'on a $r_1-q_1\leqslant m-1$. Nous sommes ainsi ramenés à démontrer ceci :

Soit $c(x)\in\mathcal{D}$ quelconque. Si $r\in N^n$ vérifie $p r_1+|r^0|\leqslant mp-1$, et si $p s_1+|s^0|\leqslant$ $\leqslant(m-1)p$, alors, pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver $M_\varepsilon<+\infty$ tel que $|h|\geqslant M_\varepsilon$ implique, pour toute $\varphi\in\mathcal{D}$:

$$|(c(x)e^{-hx_1}D^r\varphi,\ e^{-hx_1}D^s\varphi)|\leqslant\varepsilon\left(\textstyle\sum_{\frac12 p}\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|^2+|h|\sum_p\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|^2\right)$$

en omettant les indices L^2. Posons $r=r'+r''$, avec $p r_1'+|r'^0|\leqslant(m-\frac12)p-1$ et $r_1''=0$, $|r''|\leqslant\frac12 p$. Cette décomposition de r est évidemment possible. Si nous transposons $D^{r''}$, nous obtenons une somme de termes du type $(u(x)e^{-hx_1}D^{r'}\varphi,\ e^{-hx_1}D^{s'}\varphi)$, $u(x)\in\mathcal{D}$, $p s_1'+|s'^0|\leqslant(m-\frac12)p$. Posons $B=\sup_{x\in R^n}|u(x)|$; on a :

$$|(u(x)e^{-hx_1}D^{r'}\varphi,\ e^{-hx_1}D^{s'}\varphi)|\leqslant B\|e^{-hx_1}D^{r'}\varphi\|\textstyle\sum_{\frac12 p}\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|$$

et tout revient à majorer $\|e^{-hx_1}D^{r'}\varphi\|$. Posons $r'=\varrho+\sigma$ avec $\varrho_1=0$, $|\varrho^0|\leqslant\frac12 p-1$, $p\sigma_1+|\sigma^0|\leqslant(m-1)p$. Ceci est possible; posons $k=\frac12 p-|\varrho^0|$. On a $k\geqslant 1$. Alors (cf. preuve du lemme 2.3, partie 1°), pour tout $y\in R^n$ et tout h réel, $|h|\geqslant 1$:

$$c\,h^{2k/p}\,|y^0|^{2|\varrho^0|}\,|y_1-i\,h|^{2\sigma_1}\,|y^0|^{2|\sigma^0|}\leqslant(|h|+|y^0|^p)\,(|y_1-i\,h|+|y^0|)^{2(m-1)}$$

d'où découle aussitôt, par le théorème de Plancherel :

$$c\,|h|^{k/p}\,\|e^{-hx_1}D^{r'}\varphi\|\leqslant(\textstyle\sum_{\frac{1}{2}p}\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|^2+|h|\sum_p\|e^{-hx_1}D^q\varphi\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La présence du facteur $|h|^{k/p}$ permet d'obtenir directement le résultat, après avoir raisonné de façon tout-à-fait analogue pour $D^s(a\,\varphi)-a\,D^s\varphi$.

Dans ce qui suit, $P(x, D)$ désignera un opérateur différentiel sur R^n, normal, d'ordre m en x_1, à coefficients au moins continus. Nous dirons que $P(x, D)$ est *p-parabolique* (resp. *p-anti-parabolique*) dans un ouvert Ω de R^n si, pour tout $x_0\in\Omega$, $P(x_0, D)$ est p-parabolique (resp. p-anti-parabolique).

La domination normale (déf. 2.3) ne va pas nous servir dans le cas actuel (à cause du rôle de l'entier p). Le lemme 2.2 doit être remplacé, ici, par le suivant :

LEMME 2.5. *Soient $P(x, D)$ et $Q(x, D)$ deux opérateurs différentiels sur R^n, à coefficients continus. On suppose $P(x, y_1^p, y^0)$ homogène de degré $m\,p$ (en y!) et $Q(x, y_1^p, y^0)$ homogène de degré $m\,p-k$ (k entier $\geqslant 0$). On suppose qu'il existe un voisinage ouvert équilibré U de 0 dans R^n et une constante finie A tels que, pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(U)$ et tout $h\geqslant 0$ (resp. $h\leqslant 0$) :*

$$|h|^{k/p}\,\|e^{-hx_1}Q(x, D)\,\varphi\|_{L^2}\leqslant A\,\|e^{-hx_1}P(x, D)\,\varphi\|_{L^2}.$$

Dans ces conditions, on a aussi, pour ces φ et ces h :

$$|h|^{k/p}\,\|e^{-hx_1}Q(0, D)\,\varphi\|_{L^2}\leqslant A\,\|e^{-hx_1}P(0, D)\,\varphi\|_{L^2}.$$

Exactement la même démonstration que pour le lemme 2.2, à la modification près demandée par les pseudo-homogénéités de $P(x, D)$ et $Q(x, D)$.

Voici maintenant l'équivalent du théorème 2.2 (mais aussi, en même temps, de la prop. 2.2) :

THÉORÈME 2.5. *Soient un ouvert Ω de R^n et un opérateur différentiel $P(x, D)$ sur R^n, à coefficients dans $\mathcal{E}$. Supposons que pour tout $x_0\in\Omega$, $P(x_0, D)$ vérifie la condition (P_{I}) de la définition 2.5. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *$P(x, D)$ est p-parabolique dans Ω.*

(b) *Pour tout ouvert borné U tel que $\bar U\subset\Omega$, il existe deux constantes finies A_U, H_U telles que :*

$$\sum_{k=0}^{p} h^{k/p}\textstyle\sum_k\|e^{-hx_1}D^r\varphi\|_{L^2}\leqslant A_U\,\|e^{-hx_1}P(x, D)\,\varphi\|_{L^2}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ *et tout* $h \geqslant H_U$. *La sommation, dans* Σ_k, *porte sur les* $r \in N^n$ *vérifiant* $p\, r_1 + |r^0| \leqslant m\, p - k$.

(c) *Pour tout ouvert borné* U *tel que* $\bar{U} \subset \Omega$, *il existe deux constantes positives finies* A_U, H_U *telles que, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ *et tout* $h \geqslant H_U$:

$$\sum_{\frac{1}{2}p} \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|^2_{L^2} + h \sum_p \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|^2_{L^2} \leqslant \operatorname{Re}\, (e^{-hx_1} P(x, D)\, \varphi,\ e^{-hx_1} P_1(x, D)\, \varphi)_{L^2},$$

où $P_1(x, y) = (1/2\, i\pi)\, (\partial/\partial y_1)\, P(x, y)$ *et où* $\sum_p$ *et* $\sum_{\frac{1}{2}p}$ *ont le sens défini dans* (*b*).

Cet énoncé admet un homologue, valable pour les anti-paraboliques.

(b) ⇒ (a) d'après le lemme 2.5 et le th. 2.3. Nous prouverons, dans l'ordre, (c) ⇒ (a), (a) ⇒ (c), (a) ⇒ (b). Comme les raisonnements ne font appel qu'aux techniques utilisées à satiété dans ce chapitre, nous nous bornerons souvent à esquisser leur marche.

Moyennant éventuellement une division, nous pouvons nous ramener au cas où le coefficient de y_1^m, dans $P(x, y)$, est égal à 1 pour tout $x \in \Omega$. En effet, il n'est pas difficile de voir que chacune des conditions (a), (b), (c) du th. 2.5 implique que ce coefficient ne peut s'annuler en aucun point de Ω. Si le coefficient de y_1^m dans $P(x, y)$ est égal à 1, celui de y_1^{m-1} dans $P_1(x, y)$ est aussi une constante. Il résulte alors facilement du lemme 2.3 que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un voisinage ouvert $U(x_0)$ de $x_0 \in \Omega$ et un nombre fini $M(x_0)$ tels qu'on ait, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U(x_0))$ et tout $h \geqslant M(x_0)$:

$$\begin{aligned} &|(e^{-hx_1} R\, P(x_0; x, D)\, \varphi,\ e^{-hx_1} P_1(x, D)\, \varphi)| + |(e^{-hx_1} P(x_0, D)\, \varphi,\ e^{-hx_1} R\,(P_1)(x_0; x, D)\, \varphi)| \\ &\qquad \leqslant \varepsilon \left(\sum_{\frac{1}{2}p} \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|^2 + h \sum_p \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|^2\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

en omettant les indices L^2, ce que nous continuerons de faire dans la suite; rappelons que $R\, P(x_0; x, D) = P(x, D) - P(x_0, D)$. On a :

$$\begin{aligned} &(e^{-hx_1} P(x, D)\, \varphi,\ e^{-hx_1} P_1(x, D)\, \varphi) - (e^{-hx_1} P(x_0, D)\, \varphi,\ e^{-hx_1} P_1(x_0, D)\, \varphi) \\ &\quad = (e^{-hx_1} R\, P(x_0; x, D)\, \varphi,\ e^{-hx_1} P_1(x, D)\, \varphi) + (e^{-hx_1} P(x_0, D)\, \varphi,\ e^{-hx_1} R\,(P_1)(x_0; x, D)\, \varphi). \end{aligned}$$

Nous allons nous baser sur cette formule et sur l'inégalité (1) pour prouver l'équivalence de (a) et de (c).

1° (c) ⇒ (a)

Soit $x_0 \in \Omega$; soit U un ouvert borné, contenant x_0, $\bar{U} \subset \Omega$. Prenons ensuite, dans (1), $\varepsilon \leqslant (2\, A_U)^{-1}$. De (c) et de (1) résulte alors que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U(x_0))$ et tout $h \geqslant \sup\, (H_U, H(x_0))$:

$$\textstyle\sum_{\frac{1}{2}p} \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|^2 + h \sum_p \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|^2 \leqslant 2 A_U \operatorname{Re} (e^{-hx_1} P(x_0, D)\varphi, \; e^{-hx_1} P_1(x_0, D)\varphi).$$

De là se déduit, par l'inégalité de Schwarz, pour ces φ et ces h :

$$\sqrt{h} \textstyle\sum_{\frac{1}{2}p} \| e^{-hx_1} D^r \varphi \| + h \sum_p \| e^{-hx_1} D^r \varphi \| \leqslant 2 A_U \| e^{-hx_1} P(x_0, D)\varphi \|.$$

Alors le lemme 1.2 implique qu'il existe $B < +\infty$ tel que :

$$h(h + |y^0|^p)(|y_1 - ih| + |y^0|^p)^{2(m-1)} \leqslant B \sum_p |P^{(\alpha)}(x_0, y_1 - ih, y^0)|^2$$

pour tout $y \in R^n$ et tout $h \geqslant \sup(M, H_U)$. A partir de là, on prouve que $P(x_0, D)$ est p-parabolique exactement comme il a été fait dans la preuve du th. 2.3, partie 4°.

2° (a) $\Rightarrow$ (c)

A partir de l'inégalité (1) et de l'hypothèse que $P(x_0, D)$ est p-parabolique, et possède donc la propriété (c) du th. 2.3, on voit que la condition (c) du th. 2.5 est vérifiée pour des ouverts « assez petits ». Il nous reste à l'établir pour tout ouvert U, $\bar{U}$ compact et inclus dans Ω.

Chaque point de Ω possédant un voisinage pour lequel (c) est vérifiée, nous pouvons recouvrir $\bar{U}$ par un nombre fini d'ouverts $V_1, \ldots, V_k$ sur chacun desquels (c) est vérifiée. Donnons-nous une partition de l'unité $\{\alpha_j\}$ dans $\mathcal{D}$, subordonnée au recouvrement $\{V_j\}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, sur un voisinage convenable de $\bar{U}$. En vertu du lemme 2.4, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $M < +\infty$ tel que $h \geqslant M$ implique, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et tout $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned}(e^{-hx_1} P(x, D)(\alpha_j\varphi), \; e^{-hx_1} P_1(x, D)(\alpha_j\varphi)) - (e^{-hx_1} \alpha_j^2 P(x, D)\varphi, \; e^{-hx_1} P_1(x, D)\varphi)| \\ \leqslant \varepsilon \left(\textstyle\sum_{\frac{1}{2}p} \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|^2 + h \sum_p \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|^2\right).\end{aligned}$$

Si on pose $g(x) = \sqrt{\alpha_1^2(x) + \cdots + \alpha_k^2(x)}$, en prenant ε assez petit, en obtient (cf. preuve de la prop. 2.2), pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et tout $h \geqslant M$:

$$h \textstyle\sum_p \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|^2 + \sum_{\frac{1}{2}p} \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|^2 \leqslant B \operatorname{Re} (e^{-hx_1} g^2(x) P(x, D)\varphi, \; e^{-hx_1} P_1(x, D)\varphi)$$

où B est une constante finie. Reste à éliminer g : on procède comme dans la preuve de la prop. 2.2 (élimination de g), en se servant ici du lemme 2.4.

3° (a) $\Rightarrow$ (b)

C'est la partie la plus banale de la démonstration. Soit $x_0 \in \Omega$; puisque $P(x_0, D)$ est p-parabolique, il existe, en vertu du th. 2.4, deux constantes finies A, H telles que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $h \geqslant H$:

$$\sum_{k=0}^{p} h^{k/p} \sum\nolimits_k \| e^{-hx_1} D^r \varphi \| \leqslant A \| e^{-hx_1} P(x_0, D) \varphi \|. \tag{2}$$

Mais il est clair qu'il existe un voisinage ouvert $U(x_0)$ de x_0 tel que :

$$\| e^{-hx_1} [P(x, D) - P(x_0, D)] \varphi \| \leqslant \frac{1}{2A} \sum\nolimits_0 \| e^{-hx_1} D^r \varphi \|$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U(x_0))$ et tout h réel (la sommation, dans $\sum_0$, porte sur les $r \in N^n$ vérifiant $p r_1 + |r^0| \leqslant mp$). Compte tenu de (2), ceci implique immédiatement :

$$\| e^{-hx_1} P(x_0, D) \varphi \| \leqslant 2 \| e^{-hx_1} P(x, D) \varphi \| \tag{3}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U(x_0))$ et tout $h \geqslant H$.

La conjonction de (2) et de (3) implique directement (b), mais avec $U(x_0)$ à la place de U. A partir de là, on passe à un ouvert borné quelconque U, $\bar{U} \subset \Omega$, à l'aide d'une partition de l'unité, comme dans 2°; ici les choses sont plus simples : remarquer en effet que si $a(x) \in \mathcal{D}$, $P(x, D)\, a(x) - a(x)\, P(x, D)$ est une somme d'opérateurs $b(x) D^q$, avec $p q_1 + |q^0| \leqslant mp - 1$. Ceci permet d'utiliser les facteurs $h^{k/p}$, devant les sommes $\sum_k$ $(k = 1, \ldots, p)$, pour parvenir aux majorations souhaitées.

Remarques. 1. Le fait que, dans la condition (b) du th. 2.5, au premier membre de l'inégalité, la sommation en k s'effectue à partir de $k = 0$, est de grande importance : il conduit immédiatement à la domination des dérivations d'ordre entier ou non D^s, $s \in R_+^n$, $p s_1 + |s^0| < mp$.

2. La différence, entre le th. 2.5 et le th. 2.2, pour les domaines de validité des majorations (dans le th. 2.2, elles ne sont vraies que sur des voisinages convenables de chaque point, tandis que dans le th. 2.5 elles sont vraies sur tout ouvert borné U, $\bar{U} \subset \Omega$), cette différence n'a rien de très profond. Elle tient simplement au fait que les opérateurs paraboliques sont donnés à priori sous forme normale. Un opérateur hyperbolique normal jouirait de la propriété analogue, comme le prouve la prop. 2.2.

3. On peut démontrer que les conditions (a), (b), (c) du th. 2.5 sont équivalentes à la suivante :

(b′) *Quels que soient le nombre réel $k > 0$ et le point x_0 de Ω, il existe un voisinage ouvert $U_k(x_0)$ de x_0 tel que $P(x, D)$ équidomine, sur $U_k(x_0)$, les D^s, où $s \in R_1^n$ vérifie $p s_1 + |s^0| \leqslant mp - k$, suivant la base de domination constituée par les* exp $(-hx_1)$, $h > 0$.

On remarque, dans cette condition, que les modalités de la domination ne sont pas précisées, comme elles le sont dans (b) (facteurs $h^{k/p}$).

On pourrait ajouter bien d'autres conditions équivalentes aux précédentes; par exemple, (b') implique une propriété identique, à cela près que $U_k(x_0)$ y est remplacé par un ouvert borné U, $\bar{U} \subset \Omega$; inversement, dans (b) on pourrait remplacer U par un voisinage convenable de x_0 (arbitraire dans Ω). En règle général, tous les passages du local aux ouverts bornés, et vice-versa, sont légitimes.

4. On pouvait évidemment faire, sur les coefficients de $P(x, D)$, des hypothèses bien moins restrictives que de les supposer dans $\mathcal{E}$.

CHAPITRE III

Domination en $\exp(-p(x_1))$

Nous allons maintenant élargir les bases de domination au delà des exponentielles, tout en restant dans le domaine de la domination multiplicative. Ce que nous cherchons d'abord, c'est à prolonger à des fonctions plus générales les propriétés établies avec les $\exp\langle x, h\rangle$. Par exemple, on peut se demander si des *inégalités* du genre de

$$\sum_{|r|\leq m-1} \| e^{-\langle x, h\rangle} D^r \varphi \|_{L^2}^2 \leq \varepsilon \operatorname{Re} (e^{-\langle x, h\rangle} P(D)\varphi, \; e^{-\langle x, h\rangle} P_1(D)\varphi)_{L^2}$$

($P(D)$ hyperbolique d'ordre m, $\varepsilon > 0$, $\varphi \in \mathcal{D}$) restent vraie lorsqu'on remplace $\langle x, h\rangle$ par une fonction $g(x)$ qui ne soit plus linéaire. D'autre part, par les exponentielles, nous avons atteint certains faits, mais dans des cas relativement restreints; se pourrait-il que leur domaine de validité soit élargi si on enrichit suffisamment les bases de domination? Par exemple, l'inégalité précédente a été démontrée, avec un choix convenable de h, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$. Mais ceci est en général faux lorsqu'on remplace $P(D)$ par un opérateur à coefficients variables. Ne récuperera-t-on pas, cependant, cette propriété, si on accepte de ne plus se limiter à la domination exponentielle?

C'est à ce genre de questions que nous allons nous intéresser dans la première partie du présent chapitre, en ne nous occupant, toutefois, que des opérateurs hyperboliques normaux et paraboliques.

Dans la seconde partie, nous établirons des inégalités de domination qui, pratiquement, ne sont qu'un cas particulier de celles de la première partie. Nous disons pratiquement, parce que les opérateurs différentiels étudiés auront comme coefficients des opérateurs (dans des espaces hilbertiens) et non plus des scalaires; mais à ce détail près, qui ne change rien d'essentiel, les raisonnements resteront les mêmes, ou plutôt seront des simplifications de ceux de la première partie, simplifications dues au fait que nous nous placerons sur la droite, et non plus sur R^n avec n quelconque. Nous avons cherché à montrer, dans cette seconde partie, l'intérêt que peut présenter, dans certains cas, l'extension des bases de domination dont nous venons de parler, et comment il est alors possible de tirer parti des inégalités de domination. Les deux premiers paragraphes sont consacrés à des constructions et des résultats très généraux; le dernier montre comment ils permettent la résolution de certains problèmes aux limites de type mixte.

PREMIÈRE PARTIE

§ 1. Opérateurs hyperboliques et paraboliques à coefficients constants

Nous commencerons par établir divers lemmes sur des opérateurs différentiels en une variable t, à coefficients constants par rapport à t, mais qui dépendent (d'une certaine façon) de certains paramètres. Partie de ces lemmes nous servira pour traiter le cas hyperbolique normal (dans R^n), partie pour le cas parabolique.

Nous poserons, dans ce qui suit, $D = d/dt$. L'opérateur à étudier est :

$$P(D) = (D - i r_1) \dots (D - i r_m) \quad (m \geqslant 1)$$

où les r_j sont des nombres complexes, soumis à diverses conditions. Nous associerons à $P(D)$ les opérateurs :

$$Q_k(D) = \prod_{j=1,\, j \neq k}^{m} (D - i r_j), \quad k = 1, \dots, m; \qquad P_1(D) = \sum_{k=1}^{m} Q_k(D).$$

On retrouve là des choses connues. On a :

$$P(D) = (D - i r_k)\, Q_k(D) \quad \text{pour chaque } k = 1, \dots, m.$$

Jusqu'à nouvel ordre, et sauf mention expresse du contraire, les fonctions et distributions considérées seront définies sur la droite réelle, dont la variable sera t.

Nous allons utiliser continuellement une function $p(t)$ *à valeurs réelles*, au moins *une fois continûment dérivable*, vérifiant toujours :

$$(\mathrm{C}\,0) \qquad |p'(t)| > 0 \ \textit{pour tout } t \textit{ réel}.$$

Ultérieurement $p(t)$ pourra être soumise à d'autres conditions.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_t$; on a :

$$\operatorname{Re}\,(e^{-p(t)}P(D)\varphi,\ e^{-p(t)}P_1(D)\varphi)_{L^2}=\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Re}\,(e^{-p(t)}P(D)\varphi,\ e^{-p(t)}Q_k(D)\varphi)_{L^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Re}\,(e^{-p(t)}(D-ir_k)\,Q_k(D)\,\varphi,\ e^{-p(t)}Q_k(D)\varphi)_{L^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\int[p'(t)+\operatorname{Im}\,r_k]\,|e^{-p(t)}Q_k(D)\varphi|^2\,dt. \qquad (1)$$

Nous ferons dorénavant l'hypothèse suivante :

(H) *Les* r_j $(1\leqslant j\leqslant m)$ *sont des fonctions homogènes de degré* d *d'une variable* s *de* R^{n-1}. *Les* $|r_j(s)|/|s|^d$ *sont bornées sur* R^{n-1}.

En outre les r_j vérifieront toujours l'une ou l'autre des hypothèses suivantes (qui s'excluent!) :

(HYPER) *Les* $r_j(s)$ *sont des fonctions réelles et continues de* s, *distinctes deux à deux pour tout* $s\neq 0$.

(PARA) *Il existe un nombre* $\delta>0$ *tel que* $\operatorname{Im}\,r_j(s)\geqslant\delta$ *pour tout* $1\leqslant j\leqslant m$ *et tout* $s\in R^{n-1}$, $|s|=1$.

Dans le cas (PARA), le degré d'homogénéité d doit être un entier pair.

La formule (1) nous permet d'écrire :

$$\operatorname{Re}\,(e^{-p}P(D)\varphi,\ e^{-p}P_1(D)\varphi)_{L^2}=\sum_{k=1}^{m}\int p'(t)\,|e^{-p(t)}Q_k(D)\varphi|^2\,dt. \qquad (2)$$

dans le cas (HYPER);

$$\operatorname{Re}\,(e^{-p}P(D)\varphi,\ e^{-p}P_1(D)\varphi)_{L^2}$$
$$\geqslant\sum_{k=1}^{m}\left(\int p'\,|e^{-p}Q_k(D)\varphi|^2\,dt+\delta\,|s|^d\,\|e^{-p}Q_k(D)\varphi\|_{L^2}^2\right) \qquad (3)$$

dans le cas (PARA), puisque (PARA) et (H) impliquent $\operatorname{Im}\,r_k(s)\geqslant\delta\,|s|^d$ pour tout $k=1,\ldots,m$ et tout $s\in R^{n-1}$.

LEMME 3.1. *Supposons les hypothèses* (H) *et* (HYPER) *vérifiées. Il existe* $c>0$ *tel que, pour toute* $\varphi\in\mathcal{D}_t$, *tout* $h(t)$ *réelle continue et tout* $s\in R^{n-1}$:

$$c\sum_{q=0}^{m-1}|s|^{2d(m-1-q)}\,\|e^{-h(t)}D^q\varphi\|_{L^2}^2\leqslant\sum_{k=1}^{m}\|e^{-h(t)}Q_k(D)\varphi\|_{L^2}^2.$$

Pour $m=1$, le lemme est banal, car alors tous les $Q_k(D)$ sont égaux à 1. Nous raisonnerons par récurrence sur m, c'est-à-dire sur le nombre d'opérateurs Q_k (égal à m) et sur leur degré (égal à $m-1$). Cependant, comme on va le voir, la récurrence ne peut débuter à $m=1$; elle doit commencer à $m=2$.

1° *Cas* $m=2$

Posons $\varphi(t)=\psi(t) \exp\{\frac{1}{2} i t (r_1+r_2)\}$; il vient :

$$\sum_{k=1}^{2} \| e^{-h} (D-i r_k) \varphi \|_{L^2}^2 = \| e^{-h} (D-i \hat{r}) \psi \|_{L^2}^2 + \| e^{-h} (D+i \hat{r}) \psi \|_{L^2}^2,$$

où l'on a posé $\hat{r}=\frac{1}{2}(r_1-r_2)$. Le second membre est égal à :

$$2 \| e^{-h} D \psi \|_{L^2}^2 + 2 \hat{r}^2 \| e^{-h} \psi \|_{L^2}^2,$$

où $\hat{r}^2(s)=\frac{1}{4}[r_1(s)-r_2(s)]^2$ n'est jamais nul pour $|s|=1$, et c'est une fonction continue de s, donc il existe $c_2>0$ tel que $\hat{r}^2(s) \geqslant c_2 |s|^{2d}$ pour tout $s \in R^{n-1}$. Comme $\| e^{-h} \psi \|_{L^2}^2 = \| e^{-h} \varphi \|_{L^2}^2$ (car les r_k sont réels), on a:

$$2 c_2 |s|^{2d} \| e^{-h} \varphi \|_{L^2}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{2} \| e^{-h} (D-i r_k) \varphi \|_{L^2}^2 \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}.$$

D'autre part, $D=(1/2\hat{r})[r_1(D-i r_2)-r_2(D-i r_1)]$. Comme $r_k^2(s) \leqslant C^2 |s|^{2d}$ $(k=1, 2)$ pour tout $s \in R^{n-1}$, et $\hat{r}_2(s) \geqslant c_2 |s|^{2d}$:

$$\| e^{-h} D \varphi \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{C^2}{4 c_2} \sum_{k=1}^{2} \| e^{-h} (D-i r_k) \varphi \|_{L^2}^2 \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}.$$

La conjonction des deux majorations obtenues démontre visiblement le lemme 3.1 dans le cas $m=2$.

2° *Cas* $m>2$

Nous raisonnerons donc par récurrence sur m. Posons :

$$Q_{jk}(D) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j, l \neq k}}^{m} (D-i r_l), \quad j=1, \ldots, m, \quad k=1, \ldots, m, \quad j \neq k.$$

On a $Q_j(D)=(D-i r_k) Q_{jk}(D)$ pour tout $j=1, \ldots, m$, $j \neq k$. Posons : $\psi_k=(D-i r_k)\varphi$. Avec ces notations, on peut écrire :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \| e^{-h} Q_j(D) \varphi \|_{L^2}^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \| e^{-h} Q_{jk}(D) \psi_k \|_{L^2}^2.$$

Or (pour k fixé) les Q_{jk} forment une famille d'opérateurs du même type que la famille des Q_j, au nombre de $m-1$, d'ordre $m-2$. D'après la récurrence, il existe $c_1>0$ (indépendant de s, de ψ_k, de k, de h) telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_t$ (dont dépend ψ_k) :

$$c_1 \sum_{q=0}^{m-2} |s|^{2d(m-2-q)} \| e^{-h} D^q \psi_k \|_{L^2}^2 \leqslant \sum_{j=1,\, j\neq k}^{m} \| e^{-h} Q_{jk}(D) \psi_k \|_{L^2}^2,$$

d'où, en revenant à φ et en sommant par rapport à k :

$$\frac{c_1}{m} \sum_{q=0}^{m-2} |s|^{2d(m-2-q)} \sum_{k=1}^{m} \| e^{-h} (D - i r_k) D^q \varphi \|_{L^2}^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} \| e^{-h} Q_j(D) \varphi \|_{L^2}^2.$$

et comme le résultat pour $m=2$ entraîne :

$$\sum_{k=1}^{m} \| e^{-h} (D - r_k) D^q \varphi \|_{L^2}^2 \geqslant \sum_{k=1}^{2} \| e^{-h} (D - r_k) D^q \varphi \|_{L^2}^2$$
$$\geqslant c_0 (\| e^{-h} D^{q+1} \varphi \|_{L^2}^2 + |s|^{2d} \| e^{-h} D^q \varphi \|_{L^2}^2)$$

avec $c_0>0$ indépendant de s, h, q, etc., on en déduit aussitôt le lemme 3.1 dans le cas général.

COROLLAIRE 1. *Supposons vérifiées les hypothèses* (H) *et* (HYPER). *Il existe* $c>0$ *tel que, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}_t$, *tout* $s \in R^{n-1}$, *toute* $p(t)$ *réelle, une fois continûment dérivable, vérifiant* (C 0) :

$$c \sum_{q=0}^{m-1} \| \sqrt{|p'|}\, e^{-p} D^q \varphi \|_{L^2}^2 \leqslant \operatorname{Re} (e^{-p} P(D) \varphi,\ e^{-p} P_1(D) \varphi)_{L^2}.$$

Il suffit de tenir compte de l'égalité (2), p. 70, et d'appliquer le lemme 3.1 à la fonction $h(t) = p(t) - \frac{1}{2} \log |p'(t)|$.

Nous allons maintenant nous occuper du cas (PARA).

LEMME 3.2. *Supposons les hypothèses* (H) *et* (PARA) *satisfaites. Il existe une constante* $c>0$ *telle que, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}$, *tout* $s \in R^{n-1}$ *et tout* $h(t)$ *réelle, une fois continûment dérivable, vérifiant* $h'(t) \geqslant 0$ *pour tout* t :

$$c \sum_{q=0}^{m-1} |s|^{2d(m-1-q)} \| e^{-h(t)} D^q \varphi \|_{L^2}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \| e^{-h(t)} Q_k(D) \varphi \|_{L^2}^2.$$

Le résultat est banal pour $m=1$. Ici aussi nous raisonnerons par récurrence sur m. Mais il suffit d'établir le résultat suivant (qui correspond au cas $m=2$) :

$$\| e^{-h} (D - i r_k) \varphi \|_{L^2}^2 \geqslant c_0 (\| e^{-h} D \varphi \|_{L^2}^2 + |s|^{2d} \| e^{-h} \varphi \|_{L^2}^2) \quad (c_0 > 0).$$

Car en remplaçant ensuite φ par $(D-ir_j)\varphi$, et en itérant cette minoration (appliquée aux deux termes du second membre), on obtient le résultat dans le cas général.

Or le 1[er] membre est égal à

$$\|e^{-h}D\varphi\|_{L^2}^2-2\operatorname{Re}(e^{-h}D\varphi,\ ir_k e^{-h}\varphi)_{L^2}+|r_k|^2\|e^{-h}\varphi\|_{L^2}^2.$$

Mais :
$$(e^{-h}D\varphi,\ ir_k e^{-h}\varphi)_{L^2}=-i\bar r_k(e^{-h}D\varphi,\ e^{-h}\varphi)_{L^2},$$

d'où :

$$\operatorname{Re}(e^{-h}D\varphi,\ ir_k e^{-h}\varphi)_{L^2}=-(\operatorname{Im}r_k)\operatorname{Re}(e^{-h}D\varphi,\ e^{-h}\varphi)_{L^2}+(\operatorname{Re}r_k)\operatorname{Im}(e^{-h}D\varphi,\ e^{-h}\varphi)_{L^2}.$$

Mais $\operatorname{Re}(e^{-h}D\varphi,\ e^{-h}\varphi)_{L^2}=(h'e^{-h}\varphi,\ e^{-h}\varphi)_{L^2}$; donc au total :

$$\|e^{-h}(D-ir_k)\varphi\|_{L^2}^2=\|e^{-h}D\varphi\|_{L^2}^2+2(\operatorname{Im}r_k)(h'e^{-h}\varphi,\ e^{-h}\varphi)_{L^2}-$$
$$-2(\operatorname{Re}r_k)\operatorname{Im}(e^{-h}D\varphi,\ e^{-h}\varphi)_{L^2}+|r_k|^2\|e^{-h}\varphi\|_{L^2}^2.$$

D'après l'hypothèse de l'énoncé, $h'\geqslant 0$; d'après (PARA), $\operatorname{Im}r_k>0$. Par conséquent, le 2[e] membre de l'égalité précédente majore :

$$\|e^{-h}D\varphi\|_{L^2}^2-2\|e^{-h}D\varphi\|_{L^2}|\operatorname{Re}r_k|\ \ \|e^{-h}\varphi\|_{L^2}+((\operatorname{Re}r_k)^2+(\operatorname{Im}r_k)^2)\|e^{-h}\varphi\|_{L^2}^2$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{(\operatorname{Im}r_k)^2}{|r_k|^2}\|e^{-h}D\varphi\|_{L^2}^2+(\operatorname{Im}r_k)^2\|e^{-h}\varphi\|_{L^2}^2\right).$$

En utilisant (H) et (PARA), on voit que $\operatorname{Im}r_k(s)\geqslant\delta|s|^d$ pour tout $s\in R^{n-1}$; d'autre part, en vertu de (H), il existe $C<+\infty$ tel que $|r_k(s)|\leqslant C|s|^d$ pour tout $s\in R^{n-1}$, d'où :

$$\|e^{-h}(D-ir_k)\varphi\|_{L^2}^2\geqslant\tfrac{1}{2}(C^{-2}\delta^2\|e^{-h}D\varphi\|_{L^2}^2+\delta^2|s|^{2d}\|e^{-h}\varphi\|_{L^2}^2),$$

ce qui est exactement ce que nous voulions prouver.

COROLLAIRE. *Supposons vérifiées les hypothèses* (H) *et* (PARA). *Il existe* $c>0$ *tel que :*

$$\sum_{q=0}^{m-1}(|s|^{2d(m-\frac{1}{2}-q)}\|e^{-p}D^q\varphi\|_{L^2}^2+|s|^{2d(m-1-q)}\|\sqrt{p'}\,e^{-p}D^q\varphi\|_{L^2}^2)$$
$$\leqslant\frac{1}{c}\operatorname{Re}(e^{-p}P(D)\varphi,\ e^{-p}P_1(D)\varphi)_{L^2}$$

pour toute $\varphi\in\mathcal{D}_t$, *tout* $s\in R^{n-1}$ *et toute* $p(t)$ *réelle, deux fois continûment dérivable, vérifiant* $p'(t)>0$, $2p'^2(t)-p''(t)\geqslant 0$ *pour tout* t.

Il suffit de tenir compte de l'inégalité (3), p. 70, et d'appliquer le lemme 3.2 successivement aux fonctions $h(t)=p(t)$ et $h(t)=p(t)-\frac{1}{2}\log p'(t)$.

Lorsque $m=1$, la condition $2p'^2(t)-p''(t)\geqslant 0$ est superflue. Quoiqu'il en soit, elle est facilement satisfaite. Remarquons que si $p(t)$ la vérifie, $q(t)=2p(t)$ vérifie $2q'^2(t)-q''(t)\geqslant q'^2(t)$ pour tout t réel. Nous allons avoir besoin maintenant de fonctions soumises à cette dernière condition. Mais auparavant, il nous faut établir un lemme fondamental, qui généralise le lemme 1.4 :

LEMME 3.3. *Soient $j, k\in N$, $j<k$. Soit $p(t)$ une fonction réelle une fois continûment dérivable, vérifiant la condition :*

(C 1) *Il existe $p_0>0$ tel que $p'(t)\geqslant p_0$ pour tout t réel. On a alors, pour toute $\varphi\in\mathcal{D}_t$:*

$$\left\|\sqrt{p'}\,e^{-p}D^j\varphi\right\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{p_0^{k-j-1}}\left\|e^{-p}\frac{1}{\sqrt{p'}}D^k\varphi\right\|_{L^2}.$$

La démonstration est immédiate :

$$\operatorname{Re}(e^{-p}D\varphi,\,e^{-p}\varphi)_{L^2}=(p'e^{-p}\varphi,\,e^{-p}\varphi)_{L^2}.$$

Donc
$$\left\|\sqrt{p'}\,e^{-p}\varphi\right\|_{L^2}^2=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{p'}}e^{-p}D\varphi,\,\sqrt{p'}\,e^{-p}\varphi\right)_{L^2},$$

d'où le résultat pour $j=0$, $k=1$, par l'inégalité de Schwarz. En remplaçant φ par $D^j\varphi$, on obtient :

$$\left\|\sqrt{p'}\,e^{-p}D^j\varphi\right\|_{L^2}\leqslant\left\|\frac{1}{\sqrt{p'}}e^{-p}D^{j+1}\varphi\right\|_{L^2};$$

mais :
$$\left\|\frac{1}{\sqrt{p'}}e^{-p}D^{j+1}\varphi\right\|_{L^2}\leqslant\left\|\frac{1}{p'}\sqrt{p'}\,e^{-p}D^{j+1}\varphi\right\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{p_0}\left\|\sqrt{p'}\,e^{-p}D^{j+1}\varphi\right\|_{L^2}.$$

On termine alors en raisonnant par récurrence sur $k-j$.

Ce lemme 3.3 va nous servir sans arrêt dans la suite de ce chapitre, tant dans la 1ère partie que dans la seconde (après une généralisation immédiate).

Concernant les fonctions $p(t)$ qui vérifient $2p'^2-p''\geqslant p'^2$, on peut donner un énoncé amélioré du lemme 3.3 :

LEMME 3.4. *Soit $p(t)$ réelle, deux fois continûment dérivable, vérifiant* (C 1) *et $p'^2(t)-p''(t)\geqslant 0$ pour tout t. Alors, quels que soient $k\in N$ et $\varphi\in\mathcal{D}_t$, on a :*

$$\left\|p'e^{-p}D^k\varphi\right\|_{L^2}\leqslant 2\left\|e^{-p}D^{k+1}\varphi\right\|_{L^2}.$$

Il suffit évidemment de prouver ce lemme pour $k=0$. Appliquons le lemme 3.3 avec $h=p-\frac{1}{2}\log p'$ à la place de p; on a $h'=p'-p''/2p'\geqslant\frac{1}{2}p'$, $e^{-h}=\sqrt{p'}\,e^{-p}$, d'où aussitôt le résultat.

LEMME 3.5. *Soit d un entier pair. Soient h, k, $r \in N$, $h \leqslant m$, $k \leqslant m-1$, $h+k \leqslant 2(m-1)$, $d(h+k)+r \leqslant (2m-1)d-1$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $H_\varepsilon < +\infty$ tel qu'on ait :*

$$|s|^r |(e^{-p} D^h \varphi, e^{-p} D^k \varphi)_{L^2}| \leqslant \sum_{q=0}^{m-1} (|s|^{2d(m-\frac{1}{2}-q)} \| e^{-p} D^q \varphi \|^2_{L^2} + |s|^{2d(m-1-q)} \| \sqrt{p'} \, e^{-p} D^q \varphi \|^2_{L^2})$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_t$, toute $p(t)$ réelle, deux fois continûment dérivable, vérifiant $p'(t) \geqslant H_\varepsilon$ et $p'^2(t) - p''(t) \geqslant 0$ pour tout t réel, et tout $s \in R^{n-1}$.

Nous omettrons les indices L^2 dans la preuve. Nous ne ferons d'ailleurs cette preuve que dans le cas où $h = m$, $k \leqslant m-2$. Les autres cas se traitent de façon en tous points analogue.

On peut écrire :

$$(e^{-p} D^m \varphi, e^{-p} D^k \varphi) = -(e^{-p} D^{m-1} \varphi, e^{-p} D^{k+1} \varphi) + 2(p' e^{-p} D^{m-1} \varphi, e^{-p} D^k \varphi).$$

1° *Majoration de $|s|^r |(e^{-p} D^{m-1} \varphi, e^{-p} D^{k+1} \varphi)|$*

Dans le cas où nous nous sommes placés, les conditions de l'énoncé veulent que $dk + r \leqslant d(m-1) - 1$. Posons $a = (m-k-1)/(r+1)$; comme $k \leqslant m-2$, a est >0; puis $H = (4/\varepsilon)^{1/a}$ (on prendra $\varepsilon < 1$). Nous supposerons $p'(t) \geqslant H$ pour tout t.

Supposons d'abord $|s| \leqslant H^a$. Nous pouvons écrire :

$$|s|^r |(e^{-p} D^{m-1} \varphi, e^{-p} D^{k+1} \varphi)| \leqslant H^{ar-\frac{1}{2}} \| \sqrt{p'} \, e^{-p} D^{m-1} \varphi \| \, \| e^{-p} D^{k+1} \varphi \|.$$

Comme $k \leqslant m-2$, en vertu du lemme 3.3 :

$$\| e^{-p} D^{k+1} \varphi \| \leqslant H^{\frac{1}{2}-(m-k-1)} \| \sqrt{p'} \, e^{-p} D^{m-1} \varphi \|$$

d'où : $$|s|^r |(e^{-p} D^{m-1} \varphi, e^{-p} D^{k+1} \varphi)| \leqslant H^{ar-(m-k-1)} \| \sqrt{p'} \, e^{-p} D^{m-1} \varphi \|^2.$$

Supposons maintenant $|s| \geqslant H^a$. Puisque $r \leqslant d(m-k-1) - 1$, on peut poser $r = r_1 + r_2$ avec $r_1 \leqslant d(m-k-1-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$, $r_2 \leqslant \frac{1}{2}(d-1)$, et donc écrire :

$$\begin{aligned} &|s|^r |(e^{-p} D^{m-1} \varphi, e^{-p} D^{k+1} \varphi)| \\ &\qquad \leqslant 2(|s|^{2r_1} \| e^{-p} D^{k+1} \varphi \|^2 + |s|^{2r_2} \| e^{-p} D^{m-1} \varphi \|^2) \\ &\qquad \leqslant \frac{2}{H^a} (|s|^{2d[m-\frac{1}{2}-(k+1)]} \| e^{-p} D^{k+1} \varphi \|^2 + |s|^d \| e^{-p} D^{m-1} \varphi \|^2). \end{aligned}$$

$a(r+1) = m-k-1$ implique $H^{ar-(m-k-1)} = H^{-a}$, de sorte qu'on a, pour tout $s \in R^{n-1}$ et toute $\varphi \in \mathcal{D}_t$:

$$|s|^r|(e^{-p}D^{m-1}\varphi,\ e^{-p}D^{k+1}\varphi)|$$
$$\leqslant \frac{2}{H^a}\sum_{q=0}^{m-1}(|s|^{2d(m-\frac{1}{2}-q)}\|e^{-p}D^q\varphi\|^2+|s|^{2d(m-1-q)}\|\sqrt{p'}\,e^{-p}D^q\varphi\|^2).$$

D'après notre choix de H, on peut remplacer $(1/H^a)$ par $\frac{1}{4}\varepsilon$.

2° *Majoration de* $|s|^r|(p'\,e^{-p}D^{m-1}\varphi,\ e^{-p}D^k\varphi)|$

Prenons H et a comme dans 1°. Supposons $|s|\leqslant H^a$; on a :

$$|s|^r|(p'\,e^{-p}D^{m-1}\varphi,\ e^{-p}D^k\varphi)|\leqslant H^{ar}\|\sqrt{p'}\,e^{-p}D^{m-1}\varphi\|\,\|\sqrt{p'}\,e^{-p}D^k\varphi\|. \tag{1}$$

Mais en vertu du lemme 3.3, le 2^e membre de cette inégalité est majoré par

$$H^{ar-\frac{1}{2}}\|\sqrt{p'}\,e^{-q}D^{m-1}\varphi\|\,\|e^{-p}D^{k+1}\varphi\|.$$

On peut donc, ensuite, raisonner comme on l'a fait en 1°, pour $|s|\leqslant H^a$.

Supposons maintenant $|s|\geqslant H^a$. On a ici :

$$|s|^r|(p'\,e^{-p}D^{m-1}\varphi,\ e^{-p}D^k\varphi)|\leqslant|s|^r\|e^{-p}D^{m-1}\varphi\|\,\|e^{-p}p'\,D^k\varphi\|.$$

En vertu de l'hypothèse sur p, nous pouvons appliquer le lemme 3.4; il en résulte que le second membre de l'inégalité précédente est majoré par

$$|s|^r\|e^{-p}D^{m-1}\varphi\|\,\|e^{-p}D^{k+1}\varphi\|\leqslant 2\,(|s|^{2r_1}\|e^{-p}D^{k+1}\varphi\|^2+|s|^{2r_2}\|e^{-p}D^{m-1}\varphi\|^2),$$

où r_1 et r_2 sont les entiers définis en 1°. On conclut comme en 1°, et on aboutit ainsi à la même majoration qu'en 1°, mais avec $|s|^r|(p'\,e^{-p}D^{m-1}\varphi,\ e^{-p}D^k\varphi)|$ comme 1er membre. Les deux majorations obtenues donnent immédiatement la résultat.

Il convient maintenant de traduire ces résultats en termes d'opérateurs différentiels sur R^n. Cela se fait visiblement sans difficulté : comme les inégalités établies sont valables pour toute $\varphi\in\mathcal{D}_t$, on prendra pour φ une fonction $\Phi(t,\ y^0)$, $y^0\in R^{n-1}$, vérifiant $(x\in R^n)$:

$$\int\Phi(x_1,\ y^0)\exp(2\,i\pi\langle x^0,\ y^0\rangle)\,d\,y^0\in\mathcal{D}_x.$$

On supposera que les coefficients de $P(D)=\prod_{j=1}^{m}(D-i\,r_j(s))$ sont des polynômes en $s_2,\ \dots,\ s_n$; de sorte qu'un y remplaçant s_j par $(1/2\,i\pi)(\partial/\partial x_j)$, on obtiendra un opérateur différentiel à coefficients constants sur R^n.

Cependant nous changerons nos notations : nous substituerons x_1 à ce qui, jusqu'à maintenant, était noté t; D ne désignera plus $d/d\,t$ et reprendra la signification des chapitres précédents. Ainsi $P(D)$ s'obtiendra par substitution, dans le polynôme $P(X) \in C[X_1, \ldots, X_n]$ de $(1/2i\pi)(\partial/\partial X_j)$ à l'indéterminée X_j pour chaque $j = 1, \ldots, n$. $P(D)$ sera normal, et d'ordre m en x_1; il pourra arriver (cas parabolique) que l'ordre total de $P(D)$ soit supérieur à m. Comme d'habitude, on posera

$$P_1(y) = (1/2i\pi)(\partial P/\partial y_1)(y).$$

Nous sommes alors en droit d'énoncer :

Théorème 3.1. *Soit $P(D)$ un opérateur hyperbolique normal à coefficients constants sur R^n, d'ordre m. Il existe deux constantes positives finies H, A telles que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_x$ et toute fonction réelle $p(x_1)$, une fois continûment dérivable, vérifiant $p'(x_1) \geqslant H$ pour tout x_1 réel, on ait :*

$$\sum_{|q| \leqslant m-1} \left\| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi \right\|^2_{L^2_x} \leqslant A \operatorname{Re}\left(e^{-p(x_1)} P(D)\varphi,\ e^{-p(x_1)} P_1(D)\varphi\right)_{L^2_x}$$

L'énoncé homologue pour le cas parabolique est celui-ci :

Théorème 3.2. *Soit d un entier pair $\geqslant 2$. Soit $P(D)$ un opérateur d-parabolique, d'ordre m par rapport à x_1. Il existe deux constantes positives finies H, A telles que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_x$ et toute fonction réelle $p(x_1)$, deux fois continûment dérivable, vérifiant $p'(x_1) \geqslant H$ et $p'^2(x_1) - p''(x_1) \geqslant 0$ pour tout x_1 réel, on ait :*

$$\textstyle\sum_{\frac{1}{2}d} \left\| e^{-p(x_1)} D^q \varphi \right\|^2_{L^2_x} + \sum_d \left\| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi \right\|^2_{L^2_x} \leqslant A \operatorname{Re}\left(e^{-p(x_1)} P(D)\varphi,\ e^{-p(x_1)} P_1(D)\varphi\right)_{L^2_x}.$$

Pour k entier $\geqslant 0$, la sommation dans $\sum_k$ s'effectue par rapport aux $q \in N^n$ qui vérifient $d q_1 + |q^0| \leqslant md - k$.

Le th. 3.1 généralise une partie du th. 2.1; le th. 3.2 généralise, lui, une partie du th. 2.3.

La preuve de ces théorèmes est simple. On commence par supposer que $P(D) = P_m(D)$ dans le cas hyperbolique, $P(D) = P_{m,d}(D)$ dans le cas parabolique (i.e. que $P(y_1^d, y^0)$ est homogène de degré md). On effectue alors une transformation de Fourier par rapport à x^0, ce qui donne des opérateurs $a(\partial/\partial x_1 - i r_1(y^0)) \ldots (\partial/\partial x_1 - i r_m(y^0))$ (a : nombre complexe non nul). Ces opérateurs vérifient (H) avec $d = 1$ si $P(D)$ est hyperbolique, et d pair $\geqslant 2$ si $P(D)$ est parabolique, et de plus (HYPER) dans le premier cas, (PARA) dans le second. On applique le corollaire du lemme 3.1 dans le cas (HYPER), celui du lemme 3.2 dans le cas (PARA). On obtient ainsi le th. 3.1 lorsque $P(D) = P_m(D)$ et le th. 3.2 lorsque $P(D) = P_{m,d}(D)$.

Pour obtenir le th. 3.1 dans sa généralité, on peut effectuer (¹) une transformation de Fourier en x^0 et on utilise une majoration du type de celle du lemme 3.5, mais bien plus banale, de

$$|y^0|^r \left| \left(e^{-p(x_1)} \frac{\partial^h}{\partial x_1^h} \varphi, e^{-p(x_1)} \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \varphi \right)_{L^2_{x_1}} \right|$$

avec $h \leqslant m$, $k \leqslant m-1$, $h+k+r \leqslant 2(m-1)$; cette majoration fixe le choix de la constante H.

En ce qui concerne le th. 3.2, nous pouvons aussi l'obtenir par transformation de Fourier réciproque par rapport à y^0, du moins dans le cas où $P(D) = P_{m,d}(D)$. Le passage au cas général est ici un peu plus délicat que dans le cas hyperbolique. Il convient de remarquer qu'on a ($\varphi \in \mathcal{D}_x$; on a omis les indices L^2) :

$$\begin{aligned}(e^{-p(x_1)} P(D)\varphi, e^{-p(x_1)} P_1(D)\varphi) - (e^{-p(x_1)} P_{m,d}(D)\varphi, e^{-p(x_1)} (P_{m,d})_1(D)\varphi) \\ = (e^{-p(x_1)} [P(D) - P_{m,d}(D)]\varphi, e^{-p(x_1)} P_1(D)\varphi) + \\ + (e^{-p(x_1)} P_{m,d}(D)\varphi, e^{-p(x_1)} [P_1(D) - (P_{m,d})_1(D)]\varphi).\end{aligned}$$

Le 2^e membre de cette égalité est une combinaison linéaire de produits du type

$$(e^{-p(x_1)} D^q \varphi, e^{-p(x_1)} D^{q'} \varphi),$$

avec :

$$d q_1 + |q^0| \leqslant m d - 1, \; d q_1' + |q'^0| \leqslant (m-1) d \quad \text{pour le } 1^{\text{er}} \text{ terme;}$$

$$d q_1 + |q^0| = m d, \; d q_1' + |q'^0| \leqslant (m-1) d - 1 \quad \text{pour le } 2^{\text{e}} \text{ terme.}$$

Posons $h = q_1$, $k = q_1'$, $r = |q^0| + |q'^0|$. Pour ces deux termes, on a : $h \leqslant m$, $k \leqslant m-1$, $h + k \leqslant 2(m-1)$, $d(h+k) + r \leqslant (2m-1)d - 1$. Si donc nous faisons une transformation de Fourier par rapport à x^0, nous sommes en droit d'appliquer le lemme 3.5 (avec y^0 à la place de s et x_1 à celle de t). Ensuite, une transformation de Fourier réciproque en y^0 donne le résultat cherché.

§ 2. Opérateurs hyperboliques et paraboliques à coefficients variables

Nous reprenons ici intégralement les notations et définitions des paragraphes 3 et 4 du chapitre II.

LEMME 3.6. *Soient r, $s \in N^n$, $|r| = m$, $|s| = m-1$. Soit $a(x) \in \mathcal{E}$ à valeurs réelles, avec $a(0) = 0$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un voisinage ouvert Ω_ε de 0 dans R^n et un nombre positif $M_\varepsilon < +\infty$ tels que :*

(¹) On peut aussi appliquer la remarque de la p. 82.

$$|\operatorname{Re}(e^{-p(x_1)} a(x) D^r \varphi,\ e^{-p(x_1)} D^s \varphi)_{L^2}| \leqslant \varepsilon \sum_{|q| \leqslant m-1} \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|_{L^2}^2$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$ *et toute fonction réelle* $p(x_1)$, *une fois continûment dérivable, vérifiant* $p'(x_1) \geqslant M_\varepsilon$ *pour tout* $x \in \Omega_\varepsilon$.

Ceci est la généralisation naturelle du lemme 2.1; la preuve est calquée sur celle de ce lemme 2.1, aux modifications près, tout-à-fait superficielles, qu'impose la nature linéaire de $p(x_1)$. Nous allons (pour les sceptiques) en exposer complètement la démonstration. Nous omettrons les indices L^2.

1° *Cas* $m=1$

Alors $D^r = \partial/\partial x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ et :

$$2 \operatorname{Re}(e^{-p} a(x) D_j \varphi,\ e^{-p} \varphi) = \int [-D_j a(x) + 2a(x) D_j p(x_1)]\, |e^{-p(x_1)} \varphi(x)|^2\, dx.$$

Bien entendu, $D_j p(x_1) = 0$ si $j \neq 1$. Soit Ω un voisinage ouvert borné de 0 dans R^n tel que $|a(x)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$ pour tout $x \in \Omega$; posons $B = \sup_{|q| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} |D^q a(x)|$. On a (quel que soit $j = 1, \ldots, n$) :

$$|\operatorname{Re}(e^{-p} a D_j \varphi,\ e^{-p} \varphi)| \leqslant \tfrac{1}{2} \{\varepsilon + B(\inf_{x \in \Omega} p'(x_1))^{-1}\} \| \sqrt{p'}\, e^{-p} \varphi \|^2$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, d'où le résultat en prenant $M_\varepsilon = B/\varepsilon$ et $\Omega_\varepsilon = \Omega$.

On poursuit la démonstration en raisonnant par récurrence sur m; le résultat est vrai pour $m=1$, on le suppose vrai jusqu'à $m-1$.

2° *Cas* $r_1 \geqslant 1$ *et* $s_1 \geqslant 1$

On a $D^r = D^{r'} D_1$ et $D^s = D^{s'} D_1$ avec $r' = (r_1 - 1, r^0)$ et $s' = (s_1 - 1, s^0)$. Comme $|r'| = m-1$, $|s'| = m-2$, nous sommes en droit d'appliquer la récurrence à $D_1 \varphi$.

3° *Cas* $r_1 \geqslant 2$ *et* $s_1 = 0$

Ecrivons encore $D^r = D^{r'} D_1$. On a :

$$\begin{aligned}(e^{-p(x_1)} a(x) D^r \varphi,\ & e^{-p(x_1)} D^s \varphi) \\ &= -(e^{-p(x_1)} a D^{r'} \varphi,\ e^{-p(x_1)} D^s D_1 \varphi) - (e^{-p(x_1)} (D_1 a) D^{r'} \varphi,\ e^{-p(x_1)} D^s \varphi) + \\ &\qquad + 2(p'(x_1)\, e^{-p(x_1)} a D^{r'} \varphi,\ e^{-p(x_1)} D^s \varphi).\end{aligned}$$

Puisque $|r'| = |s| = m-1$, les deux derniers termes sont majorés, en valeur absolue, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, par :

$$\sup_{x\in\Omega}\left(2\,|a(x)|+\frac{B}{p'(x_1)}\right)\sum_{|q|\leqslant m-1}\|e^{-p(x_1)}\sqrt{p'(x_1)}\,D^q\varphi\|^2$$

et on peut choisir Ω_ε et M_ε comme lorsque $m=1$.

Quant au 1^{er} terme : $-(e^{-p(x_1)}a\,D^{r'}\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^s D_1\varphi)$, remarquons que $|s|+1=m$, que $|r'|=m-1$ et que $r'_1\geqslant 1$; nous nous trouvons donc dans le cas 2° (avec (s_1+1, s^0) à la place de r et r' à celle de s).

4° *Cas* $r_1=s_1=0$

Ici $e^{-p(x_1)}$ ne joue aucun rôle et on obtient, facilement (cf. preuve du lemme 2.1, cas 3°) :

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Re}\,(a(x)\,D^r(e^{-p(x_1)}\varphi),\ D^s(e^{-p(x_1)}\varphi))|\\&\leqslant B\sum_{\substack{|q|\leqslant m-1\\ q_1=0}}\|D^q(e^{-p(x_1)}\varphi)\|^2\\&\leqslant\sup_{x\in\Omega}\frac{B}{p'(x_1)}\sum_{\substack{|q|\leqslant m-1\\ q_1=0}}\|\sqrt{p'(x_1)}\,e^{-p(x_1)}D^q\varphi\|^2\end{aligned}$$

d'où le résultat, en prenant $M_\varepsilon=B/\varepsilon$.

5° *Cas* $r_1=1$, $s_1=0$

Ecrivons $D^r=D_1D^{r'}$ (ici $r'_1=0$) ; on a :

$$\begin{aligned}&(e^{-p(x_1)}a\,D^r\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^s\varphi)\\&\quad=-(e^{-p(x_1)}a\,D^{r'}\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^s\varphi)-(e^{-p(x_1)}(D_1a)\,D^{r'}\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^s\varphi)+\\&\qquad\qquad+2\,(p'(x_1)\,e^{-p(x_1)}a\,D^r\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^s\varphi).\end{aligned}$$

Les deux derniers termes se majorent, en valeur absolue, comme dans 3°. Le premier terme (du 2^{e} membre) est égal à :

$$\begin{aligned}-(e^{-p(x_1)}a\,D^s\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^r\varphi)+\sum_{|r''|\geqslant 1}\binom{r'}{r''}(e^{-p(x_1)}(D^{r''}a)\,D^{r'-r''}\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^sD_1\varphi)-\\-\sum_{|s'|\geqslant 1}\binom{s}{s'}(e^{-p(x_1)}(D^{s'}a)\,D^{s-s'}\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^r\varphi),\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathrm{Re}\,(e^{-p(x_1)}a\,D^r\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^s\varphi)$ est une somme finie de termes du type $(e^{-p(x_1)}b(x)D^{q'}\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^{q''}\varphi)$, avec : $b(x)\in\mathcal{E}$, $|q'|\leqslant m-2$, $|q''|=m$, $q''_1=1$. Comme $m\geqslant 2$, nous pouvons poser $D^{q''}=D_jD^q$, $2\leqslant j\leqslant n$. Ce terme-type peut donc s'écrire :

$$-(e^{-p(x_1)}(D_jb)\,D^{q'}\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^q\varphi)-(e^{-p(x_1)}b\,D^{q'}D_j\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^q\varphi),$$

ce qui prouve, au total, que $\mathrm{Re}\,(e^{-p(x_1)}a\,D^r\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^s\varphi)$ est une somme de termes de la forme $(e^{-p(x_1)}c(x)\,D^h\varphi,\ e^{-p(x_1)}D^k\varphi)$ avec $h,\ k\in N^n$, $|h|\leqslant m-1$, $|k|\leqslant m-1$, et

$c(x) \in \mathcal{E}$. On conclut sans peine, en remarquant que la valeur absolue de ce terme est majorée par:

$$\sup_{x\in\Omega} \frac{|c(x)|}{p(x_1)} \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^h \varphi \| \; \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^k \varphi \|.$$

LEMME 3.7. *Soient $r, s \in N^n$, $|r+s| \leqslant 2(m-1)$, $|r| \leqslant m$, $|s| \leqslant m-1$. Soit $a(x) \in \mathcal{E}$. Quel que soit l'ouvert borné Ω de R^n et quel que soit $\mathcal{E} > 0$, on peut trouver un nombre positif $M_\varepsilon(\Omega) < +\infty$ tel que :*

$$|(e^{-p(x_1)} a(x) D^r \varphi,\; e^{-p(x_1)} D^s \varphi)_{L^2}| \leqslant \varepsilon \sum_{|q| \leqslant m-1} \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|^2_{L^2}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et toute fonction réelle $p(x_1)$ une fois continûment dérivable, vérifiant $p'(x_1) \geqslant M_\varepsilon(\Omega)$ pour tout $x \in \Omega$.

On peut évidemment se borner à considérer le cas où $|r| = m$. Si $r_1 \leqslant m-1$, il existe $j \geqslant 2$ tel que $r_j \geqslant 1$; écrivons $D^r = D_j D^{r'}$ avec $|r'| \leqslant m-1$. En transposant D_j, on obtient

$$\begin{aligned}(e^{-p(x_1)} a D^r \varphi,\; & e^{-p(x_1)} D^s \varphi)_{L^2} \\ &= -(e^{-p(x_1)} (D_j a) D^{r'} \varphi,\; e^{-p(x_1)} D^s \varphi)_{L^2} - (e^{-p(x_1)} a D^{r'} \varphi,\; e^{-p(x_1)} D_j D^s \varphi)_{L^2},\end{aligned}$$

et comme $|s| \leqslant m-2$, nous sommes ramenés au cas $|r| \leqslant m-1$. Si $r_1 = m$, on a la même formule, mais avec $j=1$, et avec un terme supplémentaire au second membre, terme qui est

$$2(p'(x_1)\, e^{-p(x_1)} a D^{r'} \varphi,\; e^{-p(x_1)} D^s \varphi)_{L^2}.$$

La valeur absolue de ce terme est majorée par :

$$2 \sup_{x\in\Omega} |a(x)| \; \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^{r'} \varphi \|_{L^2} \; \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^s \varphi \|_{L^2}.$$

Posons $s' = (s+1, s^0)$; on a $|s'| \leqslant m-1$. D'après le lemme 3.3,

$$\| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^s \varphi \|_{L^2} \leqslant \left\| \frac{1}{\sqrt{p'(x_1)}}\, e^{-p(x_1)} D^{r'} \varphi \right\|_{L^2}$$

et, comme on a aussi $|r'| \leqslant m-1$, on voit que :

$$\begin{aligned}|2(p'(x_1)\, e^{-p(x_1)} a D^{r'} \varphi,\; & e^{-p(x_1)} D^s \varphi)_{L^2}| \\ &\leqslant 2 \sup_{x\in\Omega} \frac{|a(x)|}{p'(x_1)} \sum_{|q| \leqslant m-1} \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|^2_{L^2},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Si on avait supposé $a(x) \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire indéfiniment dérivable, et bornée, ainsi que chacune de ses dérivées, sur R^n entier, on aurait alors pu prendre comme ouvert Ω n'importe quel ouvert de R^n, et en particulier R^n lui-même. Cela ressort manifestement de la « démonstration ».

La conjonction des lemmes 3.6, 3.7 et du th. 3.1 conduit directement au théorème suivant, qui est la généralisation d'une partie du th. 2.2 :

THÉORÈME 3.3. *Soit $P(x, D)$ un opérateur hyperbolique normal d'ordre m sur R^n, à coefficients indéfiniment différentiables. Pour chaque point x_0 de R^n, on peut trouver un voisinage ouvert $U(x_0)$ de ce point, et deux constantes positives finies $A(x_0)$, $H(x_0)$ telles qu'on ait :*

$$\sum_{|q| \leqslant m-1} \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|_{L^2}^2 \leqslant A(x_0) \operatorname{Re} (e^{-p(x_1)} P(x, D) \varphi,\ e^{-p(x_1)} P_1(x, D) \varphi)_{L^2}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U(x_0))$ et toute fonction réelle $p(x_1)$, une fois continûment dérivable, vérifiant $p'(x_1) \geqslant H(x_0)$ pour tout $x \in U(x_0)$.

Nous allons essayer maintenant d'étendre, dans une certaine mesure, ce résultat à d'autres ouverts que des voisinages (qui ne sont pas arbitraires) de chaque point.

Nous allons considérer un ouvert Ω de R^n soumis à la condition suivante :

(N) *Quel que soit le nombre M fini, l'ensemble des points $x \in \overline{\Omega}$ qui vérifient $|x_1| \leqslant M$ est compact.*

THÉORÈME 3.4. *Soit $P(x, D)$ un opérateur hyperbolique normal d'ordre m sur R^n, à coefficients indéfiniment différentiables. Soit Ω un ouvert de R^n possédant la propriété* (N). *Pour toute fonction continue $h(x)$ sur R^n, il existe une fonction continue $G(x_1)$ de la variable réelle x_1, $G(x_1) \geqslant 1$ pour tout x_1, telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour toute fonction réelle $p(x_1)$, une fois continûment dérivable, vérifiant $p'(x_1) \geqslant G(x_1)$ pour tout x_1, on ait :*

$$\sum_{|q| \leqslant m-1} \| h(x)\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|_{L^2}^2 \leqslant \operatorname{Re} (e^{-p(x_1)} P(x, D) \varphi,\ e^{-p(x_1)} P_1(x, D) \varphi)_{L^2}.$$

Rappelons que $P_1(x, y) = (1/2 i\pi)(\partial P/\partial y_1)(x, y)$.

Construisons, à partir du recouvrement $\{U(x_0)\}_{x_0 \in R^n}$ de R^n, où $U(x_0)$ est le voisinage de x_0 défini par le th. 3.3, un recouvrement localement fini de R^n, que nous noterons $(U_i)_{i \in J}$. Chaque U_i est borné et contenu dans un certain $U(x_0)$ auquel sont attachées, par le th. 3.3, des constantes $A(x_0)$ et $H(x_0)$; après avoir choisi, pour chaque $i \in J$, un $U(x_0)$ qui contient U_i, nous poserons $A_i = A(x_0)$ et $H_i = H(x_0)$.

Prenons ensuite une partition de l'unité (α_i) dans $\mathcal{D}$, subordonnée au recouvrement (U_i). Nous noterons K_i le support de α_i et J_i l'ensemble des indices $j \in J$ tels que U_j rencontre U_i.

Nous omettrons (provisoirement) les indices L^2 et nous écrirons P (resp. P_1) au lieu de $P(x, D)$ (resp. $P_1(x, D)$). En outre, posons $R_i = P\alpha_i - \alpha_i P$, $S_i = P_1\alpha_i - \alpha_i P_1$: R_i est un opérateur d'ordre $m-1$, S_i est d'ordre $m-2$; les coefficients de R_i et de S_i sont dans $\mathcal{D}$.

D'après le th. 3.3, si $p'(x_1) \geqslant H_i$ pour tout $x \in U_i$, on a :

$$\sum_{|q|\leqslant m-1} \| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^q(\alpha_i\varphi)\|^2 \leqslant A_i \operatorname{Re}(e^{-p} P(\alpha_i\varphi),\ e^{-p} P_1(\alpha_i\varphi)). \tag{1}$$

Ceci dit, remarquons que :

$$(e^{-p} P(\alpha_i\varphi),\ e^{-p}P_1(\alpha_i\varphi)) - (\alpha_i^2 e^{-p} P\varphi,\ e^{-p} P_1\varphi)$$
$$= (e^{-p}R_i\varphi,\ e^{-p}S_i\varphi) + (e^{-p}R_i\varphi,\ e^{-p}\alpha_i P_1\varphi) + (e^{-p}\alpha_i P\varphi,\ e^{-p}S_i\varphi). \tag{2}$$

Il est évident qu'il existe $M_i < +\infty$ tel que :

$$|(e^{-p}R_i\varphi,\ e^{-p}S_i\varphi) + (e^{-p}R_i\varphi,\ e^{-p}\alpha_i P_1\varphi)| < M_i \sum_{|q|\leqslant m-1} \int_{U_i} p' |e^{-p} D^q\varphi|^2\, dx$$

puisque α_i et les coefficients de R_i et de S_i ont leurs support dans $K_i \subset U_i$.

Dans le terme $(e^{-p}\alpha_i P\varphi,\ e^{-p}S_i\varphi)$, nous pouvons remplacer φ par $\beta_i\varphi$, où $\beta_i \in \mathcal{D}(U_i)$ vaut 1 sur K_i. Il existe $B_i < +\infty$ tel que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$ et toute $p(x_1)$:

$$\sum_{|q|\leqslant m-1} \|\sqrt{p'}\, e^{-p} D^q(\beta_i\varphi)\|^2 \leqslant B_i \sum_{|q|\leqslant m-1} \int_{U_i} p' |e^{-p} D^q\varphi|^2\, dx. \tag{4}$$

Posons alors $B_i' = \sum_{j\in J_i} (1 + B_i)$; B_i' est fini car J_i est un ensemble fini; posons $\varepsilon_i = \inf_{j\in J_i} (1/2A_jB_j')$; $\varepsilon_i > 0$, toujours parce que J_i est fini; on a alors :

$$B_j' \sup_{i\in J_j} \varepsilon_i \leqslant \frac{1}{2A_j}. \tag{5}$$

Or le lemme 3.7 dit qu'on peut trouver $H_i' < +\infty$ tel que, si $p'(x_1) \geqslant H_i'$ pour tout $x \in U_i$, on ait, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$|(e^{-p}\alpha_i P(\beta_i\varphi),\ e^{-p}S_i(\beta_i\varphi))|$$
$$\leqslant \varepsilon_i \sum_{|q|\leqslant m-1} \|\sqrt{p'}\, e^{-p}D^q(\beta_i\varphi)\|^2$$
$$\leqslant \varepsilon_i B_i \sum_{|q|\leqslant m-1} \int_{U_i} p' |e^{-p}D^q\varphi|^2\, dx$$

compte tenu de (4).

Si nous posons $H_i'' = M_i \varepsilon_i^{-1}$, en faisant la conjonction de (3) et de la dernière inégalité, compte tenu de (2), on obtient, si $p'(x_1) \geqslant \sup(H_i', H_i'')$ pour tout $x \in U_i$:

$$|(e^{-p} P(\alpha_i \varphi),\ e^{-p} P_1(\alpha_i \varphi)) - (\alpha_i^2 e^{-p} P\varphi,\ e^{-p} P_1 \varphi)| \leqslant \varepsilon_i (1 + B_i) \sum_{|q| \leqslant m-1} \int_{U_i} p' |e^{-p} D^q \varphi|^2 dx$$

et en faisant la conjonction de ceci avec (1), on voit que si $p'(x_1) \geqslant \sup(H_i, H_i', H_i'')$, on aura, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \sum_{|q| \leqslant m-1} \| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^q (\alpha_i \varphi) \|^2 & \\ \leqslant \operatorname{Re}(\alpha_i^2 e^{-p} P\varphi,\ e^{-p} P_1 \varphi) &+ \varepsilon_i (1 + B_i) \sum_{|q| \leqslant m-1} \int_{U_i} p' |e^{-p} D^q \varphi|^2 dx \\ \leqslant \operatorname{Re}(\alpha_i^2 e^{-p} P\varphi,\ e^{-p} P_1 \varphi) &+ \varepsilon_i (1 + B_i) \sum_{j \in J_i} \sum_{|q| \leqslant m-1} \| \sqrt{p'} e^{-p} D^q (\alpha_i \varphi) \|^2 \end{aligned} \tag{7}$$

puisque, pour tout $x \in U_i$, $\varphi(x) = \sum_{j \in J_i} \alpha_j(x) \varphi(x)$.

Soit alors t un nombre réel arbitraire; nous désignerons par V_t l'hyperplan $x_1 = t$ de R^n.

Nous définirons une fonction $H(t)$ ainsi : $H(t) = \sup(H_i, H_i', H_i'')$ le sup étant pris à la fois sur H, H', H'' et sur les i tels que $U_i \cap V_t \cap \Omega \neq \emptyset$. En vertu de (N), ces i sont en nombre fini; et de plus, $H(t)$ est une fonction constante par morceaux, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (finies et positives) sur tout intervalle borné de la droite.

Nous imposerons alors à $p(x_1)$ de vérifier

(I) $p'(x_1) \geqslant H(x_1)$ *pour tout* x_1 *réel.*

Nous supposerons désormais que $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dans ces conditions, si (I) est satisfaite, la majoration (7) est exacte pour tout $i \in J$. Nous pouvons en faire la somme, membre à membre, lorsque i parcourt J, après avoir posé $g(x) = (\sum_{i \in J} \alpha_i^2(x))^{\frac{1}{2}}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} \frac{1}{A_i} \sum_{|q| \leqslant m-1} \| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^q (\alpha_i \varphi) \|^2 & \\ \leqslant \operatorname{Re}(g^2 e^{-p} P\varphi,\ e^{-p} P_1 \varphi) &+ \sum_{i \in J} \varepsilon_i (1 + B_i) \sum_{j \in J_i} \sum_{|q| \leqslant m-1} \| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^q (\alpha_j \varphi) \|^2. \end{aligned}$$

Le dernier terme du second membre peut s'écrire :

$$\sum_{i \in J} [\sum_{j \in J_i} \varepsilon_j (1 + B_j)] \sum_{|q| \leqslant m-1} \| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^q (\alpha_i \varphi) \|^2 \leqq \sum_{i \in J} B_i' \sup_{j \in J_i} \varepsilon_j \sum_{|q| \leqslant m-1} \| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^q (\alpha_i \varphi) \|^2,$$

Compte tenu de (5), on aboutit à ceci :

Si $p(x_1)$ vérifie (I), on aura, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\sum_{|q| \leqslant m-1} \sum_{i \in J} \frac{1}{2 A_i} \| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^q (\alpha_i \varphi) \|^2 \leqslant \operatorname{Re} (g^2 e^{-p} P \varphi,\ e^{-p} P_1 \varphi). \tag{8}$$

Restent à éliminer les A_i et $g(x)$.

Posons $A(t) = \sup A_i$ où le sup est pris sur les $i \in J$ tels que $U_i \cap V_t \cap \Omega \neq \emptyset$; $A(t)$ est une fonction du même type que $H(t)$. Soit $B(t)$ une fonction réelle, indéfiniment dérivable de t dans R^1, qui sera choisie plus loin. Imposons à $p(x_1)$ de vérifier :

(II) $p'(x_1) \geqslant A(x_1)\, B^2(x_1)$ *pour tout* x_1 *réel.*

L'inégalité (8) devient alors :

$$\sum_{\substack{|q| \leqslant m-1 \\ i \in J}} \| B e^{-p} D^q (\alpha_i \varphi) \|^2 \leqslant 2 \operatorname{Re} (g^2 e^{-p} P \varphi,\ e^{-p} P_1 \varphi). \tag{9}$$

Reste à éliminer $g(x)$. Remarquons que $g \in \mathcal{E}$; de plus, $g(x) > 0$ pour tout $x \in R^n$, car si on avait $g(x_0) = 0$ pour un point x_0 de R^n, cela signifierait qu'on a $\alpha_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in J$, contrairement au fait que les α_i constituent une partition de l'unité dans R^n. Si donc $f(x) = 1/g(x)$, on aura $f \in \mathcal{E}$. Comme d'ailleurs $g = (\sum_{i \in J} \alpha_i)^2 - \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \leqslant 1$, on a $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in R^n$.

On peut alors faire la remarque suivante : soit $r \in N^n$ quelconque; posons $F_r(t) = \sup |D^r f(x)|$, le sup étant calculé sur les $x \in \Omega$, tels que $x_1 = t$. $F_r(t)$ est une fonction semicontinue, donc mesurable, sur la droite, et, en vertu de (N), elle est bornée sur tout intervalle borné. De ceci, par des raisonnements en tous points analogues à ceux déjà faits, on déduit qu'il existe deux fonctions continues $M(x_1)$ et $H'(x_1)$ telles que, si $p'(x_1) \geqslant H'(x_1)$ pour tout x_1, alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$|(e^{-p} P \varphi,\ e^{-p} P_1 \varphi) - (e^{-p} g P(f\varphi),\ e^{-p} P_1 (f\varphi))| \leqslant \sum_{|q| \leqslant m-1} \| M(x_1)\, e^{-p} D^q \varphi \|^2. \tag{10}$$

De façon analogue, on peut montrer qu'il existe une fonction continue $H''(x_1)$ telle que, si $p'(x_1) \geqslant H''(x_1)$ pour tout x_1 réel, alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $q \in N^n$, $|q| \leqslant m-1$:

$$\| B e^{-p} D^q \varphi \|^2 \leqslant 2 \sum_{i \in J} \| B e^{-p} D^q (\alpha_i f \varphi) \|^2. \text{ (1)}$$

Tenons compte de cette inégalité et de (10) pour appliquer (9) après y avoir remplacé φ par $f\varphi$. On voit que si $p'(x_1)$ vérifie (I) (II), et si de plus :

(1) Tenir compte de ce que $\sum_{i \in J} \alpha_i^2 f^2 = 1$.

(III) $p'(x_1) \geqslant H'(x_1)$, $p'(x_1) \geqslant H''(x_1)$ *pour tout* x_1 *réel*,

alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\tfrac{1}{4} \sum_{|q| \leqslant m-1} \| B e^{-p} D^q \varphi \|^2 \leqslant \operatorname{Re} (e^{-p} P\varphi,\ e^{-p} P_1 \varphi) + \sum_{|q| \leqslant m-1} \| M(x_1) e^{-p} D^q \varphi \|^2.$$

On obtient enfin le th. 3.4 en soumettant B à la condition :

(IV) $B(x_1) \geqslant 3 [M(x_1) + \hat{h}(x_1)]$ *pour tout* x_1 *réel*,

où $\hat{h}(t) = \sup |h(x)|$, le sup étant calculé sur les $x \in \Omega$ tels que $x_1 = t$.

Remarques. 1. Le théorème 3.4 implique évidemment une propriété de domination : il suffit d'y remplacer $h(x)$ par $(1/\varepsilon) h(x)$; cette domination n'est pas tout-à-fait globale, c'est-à-dire indépendante du support de φ. La nature des bases de domination, ne comprenant que des fonctions de la seule variable x_1, interdisait à priori tout espoir d'obtenir une domination où l'ouvert Ω aurait pu être identique à R^n entier.

2. Les ouverts qui vérifient la condition (N) comprennent, entre autre, tous les cylindres ouverts de génératrices orthogonales aux hyperplans $x_1 =$ constante, et tous les cônes ouverts qui ne coupent ces hyperplans que suivant des bornés.

Il nous faut maintenant voir les pendants paraboliques des théorèmes 3.3 et 3.4. Comme dans ce qui précède, nous nous bornerons le plus souvent à esquisser les raisonnements, en énonçant les résultats intermédiaires.

$P(x, D)$ est maintenant d-parabolique (d entier pair $\geqslant 2$), d'ordre m en x_1; nous supposerons que le coefficient de $\partial^m / \partial x_1^m$ dans $P(x, D)$ est une constante (on pourra toujours se ramener à ce cas par division).

On commence par démontrer une généralisation du lemme 2.3 :

LEMME 3.8. *Soient* r, $s \in N^n$, $r_1 + s_1 \leqslant 2(m-1)$, $d r_1 + |r^0| \leqslant m d$, $d s_1 + |s^0| \leqslant (m-1) d$. *Soit* $a(x) \in \mathcal{E}$ *avec* $a(0) = 0$. *Quel que soit* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un voisinage ouvert* Ω_ε *de* 0 *dans* R^n *et un nombre positif fini* M_ε *tels qu'on ait, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$ *et toute fonction réelle* $p(x_1)$, *deux fois continûment dérivable, vérifiant* $p'(x_1) > M_\varepsilon$ *et* $p'^2(x_1) - p''(x_1) \geqslant 0$ *pour tout* x_1 :

$$|(e^{-p(x_1)} a(x) D^r \varphi,\ e^{-p(x_1)} D^s \varphi)_{L^2}| \leqslant \varepsilon \left(\textstyle\sum_d \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|^2_{L^2} + \textstyle\sum_{\frac{1}{2}d} \| e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|^2_{L^2}\right).$$

Rappelons que si k est un entier, la sommation dans $\sum_k$ porte sur les $q \in N^n$ vérifiant $d q_1 + |q^0| \leqslant m d - k$.

Lorsque $m = 1$, la condition $p'^2 - p'' \geqslant 0$ est superflue. La démonstration se fait par les procédés utilisés jusqu'ici (elle s'inspire des preuves des lemmes 2.3 et 3.5, 3.6, 3.7).

On fait ensuite la conjonction de ce lemme et du théorème 3.2. On obtient l'équivalent du théorème 3.3 et ce qui constitue une généralisation d'une partie du théorème 2.5 :

THÉORÈME 3.5. *Soit $P(x, D)$ un opérateur d-parabolique sur R^n, à coefficients indéfiniment différentiables. Pour chaque point x_0 de R^n, il existe un voisinage ouvert $U(x_0)$ de ce point, et deux constantes positives finies $A(x_0)$, $H(x_0)$ tels que :*

$$\sum_{\frac{1}{2}d} \| e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|^2_{L^2} + \sum_d \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|^2_{L^2} \leqslant A(x_0) \operatorname{Re} (e^{-p(x_1)} P(x, D) \varphi,\ e^{-p(x_1)} P_1(x, D) \varphi)_{L^2}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U(x_0))$ et toute fonction réelle $p(x_1)$, deux fois continûment dérivable, vérifiant $p'(x_1) \geqslant H(x_0)$ et $p'^2(x_1) - p''(x_1) \geqslant 0$ pour tout $x \in U(x_0)$.

Enfin, pour passer à l'équivalent parabolique du th. 3.4, on pourra s'appuyer sur le lemme suivant, qui est l'homologue du lemme 3.7 et généralise le lemme 2.4 :

LEMME 3.9. *Soient $r,\ s \in N^n$, $d r_1 + |r^0| \leqslant m d$, $d s_1 + |s^0| \leqslant (m-1) d$, $d(r_1 + s_1) + |r^0 + s^0| \leqslant (2m-1) d - 1$. Soit $a(x) \in \mathcal{E}$ quelconque. Alors, pour tout ouvert borné Ω de R^n et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon(\Omega) < +\infty$ tel que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et toute fonction réelle $p(x_1)$, deux fois continûment dérivable, vérifiant $p'(x_1) \geqslant M_\varepsilon(\Omega)$ et $p'^2(x_1) - p''(x_1) \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$, on ait :*

$$|(e^{-p(x_1)} a(x) D^r \varphi,\ e^{-p(x_1)} D^s \varphi)_{L^2}| \leqslant \varepsilon \left(\sum_{\frac{1}{2}d} \| e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|^2_{L^2} + \sum_d \| \sqrt{p'(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi \|^2_{L^2}\right).$$

Nous ferons la majoration seulement dans le cas où $r_1 = m$, $r^0 = 0$, $d s_1 + |s^0| \leqslant (m-1) d - 1$. En omettant les indices L^2 et en posant, comme d'habitude, $D_1 = \partial / \partial x_1$, on peut écrire :

$$(e^{-p} a D_1^m \varphi,\ e^{-p} D^s \varphi) = -((D_1 a) e^{-p} D_1^{m-1} \varphi,\ e^{-p} D^s \varphi) - (a e^{-p} D_1^{m-1} \varphi,\ e^{-p} D_1 D^s \varphi) + 2 (p' a e^{-p} D_1^{m-1} \varphi, e^{-p} D^s \varphi).$$

La majoration de $|((D_1 a) e^{-p} D_1^{m-1} \varphi,\ e^{-p} D^s \varphi)|$ étant banale, nous avons à nous occuper des deux derniers termes du 2e membre.

1° *Majoration de* $|(a e^{-p} D_1^{m-1} \varphi,\ e^{-p} D^s D_1 \varphi)|$

Posons $s^0 = s'^0 + s''^0$, avec $d(s_1 + 1) + |s'^0| \leqslant (m - \frac{1}{2}) d$, $|s''^0| \leqslant \frac{1}{2} d - 1$; ceci est possible parce que $d s_1 + |s^0| \leqslant (m-1) d - 1$. Posons ensuite $s' = (s_1 + 1, s'^0)$, $s'' = (0, s''^0)$. On transpose $D^{s''}$, ce qui conduit à une somme de termes de la forme $(b(x) e^{-p} D^{r'} \varphi,\ e^{-p} D^{s'} \varphi)$, avec $r'_1 = m-1$, $|r'^0| \leqslant \frac{1}{2}d-1$, et $b(x) \in \mathcal{E}$. On voit alors que si B désigne le maximum de $|b(x)|$ sur Ω, on a :

$$|(b e^{-p} D^{r'}\varphi,\ e^{-p} D^{s'}\varphi)| \leqslant B \| e^{-p} D^{r'}\varphi\| \, \| e^{-p} D^{s'}\varphi\|.$$

Dans le second membre de la dernière inégalité, effectuons une transformation de Fourier en x^0; on obtient alors le résultat en raisonnant exactement comme dans la preuve du lemme 3.5, compte tenu de ce que $r'_1 = m-1$, $s'_1 \leqslant m-1$, $d(r'_1+s'_1)+|r^0+s^0| \leqslant (2m-1)d-1$.

2° *Majoration de* $|(p' a e^{-p} D_1^{m-1}\varphi,\ e^{-p} D^s \varphi)|$

On choisit s'^0 et s''^0 comme en 1°, mais on pose ici $s' = (s_1, s'^0)$. On transpose encore $D^{s''}$, ce qui conduit à une somme de termes $(b(x) p' e^{-p} D^{r'}\varphi,\ e^{-p} D^{s'}\varphi)$, avec $b(x) \in \mathcal{E}$ et r' comme en 1°. Toutefois, dans le cas présent, $d s'_1 + |s'^0| \leqslant (m-\frac{1}{2})d - d$. La condition $p'^2 - p'' \geqslant 0$ permet d'écrire (lemme 3.4) :

$$\| p' e^{-p} D^{s'}\varphi\| \leqslant 2 \| e^{-p} D^{\hat{s}}\varphi\| \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D},$$

où $\hat{s} = (s_1+1, s'^0)$, c'est-à-dire que $\hat{s}$ est exactement ce qu'on a noté s' en 1°; nous nous trouvons dans la même situation qu'en 1°, et on doit donc faire le même raisonnement.

Théorème 3.6. *Soit $P(x, D)$ un opérateur d-parabolique sur R^n. Soit un ouvert Ω de R^n, vérifiant la condition* (N) (p. 82). *Il existe une fonction $a(x_1) > 0$, constante par morceaux, ne dépendant que de l'opérateur $P(x, D)$ et de l'ouvert Ω, telle que, pour toute fonction continue $h(x)$ sur R^n, il existe une fonction continue $G(x_1) \geqslant 1$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et toute fonction réelle $p(x_1)$, deux fois continûment dérivable, vérifiant $p'(x_1) \geqslant G(x_1)$ et $p'^2(x_1) - p''(x_1) \geqslant 0$ pour tout x_1, on ait :*

$$\Big(\sum_{\frac{1}{2}d} \| \sqrt{a(x_1)}\, e^{-p(x_1)} D^q \varphi\|_{L^2}^2 + \sum_d \| h(x)\, e^{-p(x_1)} D^q\varphi\|_{L^2}^2\Big)$$
$$\leqslant \mathrm{Re}\,(e^{-p(x_1)} P(x, D)\varphi,\ e^{-p(x_1)} P_1(x, D)\varphi)_{L^2}.$$

On construit un recouvrement (U_i) de R^n et une partition de l'unité (α_i) de $\mathcal{D}$, subordonnée à ce recouvrement, comme dans la preuve du th. 3.4. Ici aussi, ce qui importe, c'est d'abord d'obtenir des majorations convenables des crochets $[P, \alpha_i]$ et $[P_1, \alpha_i]$: cela se fait à l'aide du lemme 3.9.

On aboutit ainsi à une inégalité qui peut s'écrire, avec les mêmes notations que dans la preuve du th. 3.4 :

$$\sum_{i\in J}\frac{1}{2A_i}\left(\sum_{\frac{1}{2}d}\|e^{-p(x_1)}D^q(\alpha_i\varphi)\|_{L^2}^2+\sum_d\|\sqrt{p'(x_1)}\,e^{-p(x_1)}D^q(\alpha_i\varphi)\|_{L^2}^2\right)$$
$$\leqslant \operatorname{Re}(g^2e^{-p}P(x,D)\varphi,\ e^{-p}P_1(x,D)\varphi)_{L^2}.$$

Reste pratiquement à éliminer g^2, par le procédé habituel, qui consiste à remplacer φ par $g^{-1}\varphi$, et à majorer

$$\left|(e^{-p}P(x,D)\varphi,\ e^{-p}P_1(x,D)\varphi)_{L^2}-\left(e^{-p}g\,P(x,D)\left(\frac{\varphi}{g}\right),\ e^{-p}g\,P_1(x,D)\left(\frac{\varphi}{g}\right)\right)\right|.$$

Dans le cas présent, moyennant des conditions de croissance sur $p(x_1)$, et par des raisonnements tout-à-fait analogues à ceux développés jusqu'ici, cela se majore par

$$\sum_{i\in J}\frac{1}{4A_i}\left(\sum_{\frac{1}{2}d}\left\|e^{-p(x_1)}D^q\left(\alpha_i\frac{\varphi}{g}\right)\right\|_{L^2}^2+\sum_d\left\|\sqrt{p'(x_1)}\,e^{-p(x_1)}D^q\left(\alpha_i\frac{\varphi}{g}\right)\right\|_{L^2}^2\right)$$

(toujours moyennant certaines conditions de croissance sur $p(x_1)$) de sorte qu'au total, on obtient :

$$\frac{1}{4}\sum_{i\in J}\frac{1}{A_i}\left(\sum_{\frac{1}{2}d}\left\|e^{-p(x_1)}D^q\left(\alpha_i\frac{\varphi}{g}\right)\right\|_{L^2}^2+\sum_d\left\|\sqrt{p'(x_1)}\,e^{-p(x_1)}D^q\left(\alpha_i\frac{\varphi}{g}\right)\right\|_{L^2}^2\right)$$
$$\leqslant \operatorname{Re}(e^{-p(x_1)}P(x,D)\varphi,\ e^{-p(x_1)}P_1(x,D)\varphi)_{L^2}.$$

On pose alors $A(t)=8\sup A_i$, le sup étant calculé sur les $i\in J$ tels que $U_i\cap V_t\cap\Omega\neq\emptyset$; $A(t)$ est une fonction constante par morceaux, bornée sur tout intervalle borné ; on a alors :

$$2\left(\sum_{\frac{1}{2}d}\left\|\frac{e^{-p(x_1)}}{\sqrt{A(x_1)}}D^q\left(\alpha_i\frac{\varphi}{g}\right)\right\|_{L^2}^2+\sum_d\left\|\sqrt{\frac{p'(x_1)}{A(x_1)}}\,e^{-p(x_1)}D^q\left(\alpha_i\frac{\varphi}{g}\right)\right\|_{L^2}^2\right)$$
$$\leqslant \operatorname{Re}(e^{-p(x_1)}P(x,D)\varphi,\ e^{-p(x_1)}P_1(x,D)\varphi)_{L^2}.$$

Comme le 1er membre de cette inégalité majore, pour $p(x_1)$ convenablement croissant,

$$\sum_{\frac{1}{2}d}\left\|\frac{e^{-p(x_1)}}{\sqrt{A(x_1)}}D^q\varphi\right\|_{L^2}^2+\sum_d\left\|\sqrt{\frac{p'(x_1)}{A(x_1)}}\,e^{-p(x_1)}D^q\varphi\right\|_{L^2}^2,$$

il ne reste alors plus qu'à prendre $a(x_1)=1/A(x_1)$ et à imposer la condition :

$$\sqrt{p'(x_1)}\geqslant\sqrt{A(x_1)}\,\hat{h}(x_1),$$

où $\hat{h}$ est définie comme dans la preuve du th. 3.4.

Soulignons que l'intervention de la fonction $a(x_1)$ ne peut être évitée (du moins dans le cas général). Dans la seconde partie, nous allons rencontrer un phénomène analogue et la plus grande simplicité de la situation va nous permettre de mieux constater combien il tient à la nature même des choses.

SECONDE PARTIE

§ 1. Opérateurs différentiels sur la droite à coefficients opérateurs

Dans cette partie, t sera la variable réelle, D la dérivation d/dt, Z l'ensemble des entiers de tout signe. Nous utiliserons les dérivations (par rapport à t) d'ordre négatif. Sauf mention expresse du contraire, elles auront la signification suivante : si k est un entier >0, nous poserons $D^{-k}\varphi(t) = Y(t)^{*k} * \varphi$ ($\varphi \in \mathcal{D}$; $Y(t)$ est la fonction d'Heaviside); $D^{-k}\varphi$ n'appartient pas en général à $\mathcal{D}$; c'est la primitive d'ordre k de φ dont le support est limité à gauche; si φ a son support dans la demi-droite $t \leqslant a$ (a réel), alors dans l'ouvert $t > a$, $D^{-k}\varphi$ est un polynôme en t de degré $\leqslant k-1$.

Dans toute la suite, et sans que cela soit en général rappelé, $p(t)$ représentera une fonction *une fois continûment dérivable*, à valeurs *réelles*, vérifiant la condition suivante :

(C 1) *Il existe* $p_0 > 0$ *tel que* $p'(t) \geqslant p_0$ *pour tout* t *réel.*

Si E est un espace hilbertien, nous noterons généralement $(\ ,\ )_E$ le produit hermitien de E, $\|\ \|_E$ sa norme. Il pourra advenir que le dual fort de E ne soit pas canoniquement identifié à E, auquel cas il sera noté E'. Si F est un second espace hilbertien, $L(E; F)$ sera l'espace de Banach des opérateurs bornés de E dans F.

Nous aurons sans cesse à manipuler des fonctions et des distributions sur la droite à valeurs dans des espaces de Banach. Sur ce point, nous nous conformerons aux définitions et notations de L. Schwartz ([9] et [10]). En règle générale, les fonctions et distributions à valeurs vectorielles seront imprimées en caractères gras : $\mathbf{f}$, $\mathbf{T}$, etc. et si, par exemple, ces valeurs appartiennent à E, les espaces dont ce sont les éléments seront affectés de la mention (E) : $\mathcal{D}(E)$, $L^2(E)$, $\mathcal{D}'(E)$, etc. Un espace fréquemment utilisé sera $\mathcal{E}_t(L(E; F))$: celui des opérateurs bornés de E dans F, fonctions indéfiniment dérivables de t.

Quel que soit $k \in Z$, et quelle que soit $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$, $e^{-p(t)} D^k \boldsymbol{\varphi}$ appartient à $L^2(E)$ en vertu de (C 1). C'est évident si $k \geqslant 0$. Si $k < 0$, $D^k \boldsymbol{\varphi}$ est tempérée lorsque $t \to +\infty$ (et à support limité à gauche), alors que $\exp(-p(t))$ décroît plus vite que $\exp(-p_0 t)$.

LEMME 3.10. *Soit* $B(t) \in \mathcal{D}_t(L(E; E))$ *hermitien pour tout* t. *Si* $\varphi \in \mathcal{D}(E)$, *on a :*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,(e^{-p(t)} D^k [B(t) D\varphi],\ e^{-p(t)} D^k \varphi)_{L^2(E)} \\
&\quad = ([p'(t) B(t) + (k - \tfrac{1}{2}) B'(t)]\, e^{-p(t)} D^k \varphi,\ e^{-p(t)} D^k \varphi)_{L^2(E)} + \\
&\quad + \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=1}^{k-1} \binom{k}{h+1} \mathrm{Re}\,(B^{(h+1)}(t)\, e^{-p(t)} D^{k-h} \varphi,\ e^{-p(t)} D^k \varphi)_{L^2(E)} & \text{si } k \geqslant 0; \\ \displaystyle\sum_{h=1}^{-k} c_h^k\, \mathrm{Re}\,(e^{-p(t)} D^{-h} [B^{(h+1)}(t) D^k \varphi],\ e^{-p(t)} D^k \varphi)_{L^2(E)} & \text{si } k < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Les c_h^k *sont des entiers positifs ou négatifs, qui ne dépendent que de* h *et de* k.

Nous omettrons, au cours de la démonstration, les indices $L^2(E)$.

1° $k \geqslant 0$

Supposons d'abord $k = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
(e^{-p} B D\varphi,\ e^{-p}\varphi) &= -(\varphi,\ D[B e^{-2p} \varphi]) \\
&= 2(p' B e^{-p} \varphi,\ e^{-p}\varphi) - (B' e^{-p}\varphi,\ e^{-p}\varphi) - (e^{-p}\varphi,\ e^{-p} B D\varphi),
\end{aligned}$$

d'où :
$$2\,\mathrm{Re}\,(e^{-p} B D\varphi,\ e^{-p}\varphi) = ([2p' B - B']\, e^{-p}\varphi,\ e^{-p}\varphi)$$

ce qui constitue le résultat dans ce cas.

Raisonnons ensuite par récurrence : supposons le résultat vrai jusqu'à $k-1$ et prouvons-le pour k (supposé $\geqslant 1$). On peut écrire :

$$\begin{aligned}
&(e^{-p} D^k (B D\varphi),\ e^{-p} D^k \varphi) \\
&\quad = (e^{-p} D^{k-1} (B' D\varphi),\ e^{-p} D^k \varphi) + (e^{-p} D^{k-1} [B D (D\varphi)],\ e^{-p} D^{k-1} (D\varphi)).
\end{aligned}$$

Occupons-nous d'abord du 2e terme ; en vertu de la récurrence

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,(e^{-p} D^{k-1} [B D (D\varphi)],\ e^{-p} D^{k-1} (D\varphi)) \\
&= ([p' B + (k - \tfrac{3}{2}) B']\, e^{-p} D^k \varphi,\ e^{-p} D^k \varphi) + \sum_{h=1}^{k-2} \binom{k-1}{h+1} \mathrm{Re}\,(B^{(h+1)} e^{-p} D^{k-h} \varphi, e^{-p} D^k \varphi). \quad (1)
\end{aligned}$$

Passons ensuite au 1er terme. Par application directe de la formule de Leibniz, on voit qu'il est égal à

$$(e^{-p} B' D^k \varphi,\ e^{-p} D^k \varphi) + \sum_{h=1}^{k-1} \binom{k-1}{h} (e^{-p} B^{(h+1)} D^{k-h} \varphi,\ e^{-p} D^k \varphi).$$

En prenant la partie réelle de ceci et en l'ajoutant au second membre de (1), on obtient la formule cherchée.

2° $k \leqslant -1$

Posons $\mathbf{f} = D^k \boldsymbol{\varphi}$. Il est facile de démontrer l'égalité

$$D^k(BD\boldsymbol{\varphi}) = D(B\mathbf{f}) + (k-1)B'\mathbf{f} + \sum_{h=1}^{-k} c_h^k D^{-h}(B^{(h+1)}\mathbf{f}) \tag{2}$$

où les $c_h^k \in Z$ ne dépendent que de k et de h. D'autre part :

$$(e^{-p}D(B\mathbf{f}),\ e^{-p}\mathbf{f}) = 2(Bp'e^{-p}\mathbf{f},\ e^{-p}\mathbf{f}) - (e^{-p}\mathbf{f},\ e^{-p}BD\mathbf{f}),$$

et comme : $\quad (e^{-p}\mathbf{f},\ e^{-p}BD\mathbf{f}) = (e^{-p}\mathbf{f},\ e^{-p}D(B\mathbf{f})) - (e^{-p}B'\mathbf{f})\ e^{-p}\mathbf{f}),$

on a : $\quad \operatorname{Re}(e^{-p}D(B\mathbf{f}),\ e^{-p}\mathbf{f}) = ([Bp' + \tfrac{1}{2}B']e^{-p}\mathbf{f},\ e^{-p}\mathbf{f}).$

Alors, en multipliant les deux membres de (2) par e^{-p}, en faisant ensuite leur produit hermitien, dans $L^2(E)$, avec $e^{-p}\mathbf{f}$, et en prenant les parties réelles des résultats, on obtient la formule de l'énoncé. C.Q.F.D.

Il nous importe de prolonger les formules à des opérateurs $B(t)$ appartenant à des espaces plus « grands » que $\mathcal{D}_t(L(E;E))$, particulièrement aux $B(t) \in \mathcal{E}_t(L(E;E))$. Si $k \geqslant 0$, il n'y a pas de difficulté, car les $B^{(h_1)}(t)D^h h_2 \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$. Si $k < 0$, on peut énoncer :

Corollaire. *Soit $B(t) \in \mathcal{E}_t(L(E;E))$ hermitien. Si $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ et si $k<0$, on a :*

$$\operatorname{Re}(e^{-p(t)}D^k[B(t)D\boldsymbol{\varphi}],\ e^{-p(t)}D^k\boldsymbol{\varphi})_{L^2(E)}$$
$$= (-1)^k \int (D^k\{[p'(t)B(t) + (k-\tfrac{1}{2})B'(t)]e^{-2p(t)}D^k\boldsymbol{\varphi}\},\ \boldsymbol{\varphi})_E\,dt +$$
$$+ \sum_{h=1}^{-k} c_h^k(-1)^k \int (D^k\{e^{-2p(t)}D^{-h}[B^{(h+1)}(t)D^k\boldsymbol{\varphi}]\},\ \boldsymbol{\varphi})_E\,dt.$$

Dans la suite, si f et g sont deux fonctions réelles sur la droite, $f \geqslant g$ (resp. $f > g$) signifiera $f(t) \geqslant g(t)$ (resp. $f(t) > g(t)$) pour tout t. D'autre part, si $B(t) \in \mathcal{E}_t(L(E;E))$, nous dirons que $B(t)$ est hermitien, si, pour chaque t, l'opérateur $B(t)$ est hermitien.

Introduisons maintenant l'hypothèse suivante :

(H 1) *Il existe une fonction continue $b(t) > 0$ telle que*

$$\operatorname{Re}(B(t)u,\ u)_E \geqslant b(t)\,\|u\|_E^2 \quad \textit{pour tout } u \in E \textit{ et tout } t \textit{ réel.}$$

Lorsque $B(t)$ est hermitien, on peut remplacer $\operatorname{Re}(B(t)u, u)_E$ par $(B(t)u, u)_E$.

Proposition 3.1. *Supposons que $B(t) \in \mathcal{E}_t(L(E;E))$ soit hermitien et vérifie* (H 1). *Alors, quel que soit $k \in Z$, on peut trouver une fonction continue g_k telle qu'on ait, pour toute $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ et toute $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g_k$:*

1° $\sqrt{p'(t)\,b(t)}\,e^{-p(t)}D^k\varphi \in L^2(E)$;

2° $\operatorname{Re}\,(e^{-p(t)}D^k[B(t)\,D\varphi],\ e^{-p(t)}D^k\varphi)_{L^2(E)} \geqslant \frac{1}{2}\,\|\sqrt{p'(t)\,b(t)}\,e^{-p(t)}D^k\varphi\|^2_{L^2(E)}$.

Nous préciserons, au fur et à mesure des besoins de la démonstration, à quelles conditions de croissance il convient de soumettre g_k. Mais il est entendu que la première de ces conditions est indiquée par (C 1) : il existe $p_0 > 0$ tel que $g_k(t) \geqslant p_0$ pour tout t réel.

Nous omettrons, au cours de la preuve, le indices $L^2(E)$.

1° $k \geqslant 0$

Dans ce cas, la condition 1° de l'énoncé est banalement satisfaite. Supposons vérifiée l'hypothèse suivante :

(C 2) $2(2k+1)\,\|B'(t)\|_{L(E;\,E)} \leqslant b(t)\,g_k(t)$ *pour tout t réel.*

Alors :

$$([p'B + (k-\tfrac{1}{2})B']\varphi,\ \varphi) = \left(\left[\frac{B(t)}{b(t)} - \frac{(2k-1)\,B'(t)}{2\,b(t)\,p'(t)}\right]\sqrt{b(t)\,p'(t)}\,\varphi,\ \sqrt{b(t)\,p'(t)}\,\varphi\right).$$

Compte tenu de (H 1), le dernier membre majore

$$\|\sqrt{b\,p'}\,\varphi\|^2 - \left\|\frac{(2k-1)\,B'}{2\,b\,p'}\sqrt{b\,p'}\,\varphi\right\|\,\|\sqrt{b\,p'}\,\varphi\|,$$

d'où aussitôt, en appliquant (C 2) :

$$([p'B + (k-\tfrac{1}{2})B']\varphi,\ \varphi) \geqslant \tfrac{3}{4}\,\|\sqrt{b\,p'}\,\varphi\|^2. \tag{1}$$

Remplaçons, dans (1), φ par $e^{-p}D^k\varphi$. On obtient :

$$([p'B + (k-\tfrac{1}{2})B']\,e^{-p}D^k\varphi,\ e^{-p}D^k\varphi) \geqslant \tfrac{3}{4}\,\|\sqrt{b\,p'}\,e^{-p}D^k\varphi\|^2. \tag{2}$$

Ceci dit, considérons un terme $(e^{-p}B^{(h+1)}D^{k-h}\varphi,\ e^{-p}D^k\varphi)$, avec $1 \leqslant h \leqslant k-1$. Imposons la condition suivante :

(C 3) $4Mk\,\|B^{(h+1)}(t)\|_{L(E;\,E)} \leqslant \sqrt{b(t)\,p'(t)}$ *pour tout t et tout $h = 0, \ldots, k$, avec*

$$M = \sup_{0 \leqslant h \leqslant k} \binom{k}{h+1}.$$

Cette condition permet d'écrire :

$$\left|\left(\frac{B^{(h+1)}}{\sqrt{b\,p'}}\,e^{-p}D^{k-h}\varphi,\ \sqrt{b\,p'}\,e^{-p}D^k\varphi\right)\right| \leqslant \frac{1}{4Mk}\,\|e^{-p}D^{k-h}\varphi\|\,\|\sqrt{b\,p'}\,e^{-p}D^k\varphi\|. \tag{3}$$

Nous allons utiliser maintenant le lemme qui généralise le lemme 3.3 (et, à travers ce dernier, le lemme 1.4) :

LEMME 3.11. *Soient h, $k \in Z$, $h<k$. Soit une fonction réelle $p(t)$, une fois continûment dérivable, vérifiant* (C 1). *Alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$:*

$$\| \sqrt{p'(t)}\, e^{-p(t)} D^h \varphi \|_{L^2(E)} \leqslant \frac{1}{p_0^{k-h-1}} \left\| \frac{1}{\sqrt{p'(t)}}\, e^{-p(t)} D^k \varphi \right\|_{L^2(E)}.$$

La démonstration est essentiellement la même que celle des lemmes 3.3 et 1.4. Mais remarquons d'abord que, si h est <0, $\sqrt{p'}\, e^{-p} D^h \varphi \in L^2(E)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$. En effet :

$$\| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^h \varphi \|^2 = \int_a^\infty p'\, e^{-p} (e^{-p} \| D^h \varphi \|_E^2)\, dt$$

si φ a son support dans la demi-droite $t \geqslant a$. Or, comme $D^h \varphi$ est polynômiale au voisinage de $+\infty$ et que e^{-p} décroît plus vite que $e^{-p_0 t}$, il existe $B < +\infty$ tel que $\sup_{t \in R} (e^{-p(t)} \| D^h \varphi(t) \|_E^2) \leqslant B$. Comme d'autre part :

$$\int_a^\infty p'(u)\, e^{-p(u)}\, du = e^{-p(a)},$$

on a bien le résultat.

Ceci dit, on a : $\quad \operatorname{Re} (e^{-p} D \varphi,\ e^{-p} \varphi) = \| \sqrt{p'}\, e^{-p} \varphi \|^2.$

En remplaçant φ par $D^h \varphi$ ($h \in Z$ quelconque), on obtient :

$$\| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^h \varphi \| \leqslant \left\| \frac{1}{\sqrt{p'}}\, e^{-p} D^{h+1} \varphi \right\| \leqslant \frac{1}{p_0} \| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^{h+2} \varphi \|$$

d'où aussitôt le résultat en itérant ces inégalités.

Revenons à la démonstration de la prop. 3.1. Appliquons le lemme 3.11 au 2^e^ membre de l'inégalité (3), compte tenu de ce que h y est $\geqslant 1$. Si le nombre p_0 de (C 1) est supposé $\geqslant 1$, on a :

$$\| e^{-p} D^{k-h} \varphi \| \leqslant \left\| \frac{1}{\sqrt{p'}}\, e^{-p} D^k \varphi \right\| \leqslant \| \sqrt{b p'}\, e^{-p} D^k \varphi \|$$

pourvu que g_k vérifie :

(C 4) $g_k(t)\sqrt{b(t)} \geqslant 1$ *pour tout* t *réel.*

Alors (3) donne :

$$|(e^{-p} B^{(h+1)} D^{k-h} \varphi,\ e^{-p} D^k \varphi)| \leqslant \frac{1}{4Mk} \| \sqrt{bp'}\, e^{-p} D^k \varphi \|^2$$

et ceci est vrai pour tout $h=1, \ldots, k-1$. On a donc :

$$\sum_{h=1}^{k-1} \binom{k}{h+1} |\operatorname{Re}(B^{(h+1)} e^{-p} D^{k-h} \varphi,\ e^{-p} D^k \varphi)| \leqslant \tfrac{1}{4} \| \sqrt{bp'}\, e^{-p} D^k \varphi \|^2.$$

Alors la prop. 3.1, lorsque $k \geqslant 0$, découle du lemme 3.10 et de la majoration (2).

2° $k \leqslant -1$

Commençons par imposer la condition suivante :

(C′ 2) $\log b(t) \leqslant \int_0^t g_k(u)\, du$ *pour tout* t *réel.*

Prouvons qu'elle implique la propriété 1° de l'énoncé. Si $p' \geqslant g_k$, (C′ 2) implique $\log b \leqslant p - p(0)$, et donc $\sqrt{b} \leqslant C_0 e^{\frac{1}{2}p}$ (C_0 : constante positive), d'où :

$$\| \sqrt{bp'}\, e^{-p} D^k \varphi \|_E \leqslant C_0 \| \sqrt{p'}\, e^{-\frac{1}{2}p} D^k \varphi \|_E \leqslant \sqrt{2}\, C_0 \left\| \sqrt{\frac{p'}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}p} D^k \varphi \right\|_E.$$

$\frac{1}{2}p$ vérifie évidemment (C 1); nous avons vu, au début de la preuve du lemme 3.11, qu'alors $\sqrt{\frac{1}{2}p'}\, e^{-\frac{1}{2}p} D^k \varphi \in L^2(E)$ pour tout $k \in Z$ et toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$.

Imposons maintenant la condition :

(C′ 3) $4M|k| \| B^{(h+1)}(t) \|_{L(E;\,E)} \leqslant \sqrt{b(t) g_k(t)}$ *pour tout* t *et tout* $h=0, 1, \ldots, -k$, *où* $M = \sup_{0 \leqslant h \leqslant -k} |c_h^k|$.

On déduit d'abord de (C′ 3) que $B^{(h+1)} e^{-p} D^k \varphi \in L^2(E)$; en effet, à un facteur constant près, $\| B^{(h+1)} e^{-k} D^k \varphi \|_E \leqslant \| \sqrt{bp'}\, e^{-p} D^k \varphi \|_E$; or nous avons vu que

$$\sqrt{bp'}\, e^{-p} D^k \varphi \in L^2(E).$$

Ensuite, du lemme 3.11, résulte immédiatement que $e^{-p} D^{-h} [B^{(h+1)} D^k \varphi] \in L^2(E)$.

Imposons à $g_k(t)$ la condition supplémentaire suivante :

(C′ 4) $\log \| B(t) \|_{L(E;\,E)} \leqslant \frac{1}{2} \int_0^t g_k(u)\, du$ *pour tout* t *réel.*

Par le même raisonnement qui a suivi (C′ 2), on voit que (C′ 4) implique $\sqrt{p'}\, B e^{-p} D^k \varphi \in L^2(E)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$.

De tout cela, et, par prolongement, du lemme 3.10, on déduit :

$$\mathrm{Re}\,(e^{-p}D^k[BD\boldsymbol{\varphi}],\ e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}) = \left(\left[\sqrt{p'}\,B + (k-\tfrac{1}{2})\frac{B'}{\sqrt{p'}}\right] e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi},\ \sqrt{p'}\,e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}\right) +$$

$$+\sum_{h=1}^{-k} c_h^k\,\mathrm{Re}\,(e^{-p}D^{-h}[B^{(h+1)}D^k\boldsymbol{\varphi}],\ e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}). \qquad (4)$$

Ceci dit, par substitution de $e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}$ à $\boldsymbol{\varphi}$ dans la minoration (1), après y avoir transposé $\sqrt{p'}$, on obtient l'homologue de (2):

$$\left(\left[\sqrt{p'}\,B + (k-\tfrac{1}{2})\frac{B'}{\sqrt{p'}}\right] e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi},\ \sqrt{p'}\,e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}\right) \geqslant \tfrac{3}{4}\,\|\sqrt{bp'}\,e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}\|^2. \qquad (5)$$

Le lemme 3.11, convenablement prolongé, compte tenu de ce que $h \geqslant 1$, implique

$$\|\sqrt{p'}\,e^{-p}D^{-h}[B^{(h+1)}D^k\boldsymbol{\varphi}]\| \leqslant \left\|\frac{B^{(h+1)}}{\sqrt{p'}}\,e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}\right\| \qquad (\text{ici } p_0 \geqslant 1).$$

En appliquant alors (C′ 3), on voit que :

$$\|e^{-p}D^{-h}[B^{(h+1)}D^k\boldsymbol{\varphi}]\| \leqslant \frac{1}{4M|k|}\,\|\sqrt{bp'}\,e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}\|.$$

Si donc g_k vérifie (C 4), et si $p' \geqslant g_k$:

$$\begin{aligned}
&|(e^{-p}D^{-h}[B^{(h+1)}D^k\boldsymbol{\varphi}],\ e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi})| \\
&\qquad = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{p'b}}\,e^{-p}D^{-h}[B^{(h+1)}D^k\boldsymbol{\varphi}],\ \sqrt{p'b}\,e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}\right)\right| \\
&\qquad \leqslant \|\sqrt{p'}\,e^{-p}D^{-h}[B^{(h+1)}D^k\boldsymbol{\varphi}]\|\ \|\sqrt{p'b}\,e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}\| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{4M|k|}\,\|\sqrt{bp'}\,e^{-p}D^k\boldsymbol{\varphi}\|^2,
\end{aligned}$$

On conclut alors comme en 1°, en utilisant (4) et (5). C.Q.F.D.

Considérons un opérateur « intégro-différentiel »

$$P(t, D) = \sum_{r=-n}^{m} B_r(t)\,D^r, \quad m,\ n \in N,\ B_r \in \mathcal{E}_t(L(E\,;\,E)).$$

Corollaire. *Supposons que* $B_m(t)$ *soit hermitien et vérifie* (H 1). *Quel que soit* $k \in Z$, *il existe une fonction continue* $g_k > 0$, *telle qu'on ait, pour toute* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ *et toute fonction réelle* $p(t)$, *une fois continûment dérivable, vérifiant* $p' \geqslant g_k$ *:*

1° $\sqrt{p'(t)\,b(t)}\,e^{-p(t)}D^{k+m-1}\boldsymbol{\varphi}\in L^2(E)$; $e^{-p(t)}D^k[P(t,D)\boldsymbol{\varphi}]\in L^2(E)$;

2° $\operatorname{Re}(e^{-p(t)}D^k[P(t,D)\boldsymbol{\varphi}],\,e^{-p(t)}D^{k+m-1}\boldsymbol{\varphi})_{L^2(E)}\geqslant\frac{1}{4}\|\sqrt{p'(t)\,b(t)}\,e^{-p(t)}D^{k+m-1}\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(E)}$.

Nous laisserons au lecteur la preuve, très simple, de ce corollaire. Il est évident qu'outre aux conditions de la prop. 3.1 sur la croissance de g_k, il convient d'en ajouter une autre, qui tienne compte de la « croissance » des coefficients $B_r(t)$ pour $-n\leqslant r\leqslant m-1$. Le coefficient $\frac{1}{4}$, pas plus que le $\frac{1}{2}$ de la prop. 3.1, ne joue de rôle privilégié. N'importe quel nombre <1 aurait pu lui être substitué; mais il aurait fallu alors faire dépendre g_k du choix de ce nombre, sans autre effet, pour ce que nous avons en vue, que d'alourdir l'énoncé.

La proposition 3.1 et son corollaire ont une signification évidente de domination :

Soit $C(t)\in\mathcal{E}_t(L(E;E))$ quelconque; soit $\varepsilon>0$ arbitraire; imposons à $g_k(t)$ de vérifier :

$$\sqrt{g_k(t)\,b(t)}>1+\frac{1}{\varepsilon}\|C(t)\|_{L(E;\,E)}\quad\text{pour tout } t \text{ réel.}$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz au 1^er^ membre de l'inégalité du corollaire de la proposition 3.1, on voit que $D^kP(t,D)$ domine multiplicativement, dans $L(\mathcal{D}(E);L^2(E))$, l'opérateur $C(t)D^{k+m-1}$. On en déduit aussitôt que $D^kP(t,D)$ équidomine (au même sens) toute famille finie d'opérateurs intégro-différentiels, à coefficients dans $\mathcal{E}_t(L(E;E))$, d'ordre (éventuellement négatif) strictement inférieur au sien, c'est-à-dire d'ordre $<k+m$.

Ce fait s'apparente évidemment de façon très étroite à ce que nous avons rencontré dans la première partie de ce chapitre, et aussi dans le chapitre II. Ici comme là, la domination s'effectue par le véhicule d'une forme $\operatorname{Re}(e^{-p}P,\,e^{-p}Q)$; ici comme là, on peut prendre pour Q un opérateur qui (à un facteur, pouvant être un opérateur, positif près) peut être le dérivé de la partie principale de P (dérivé suivant une direction privilégiée).

Notre intention est d'exploiter les majorations que nous pouvons obtenir, dans un sens bien déterminé, susceptible de nous conduire à la solution de certains problèmes aux limites de type mixte. A cette fin, nous concluerons ce paragraphe 1 par deux majorations à peine différentes de celle de la prop. 3.1 et tirant comme elle leur possibilité de la domination de D^h par D^k $(h<k)$ suivant des bases de domination constituées par des $\exp(-p(t))$ (cette domination est une conséquence banale du lemme 3.11). Dans le paragraphe suivant, nous définirons et étudierons rapidement une suite d'espaces hilbertiens de distributions, qui doivent nous permettre d'interpréter utilement les résultats du paragraphe en cours.

Pour démontrér les inégalités que nous avons en vue, nous aurons besoin de divers lemmes.

LEMME 3.12. *Soit* $b(t) \in \mathcal{E}_t$ *une fonction* > 0. *Soit* $C(t)\, \mathcal{E}_t(L(E; E))$. *Pour chaque* $\varepsilon > 0$ *et chaque* $k \in Z$, *il existe une fonction continue* $g_{k,\varepsilon} > 0$ *telle qu'on ait, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ *et toute* $p(t)$ *vérifiant* $p' \geqslant g_{k,\varepsilon}$:

$$1^\circ \quad \sqrt{p'(t)\, b(t)}\, e^{-p(t)} D^k \varphi \in L^2(E);$$

$$2^\circ \quad \| e^{-p(t)} D^k [C(t)\varphi] \|_{L^2(E)} \leqslant \varepsilon \| \sqrt{p'(t)\, b(t)}\, e^{-p(t)} D^k \varphi \|_{L^2(E)}.$$

Pour 1°, lorsque $k < 0$, on raisonne comme on l'a fait dans la preuve de la prop. 3.1.

Passons donc à 2°. Le résultat est banal pour $k = 0$ puisqu'il suffit alors d'imposer $\| C(t) \|_{L(E;\, E)} \leqslant \varepsilon \sqrt{g_{k,\varepsilon}(t)\, b(t)}$ pour tout t. Supposons-le démontré pour k, et cela avec toute la généralité désirable : quels que soient ε, $C(t)$, $b(t)$. En omettant les indices $L^2(E)$, on peut écrire :

$$\| e^{-p} D^{k+1}(C\varphi) \| \leqslant \| e^{-p} D^k (C D \varphi) \| + \| e^{-p} D^k (C' \varphi) \|.$$

Puisque le résultat est vrai pour k, nous pouvons l'appliquer à $D\varphi$ (avec C et b), pour le 1^er terme, et à φ (avec C' à la place de C), pour le 2^e terme. On en déduit aussitôt :

$$\| e^{-p} D^{k+1}(C\varphi) \| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon \| \sqrt{p' b}\, e^{-p} D^{k+1} \varphi \| + \tfrac{1}{2}\varepsilon \| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^k \varphi \|.$$

Mais (lemme 3. 11) : $$\| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^k \varphi \| \leqslant \left\| \frac{1}{\sqrt{p'}} e^{-p} D^{k+1} \varphi \right\|.$$

En imposant la condition $g_{k,\varepsilon} \sqrt{b} \geqslant 1$, on obtient le résultat cherché pour $k+1$.

Remarquons qu'on peut imposer à $g_{k,\varepsilon}$ des conditions de croissance telles que si $p' \geqslant g_{k,\varepsilon}$, $e^{-p} D^k (C D^{-1} \varphi)$ et $e^{-p} D^{k-1} \varphi \in L^2(E)$ quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}(E)$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \| e^{-p} D^{k-1}(C\varphi) \| &\leqslant \| e^{-p} D^k (C D^{-1} \varphi) \| + \| e^{-p} D^{k-1} (C' D^{-1} \varphi) \| \\ &\leqslant \| e^{-p} D^k (C D^{-1} \varphi) \| + \frac{1}{p_0} \| e^{-p} D^k (C' D^{-1} \varphi) \|. \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le résultat pour k, à $D^{-1}\varphi$ (avec C' à la place de C dans le 2^e terme; on supposera $p_0 \geqslant 1$).

LEMME 3.13. *Soit* $C(t) \in \mathcal{E}_t(L(E; E))$. *Quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction* $g_\varepsilon > 0$ *telle qu'on ait, pour tout* $k \in Z$, *toute* $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ *et toute* $p(t)$ *vérifiant* $p' \geqslant g_\varepsilon$:

$$1^\circ \quad C(t) \sqrt{p'(t)}\, e^{-p(t)} D^k \varphi \in L^2(E);$$

$$2^\circ \quad \| \sqrt{p'}\, C(t)\, e^{-p} D^k \varphi \|_{L^2(E)} \leqslant \varepsilon \| e^{-p} D^{k+1} \varphi \|_{L^2(E)}.$$

Soulignons le fait que la fonction g_ε est indépendante de k ! On a :

$$\left\| \sqrt{p'}\, e^{-p}\, C\, \boldsymbol{\varphi} \right\| \leqslant \left\| \frac{1}{\sqrt{p'}}\, e^{-p}\, D\,(C\, \boldsymbol{\varphi}) \right\| \leqslant \left\| \frac{C'}{\sqrt{p'}}\, e^{-p}\, \boldsymbol{\varphi} \right\| + \left\| \frac{C}{\sqrt{p'}}\, e^{-p}\, D\, \boldsymbol{\varphi} \right\|.$$

Imposons les deux conditions suivantes :

$$\|C(t)\|_{L(E;\,E)} \leqslant \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \sqrt{g_\varepsilon(t)}, \qquad \|C'(t)\|_{L(E;\,E)} \leqslant \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\, g_\varepsilon(t) \quad \text{pour tout } t.$$

Elles entraînent : $\left\| \sqrt{p'}\, e^{-p}\, C\, \boldsymbol{\varphi} \right\| \leqslant \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \left(\left\| \sqrt{p'}\, e^{-p}\, \boldsymbol{\varphi} \right\| + \left\| e^{-p}\, D\, \boldsymbol{\varphi} \right\| \right).$

Mais (lemme 3.11) : $$\left\| \sqrt{p'}\, e^{-p}\, \boldsymbol{\varphi} \right\| \leqslant \left\| \frac{1}{\sqrt{p'}}\, e^{-p}\, D\, \boldsymbol{\varphi} \right\|,$$

d'où, si $g_\varepsilon \geqslant 1$: $\left\| \sqrt{p'}\, C\, e^{-p}\, \boldsymbol{\varphi} \right\| \leqslant \varepsilon \left\| e^{-p}\, D\, \boldsymbol{\varphi} \right\|$ pour toute $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$. (1)

Imposons alors la condition suivante :

$$2 \log \|C(t)\|_{L(E;\,E)} \leqslant \int_0^t g_\varepsilon(u)\, du \quad \text{pour tout } t.$$

Si $p' \geqslant g_\varepsilon$, on aura $\|C(t)\|_{L(E;\,E)} \leqslant C_0\, e^{\frac{1}{2} p}$ $(C_0 < +\infty)$, et donc, pour tout $k \in Z$ et toute $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$:

$$\left\| \sqrt{p'}\, e^{-p}\, C(t)\, D^k\, \boldsymbol{\varphi} \right\|_E \leqslant \sqrt{2}\, C_0 \left\| \sqrt{\frac{p'}{2}}\, e^{-\frac{1}{2} p}\, D^k\, \boldsymbol{\varphi} \right\|_E \quad \text{pour toute } t.$$

En vertu de (C 1), le 2e membre de cette inégalité appartient à $L^2(E)$, donc le 1er, ce qui prouve 1°, mais de plus, nous autorise à remplacer $\boldsymbol{\varphi}$ par $D^k\, \boldsymbol{\varphi}$ dans (1), ce qui est exactement ce que nous voulions prouver.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.2. *Supposons que $B(t) \in \mathcal{E}_t(L(E;\, E))$ soit hermitien et vérifie* (H 1). *Pour tout $k \in Z$, on peut trouver une fonction continue $g_k > 0$ telle qu'on ait, pour toute $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ et toute $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g_k$:*

1° $\sqrt{p'(t)\, b(t)}\, e^{-p(t)}\, D^k\, \boldsymbol{\varphi} \in L^2(E)$;

2° $\operatorname{Re}\left(e^{-p(t)}\, D^k\, [B(t)\, \boldsymbol{\varphi}],\ e^{-p(t)}\, D^{k+1}\, \boldsymbol{\varphi}\right)_{L^2(E)} \geqslant \tfrac{1}{4} \left\| \sqrt{p'(t)\, b(t)}\, e^{-p(t)}\, D^k\, \boldsymbol{\varphi} \right\|^2_{L^2(E)}.$

Remarquons que, pour $k=0$ et avec $\frac{1}{2}$ au lieu de $\frac{1}{4}$ en facteur, le résultat est énoncé par la prop. 3.1. Cette question de facteur $> \frac{1}{4}$ a son importance, car nous allons raisonner par récurrence sur k, et prouver ceci :

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in Z$, il existe $g_{k,\varepsilon}$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ et tout $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g_{k,\varepsilon}$, on ait :

$$\operatorname{Re}\,(e^{-p} D^k (B\varphi), e^{-p} D^{k+1}\varphi)_{L^2(E)} \geqslant (\tfrac{1}{2} - |k|\varepsilon)\,\|\sqrt{p' b}\, e^{-p} D^k \varphi\|^2_{L^2(E)} \tag{1}$$

Dans la suite, nous omettrons les indices $L^2(E)$. Nous supposerons ce résultat vrai pour k; nous désirons alors montrer qu'on peut trouver $g_{k-1,\varepsilon}$ et $g_{k+1,\varepsilon}$ donnant lieu au résultat homologue pour $k-1$ et $k+1$ respectivement. Mais il est clair qu'il suffira de prouver l'existence de $g_{k+1,\varepsilon}$ pour $k \geqslant 0$ et celle de $g_{k-1,\varepsilon}$ pour $k \leqslant 0$.

1° $k \geqslant 0$

Remplaçons, dans (1), φ par $D\varphi$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}(e^{-p} D^{k+1}(B\varphi),\ e^{-p} D^{k+2}\varphi) = (e^{-p} D^k (B D\varphi),\ e^{-p} D^{k+2}\varphi) + \\ + (e^{-p} D^k (B'\varphi),\ e^{-p} D^{k+2}\varphi).\end{aligned} \tag{2}$$

Le 2e terme du second membre est égal à

$$-(e^{-p} D^{k+1}(B'\varphi),\ e^{-p} D^{k+1}\varphi) + 2\,(p' e^{-p} D^k (B'\varphi),\ e^{-p} D^{k+1}\varphi). \tag{3}$$

Si nous supposons $p' b \geqslant 1$, on a d'abord :

$$|(e^{-p} D^{k+1}(B'\varphi),\ e^{-p} D^{k+1}\varphi)| \leqslant \|e^{-p} D^{k+1}(B'\varphi)\|\ \|\sqrt{p' b}\, e^{-p} D^{k+1}\varphi\|.$$

D'après le lemme 3.12, il existe $g_{1;k,\varepsilon}$ continue > 0 telle que $p' \geqslant g_{1;k,\varepsilon}$ implique, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$:

$$\|e^{-p} D^{k+1}(B'\varphi)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \|\sqrt{p' b}\, e^{-p} D^{k+1}\varphi\|.$$

Donc :

$$|(e^{-p} D^{k+1}(B'\varphi),\ e^{-p} D^{k+1}\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \|\sqrt{p' b}\, e^{-p} D^{k+1}\varphi\|^2. \tag{4}$$

D'autre part :

$$|(p' e^{-p} D^k (B'\varphi),\ e^{-p} D^{k+1}\varphi)| \leqslant \left\|\sqrt{\frac{p'}{b}}\, e^{-p} D^k (B'\varphi)\right\|\ \|\sqrt{p' b}\, e^{-p} D^{k+1}\varphi\|.$$

Appliquons alors le lemme 3.13, avec $C(t) = 1/b(t)$: il existe $g_{2;\varepsilon}$ telle que si $p' \geqslant g_{2;\varepsilon}$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(E)$:

$$\left\|\sqrt{\frac{p'}{b}}\, e^{-p} D^k (B'\varphi)\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \|e^{-p} D^{k+1}(B'\varphi)\|.$$

Appliquons ensuite le lemme 3.12 au second membre : il existe $g_{2;k}$ telle que, si $p' \geqslant g_{2;k}$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(E)$:

$$\| e^{-p} D^{k+1} (B' \boldsymbol{\varphi}) \| \leqslant \| \sqrt{p' b}\, e^{-p} D^{k+1} \boldsymbol{\varphi} \|.$$

Si donc nous posons $g_{2;\,k,\,\varepsilon} = \sup (g_{2;\,\varepsilon},\ g_{2;\,k})$, on aura :

$$| (p' e^{-p} D^k (B' \boldsymbol{\varphi}),\ e^{-p} D^{k+1} \boldsymbol{\varphi}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \| \sqrt{p' b}\, e^{-p} D^{k+1} \boldsymbol{\varphi} \|^2 \tag{5}$$

pour toute $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ et toute $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g_{2;\,k,\,\varepsilon}$. Posons enfin

$$g_{k+1,\,\varepsilon} = \sup (g_{1;\,k,\,\varepsilon},\ g_{2;\,k,\,\varepsilon},\ g_{k,\,\varepsilon}).$$

En faisant la conjonction de (2), (3), (4), (5), on voit que l'on a :

$$\begin{aligned} | (e^{-p} D^{k+1} (B \boldsymbol{\varphi}),\ e^{-p} D^{k+2} \boldsymbol{\varphi}) - (e^{-p} D^k (B D \boldsymbol{\varphi}),\ e^{-p} D^{k+2} \boldsymbol{\varphi}) | & \\ \leqslant \varepsilon \| \sqrt{p' b}\, e^{-p} D^{k+1} \boldsymbol{\varphi} \|^2 & \qquad (6) \end{aligned}$$

pour toute $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ et toute $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g_{k+1,\,\varepsilon}$. Puisque $g_{k+1,\,\varepsilon} \geqslant g_{k,\,\varepsilon}$, on aura, pour ces $p(t)$ et ces $\boldsymbol{\varphi}$, d'après (1) appliqué à $D \boldsymbol{\varphi}$:

$$\operatorname{Re} (e^{-p} D^k (B D \boldsymbol{\varphi}),\ e^{-p} D^{k+2} \boldsymbol{\varphi}) \geqslant (\tfrac{1}{2} - |k| \varepsilon) \| \sqrt{p' b}\, e^{-p} D^{k+1} \boldsymbol{\varphi} \|^2.$$

En combinant (6) avec ceci, on obtient le résultat voulu.

2° $k \leqslant 0$

Moyennant une condition de croissance sur $p(t)$, facile à préciser, on peut substituer $D^{-1} \boldsymbol{\varphi}$ à $\boldsymbol{\varphi}$ dans (1). La formule $B D^{-1} \boldsymbol{\varphi} = D^{-1} (B \boldsymbol{\varphi}) - D^{-1} (B' D^{-1} \boldsymbol{\varphi})$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & (e^{-p} D^{k-1} (B \boldsymbol{\varphi}),\ e^{-p} D^k \boldsymbol{\varphi}) \\ & \qquad = (e^{-p} D^k (B D^{-1} \boldsymbol{\varphi}),\ e^{-p} D^k \boldsymbol{\varphi}) + (e^{-p} D^{k-1} (B D^{-1} \boldsymbol{\varphi}),\ e^{-p} D^k \boldsymbol{\varphi}). \end{aligned}$$

Le 2ᵉ terme du second membre est égal à :

$$- (e^{-p} D^k (B' D^{-1} \boldsymbol{\varphi}),\ e^{-p} D^{k-1} \boldsymbol{\varphi}) + 2 (p' e^{-p} D^{k-1} (B' D^{-1} \boldsymbol{\varphi}),\ e^{-p} D^{k-1} \boldsymbol{\varphi}).$$

Bien entendu, pour que ces diverses expressions aient un sens, il convient d'imposer à $p(t)$ (ou à $g_{k-1,\,\varepsilon}$) des conditions de croissance idoines. Ceci fait, on raisonne exactement comme en 1°, en se basant sur les lemmes 3.11, 3.12, 3.13.

Le résultat de l'énoncé decoule banalement de (1), où l'on aura choisi $\varepsilon = 1/(4 |k|)$.

Pour terminer, démontrons la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3. *Supposons que $B(t) \in \mathcal{E}_t(L(E;E))$ vérifie* (H 1). *Alors, pour tout $k \in Z$, il existe une fonction continue $g_k > 0$ telle qu'on ait, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ et toute fonction $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g_k$:*

1° $\sqrt{b(t)}\, e^{-p(t)} D^k \varphi \in L^2(E)$;

2° $\operatorname{Re}(e^{-p(t)} D^k [B(t)\varphi],\ e^{-p(t)} D^k \varphi)_{L^2(E)} \geqslant \frac{1}{2} \| \sqrt{b(t)}\, e^{-p(t)} D^k \varphi \|^2_{L^2(E)}$.

La fonction $b(t)$ est celle définie par (H 1). Soulignons le fait que $B(t)$, dans cet énoncé, ne doit pas nécessairement être hermitien.

Omettons les indices $L^2(E)$; (H 1) implique :

$$\operatorname{Re}(B e^{-p} D^k \varphi,\ e^{-p} D^k \varphi) \geqslant \| \sqrt{b(t)}\, e^{-p(t)} D^k \varphi \|^2$$

du moins si k est $\geqslant 0$, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ et toute fonction $p(t)$ réelle, une fois continûment dérivable, vérifiant (C 1).

Si nous imposons la condition :

$$2 \log \| B(t) \|_{L(E;E)} \leqslant \int_0^t g_k(u)\, du \quad \textit{pour tout } t,$$

et si $p' \geqslant g_k$, l'inégalité précédente sera valable aussi pour $k < 0$. De plus, comme $b(t) \leqslant \| B(t) \|_{L(E;E)}$ pour tout t, la première assertion de l'énoncé s'ensuivra aussi.

Tout revient alors à montrer que lorsqu'on commute $B(t)$ et D^k, la quantité supplémentaire qui s'introduit peut être majorée, en valeur absolue, par

$$\tfrac{1}{2} \| \sqrt{b(t)}\, e^{-p(t)} D^k \varphi \|^2.$$

Cela résulte de la domination de D^h par D^k pour $h < k$.

1° $k \geqslant 0$

On a :
$$D^k(B\varphi) = B D^k \varphi + \sum_{h=1}^{k} \binom{k}{h} B^{(h)} D^{k-h} \varphi.$$

Supposons satisfaite la condition :

$$4 M k \| B^{(h)}(t) \|_{L(E;E)} \leqslant \sqrt{b(t)\, g_k(t)} \quad \textit{pour tout } t \textit{ et tout } 1 \leqslant h \leqslant k,$$

où $M = \sup_{1 \leqslant h \leqslant k} \binom{k}{h}$.

Alors, si $p' \geqslant g_k$ (en supposant $\geqslant 1$ le nombre p_0 de la condition (C 1)) :

$$\binom{k}{h} |(e^{-p} B^{(h)} D^{k-h} \varphi, e^{-p} D^k \varphi)| = \binom{k}{h} \left| \left(e^{-p} \frac{B^{(h)}}{\sqrt{p' b}} \sqrt{p'} D^{k-h} \varphi, \sqrt{b}\, e^{-p} D^k \varphi \right) \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{4k} \| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^{k-h} \varphi \| \, \| \sqrt{b}\, e^{-p} D^k \varphi \|$$

$$\leqslant \frac{1}{4k} \left\| \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{p' b}} e^{-p} D^k \varphi \right\| \, \| \sqrt{b}\, e^{-p} D^k \varphi \| \cdot$$

Si donc nous imposons : $\qquad g_k(t)\, b(t) \geqslant 1$ *pour tout* t,

alors, si $p' \geqslant g_k$, $\qquad \binom{k}{h} |(e^{-p} B^{(h)} D^{k-h} \varphi, e^{-p} D^k \varphi)| \leqslant \frac{1}{4k} \| \sqrt{b}\, e^{-p} D^k \varphi \|^2$

et donc :

$$|(e^{-p} D^k [B \varphi], e^{-p} D^k \varphi) - (e^{-p} B D^k \varphi, e^{-p} D^k \varphi)| \leqslant \tfrac{1}{4} \| \sqrt{b}\, e^{-p} D^k \varphi \|^2$$

ce qui, compte tenu de la majoration du début, entraîne le résultat dans le cas considéré, i.e. pour $k \geqslant 0$.

2° $k < 0$

Il existe des entiers $d_h^k \in Z$ (ne dépendant que de k et h) tels que

$$D^k (B \varphi) = B D^k \varphi + \sum_{h=1}^{-k} d_h^k D^{-h} [B^{(h)} D^k \varphi].$$

On a :

$$|(e^{-p} D^{-h} [B^{(h)} D^k \varphi], e^{-p} D^k \varphi)| = \left| (e^{-p} \frac{1}{\sqrt{p' b}} \sqrt{p'} D^{-h} [B^{(h)} D^k \varphi], e^{-p} \sqrt{b} D^k \varphi) \right|.$$

Si donc $b g_k \geqslant 1$, cette quantité est majorée par :

$$\| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^{-h} [B^{(h)} D^k \varphi] \| \cdot \| \sqrt{b}\, e^{-p} D^k \varphi \|.$$

Or, en vertu de (C 1) (où $p_0 \geqslant 1$), puisque $h \geqslant 1$:

$$\| \sqrt{p'}\, e^{-p} D^{-h} [B^{(h)} D^k \varphi] \| \leqslant \left\| e^{-p} \frac{B^{(h)}}{\sqrt{p' b}} \sqrt{b} D^k \varphi \right\|.$$

Imposons enfin la condition suivante :

$$4 M |k| \, \| B^{(h)}(t) \|_{L(E; E)} \leqslant \sqrt{b(t)\, g_k(t)} \quad \textit{pour tout } t \textit{ et tout } 1 \leqslant h \leqslant -k,$$

où $M = \sup\limits_{1 \leqslant h \leqslant -k} |d_h^k|$.

D'après ce qui précède, elle entraîne :

$$|d_h^k(e^{-p} D^{-h} [B^{(h)} D^k \varphi], e^{-h} D^k \varphi)| \leqslant \frac{1}{4|k|} \| \sqrt{b}\, e^{-p} D^k \varphi \|^2.$$

On conclut comme il est indiqué en 1°.

§ 2. Les espaces $\mathcal{D}^k(q; E)$

Soit $k \in Z$, $k < 0$. Convenons de définir, dans le groupement $e^{p(t)} D^k$, où $p' > 0$, l'opérateur D^k par $D^k \varphi(t) = (-Y(-t))^* (-Y(-t))^{*(-k)} \ast \varphi(t)$, $\varphi \in \mathcal{D}(E)$. Nous lui laisserons le sens antérieurement défini, c'est-à-dire $Y^{*(-k)} \ast$, dans le groupement $e^{-p} D^k$. Avec cette convention, remarquons que si $p(t)$ vérifie la condition (C 1) :

(C 1) *Il existe $p_0 > 0$ tel que $p'(t) \geqslant p_0$ pour tout t;*

alors $e^{-p} D^k \varphi$ et $e^p D^k \varphi$ appartiennent à $L^2(E)$ quels que soient $k \in Z$ et $\varphi \in \mathcal{D}(E)$. Ceci nous autorise à poser la définition suivante :

Définition 3.1. *Soient un espace hilbertien quelconque E, $k \in Z$ et une fonction $q(t)$ réelle, une fois continûment dérivable, vérifiant la condition :*

(C′ 1) *Il existe $p_0 > 0$ tel que $|q'(t)| \geqslant p_0$ pour tout t.*

Nous désignerons par $\mathcal{D}^k(q; E)$ l'espace hilbertien, obtenu en complétant $\mathcal{D}(E)$ muni de la structure pré-hilbertienne séparée définie par le produit hermitien :

$$(e^{-q} D^k \varphi, e^{-q} D^k \psi)_{L^2(E)}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(E).$$

Remarquons que $q'(t)$ garde le même signe sur la droite entière; dans la déf. 3.1, $e^{-q} D^k$ a la signification précisée au début (avec $p' = |q'|$).

Nous noterons $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{E;q,k}$ et $\|\mathbf{u}\|_{E;q,k}$ respectivement le produit hermitien et la norme dans $\mathcal{D}^k(q; E)$ ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}^k(q; E)$). Si $\varphi \in \mathcal{D}(E)$, $\|\varphi\|_{E;q,k} = \|e^{-q} D^k \varphi\|_{L^2(E)}$.

Proposition 3.4. *Soient deux entiers h, $k \in Z$, $h \leqslant k$. Si $q(t)$ vérifie (C 1), $\mathcal{D}^k(q; E)$ est plongé continûment dans $\mathcal{D}^h(q; E)$ et on a, pour toute $\mathbf{f} \in \mathcal{D}^k(q; E)$:*

$$\|\mathbf{f}\|_{E;q,h} \leqslant \sup_{t \in R} \frac{1}{|q'(t)|^{k-h}} \|\mathbf{f}\|_{E;q,k}.$$

Ceci est, à peu de choses près, un énoncé équivalent au lemme 3.11. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(E)$,

$$\operatorname{Re}(e^{-q} D \varphi, e^{-q} \varphi)_{L^2(E)} = \int q' \|e^{-q} \varphi\|_E^2 \, dt,$$

d'où aussitôt le résultat, lorsque $h=0$, $k=1$ et $\varphi \in \mathcal{D}(E)$. On peut cependant remplacer φ par $D^h \varphi$, $h \in Z$ quelconque, puisque $e^{-q} D^h \varphi \in L^2(E)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$. On obtient ainsi le résultat pour $h \in Z$ quelconque, $k=h+1$, mais ensuite il suffit de l'itérer et de le prolonger pour obtenir le résultat général.

COROLLAIRE. *Pour tout $k \in Z$ et toute fonction $q(t)$ vérifiant* (C′ 1), $\mathcal{D}^k(q; E)$ *est plongé continûment dans $\mathcal{D}'(E)$: c'est un espace de distributions à valeurs dans E.*

D'après la prop. 3.4, il suffit de prouver le résultat pour $k \leqslant 0$. Or on a, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(E)$:

$$\begin{aligned} |(\varphi, \psi)_{L^2(E)}| &= |(e^{-q} D^k \varphi, \; e^{+q} D^{-k} \psi)_{L^2(E)}| \\ &\leqslant \|e^q D^{-k} \varphi\|_{L^2(E)} \|e^{-q} D^k \psi\|_{L^2(E)} \\ &\leqslant \sup_{t \in K} e^{q(t)} \|D^{-k} \varphi\|_{L^2(E)} \|e^{-q} D^k \psi\|_{L^2(E)} \end{aligned}$$

où K est le support de φ. Ceci prouve que $\mathcal{D}(E)$, muni de la topologie induite par $\mathcal{D}^k(q; E)$, est plongé continûment dans $\mathcal{D}'(E)$, d'où facilement le résultat.

Introduisons le dual fort E' de E et notons $\langle \, , \, \rangle$ le crochet de la dualité entre E et E', et J l'anti-isométrie canonique de E sur E'.

Jusqu'à nouvel ordre, nous supposerons $k \geqslant 0$.

Notons $\mathcal{D}'^k(q; E')$ l'espace des distributions $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(E')$ qui peuvent se mettre sous la forme :

$$\mathbf{T} = (-1)^k D^k (e^{-2q} D^k \mathbf{v}'), \quad \mathbf{v}' \in \mathcal{D}^k(q; E'). \tag{1}$$

Les dérivations doivent s'entendre au sens des distributions.

Comme $\mathcal{D}^k(q; E)$ est plongé continûment dans $\mathcal{D}'(E')$ (coroll. de la prop. 3.4), $\mathbf{T}$ est bien définie par (1).

L'élément $\mathbf{v}'$ est unique; car si on avait $D^k(e^{-2q} D^k \mathbf{v}') = 0$, il existerait un polynôme $\mathbf{P}(t)$, à coefficients dans E', de degré $\leqslant k-1$, tel que $e^{-q} D^k \mathbf{v}' = e^q \mathbf{P}$; mais $e^{-q} D^k \mathbf{v}' \in L^2(E')$, alors que $e^q \mathbf{P}$ ne peut appartenir à $L^2(E')$, à cause de (C′ 1), que si $\mathbf{P}=0$, ce qui entraîne $\mathbf{v}'=0$.

Par définition, la norme de $\mathbf{T}$ dans $\mathcal{D}'^k(q; E')$ sera égale à $\|\mathbf{v}'\|_{E'; q, k}$.

D'autre part, comme $\mathcal{D}(E)$ est dense dans $\mathcal{D}^k(q; E)$, il existe une injection canonique du dual fort de $\mathcal{D}^k(q; E)$ dans $\mathcal{D}'(E')$.

PROPOSITION 3.5. *Soit k un entier $\geqslant 0$. L'injection canonique du dual fort de $\mathcal{D}^k(q; E)$ dans $\mathcal{D}'(E')$ est une isométrie de ce dual fort sur $\mathcal{D}'^k(q; E')$.*

$\varphi(t) \to J\varphi(t)$ (J : anti-isométrie canonique de E sur E') est une anti-isométrie de $\mathcal{D}(E)$ sur $\mathcal{D}(E')$ pour les normes respectives de $\mathcal{D}^k(q; E)$ et de $\mathcal{D}^k(q; E')$; elle se prolonge en une anti-isométrie, notée encore J, de $\mathcal{D}^k(q; E)$ sur $\mathcal{D}^k(q; E')$. Notons J_1 l'anti-isométrie du dual fort de $\mathcal{D}^k(q; E)$ sur $\mathcal{D}^k(q; E)$ lui-même, et posons $J_2 = J \circ J_1$: J_2 est une isométrie du dual fort de $\mathcal{D}^k(q; E)$ sur $\mathcal{D}^k(q; E')$. La composée de J_2 par $(-1)^k D^k(e^{-2q} D^k)$ est, comme on le vérifie facilement, l'injection canonique du dual fort de $\mathcal{D}^k(q; E)$ dans $\mathcal{D}'(E')$. Il résulte de cela, et de la définition de la norme dans $\mathcal{D}'^k(q; E')$, que c'est une isométrie sur $\mathcal{D}'^k(q; E')$.

La proposition 3.5, conformément à la coutume, permet d'identifier le dual fort de $\mathcal{D}^k(q; E)$ à $\mathcal{D}'^k(q; E')$. Mais, d'après le corollaire de la prop. 3.4, $\mathcal{D}^{-k}(-q; E')$ est plongé lui aussi dans $\mathcal{D}'(E')$. Ceci nous autorise à énoncer :

PROPOSITION 3.6. *Soit k un entier $\geqslant 0$; $\mathcal{D}'^k(q; E') = \mathcal{D}^{-k}(-q; E')$ (l'égalité valant aussi pour les structures hilbertiennes).*

Il suffit de prouver que les normes induites sur $\mathcal{D}(E')$ par les deux espaces considérés coïncident.

Si $\mathbf{v}' \in \mathcal{D}^k(q; E')$ et $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'^k(q; E')$ sont liés par l'égalité (1), convenons de poser $\mathbf{v}' = J_{q,k}\mathbf{T}$.

Soit alors $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E')$. Posons $\mathbf{g} = e^{-q} D^k(J_{k,q}\boldsymbol{\varphi})$; on a

$$\mathbf{g} \in L^2(E') \text{ et } \boldsymbol{\varphi} = (-1)^k D^k(e^{-q}\mathbf{g}).$$

La norme de $\boldsymbol{\varphi}$, dans $\mathcal{D}'^k(q; E')$, est égale à $\|\mathbf{g}\|_{L^2(E')}$. Supposons par exemple $q' \geqslant p_0$. En attribuant (conformément à nos conventions) à $D^{-k}\boldsymbol{\varphi}$ la signification $(-Y(-t))^{*k} * \boldsymbol{\varphi}$, on peut écrire $\mathbf{g} = e^q[(-1)^k D^{-k}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{P}_{k-1}]$, où $\mathbf{P}_{k-1}$ est un polynôme de degré $\leqslant k-1$, à coefficients dans E'; $e^q D^{-k}\boldsymbol{\varphi} \in L^2(E')$ et $\mathbf{g} \in L^2(E')$; mais $e^q \mathbf{P}_{k-1} \in L^2(E')$ exige $\mathbf{P}_{k-1} = 0$, d'où : $\mathbf{g} = e^q[(-1)^k D^{-k}\boldsymbol{\varphi}]$, et par conséquent :

$$\|e^q D^{-k}\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(E')} = \|\mathbf{g}\|_{L^2(E')}.$$

Le 1er membre est la norme de $\boldsymbol{\varphi}$ dans $\mathcal{D}^{-k}(-q; E')$, d'où le résultat.

COROLLAIRE. *Soit $k \in Z$ quelconque. L'injection du dual fort de $\mathcal{D}^k(q; E)$ dans $\mathcal{D}'(E')$ est une isométrie de ce dual sur $\mathcal{D}^{-k}(-q; E')$.*

Pour $k \geqslant 0$, cela résulte des propositions 3.5 et 3.6. Mais on peut substituer E' à E et $-q$ à q; donc (pour $k \geqslant 0$) le dual fort de $\mathcal{D}^k(-q; E')$ est isométrique à $\mathcal{D}^{-k}(q; E)$; la transposition de cette isométrie donne celle qu'on cherche.

Dorénavant, nous identifierons toujours le dual fort de $\mathcal{D}^k(q; E)$ à $\mathcal{D}^{-k}(-q; E')$.

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les éléments de $\mathcal{D}^k(q; E)$, quel que soit $k \in Z$.

1° *Caractérisation des éléments de* $\mathcal{D}^k(q; E)$ $(k \geqslant 0)$

La caractérisation résulte de la prop. 3.4 : $\mathcal{D}^k(q; E)$ est l'espace des (classes de) fonctions $\mathbf{u}(t)$, définies et mesurables sur la droite réelle, à valeurs dans E, telles que $e^{-q} D^h \mathbf{u}(t) \in L^2(E)$ pour tout $0 \leqslant h \leqslant k$ (les dérivations D^h doivent s'entendre au sens des distributions en t à valeurs dans E).

2° *Caractérisation des éléments de* $\mathcal{D}^{-k}(q; E)$ $(k \geqslant 0)$

Pour que $\mathbf{T} \in \mathcal{D}^{-k}(q; E)$ (à priori, $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(E)$), il faut et il suffit qu'existent $(k+1)$ fonctions $\mathbf{g}_h \in L^2(E)$ telles que :

$$\mathbf{T} = e^q \mathbf{g}_0 + D(e^q \mathbf{g}_1) + \cdots + D^k(e^q \mathbf{g}_k).$$

Démontrons cette assertion. Pour que $\mathbf{T}' \in \mathcal{D}'(E')$ soit un élément de $\mathcal{D}^{-k}(-q; E')$, il faut et il suffit qu'existent $(k+1)$ fonctions $\mathbf{g}'_h \in L^2(E')$ telles que

$$\mathbf{T}' = e^{-q} \mathbf{g}'_0 + \cdots + D^k(e^{-q} \mathbf{g}'_k).$$

Que ceci soit suffisant est évident (compte tenu des identifications effectuées); que ce soit nécessaire résulte de la définition de $\mathcal{D}'^k(q; E')$ et de la prop. 3.6. Notre assertion s'obtient alors par échange de E et de E'.

Voici maintenant des propriétés tout-à-fait élémentaires des espaces $\mathcal{D}^k(q; E)$.

PROPOSITION 3.7. *Soient E et F deux espaces hilbertiens, une application linéaire continue u de E dans F. L'application $\boldsymbol{\varphi}(t) \to u\,\boldsymbol{\varphi}(t)$ de $\mathcal{D}(E)$ dans $\mathcal{D}(F)$ se prolonge canoniquement en une application linéaire continue $\hat{u}$ de $\mathcal{D}^k(q; E)$ dans $\mathcal{D}^k(q; F)$. Si u est biunivoque (resp. surjective), il en est de même de $\hat{u}$.*

COROLLAIRE. *Soit e un élément quelconque de E; $\mathbf{f} \to (\mathbf{f}, e)_E$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}^k(q; E)$ dans $\mathcal{D}^k(q; C)$* (C est le corps des complexes).

PROPOSITION 3.8. *Soit un entier $h \geqslant 0$ quelconque; $\mathbf{f} \to D^h \mathbf{f}$ est une isométrie de $\mathcal{D}^k(q; E)$ sur $\mathcal{D}^{k-h}(q; E)$. L'isométrie réciproque, que nous noterons D^{-h}, coïncide, sur $\mathcal{D}(E)$, avec l'opérateur ainsi noté jusqu'à maintenant.*

PROPOSITION 3.9. *Soient E et F deux espaces hilbertiens, $A(t) \in \mathcal{B}_t(L(E; F))$; $\mathbf{f} \to A(t)\,\mathbf{f}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}^k(q; E)$ dans $\mathcal{D}^k(q; F)$.*

Rappelons que si G est un espace de Banach, $\mathcal{B}_t(G)$ est le sous-espace de $\mathcal{E}_t(G)$ formé des fonctions $\mathbf{g}(t)$ telles que, pour chaque entier $r \geqslant 0$, il existe $B_r < +\infty$ tel que $\|\mathbf{g}^{(r)}(t)\|_G \leqslant B_r$ pour tout t réel (ce sont les fonctions bornées sur toute la droite, ainsi que chacune de leurs dérivées).

Soit $k \geqslant 0$:

$$e^{-q} D^k [A(t)\mathfrak{f}] = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} [D^{k-h} A(t)] e^{-q} D^h \mathfrak{f}.$$

Comme les $D^{k-h} A(t)$ sont tous dans $L_t^\infty(L(E; F))$, on a banalement le résultat dans ce cas.

Notons ${}^tA(t)$ le transposé de $A(t)$ pour la dualité entre E et E', F et F'; ${}^tA(t) \in \mathcal{B}_t(L(F'; E'))$; pour $k \geqslant 0$, $\mathfrak{f} \to {}^tA(t)\mathfrak{f}$ est donc une application linéaire continue de $\mathcal{D}^k(-q; F')$ dans $\mathcal{D}^k(-q; E')$. La transposée de cette application est $\mathfrak{f} \to A(t)\mathfrak{f}$, qui est donc continue de $\mathcal{D}^{-k}(q; E)$ dans $\mathcal{D}^{-k}(q; F)$.

En réalité, nous avons prouvé plus, à savoir que l'intection canonique de $\mathcal{B}_t(L(E; F))$ dans $L(\mathcal{D}^k(q; E); \mathcal{D}^k(q; F))$ est continue. On en déduit :

Proposition 3.10. *Soit $\{A_\nu(t)\}$ une suite de $\mathcal{B}_t(L(E; F))$ convergeant vers $A(t) \in \mathcal{B}_t(L(E; F))$ au sens de $\mathcal{E}_t(L(E; F))$ et bornée dans $\mathcal{B}_t(L(E; F))$. Alors, pour chaque $\mathfrak{f} \in \mathcal{D}^k(q; E)$, la suite $\{A_\nu(t)\mathfrak{f}\}$ converge vers $A(t)\mathfrak{f}$ dans $\mathcal{D}^k(q; F)$.*

En effet, la suite $\{A_\nu(t)\}$ définit un ensemble équicontinu d'applications linéaires de $\mathcal{D}^k(q; E)$ dans $\mathcal{D}^k(q; F)$ et pour $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ quelconque, la suite $\{A_\nu(t)\varphi\}$ converge vers $A(t)\varphi$ dans $\mathcal{D}(F)$, à fortiori dans $\mathcal{D}^k(q; F)$. Comme $\mathcal{D}(E)$ est dense dans $\mathcal{D}^q(q; E)$, on a bien le résultat.

Proposition 3.11. *Soient q_1, q_2 deux fonctions vérifiant les conditions de la définition* 3.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) exp $(q_1(t) - q_2(t))$ *est une fonction bornée sur toute la droite.*

(b) $\mathcal{D}^k(q_1; E)$ *est plongé continûment dans* $\mathcal{D}^k(q_2; E)$ *pour tout* $k \in Z$.

(c) $\mathcal{D}^k(q_1; E)$ *est plongé continûment dans* $\mathcal{D}^k(q_2; E)$ *pour au moins un* $k \in Z$.

En se basant sur le fait que D^k est une isométrie de $\mathcal{D}^k(q; E)$ sur $\mathcal{D}^0(q; E)$, on voit qu'il suffit de prouver l'équivalence de (a) et de (c_0) : $\mathcal{D}^0(q_1; E)$ *est plongé continûment dans* $\mathcal{D}^0(q_2; E)$.

(a) $\Rightarrow (c_0)$, car, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$:

$$\| e^{-q_2} \varphi \|_{L^2(E)} = \| e^{q_1 - q_2} (e^{-q_1} \varphi) \|_{L^2(E)} \leqslant \| e^{q_1 - q_2} \|_{L^\infty} \| e^{-q_1} \varphi \|_{L^2(E)}.$$

$(c_0) \Rightarrow$ (a), car (c_0) implique qu'il existe $B < +\infty$ tel que :

$$\| e^{-q_2} \varphi \|_{L^2(E)} \leqslant B \| e^{-q_1} \varphi \|_{L^2(E)} \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}(E).$$

Faisons alors parcourir à φ une suite $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, \ldots)$ de $\mathcal{D}$ telle que les $|\varphi_n|^2$ convergent vers la mesure de Dirac δ_{t_0} $(t_0 \in R)$ dans l'espace des mesures à support compact; on en déduit : $e^{-q_2(t_0)} \leqslant B e^{-q_1(t_0)}$; comme t_0 est un point quelconque de la droite, c'est bien là ce qu'on voulait démontrer.

Proposition 3.12. *Soit p_0 un nombre >0. Soient E et F deux espaces hilbertiens, $A(t) \in \mathcal{E}_t(L(E; F))$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in Z$, il existe une fonction positive $G_{k,\varepsilon}$, une fois continûment dérivable, telle que $A(t)$ soit un opérateur borné de $\mathcal{D}^k(q; E)$ dans $\mathcal{D}^k(q + G_{k,\varepsilon}; F)$, de norme $\leqslant \varepsilon$, pour toute $q(t)$ vérifiant : $|q'| \geqslant p_0 + |G'_{k,\varepsilon}|$.*

Soit $k \geqslant 0$. Pronons une fonction $G(t)$, une fois continûment dérivable, $G(t) \geqslant 0$, telle que :

$$\binom{k}{h} e^{-G(t)} \| A^{(h)}(t) \|_{L(E;\, F)} \leqslant \frac{\varepsilon\, p_0^h}{k+1} \quad \text{pour tout } t \text{ et tout } h = 0, 1, \ldots, k.$$

On a alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(E)$:

$$\begin{aligned} \| e^{-q-G} D^k [A(t)\varphi] \|_{L^2(F)} &\leqslant \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \| e^{-G} A^{(h)} (e^{-q} D^{k-h} \varphi) \|_{L^2(F)} \\ &\leqslant \sum_{h=0}^{k} \frac{\varepsilon}{k+1} p_0^h \| e^{-q} D^{k-h} \varphi \|_{L^2(E)} \\ &\leqslant \varepsilon \| e^{-q} D^k \varphi \|_{L^2(E)}. \end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, on a appliqué le lemme 3.11.

Le résultat ainsi prouvé pour $k \geqslant 0$ reste valable lorsqu'on remplace : E par F', F par E', $A(t)$ par son transposé ${}^tA(t)$ (pour les dualités entre E et E', F et F') et q par $-q$. Il énonce, dans ce cas, que ${}^tA(t)$ est un opérateur borné, de norme $\leqslant \varepsilon$, de $\mathcal{D}^k(-q; F')$ dans $\mathcal{D}^k(-q + G; E')$. Mais $A(t)$ est le transposé de ${}^tA(t)$ pour les dualités entre $\mathcal{D}^k(-q; F')$ et $\mathcal{D}^k(q; F)$ d'une part, $\mathcal{D}^k(-q + G; E')$ et $\mathcal{D}^{-k}(q - G; E)$ de l'autre; il en résulte que $A(t)$ est un opérateur borné, de norme $\leqslant \varepsilon$, de $\mathcal{D}^{-k}(q - G; E)$ dans $\mathcal{D}^{-k}(q; F)$, et ceci pour toute q vérifiant $|q'| \geqslant p_0 + 2|G'|$. En remplaçant $q - G$ par q, on obtient le résultat.

Corollaire. *Soit $Q(t, D) = \sum_{r=-n}^{m} A_r(t) D^r$, m, $n \in N$, $A_r \in \mathcal{E}_t(L(E; F))$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in Z$, il existe une fonction $G_{k,\varepsilon} \geqslant 0$, une fois continûment dérivable, telle que $Q(t, D)$ soit un opérateur borné, de norme $\leqslant \varepsilon$, de $\mathcal{D}^k(q; E)$ dans $\mathcal{D}^{k-m}(q + G; F)$ pour toute $q(t)$ vérifiant $|q'| \geqslant p_0 + |G'_{k,\varepsilon}|$.*

Revenons maintenant aux fonctions $p(t)$ réelles, une fois continûment dérivables, vérifiant (C 1) (donc $p' > 0$).

Nous désignerons par $\mathcal{D}'_+(E)$ l'espace des distributions sur la droite, à valeurs dans E, dont le support est limité à gauche, et par $\mathcal{D}'_{a+}(E)$ le sous-espace de $\mathcal{D}'_{+}(E)$ formé des distributions ayant leur support dans la demi-droite $t \geqslant a$.

Nous désignerons par $\mathcal{D}'^{f}_{a+}(E)$ le sous-espace de $\mathcal{D}'_{a+}(E)$ formé des distributions $\mathbf{T}$ possédant la propriété suivante :

Il existe un entier m *(dépendant de* $\mathbf{T}$*) et pour chaque* $0 \leqslant h \leqslant m$*, une fonction* $\mathbf{g}_h(t)$ *continue, à valeurs dans* E*, tels que :*

$$\mathbf{T} = \mathbf{g}_0 + D\,\mathbf{g}_1 + \cdots + D^m\,\mathbf{g}_m.$$

Il est aisé de montrer que, dans cette condition, on peut choisir les fonctions $\mathbf{g}_h$ toutes nulles pour $t < a$.

$\mathcal{D}'^{f}_{+}(E)$ désignera la réunion des $\mathcal{D}'^{f}_{a+}(E)$ lorsque a parcourt la droite réelle. C'est l'espace des distributions à valeurs dans E, d'ordre fini ([7], I, Chap. 1, § 2, p. 25).

Définition 3.2. *Soit* $\mathfrak{P}$ *une famille quelconque de fonctions réelles* $p(t)$*, une fois continûment dérivables, vérifiant* (C 1). *Nous désignerons par* $\mathcal{D}^k(\mathfrak{P}; E)$ *le sous-espace de* $\bigcap_p \mathcal{D}^k(p; E)$ *formé des* $\mathbf{f}$ *ayant la propriété suivante :*

Il existe une constante finie M *(dépendant de* $\mathbf{f}$*) telle que, pour toute fonction* $p(t) \in \mathfrak{P}$, $\|\mathbf{f}\|_{E;p,k} \leqslant M$.

Nous munirons $\mathcal{D}^k(\mathfrak{P}; E)$ de la norme $\|\mathbf{f}\|_{E;\mathfrak{P},k} = \sup_{p \in \mathfrak{P}} \|\mathbf{f}\|_{E;p,k}$; $\mathcal{D}^k(\mathfrak{P}; E)$ est alors un espace de Banach.

Soit Q une deuxième famille de fonctions $p(t)$, contenue dans $\mathfrak{P}$. Alors $\mathcal{D}^k(\mathfrak{P}; E)$ est plongé continûment dans $\mathcal{D}^k(Q; E)$. En langage imagé, on peut dire que « plus grande est la famille $\mathfrak{P}$, plus petit est l'espace $\mathcal{D}^k(\mathfrak{P}; E)$ et plus fine est sa topologie ».

Proposition 3.13. *Soient* $k \in Z$, a *réel. Soit* $\{p_n\}$ $(n = 1, \ldots)$ *une suite de fonctions réelles, une fois continûment dérivables, vérifiant, pour tout* n, $p_n(a) = 0$ *et* $p'_n(t) \geqslant n$ *pour tout* t. *Alors* $\mathcal{D}^k(\{p_n\}; E)$ *est contenu dans* $\mathcal{D}'^{f}_{a+}(E)$.

$D^k\,(k \in Z)$, avec la signification $Y(t)^{*(-k)}$ lorsque $k < 0$, est un opérateur de $\mathcal{D}'^{f}_{a+}(E)$ dans lui-même, et définit une isométrie de $\mathcal{D}^k(\{p_n\}; E)$ sur $\mathcal{D}^0(\{p_n\}; E)$. Nous pouvons donc nous borner au cas $k = 0$.

Soit donc $\mathbf{f}$ telle que $\|e^{-p_n}\mathbf{f}\|_{L^2(E)} \leqslant M$ pour tout n. Si $t < a$,

$$p_n(t) = -\int_t^a p'_n(u)\,du \leqslant -n(a-t),$$

et donc $\exp[n(a-t)] \leqslant \exp(-p_n)$, d'où :

$$e^{2n(a-t)} \int_{-\infty}^{t} \|\mathbf{f}(u)\|_E^2 \, du \leqslant \|e^{-p_n} \mathbf{f}\|_{L^2(E)}^2 \leqslant M^2 \quad \text{pour tout } n = 1, \ldots,$$

ce qui exige $\mathbf{f} = 0$ p.p. sur la demi-droite $t < a$. C.Q.F.D.

Cette proposition va jouer pour nous le rôle que joue le théorème des supports, dans les applications de la transformation de Laplace; d'ailleurs les démonstrations des deux résultats sont similaires.

PROPOSITION 3.14. *Soit a réel. Soit $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'^{f}_{a+}(E)$ d'ordre m. Il existe une fonction continue $g > 0$, telle que, pour toute famille $\mathcal{P}$ de fonctions $p(t)$ vérifiant $p(a) = 0$ et $p' \geqslant g$, on ait $\mathbf{T} \in \mathcal{D}^{-m}(\mathcal{P}; E)$.*

Soit donc $\mathbf{T} = \mathbf{g}_0 + D\mathbf{g}_1 + \cdots + D^m \mathbf{g}_m$, où les $\mathbf{g}_j$ sont continues, à valeurs dans E, nulles pour tout $t < a$; posons $G(t) = \sup_{1 \leqslant j \leqslant m} \|\mathbf{g}_j(t)\|_E$; $G(t)$ est continue, et nulle pour $t < a$. Or il est clair qu'on peut trouver g continue et > 0 telle que

$$\left\| G(t) \exp\left(-\int_a^t g(u)\, du\right)\right\|_{L^2} \leqslant 1.$$

A fortiori, aura-t-on pour toute $p(t)$, $p(a) = 0$, $p' \geqslant g$:

$$\|e^{-p(t)} G(t)\|_{L^2} \leqslant 1,$$

d'où aussitôt le résultat.

Le moment est venu de traduire, dans le langage des espaces $\mathcal{D}^k(p; E)$, les résultats du § 1.

Nous allons simplifier un peu l'énoncé du corollaire de la prop. 3.1 et celui de la prop. 3.2, en choisissant g_k de sorte que $p' \geqslant g_k$ implique $b p' \geqslant 4$. Nous pouvons alors dire :

PROPOSITION 3.15. *Soit $P(t, D) = \sum_{r=-n}^{m} B_r(t) D^r$, m, $n \in N$, $B_r \in \mathcal{E}_t(L(E; E))$. On suppose que $B_m(t)$ est hermitien et vérifie* (H 1). *Alors, pour tout $k \in Z$, il existe une fonction continue $g_k > 0$ telle que, pour toute $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ et toute $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g_k$, on ait :*

$$P(t, D)\boldsymbol{\varphi} \in D^k(p; E) \ \textit{et}\ \operatorname{Re}\,(P(t, D)\boldsymbol{\varphi},\ D^{m-1}\boldsymbol{\varphi})_{E;\,p,\,k} \geqslant \|D^{m-1}\boldsymbol{\varphi}\|^2_{E;\,p,\,k}.$$

PROPOSITION 3.16 *Soit $B(t) \in \mathcal{E}_t(L(E; E))$, hermitien et vérifiant* (H 1). *Pour tout $k \in Z$, il existe une fonction continue $g_k > 0$ telle qu'on ait, pour toute $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(E)$ et toute $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g_k$:*

$$\operatorname{Re} \int (B(t)\varphi,\ D\varphi)_{E;p,k} \geqslant \|\varphi\|^2_{E;p,k}.$$

Enfin, dans l'énoncé de la prop. 3.3, introduisons une fonction $G(t)$, positive, telle que $\sqrt{b}\exp G \geqslant \sqrt{2}$; nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 3.17. *Soit* $B(t) \in \mathcal{E}_t(L(E;\ E))$ *vérifiant* (H 1). *Il existe une fonction* $G(t) \geqslant 0$, *une fois continûment dérivable, ne dépendant que de* $B(t)$, *et, pour tout* $k \in Z$, *une fonction continue* $g_k > 0$ *telles que, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ *et toute* $p(t)$ *vérifiant* $p' \geqslant g_k$, *on ait :*

$$\operatorname{Re}\,(B(t)\varphi,\ \varphi)_{E;p,k} \geqslant \|\varphi\|^2_{E;p+G,k}.$$

§ 3. Application à la résolution de certains problèmes mixtes

Les problèmes aux limites de type mixte que nous allons considérer dans le présent paragraphe ont déjà été résolus, entièrement ou en partie, par divers auteurs (principalement Visik, Lions, Ladizenskaia, Kato). Nous nous bornerons ici à rappeler brièvement comment les pose Lions, au sens de la théorie des distributions, et nous en entreprendrons aussitôt la résolution. Pour de plus amples renseignements (concrétisation des notions introduites, exemples, relations entre les problèmes mixtes fins et les problèmes mixtes au sens des distributions, etc.), le lecteur pourra se reporter aux travaux de Lions (principalement [4], chap. II, et [5], Technical report 1).

On commence par se donner deux espaces hilbertiens V et H; V est plongé continûment dans H (et, dans les applications, en général, V est dense dans H). Ensuite, on considère, pour chaque t réel, une forme sesqui-linéaire continue $a(t;\ u,\ v)$ sur $V \times V$, vérifiant les conditions suivantes :

(ID) *Quels que soient* $u,\ v \in V$, $a(t;\ u,\ v) \in \mathcal{E}_t$.

(K 1) *Il existe deux fonctions* $\alpha(t)$, $\lambda(t) \in \mathcal{E}_t$, $\lambda(t)$ *réelle*, $\alpha(t) > 0$, *telles que, pour tout* $u \in V$ *et tout* t *réel :*

$$\operatorname{Re}\ a(t;\ u,\ u) + \lambda(t)\|u\|^2_H \geqslant \alpha(t)\|u\|^2_V.$$

On donne enfin un opérateur intégro-différentiel

$$P(t,\ D) = \sum_{r=-n}^{m} B_r(t)\,D^r, \quad m,\ n \in N,\ B_r(t) \in \mathcal{E}_t(L(H;\ H)).$$

Concernant $P(t,\ D)$, on fait l'hypothèse que $B_m(t)$ est hermitien et vérifie (H 1) :

(H 1) *Il existe une fonction* $b(t) \in \mathcal{E}_t$, $b(t) > 0$, *telle que :*

$$\operatorname{Re}(B(t)g, g)_H \geqslant b(t) \| g \|_H^2$$

pour tout $g \in H$ *et tout* t *réel.*

Ceci dit, on prolonge de façon canonique (Schwartz [9]) la forme $a(t; u, v)$ en une forme sesqui-linéaire continue sur $\mathcal{D}'(V) \times V$, forme que nous noterons $a(t; \mathbf{U}, v)$, $\mathbf{U} \in \mathcal{D}'(V)$, $v \in V$. Le produit hermitien $(\ ,\ )_H$ se prolonge, lui, canoniquement, à $\mathcal{D}'(H) \times H$; nous écrirons $(\mathbf{T}, g)_H$ pour $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(H)$, $g \in H$.

On pose alors le problème suivant :

Problème mixte. Etant donnée $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'_+(H)$, *chercher* $\mathbf{U} \in \mathcal{D}'_+(V)$ *vérifiant, pour tout* $v \in V$ *:*

$$a(t; \mathbf{U}, v) + (P(t, D)\mathbf{U}, v)_H = (\mathbf{T}, v)_H.$$

On dit que le problème est fin, si, k étant un entier $\geqslant 1$:

1° on suppose que le « second membre » $\mathbf{T}$ est une fonction $(k-1)$ fois continûment dérivable de t, à valeurs dans H, et que $\mathbf{T}^{(k)}$ (dérivée au sens des distributions) est localement — $L^2(H)$, i.e. $\alpha \mathbf{T}^{(k)} \in L^2(H)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{D}_t$;

2° on cherche une solution $\mathbf{U}$ qui soit $(k-1)$ fois continûment dérivable de t, à valeurs dans V, et $(k+m-1)$ fois continûment dérivable à valeurs dans H.

Nous allons résoudre le problème mixte, sous les hypothèses énumérées, dans le cas où $m = 1$ et dans celui où $m = 2$. Nous obtiendrons diverses propriétés de la solution à partir de propriétés analogues du second membre, concernant les supports, la régularité, la « croissance » à l'infini. Le résultat sur la régularité (en t) montrera que le problème fin est résolu du même coup.

Faisons d'abord une remarque simplificatrice : $P(t, D) - \lambda(t) I$ (I : application identique de H) est un opérateur différentiel qui possède exactement les mêmes propriétés que $P(t, D)$ (car $m \geqslant 1$!). Nous pouvons donc remplacer $P(t, D)$ par $P(t, D) - \lambda(t) I$ et $a(t; u, v)$ par $a(t; u, v) + \lambda(t)(u, v)_H$. Moyennant donc un changement de notations, nous pouvons nous ramener à la donnée de $P(t, D)$, avec les hypothèses du début, et d'une forme $a(t; u, v)$ vérifiant (ID) et, au lieu de (K 1), l'hypothèse :

(K 0) *Il existe une fonction* $\alpha(t) \in \mathcal{E}_t$, $\alpha(t) > 0$ *telle que, pour tout* $u \in V$ *et tout* t *réel :* $\operatorname{Re} a(t; u, u) \geqslant \alpha(t) \| u \|_V^2$.

Ceci dit, remarquons qu'il existe un opérateur $A(t) \in \mathcal{E}_t(L(V; V))$ tel que $(A(t)u, v)_V = a(t; u, v)$ pour tout t et tous $u, v \in V$ (attention! $A(t)$ est fondamentalement différent de l'opérateur ainsi noté par Lions, dans [5], et associé par lui à la forme $a(t;\, u,\, v)$). Il est clair que si $a(t;\, u,\, v)$ satisfait à la condition (K 0), $A(t)$ satisfait, lui, à la condition (H 1). D'autre part, si $\varphi,\ \psi \in \mathcal{D}(V)$, on aura :

$$(A(t)\,\varphi,\ \psi)_{V;\,p,\,k} = (-1)^k \int a(t;\ \varphi,\ D^k\,[e^{-2p}\,D^k\,\psi])\,dt.$$

Cette remarque va nous permettre d'appliquer les propositions 3.15, 3.16, 3.17. Auparavant nous introduirons les appellations suivantes :

(PP) *Nous dirons que le problème est de type parabolique si :*

1° $m=1$, *i.e.* $P(t,\, D) = \sum_{r=-n}^{1} B_r(t)\,D^r,\ n \in N,\ B_r \in \mathcal{E}_t(L(H;\, H))$;

2° $B_1(t)$ *est hermitien et vérifie* (H 1);

3° $a(t;\, u,\, v)$ *vérifie les conditions* (I D) *et* (K 0).

(P H) *Nous dirons que le problème est de type hyperbolique si :*

1° $m=2$, *i.e.* $P(t,\, D) = \sum_{r=-n}^{2} B_r(t)\,D^r,\ n \in N,\ B_r \in \mathcal{E}_t(L(H;\, H))$;

2° $B_2(t)$ *est hermitien et vérifie* (H 1);

3° $a(t;\, u,\, v)$ *vérifie les conditions* (I D) *et* (K 0);

4° $a(t;\, u,\, v)$ *est hermitienne, i.e.* $a(t;\, u,\, v) = \overline{a(t;\, v,\, u)}$ *pour tout* t *et pour tous* $u,\ v \in V$.

Remarquer que si $a(t;\, u,\, v)$ est hermitienne, l'opérateur $A(t)$ que nous avons associé à $a(t;\, u,\, v)$ est hermitien.

Ceci posé, les prop. 3.14 et 3.17 nous permettent d'énoncer :

PROPOSITION 3.18. *Supposons le problème de type parabolique. Alors il existe une fonction* $\geqslant 0$, *une fois continûment dérivable,* $G(t)$, *ne dépendant que de* $a(t;\, u,\, v)$, *telle que, pour tout* $k \in Z$, *il existe une fonction continue* $g_k > 0$ *telle que, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ *et toute* $p(t)$ *vérifiant* $p' \geqslant g_k$, *et telle que* $p+G$ *vérifie* (C 1), *on ait :*

$$\operatorname{Re}\left[(-1)^k \int a(t;\ \varphi,\ D^k\,[e^{-2p}\,D^k\,\varphi])\,dt + (P(t,\, D)\,\varphi,\ \varphi)_{H;\,p,\,k}\right] \geqslant \|\varphi\|^2_{V;\,p+G,\,k} + \|\varphi\|^2_{H;\,p,\,k}.$$

Rappelons que la condition (C 1) s'énonce :

(C 1) *Il existe* $p_0 > 0$ *tel que* $p'(t) \geqslant p_0$ *pour tout* t.

Les fonctions $p(t)$ figurant dans tous les énoncés, antérieurs et ultérieurs, sont supposées vérifier (C 1).

Pour le problème de type hyperbolique, nous nous appuierons sur les propositions 3.15 et 3.16 :

PROPOSITION 3.19. *Supposons le problème de type hyperbolique. Alors, pour chaque $k \in Z$, il existe une fonction continue $g_k > 0$ telle qu'on ait, pour toute $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{D}(V)$ et toute $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g_k$:*

$$\operatorname{Re}\left[(-1)^k \int a(t; \boldsymbol{\varphi}, D^k [e^{-2p} D^{k+1} \boldsymbol{\varphi}])\, dt + (P(t, D)\boldsymbol{\varphi}, D\boldsymbol{\varphi})_{H;p,k}\right] \geqslant \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{V;p,k} + \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H;p,k+1}.$$

Ce sont les deux résultats qui vont servir de base à toute la suite. Nous désirons traiter simultanément le problème de type parabolique et celui de type hyperbolique. A cette fin, nous poserons $s = m-1$, et nous définirons G pour $m = 2$ comme étant la fonction nulle.

Nous nous servirons du lemme suivant, dû à Lions [6] :

LEMME 3.14. *Soient un espace hilbertien E, un sous-espace $\mathfrak{H}$ de E, muni d'une structure pré-hilbertienne plus fine que celle induite par E, une forme sesqui-linéaire $\Phi(f, h)$ sur $E \times \mathfrak{H}$, remplissant les deux conditions suivantes :*

(I) *Pour tout $h \in \mathfrak{H}$, $e \to \Phi(e, h)$ est une forme linéaire continue sur E.*

(II) *Il existe $c > 0$ tel que $|\Phi(h, h)| \geqslant c\|h\|^2_{\mathfrak{H}}$ pour tout $h \in \mathfrak{H}$.*

Dans ces conditions, quelle que soit la forme semi-linéaire $h \to L(h)$ sur $\mathfrak{H}$, il existe un élément (en général non unique) u de E tel que : $\Phi(u, h) = L(h)$ pour tout $h \in \mathfrak{H}$.

Si pour toute forme semi-linéaire L sur $\mathfrak{H}$, l'élément u de E vérifiant l'égalité précédente est unique, alors $L \to u$ est une application linéaire continue de l'antidual fort de $\mathfrak{H}$ dans E.

Nous allons appliquer le lemme 3.14 avec les choix suivants :

pour E : l'espace $\mathfrak{D}^k(p+G; V) \cap \mathfrak{D}^{k+s}(p; H)$ muni de la norme hilbertienne

$$(\|\quad\|^2_{H;p+G,k} + \|\quad\|^2_{H;p,k+s})^{\frac{1}{2}}.$$

pour $\mathfrak{H}$: le sous-espace de E formé des $\mathbf{f}$ telles que $D^{k+s}\mathbf{f} \in \mathfrak{D}(V)$ $(s = m-1)$. On munit $\mathfrak{H}$ de la norme induite par E (on vérifie sans peine, en utilisant le fait que D^{k+s} est une isométrie de $\mathfrak{D}^h(p; F)$ sur $\mathfrak{D}^{h-k-s}(p; F)$, quels que soient F, p, h, que $\mathfrak{H}$ est dense dans E).

pour Φ : la forme, provisoirement défine sur $\mathcal{D}(V)\times\mathfrak{H}$:

$$(-1)^k \int a(t; \varphi, D^k[e^{-2p} D^{k+s}\psi])\,dt +$$

$$+(-1)^k \int (\varphi, \tilde{P}(t, D)\{D^k[e^{-2p} D^{k+s}\psi]\})_H\,dt$$

où $\tilde{P}(t, D)$ est l'adjoint de $P(t, D)$ pour l'antidualité entre $\mathcal{D}(H)$ et $\mathcal{D}'(H)$.

Les propositions 3.18 et 3.19 énoncent que la condition (II) du lemme 3.14 est satisfaite dès que $p' \geqslant g_k$ (ce que nous supposerons). Reste à vérifier (I). Plus exactement, nous allons prouver que, pour ψ arbitrairement fixé dans $\mathfrak{H}$, $\varphi \to \Phi(\varphi, \psi)$, définie sur $\mathcal{D}(V)$ se prolonge en une forme linéaire continue sur E entier, pourvu que g_k soit « assez grand ».

Posons $\chi = e^{-2p} D^{k+s}\psi$; $\chi \in \mathcal{D}(V)$ d'après notre choix de $\mathfrak{H}$ (en supposant p indéfiniment dérivable, ce que nous ferons jusqu'à nouvel ordre). Ceci conduit à étudier des formes du type $\int (\varphi, D^r[B(t) D^k \chi])_E\,dt$, avec $B \in \mathcal{E}_t(L(E; E))$, et $E = V$, $r = 0$ si on s'occupe du 1[er] terme de l'expression de Φ, $E = H$, $-n \leqslant r \leqslant m$ si on s'occupe du 2[e] terme.

Nous nous bornerons à traiter le cas le moins facile, celui qui correspond à $r \geqslant 0$, $k < 0$. La forme précédente est alors égale à une combinaison linéaire de termes du type

$$\int (D^{-h}[\tilde{B}^{(l)} D^k \varphi], D^q \chi)_E\,dt$$

où $\tilde{B}$ est l'adjoint de B (pour la dualité entre E et lui-même) et où h, l, q sont des entiers $\geqslant 0$. Comme $\chi \in \mathcal{D}(E)$, il en est de même de $e^p D^q \chi$ (si $E = V$, on doit remplacer p par $p+G$, ce qui ne change rien). Si $h \geqslant 1$, il existe g_h continue telle que $p' \geqslant g_h$ implique $\|e^{-p} D^{-h}[\tilde{B}^{(l)} D^k \varphi]\|_{L^2(E)} \leqslant \|\varphi\|_{E;p,k}$ (cela résulte des lemmes 3.12 et 3.13). Lorsque $h = 0$, la forme sesquilinéaire précédente s'écrit :

$$\int (e^{-p} D^k \varphi, B^{(l)} e^p D^q \chi)_E\,dt,$$

et comme $B^{(l)} e^p D^q \chi \in \mathcal{D}(E)$, dans tous les cas l'inégalité de Schwarz donne le résultat cherché.

Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION 3.20. *Sous les conditions de la prop.* 3.18 *si* $m=1$ (*resp. de la prop.* 3.19 *si* $m=2$) *il existe une fonction positive* (*nulle si* $m=2$) $G(t)$, *une fois continûment dérivable, telle que pour tout* $k \in Z$, *il existe une fonction continue* $g_k > 0$ *telle qu'on puisse affirmer, pour toute fonction réelle* $p(t)$, *indéfiniment dérivable, vérifiant* $p' \geqslant g_k$ *et* (C 1) *et telle que* $p+G$ *vérifie* (C 1) :

Quelle que soit $\mathrm{g} \in \mathcal{D}^k(p; H)$, *il existe* $\mathrm{f} \in \mathcal{D}^k(p+G; V) \cap \mathcal{D}^{k+m-1}(p; H)$ *telle qu'on ait, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}'_+(V)$ *vérifiant* $\mathcal{D}^{k+m-1}\varphi \in \mathcal{D}(V)$;

$$(-1)^k \int a(t; \mathrm{f}, D^k[e^{-2p} D^{k+m-1}\varphi])\,dt + (-1)^k \int (\mathrm{f}, \tilde{P}(t, D)[D^k\{e^{-2p} D^{k+m-1}\varphi\}])_H\,dt = (\mathrm{g}, D^{m-1}\varphi)_{H;p,k}.$$

En effet, notre choix de la norme sur $\mathfrak{H}$ fait que, si $\mathrm{g} \in \mathcal{D}^k(p; H)$,

$$\varphi \to (\mathrm{g}, D^{m-1}\varphi)_{H;p,k}$$

est une forme semi-linéaire continue sur $\mathfrak{H}$; il suffit alors d'appliquer le lemme 3.14. Nous aurions pu aussi placer au second membre $(\mathrm{g}, \varphi)_{V;p+G,k}$ avec, cette fois, $\mathrm{g} \in \mathcal{D}^k(p+G; V)$.

L'égalité de l'énoncé peut s'écrire :

$$\int a(t; \mathrm{f}, D^k\psi)\,dt + \int (\mathrm{f}, \tilde{P}(t, D)\,D^k\psi)_H\,dt = (\mathrm{g}, D^k\psi)_H\,dt$$

pour toute $\psi \in \mathcal{D}(V)$. Mais ceci signifie que, pour tout $u \in V$:

$$D^k[a(t; \mathrm{f}, u) + (P(t, D)\,\mathrm{f}, u)_H] = D^k(\mathrm{g}, u)_H, \tag{1}$$

l'égalité devant s'entendre au sens des distributions scalaires.

Reprenons l'opérateur $A(t) \in \mathcal{E}_t(L(V; V))$ défini par $a(t; u, v) = (A(t)\,u, v)_V$ pour tout t et tous $u, v \in V$. Appliquons la prop. 3.12 et son corollaire : pour tout $k \in Z$, il existe une fonction G_k positive, une fois continûment dérivable, et une fonction g_k continue >0, telles que si $p' \geqslant g_k$ et si $p+G_k$ vérifie (C 1), $A(t)$ soit un opérateur borné de $\mathcal{D}^k(p+G; V)$ dans $\mathcal{D}^k(p+G_k; V)$, tandis que $P(t, D)$ est un opérateur borné de $\mathcal{D}^{k+m-1}(p; H)$ dans $\mathcal{D}^{k-1}(p+G_k; H)$. Mais alors la quantité entre crochets, dans le 1^er^ membre de (1), appartient à $\mathcal{D}^{k-1}(p+G_k; C)$ (C : corps des complexes); $(\mathrm{g}, u)_H$ appartient, lui, à $\mathcal{D}^k(p; C)$ et donc (prop. 3.11) à $\mathcal{D}^{k-1}(p+G_k; C)$. Or D^k est une isométrie de cet espace sur $\mathcal{D}^{-1}(p+G_k; C)$. Il en résulte que l'on a :

$$a(t; \mathrm{f}, u) + (P(t, D)\,\mathrm{f}, u)_H = (\mathrm{g}, u)_H \tag{2}$$

pour tout $u \in V$. Cette égalité vaut dans $\mathcal{D}^{-1}(p+G_k; C)$, donc aussi dans $\mathcal{D}'$.

Jusqu'ici $p(t)$ était indéfiniment dérivable; supposons-le de nouveau simplement une fois continûment dérivable, mais soumis aux mêmes conditions de croissance que précédemment. Il est évident que nos assertions immédiatement antérieures restent valables.

Reprenons la fonction G_k définie plus haut. En modifiant sa définition, plus précisément en appelant G_k ce qui, plus haut, aurait été noté sup (G_k, G_{k+1}), on voit que :

1° $P(t, D)$ est un opérateur borné de $\mathcal{D}^{k+m}(p-G_k; H)$ dans $\mathcal{D}^k(p+G_k; H)$;

2° $A(t)$ est un opérateur borné de $\mathcal{D}^k(p-G_k; V)$ dans $\mathcal{D}^k(p+G_k; V)$ (tenir compte de ce que G_k et G sont des fonctions positives et appliquer la prop. 3.11). Or on peut écrire :

$$(A(t)\boldsymbol{\varphi}, D^s\boldsymbol{\psi})_{V;p,k} = (e^{-(p+G_k)}D^k[A(t)\boldsymbol{\varphi}], e^{-(p-G_k)}D^{k+s}\boldsymbol{\psi})_{L^2(V)};$$

$$(P(t, D)\boldsymbol{\varphi}, D^s\boldsymbol{\psi})_{H;p,k} = (e^{-(p+G_k)}D^k[P(t, D)\boldsymbol{\varphi}], e^{-(p-G_k)}D^{k+s}\boldsymbol{\psi})_{L^2(H)}.$$

Il est alors visible que $(A(t)\boldsymbol{\varphi}, D^s\boldsymbol{\psi})_{V;p,k}$ peut se prolonger par continuité, à partir de $\mathcal{D}(V)\times\mathcal{D}(V)$, à $\mathcal{D}^{k+s}(p-G_k; V)\times\mathcal{D}^{k+s}(p-G_k; V)$; et de même, la forme $(P(t, D)\boldsymbol{\varphi}, D^s\boldsymbol{\psi})_{H;p,k}$ peut se prolonger à $\mathcal{D}^{k+m}(p-G_k; H)\times\mathcal{D}^{k+m}(p-G_k; \mathrm{H})$ (se rappeler que $s=m-1$). Mais alors les prop. 3.18 et 3.19 nous permettent d'énoncer :

PROPOSITION 3.21. *Sous les conditions de la prop.* 3.18 *si* $m=1$ (*resp. de la prop.* 3.19 *si* $m=2$), *il existe, pour tout* $k\in Z$, *une fonction positive* G_k, *une fois continûment dérivable, et une fonction continue* $g_k>0$ *telles qu'on ait, pour toute* $p(t)$ *vérifiant* $p'\geqslant g_k$, *et telle que* $p+G_k$ *et* $p-G_k$ *vérifient* (C 1), *et pour toute*

$$\mathfrak{f}\in\mathcal{D}^{k+m-1}(p-G_k; V)\cap\mathcal{D}^{k+m}(p-G_k; H):$$

1° $A(t)\mathfrak{f}\in\mathcal{D}^k(p+G_k; V)$ et $P(t, D)\mathfrak{f}\in\mathcal{D}^k(p+G_k; H)$;

2° $$\mathrm{Re}\,(e^{-(p+G_k)}D^k[A(t)\mathfrak{f}], e^{-(p-G_k)}D^{k+m-1}\mathfrak{f})_{L^2(V)} + \mathrm{Re}\,(e^{-(p+G_k)}D^k[P(t, D)\mathfrak{f}], e^{-(p-G_k)}D^{k+m-1}\mathfrak{f})_{L^2(H)} \geqslant \|\mathfrak{f}\|^2_{V;p+G,k} + \|\mathfrak{f}\|^2_{H;p,k+m-1},$$

où G *est la fonction définie par la prop.* 3.18 *si* $m=1$ (*resp. la fonction nulle si* $m=2$).

Ceci étant acquis, soit $\mathfrak{g}\in\mathcal{D}^{k+1}(p-G-G_k; H)$, où G et G_k ont la même signification que ci-dessus. D'après la prop. 3.20, il existe

$$\mathfrak{f}\in\mathcal{D}^{k+1}(p-G_k; V)\cap\mathcal{D}^{k+m}(p-G_k; H)$$

tel qu'on ait l'égalité (2) (que p ne soit pas indéfiniment dérivable ne joue aucun rôle). Mais $A(t)\,\mathfrak{f} \in \mathcal{D}^k(p+G_k;\, V)$ et $P(t,D)\,\mathfrak{f} \in \mathcal{D}^k(p+G_k;\, H)$. Il en résulte que la forme bi-semi-linéaire sur $\mathcal{D}_t \times V$:

$$(\varphi, u) \to \int e^{-(p+G_k)} D^k [a(t;\, \mathfrak{f},\, u)]\, e^{-(p-G_k)} D^k \bar{\varphi}\, dt + \\ + \int e^{-(p+G_k)} D^k (P(t, D)\,\mathfrak{f},\, u)_H\, e^{-(p-G_k)} D^k \bar{\varphi}\, dt$$

se prolonge canoniquement en une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{D}^k(p-G_k;\, V)$, qui n'est pas autre chose que :

$$\mathfrak{f}_1 \to (e^{-(p+G_k)} D^k [A(t)\,\mathfrak{f}],\; e^{-(p-G_k)} D^k \mathfrak{f}_1)_{L^2(V)} + (e^{-(p+G_k)} D^k [P(t, D)\,\mathfrak{f}],\; e^{-(p-G_k)} D^k \mathfrak{f}_1)_{L^2(H)}.$$

De même, $(\varphi, u) \to \int e^{-(p+G_k)} D^k (\mathfrak{g}, u)_H\, e^{-(p-G_k)} D^k \bar{\varphi}\, dt$ se prolonge en une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{D}^k(p-G_k;\, V)$ qui, pour $\mathfrak{f}_1 \in \mathcal{D}^k(p-G_k;\, V) \subset \mathcal{D}^k(p;\, H)$, n'est autre que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_1)_{H;\,p,\,k}$ puisque $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}^k(p;\, H)$. Au total, on a, pour toute $\mathfrak{f}_1 \in \mathcal{D}^k(p-G_k;\, V)$

$$(e^{-(p+G_k)} D^k [A(t)\,\mathfrak{f}],\; e^{-(p-G_k)} D^k \mathfrak{f}_1)_{L^2(V)} + \\ + (e^{-(p+G_k)} D^k [P(t, D)\,\mathfrak{f}],\; e^{-(p-G_k)} D^k \mathfrak{f}_1)_{L^2(H)} = (\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_1)_{H;\,p,\,k}.$$

Ceci reste vrai pour $\mathfrak{f}_1 = D^s \mathfrak{f}$ puisque $\mathfrak{f} \in \mathcal{D}^{k+s}(p-G_k;\, V)$ car $s = m-1 \leqslant 1$.

Mais alors la prop. 3.21 montre que l'élément $\mathfrak{f}$ est unique. Nous pouvons donc rassembler les résultats obtenus :

Théorème 3.7. *Supposons le problème de type parabolique (resp. hyperbolique). Dans ces conditions, il existe une fonction positive (resp. nulle) $G(t)$, une fois continûment dérivable, telle que pour tout $k \in Z$, il existe une fonction continue $g_k(t) > 0$ et une fonction positive $G_k(t)$, une fois continûment dérivable, qui possèdent les propriétés suivantes :*

Pour toute fonction réelle $p(t)$, une fois continûment dérivable, vérifiant $p' \geqslant g_k$ et telle que $p+G$ vérifie (C 1), *alors, à chaque $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}^k(p;\, H)$, correspond un élément unique $\mathfrak{f}$ de $\mathcal{D}^k(p+G;\, V) \cap \mathcal{D}^{k+m-1}(p;\, H)$ vérifiant, pour tout $u \in V$:*

$$a(t;\, \mathfrak{f},\, u) + (P(t, D)\,\mathfrak{f},\, u)_H = (\mathfrak{g}, u)_H$$

au sens des distributions scalaires.

De plus, alors, si $p+G_k$ et $p+G+G_k$ vérifient (C 1) *:*

$$\|\mathfrak{f}\|^2_{V;\,p+G+G_k,\,k} + \|\mathfrak{f}\|^2_{H;\,p+G_k,\,k+m-1} \leqslant \operatorname{Re}\,(\mathfrak{g},\, D^{m-1}\mathfrak{f})_{H;\,p+G_k,\,k}.$$

Enfin, $g \to f$ *est une application linéaire continue de* $\mathcal{D}^k(p; H)$ *dans l'espace* $\mathcal{D}^k(p+G; V) \cap \mathcal{D}^{k+m-1}(p; H)$ *muni de la norme*

$$(\| \quad \|^2_{V; p+G, k} + \| \quad \|^2_{H; p, k+m-1})^{\frac{1}{2}}.$$

La dernière partie de l'énoncé résulte de la dernière partie du lemme 3.14. Rappelons que (C 1) s'énonce :

(C 1) *Il existe* $p_0 > 0$ *tel que* $p'(t) \geq p_0$ *pour tout* t.

L'intervention de cette condition a pour but de donner un sens aux divers espaces $\mathcal{D}^h(p; E)$ introduits.

En vérité, nous n'avons pas démontré la majoration de l'énoncé. Ce que nous avons démontré, c'est que, pour un choix convenable de G_k, on a :

$$\|f\|^2_{V; p+G+G_k, k-(m-1)} + \|f\|^2_{H; p+G_k, k} \leq \mathrm{Re}\,(g, D^{m-1} f)_{H; p+G_k, k-(m-1)}.$$

Bornons-nous à prouver la majoration de l'énoncé lorsque $m = 2$. Dans ce cas $G = 0$. Posons provisoirement $p_k = p + G_k$. Nous supposerons que pour chaque $k \in Z$, on a trouvé G_k telle que :

$$\|f\|^2_{V; p_k, k-1} + \|f\|^2_{H; p_k, k} \leq \mathrm{Re}\,(g, Df)_{H; p_k, k-1},$$

les autres conditions restant inchangées. Or $g \in \mathcal{D}^k(p; H)$ et $f \in \mathcal{D}^k(p; V) \cap \mathcal{D}^{k+1}(p; H)$. Soit alors $\{g_n\}$ $(n = 1, \ldots)$ une suite de $\mathcal{D}(H)$ qui converge vers g dans $\mathcal{D}^k(p; H)$. Puisque les g_n appartiennent à $\mathcal{D}^{k+1}(p; H)$, pour chaque n il existe $f_n \in \mathcal{D}^{k+1}(p; V) \cap \mathcal{D}^{k+2}(p; H)$ tel que $a(t; f_n, u) + (P(t, D) f_n, u) = (g_n, u)$ pour tout $u \in V$; et l'on a :

$$\|f_n\|^2_{V; p_{k+1}, k} + \|f_n\|^2_{H; p_{k+1}, k+1} \leq \mathrm{Re}\,(g_n, Df_n)_{H; p_{k+1}, k}. \tag{1}$$

On déduit immédiatement de la majoration analogue, appliquée à $f_{n_1} - f_{n_2}$ et $g_{n_1} - g_{n_2}$, que les f_n convergent dans $\mathcal{D}^k(p_{k+1}; V) \cap \mathcal{D}^{k+1}(p_{k+1}; H)$ vers un élément f_0 de cet espace. Et l'on doit nécessairement avoir :

$$a(t; f_0, u) + (P(t, D) f_0, u)_H = (g, u)_H \quad \text{pour tout } u \in V.$$

Mais G_{k+1} est une fonction positive, donc (prop. 3.11) $\mathcal{D}^l(p; E) \subset \mathcal{D}^l(p_{k+1}; E)$ quels que soient E et l. Si donc p est assez croissant pour que s'applique le théorème d'unicité, avec p_{k+1} à la place de p, on devra nécessairement avoir $f_0 = f$. Autrement dit, les f_n convergent vers f dans $\mathcal{D}^k(p_{k+1}; V) \cap \mathcal{D}^{k+1}(p_{k+1}; H)$. Mais alors la majoration (1) reste valable à la limite, c'est-à-dire avec f à la place de f_n et g à celle de g_n. Un simple changement de notations (on écrit G_k au lieu de G_{k+1}) donne ensuite la majoration du théorème.

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème mixte posé au commencement. Mais auparavant, il nous faut résoudre ce problème dans un cas un peu particulier : celui où le second membre (et la solution !) sont des distributions d'ordre fini.

THÉORÈME 3.8. *Supposons le problème de type parabolique (resp. hyperbolique). Alors, à toute* $\mathbf{S} \in \mathcal{D}'^{f}_{+}(H)$ *correspond un élément unique* $\mathbf{T}$ de $\mathcal{D}'^{f}_{+}(V)$, *tel que, pour tout* $u \in V$:

$$a(t; \mathbf{T}, u) + (P(t, D)\mathbf{T}, u)_H = (\mathbf{S}, u)_H \quad (\textit{au sens de } \mathcal{D}').$$

De plus, si $\mathbf{S}$ *a son support dans la demi-droite* $t \geqslant a$ *(a réel), il en est de même de* $\mathbf{T}$.

1° *Démonstration de l'unicité*

Supposons que l'on ait $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'^{f}_{+}(V)$ et $a(t; \mathbf{T}, u) + (P(t, D)\mathbf{T}, u)_H = 0$ pour tout $u \in V$. D'après le prop. 3.14, il existe $k \in Z$ et une fonction continue $g > 0$ telle que $\mathbf{T} \in \mathcal{D}^k(p; V)$ pour toute $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g$. Donc, pour peu que p soit suffisamment croissant, on aura $\mathbf{T} \in \mathcal{D}^{k-(m-1)}(p+G; V) \cap \mathcal{D}^k(p; H)$ et toutes les conditions du th. 3.7 seront réunies, d'où résultera que $\mathbf{T} = 0$.

2° *Démonstration de l'existence*

Soit donc $\mathbf{S} \in \mathcal{D}'^{f}_{+}(H)$ à support dans la demi-droite $t \geqslant a$. Il existe $k \in Z$ et une fonction continue $g > 0$ telle que, si on appelle $\mathfrak{P}_g$ la famille de toutes les fonctions $p(t)$ vérifiant $p' \geqslant g$ et $p(a) = 0$, on ait $\mathbf{S} \in \mathcal{D}^k(\mathfrak{P}_g; H)$ (prop. 3.14). Désignons par $\mathfrak{P}$ la sous-famille de $\mathfrak{P}_g$ formée des $p(t)$ qui vérifient en outre : $p' \geqslant g + 1$, $p' \geqslant g_k + 1$, et telles que $p + G$, $p + G_k$ et $p + G + G_k$ vérifient (C 1) (g_k, G, G_k définies par le th. 3.7). Pour chacune de ces $p(t)$, il existe un élément unique $\mathbf{f}_p$ de $\mathcal{D}^k(p+G; V) \cap \mathcal{D}^{k+m-1}(p; H)$ vérifiant, pour tout $u \in V$:

$$a(t; \mathbf{f}_p, u) + (P(t, D)\mathbf{f}_p, u)_H = (\mathbf{S}, u)_H.$$

Soient p_1, $p_2 \in \mathfrak{P}$. Il est facile de voir qu'il existe une fonction p_3 (toujours du type $p(t)$) ayant les propriétés suivantes : 1) $p_3(a) = 0$; 2) $p_3 \geqslant \sup(p_1, p_2)$; 3) $p_3' \geqslant \sup(g, g_k)$; enfin : 4) $p_3 + G$, $p_3 + G_k$, $p_3 + G + G_k$ vérifient (C 1).

Ces propriétés impliquent : $\mathbf{S} \in \mathcal{D}^k(p_3; H)$ et $\mathcal{D}^l(p_i; E) \subset \mathcal{D}^l(p_3; E)$ $(i = 1, 2)$ quels que soient E et l (prop. 3.11), et aussi que le th. 3.7 s'applique avec p_3 à la place de p. Mais alors l'unicité de la solution exige $\mathbf{f}_{p_1} = \mathbf{f}_{p_2} = \mathbf{f}_{p_3}$. Autrement dit, lorsque $p \in \mathfrak{P}$, tous les $\mathbf{f}_p$ sont identiques. Notons $\mathbf{T}$ leur valeur commune. D'après le th. 3.7, on a $\|\mathbf{T}\|_{V;\, p+G+G_k,\, k} \leqslant \|\mathbf{S}\|_{H;\, p+G_k,\, k}$. En multipliant les deux membres par $\exp[G(a) + G_k(a)]$, on voit (moyennant la mise en facteur de $\exp G(a)$ devant le second membre) qu'on peut supposer $G(a)$ et $G_k(a)$ nuls. Ceci dit, le second membre, dès que $p' + G'_k \geqslant g$, est majoré par une constante indépendante de p. D'autre part, $\mathcal{D}$ contient une suite $\{p_n\}$ vérifiant $p'_n(t) + G'(t) + G'_k(t) \geqslant n$ pour tout t. Il résulte alors de la prop. 3.13 que $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'^f_{a+}(V)$.

Remarque. Une fois acquis le th. 3.8, le th. 3.7 fournit des renseignements sur la régularité de la solution $\mathbf{T}$ si on en possède sur celle du second membre $\mathbf{S}$ (c'est manifeste si on remplace « régularité » par « croissance à l'infini »). Par exemple, si $m=2$, et si $\mathbf{S}$ a ses dérivées d'ordre $\leqslant 1$ localement dans $L^2(H)$, les dérivées d'ordre $\leqslant 2$ (resp. $\leqslant 1$) de $\mathbf{T}$ seront localement dans $L^2(H)$ (resp. $L^2(V)$).

THÉORÈME 3.9. *Supposons le problème de type parabolique (resp. hyperbolique). Alors, à toute* $\mathbf{S} \in \mathcal{D}'_+(H)$ *correspond un élément unique* $\mathbf{T}$ *de* $\mathcal{D}'_+(V)$ *tel que, pour tout* $u \in V$:

$$a(t;\, \mathbf{T}, u) + (P(t, D)\mathbf{T}, u)_H = (\mathbf{S}, u)_H \quad (\textit{au sens de } \mathcal{D}').$$

Si $\mathbf{S}$ *a son support dans la demi-droite* $t \geqslant a$ *(a réel), il en est de même de* $\mathbf{T}$.

1° *Démonstration de l'unicité*

Soit $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'_+(V)$, ayant son support dans la demi-droite $t \geqslant b$ et vérifiant, pour tout $u \in V$: $a(t\colon \mathbf{T}, u) + (P(t, D)\mathbf{T}, u)_H = 0$. Soit M un nombre $< +\infty$ arbitraire; soit $\alpha(t) \in \mathcal{E}_t$, égale à 1 sur l'intervalle $(-\infty, M)$ et nulle pour $t \geqslant M+1$; $\alpha(t)\mathbf{T}$ est à support compact. Or toute distribution à support compact, à valeurs dans un Banach, est d'ordre fini (Schwartz [10]); donc $\alpha\mathbf{T} \in \mathcal{D}'^f_+(V)$ et vérifie, pour tout $u \in V$:

$$a(t;\, \alpha\mathbf{T}, u) + (P(t, D)(\alpha\mathbf{T}), u)_H = (\mathbf{S}, u)_H$$

où $\mathbf{S} = P(t, D)(\alpha\mathbf{T}) - \alpha P(t, D)\mathbf{T}$; $\mathbf{S}$ est d'ordre fini et a son support dans la demi-droite $t \geqslant M$. D'après le th. 3.8, $\alpha\mathbf{T}$ doit aussi avoir son support dans cette demi-droite; mais ceci revient à dire que $\mathbf{T}=0$ dans l'ouvert $t \geqslant M$. Comme M est arbitraire, ceci exige $\mathbf{T}=0$.

2° *Démonstration de l'existence*

Soit $\mathbf{S} \in \mathcal{D}'_+(H)$ à support dans la demi-droite $t \geqslant a$; soient un nombre fini M et une fonction $\alpha \in \mathcal{E}_t$, nulle pour $t \geqslant M+1$. Comme $\alpha\mathbf{S}$ est à support compact, et donc d'ordre fini, il existe, d'après le th. 3.8, un élément unique $\mathbf{T}_\alpha$ de $\mathcal{D}'^f_{a+}(V)$ tel que $a(t;\, \mathbf{T}_\alpha, u) + (P(t, D)\mathbf{T}_\alpha, u)_H = (\alpha\mathbf{S}, u)_H$ pour tout $u \in V$. Si $\alpha = \beta$ sur $(-\infty, M)$, $\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{T}_\beta$ sur la demi-droite ouverte $(-\infty, M($ car, pour tout $u \in V$,

$$a(t;\, \mathbf{T}_\alpha - \mathbf{T}_\beta, u) + (P(t, D)(\mathbf{T}_\alpha - \mathbf{T}_\beta), u)_H = ((\alpha - \beta)\mathbf{S}, u)_H.$$

Or $(\alpha-\beta)\mathbf{S}$ a son support dans la demi-droite $t \geqslant M$, donc aussi $\mathbf{T}_\alpha - \mathbf{T}_\beta$, d'après le th. 3.8. En prenant α égale à 1 sur $(-\infty, M)$, on voit que $\mathbf{T}_\alpha$ est définie de façon unique sur la demi-droite ouverte $(-\infty, M($ et vérifie, sur cet ouvert

$$a(t; \mathbf{T}_\alpha, u) + (P(t, D)\mathbf{T}_\alpha, u)_H = (\mathbf{S}, u)_H \quad \text{pour tout } u \in V.$$

Mais alors il existe une distribution $\mathbf{T}$ égale à $\mathbf{T}_\alpha$ sur $(-\infty, M($ et ceci pour tout M (et toute fonction $\alpha \in \mathcal{E}_t$ égale à 1 pour $t \leqslant M$ et à 0 pour $t \geqslant M+1$); comme $\mathbf{T}_\alpha$ a son support dans la demi-droite $t \geqslant a$, il en est de même de T. C.Q.F.D.

Ici encore le th. 3.7 fournit des renseignements sur la régularité locale (mais évidemment pas, du moins directement, sur la croissance à l'infini) des solutions. En particulier le problème fin est résolu. D'autre part, la dernière partie de l'énoncé du th. 3.7 prouve la continuité, au sens de certains espaces de distributions d'ordre fini, de la solution par rapport aux données (toutes incorporées, en théorie des distributions, dans le second membre). Cette continuité vaut localement dans le cas général, et globalement si l'ordre est fini.

CHAPITRE IV

Autres dominations

Ce chapitre est subdivisé en deux paragraphes. Dans le premier, nous démontrons trois résultats sur la domination exponentielle de type 1-mixte : dans ce sens, 1° tout opérateur à coefficients constants, $P(D)$, normal en x_1, équidomine ses dérivés $P^{(r,0,\dots,0)}(D)$ $(r \geqslant 1)$; 2° si de plus il est hypoelliptique, il équidomine tous ses dérivés $P^{(p)}(D)$ $(|p| \geqslant 1)$; 3° enfin, s'il est ce que nous appelons ultraprincipal normal, $P(D)$ équidomine toute famille finie d'opérateurs différentiels à coefficients constants d'ordre strictement inférieur au sien.

Dans le deuxième paragraphe, nous revenons à la domination multiplicative. Nous prouvons qu'un opérateur différentiel à coefficients constants, $P(D)$, équidomine tous ses dérivés $P^{(p)}(D)$ $(|p| \geqslant 1)$ suivant des bases de domination constituées par des fonctions $\exp(t_1^2 x_1^2 + \cdots + t_n^2 x_n^2)$.

§ 1. Domination exponentielle 1-mixte

Comme le titre l'indique, les bases de domination seront constituées, ici, par des distributions $T(x_1, x^0)$, opérant multiplicativement en x_1 et convolutivement en x^0. Ce seront des transformées de Fourier par rapport à y^0 de fonctions $\exp[x_1 h(y^0)]$, où $h(y^0) \in L^\infty$ (mieux : h ne prendra qu'un nombre fini de valeurs) sur R^{n-1}.

Or, soit $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$. La domination exponentielle 1-mixte, par transformation de Fourier en x^0 et par le théorème de Plancherel, conduit à étudier des normes

$$\left\| \exp\left[x_1 h(y^0)\right] P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, y^0\right) \ddot{\varphi}(x_1, y^0) \right\|_{L^2_{x_1, y^0}}$$

où $\qquad P \in C[X_1, \ldots, X_n]$ et $\ddot{\varphi}(x, y^0) = \int \varphi(x) \exp(2 i \pi \langle x^0, y^0 \rangle) \, d x^0.$

Mais :

$$\int \left| e^{x_1 h(y^0)} P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, y^0\right) \ddot{\varphi}(x_1, y^0) \right|^2 d x_1 = \int |P(y_1 + i \hbar(y^0), y^0) \hat{\varphi}(y_1 + i \hbar(y^0), y^0)|^2 \, d y_1$$

où l'on a posé $\hbar = h/2\pi$. De sorte que le carré de la norme précédente est égal à :

$$\int |P(y_1 + i \hbar(y^0), y^0)|^2 \, |\hat{\varphi}(y_1 + i \hbar(y^0), y^0)|^2 \, d y.$$

Soit alors Q un deuxième polynôme appartenant à $C[X_1, \ldots, X_n]$. Supposons que, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné, on ait pu déterminer $h(y^0)$ de manière à avoir :

$$|Q(y_1 + i \hbar(y^0), y^0)| \leqslant \varepsilon \, |P(y_1 + i \hbar(y^0), y^0)| \tag{1}$$

pour presque tout $y \in R^n$. On en déduit immédiatement que $P(D)$ domine (au sens exponentiel 1-mixte) $Q(D)$. Il y a plus : la domination est *globale*, c'est-à-dire que les inégalités de domination, qui peuvent s'écrire, après transformation de Fourier en x^0 :

$$\left\| e^{x_1 h(y^0)} Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, y^0\right) \ddot{\varphi}(x_1, y^0) \right\|_{L^2_{x_1, y^0}} \leqslant \varepsilon \left\| e^{x_1 h(y^0)} P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, y^0\right) \ddot{\varphi}(x_1, y^0) \right\|_{L^2_{x_1, y^0}},$$

ces inégalités sont valables pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ (bien sûr, il ne s'agit pas de domination uniforme sur R^n entier).

Toutes les dominations que nous allons rencontrer dans le présent paragraphe sont de cette espèce. En effet, elles résulteront toutes d'inégalités du genre de (1).

$P(X)$ sera supposé normal et de degré m en X_1; cependant, son degré total pourra excéder m. Nous supposerons toujours $m \geqslant 1$. Nous poserons :

$$P_r(X) = \left(\frac{1}{2 i \pi} \frac{\partial}{\partial X_1}\right)^r P(X).$$

THÉORÈME 4.1. *Soit un polynôme $P(X) \in C[X_1, \ldots, X_n]$, normal et de degré $m \geqslant 1$ par rapport à X_1. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une application $y \to h(y) = (h(y^0), 0, \ldots, 0)$ de R^n dans lui-même, où $h(y^0)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est continue dans le complémentaire d'un ensemble fermé de mesure nulle de R^{n-1}, telle que :*

$$|P_r(y + i h(y))| \leqslant \varepsilon^r \, |P(y + i h(y))| \quad \textit{pour presque tout } y \in R^n \textit{ et tout entier } r \geqslant 0.$$

Le théorème 4.1 implique, en le précisant, le résultat annoncé dans le préambule, à savoir que $P(D)$ équidomine, au sens exponentiel 1-mixte, ses dérivés $P_r(D)$ $(r \geqslant 1)$.

Avant d'aborder la démonstration proprement dite du théorème 4.1, nous devons établir une série de résultats algébriques.

Nous poserons

$$P(U+iV, y^0) = R(U, V; y^0) + iJ(U, V; y^0) \quad (y^0 \in R^{n-1}),$$

où R et J sont des polynômes réels. Nous noterons $Q(V; y^0)$ le résultant de $R(U, V; y^0)$ et $J(U, V; y^0)$ en tant que polynômes en U.

1° *Le terme de plus haut degré en V, dans $Q(V; y^0)$, est indépendant de y^0.*

$P(X)$ peut s'écrire $X_1^m + A_1(X^0)X_1^{m-1} + \cdots + A_m(X^0)$. Considérons alors

$$t^{-m} P(tU + it, y^0) = (U+i)^m + \sum_{k=1}^{m} t^{-k} A_k(y^0)(U+i)^{m-k}.$$

Les parties réelles et imaginaires de ce polynôme en U sont :

$$t^{-m} R(tU, t; y^0), \qquad t^{-m} J(tU, t; y^0).$$

Le résultant, par rapport à U, de ces deux polynômes est $t^{-m^2} Q(t; y^0)$. En effet, si f et g sont deux polynômes à une indéterminée X_1 de résultant h, le résultant (par rapport à X_1) de $t^{-m} f(tX_1)$ et $t^{-m} g(tX_1)$ est un polynôme homogène en t^{-1}, de degré m^2, égal à h pour $t=1$.

On vérifie, d'autre part sans difficulté, que $\deg_V Q(V; y^0) = m^2$. Par conséquent, lorsque $t \to +\infty$, $t^{-m^2} Q(t; y^0) \to Q_0(y^0)$ défini par $Q(V; y^0) = Q_0(y^0) V^{m^2}$ + des termes en V de degré $\leqslant m^2 - 1$.

Or, lorsque $t \to +\infty$, $t^{-m} P(tU + it, y^0)$ converge vers $(U+i)^m$; d'autre part, $t^{-m} R(tU, t; y^0)$ et $t^{-m} J(tU, t; y^0)$ convergent respectivement vers $R(U)$, $J(U)$, partie réelle et imaginaire de $(U+i)^m$. Ce « convergent » doit être pris au sens de la topologie usuelle sur l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant m$. Comme l'application, qui, à deux polynômes, fait correspondre leur résultant (qui est un nombre complexe fonction des coefficients des polynômes considérés), est continue pour la dite topologie, il faut que $Q_0(y^0)$ soit le résultant de $R(U)$ et $J(U)$ (comme polynômes en U). Il s'ensuit bien que $Q_0(y^0)$ est une constante non nulle (par rapport à y^0).

Revenons au polynôme $P(X_1, y^0)$ qui, pour chaque $y^0 \in R^{n-1}$, possède m racines $r_k(y^0) = s_k(y^0) + i t_k(y^0)$ (s_k, t_k réels). Pour tout $y^0 \in R^{n-1}$ et tout $1 \leqslant k \leqslant m$, $Q(t_k(y_0); y^0) = 0$, puisque $R(U, t_k(y^0); y^0)$ et $J(U, t_k(y^0); y^0)$ ont au moins une racine commune, à savoir

$s_k(y^0)$. Nous noterons $T(y^0)$ l'ensemble de nombre réels $(t_1(y^0), \ldots, t_m(y^0))$, y^0 variant dans R^{n-1}.

Soulignons que rien n'autorise à considérer m fonctions continues sur R^{n-1} qui, en chaque point y^0 de R^{n-1}, coïncideraient respectivement avec chacune des racines de $P(X_1, y^0)$. Ce que nous pourrons faire, ce sera de nous appuyer sur le lemme suivant (dont nous laissons la démonstration au lecteur) :

LEMME 4.1. *Soit $R(X, t)$ un polynôme en une indéterminée X, de la forme :*

$$X^m + a_1(t) X^{m-1} + \cdots + a_m(t)$$

où les $a_k(t)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ sont des fonctions définies et continues sur $(0, 1)$. *On suppose que $R(X, t)$ n'a de racines multiples qu'en un nombre fini de points t de* $(0, 1)$. *Dans ces conditions, il existe m fonctions continues $r_j(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ sur* $(0, 1)$, *qui, pour chaque* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *constituent l'ensemble des racines de $R(X, t)$.*

Ceci dit, pour tout t réel, $Q(t; y^0)$ est un polynôme sur R^{n-1}, dont nous noterons W_t la variété des zéros.

2° *Soient $a < b$ deux nombres réels. Supposons que W_a et W_b ne soient pas identiques à l'espace R^{n-1} entier. Soit $\mathfrak{D}$ une composante connexe quelconque du complémentaire de $W_a \cup W_b$. Si $T(y^0)$ ne rencontre pas l'intervalle fermé* (a, b) *pour au moins un point de $\mathfrak{D}$, il ne le rencontre pas pour tout point de $\mathfrak{D}$.*

Nous aurons besoin de faire intervenir la variété W de R^{n-1} formée des zéros du discriminant de $P(X_1, y^0)$.

Commençons par supposer que W n'est pas identique à l'espace R^{n-1} entier.

Raisonnons par l'absurde : supposons que $T(y^0)$ rencontre (a, b) pour y^0 égal à un certain $y_1^0 \in \mathfrak{D}$, tout en ne le rencontrant pas pour $y^0 = y_0^0 \in \mathfrak{D}$. Puisque $\mathfrak{D}$ est ouvert connexe, il existe un arc de courbe continue simple, joignant y_0^0 à y_1^0, entièrement inclus dans $\mathfrak{D}$ et qui ne rencontre W qu'en un nombre fini de points. Le lemme 4.1 nous autorise alors à considérer m fonctions continues sur cet arc de courbe, qui en chacun de ses points, forment l'ensemble des racines de $P(X_1, y^0)$. Ceci signifierait que $T(y^0)$, formé de points de la droite réelle variant continûment avec y^0 sur l'arc de courbe, rencontre (a, b) pour $y^0 = y_1^0$ et ne le rencontre pas pour $y^0 = y_0^0$: il y aurait donc un point de notre arc en lequel a ou bien b appartiendrait à $T(y^0)$. Comme $Q(t; y^0)$ s'annule sur $T(y^0)$ d'après une remarque précédente, ceci signifierait que l'arc en question rencontre W_a ou bien W_b, contrairement à nos hypothèses.

Supposons maintenant que $W = R^{n-1}$.

Considérons $P(X_1, y^0)$ comme élément de $C(y_2, \ldots, y_n)[X_1]$. W est la variété des zéros, dans R^{n-1}, du discriminant de $P(X_1, y^0)$ et $W = R^{n-1}$ signifie que ce polynôme en $y_2, \ldots, y_n$ est identiquement nul, d'où il suit que le p.g.c.d. de $P(X_1, y^0)$ et de $(\partial P/\partial X_1)(X_1, y^0)$ dans $C(y_2, \ldots, y_n)[X_1]$, qui est aussi leur p.g.c.d. dans $C[y_2, \ldots, y_n][X_1]$, n'est pas constant. Cela signifie que $P(X)$ est divisible, au sens de $C[X_1, \ldots, X_n]$, par un polynôme de degré $\geqslant 1$ et $\leqslant m-1$ en X_1. Autrement dit, $P(X)$ est réductible dans $C[X_1, \ldots, X_n]$.

On décompose alors $P(X)$ en ses facteurs irréductibles et on démontre le résultat pour chacun de ces facteurs, d'où l'on tire ensuite immédiatement le résultat pour $P(X)$ lui-même.

Ceci fait, désignons par E l'ensemble des t réels tels que W_t soit identique à R^{n-1} entier, i.e. tels que $Q(t; y^0)$ soit identiquement nul en tant que polynôme en y^0.

3° *E est un ensemble fini.*

En effet, pour que le polynôme $Q(t; y^0)$ en y^0 soit identiquement nul, il faut que son terme constant soit nul. Or, d'après 1°, ce terme constant est un polynôme en t de la forme $Q_0 t^{m^2}$ + des termes de degré $\leqslant m^2-1$ en t, où Q_0 est un nombre réel non nul.

Soit un nombre $\varepsilon > 0$ quelconque; posons $N = \varepsilon^{-1} + \sup\limits_{t \in E} t$. Pour tout $t \geqslant N$, le polynôme $Q(t; y^0)$ en y^0 n'est pas identiquement nul, et sa variété de zéros W_t dans R^{n-1} est de dimension $\leqslant n-2$. Par conséquent, c'est un ensemble de mesure nulle dans R^{n-1}.

Par soucis de simplification, nous allons modifier légèrement les notations : pour tout entier $q \geqslant 0$, nous noterons W_q la variété des zéros du polynôme en y^0 $Q(N + 2q\varepsilon^{-1}; y^0)$. Nous noterons I_q l'intervalle fermé $(N + 2q\varepsilon^{-1}, N + 2q\varepsilon^{-1} + 2\varepsilon^{-1})$ de la droite réelle.

Nous noterons O_q l'intersection de $\complement(W_q \cup W_{q+1})$ avec l'ensemble des $y^0 \in R^{n-1}$ tels que $T(y^0)$ ne rencontre pas I_q. D'après 2° si O_q rencontre une composante connexe de $\complement(W_q \cup W_{q+1})$, il la contient. En particulier, O_q est un ouvert de R^{n-1}. Enfin, nous noterons O^0 l'ouvert $\complement(W_0 \cup W_1 \cup \ldots \cup W_{2m+1})$.

4° *Lorsque q varie de O à $2m+1$, les O_q forment un recouvrement de O^0.*

En effet, supposons qu'il existe $y^0 \in O^0$ n'appartenant à aucun O_q. Cela voudrait dire que $T(y^0)$ rencontre tous les I_q $(0 \leqslant q \leqslant 2m+1)$. Mais $T(y^0)$ est un ensemble de m nombres; et les I_q sont $2m+1$ intervalles adjacents dont aucun n'a d'intérieur vide : $T(y^0)$ ne peut les rencontrer tous à la fois.

De 4° découle que $\complement(\bigcup_{q=0}^{2m+1} O_q) \subset \bigcup_{q=0}^{2m+1} W_q$ est de mesure nulle dans R^{n-1} et comme O_q ne rencontre aucune composante connexe de $\complement(W_q \cup W_{q+1})$ sans la contenir, la frontière de O_q est entièrement incluse dans $W_q \cup W_{q+1}$. Nous voulons maintenant construire, à partir des ouverts O_q, d'autres ouverts O'_q (en nombre égal à celui des O_q) qui ne se rencontrent pas, contenus dans les O_q et dont le complémentaire de la réunion est de mesure nulle dans R^{n-1}.

Nous procéderons de la façon naturelle, en posant :

$$O'_q = O_q \cap \complement(\bar{O}_{q-1} \cup \dots \cup \bar{O}_0), \quad O'_0 = O_0 \quad (q = 1, \dots, 2m+1).$$

Il est clair que les O'_q sont ouverts, deux à deux disjoints et que, pour chaque $q = 0, 1, \dots, 2m+1$, $O'_q \subset O_q$. On a noté $\bar{A}$ l'adhérence d'un ensemble A ; on notera A^* sa frontière. Basons-nous sur le lemme suivant (dont la preuve, élémentaire, ne sera pas exposée) :

LEMME 4.2. *Soient* $(h+1)$ *ouverts* $A_0, \dots, A_h$. *Posons* $B_j = A_j \cap \complement(\bar{A}_{j-1} \cup \dots \cup \bar{A}_0)$ *et* $\Phi = B_0 \cup \dots \cup B_n$ $(1 \leqslant j \leqslant h,\ B_0 = A_0)$. *Alors :*

$$\complement\Phi \subset (\bigcup_{j=0}^{h-1} A_j^*) \cup \complement(A_0 \cup \dots \cup A_h).$$

En appliquant ce lemme avec $A_j = O_q$ et $B_j = O'_q$, en posant donc $\Phi = O'_0 \cup \dots \cup O'_{2m+1}$, et en tenant compte de ce que $O^*_q \subset W_q \cup W_{q+1}$, on voit que $\complement\Phi \subset (\bigcup_{q=0}^{2m+1}) W_q$ et donc $\complement\Phi$ est de mesure nulle dans R^{n-1}.

Ce qui précède nous permet de définir une fonction $h(y^0)$ sur R^n :

$$h(y^0) = N + (2q+1)\varepsilon^{-1} \quad \text{si} \quad y^0 \in O'_q, \quad q = 0, 1, \dots, 2m+1;$$
$$h(y^0) = 0 \quad \text{si} \quad y^0 \in \complement\Phi;$$

$h(y^0)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs (toutes finies) et la distance de $h(y^0)$ à l'ensemble $T(y^0)$ est, pour tout $y^0 \in \Phi$, $> \varepsilon^{-1}$, c'est-à-dire que $|h(y^0) - t_k(y^0)| > \varepsilon^{-1}$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$ et tout $y^0 \in \Phi$ (et donc en particulier, presque partout dans R^{n-1}).

Nous pouvons aborder maintenant la démonstration proprement dite du th. 4.1. Au lieu d'appliquer la construction précédente à $P(X)$ lui-même, nous pouvons l'appliquer au polynôme $\hat{P} = P P_1 \dots P_m$ (rappelons que P_r est, à un facteur constant près, la dérivée r^e de P par rapport à X_1) ; $\hat{P}$ est normal, et de degré $\frac{1}{2} m(m+1)$ en X_1. Notons $r_k(y^0) = s_k(y^0) + i t_k(y^0)$ les racines de $\hat{P}$; nous supposerons que les indices $k = 1, \dots, \frac{1}{2} m(m+1)$ sont choisis, pour chaque y^0, de sorte que les $r_k(y^0)$, correspondant à :

$$k = m + (m-1) + \cdots + (m-r+1) + 1, \dots, m + (m-1) + (m-r+1) + (m-r) \quad (r = 1, \dots, m),$$

sont les racines de $P_r(X_1, y^0)$, tandis que ceux qui correspondent à $k=1, \ldots, m$ sont les racines de $P(X_1, y^0)$. Ce classement est évidemment légitime. Posons enfin, pour simplifier, $m_r = m + (m-1) + \cdots + (m-r+1)$, $m_0 = m$.

Alors la construction effectuée dans les pages précédentes nous montre qu'il existe une fonction $h(y^0)$ sur R^{n-1} ayant les propriétés suivantes :

1° $h(y^0)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, toutes réelles;

2° Il existe un ouvert Φ dans R^{n-1}, dont le complémentaire est de mesure nulle, tel que $h(y^0)$ soit continue sur Φ et vérifie :

$$|h(y^0) - t_k(y^0)| \geqslant \varepsilon^{-1} \quad \text{pour tout} \quad y^0 \in \Phi \quad \text{et tout} \quad k = 1, \ldots, m.$$

On a, avec la notation $h(y) = (h(y^0), 0, \ldots, 0)$:

$$P_r(y + i h(y)) = P_r(y_1 + i h(y^0), y^0) = c_r \prod_{k=m_r+1}^{m_r+(m-r)} [y_1 + i h(y^0) - r_k(y^0)],$$

(c_r : constante complexe non nulle), ce qui entraîne aussitôt

$$|P_r(y + i h(y))| \geqslant |c_r| (1/\varepsilon)^{m-r}$$

pour tout $y^0 \in \Phi$, et nous autorise à considérer, toujours pour $y^0 \in \Phi$ quelconque :

$$2\pi \frac{|P_{r+1}(y + i h(y))|}{|P_r(y + i h(y))|} = \left| \sum_{k=m_r+1}^{m_r+(m-r)} \frac{1}{y_1 - s_k(y^0) + i[h(y^0) - t_k(y^0)]} \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=m_r+1}^{m_r+(m-1)} \frac{1}{|h(y^0) - t_k(y^0)|} \leqslant (m-r)\varepsilon, \quad r = 0, 1, \ldots, m-1.$$

De là se déduit immédiatement le théorème.(1)

(1) La preuve du théorème 4.1 fournit, en particulier, la construction d'une solution élémentaire $E(x)$ de $P(D)$. En effet, nous avons construit une fonction $h(y^0) \in L^\infty_{y^0}$ telle que $|P(y_1 + i h(y^0), y^0)| \geqslant 1$ pour presque tout $y \in R^n$. Definissons alors la distribution $E(x)$ par

$$< E(x), \varphi(x) > = \int \frac{\hat{\varphi}(y_1 + i h(y^0), y^0)}{P(y_1 + i h(y^0), y^0)} dy,$$

où $\varphi(x) \in \mathcal{D}_x$ et $\hat{\varphi}(z) = \int \varphi(x) \exp(2 i \pi \langle x, z \rangle) dx$ $(z \in C^n)$. Il est facile de voir que $E(x)$ est bien une distribution, et que $P(D) E = \delta_x$. Avec une très légère modification de la preuve du théorème 4.1, on peut prouver que si $P(\lambda, D)$ est un opérateur différentiel à coefficients constants en x, mais dépendant continûment du point λ d'un espace topologique Λ, alors il existe une fonction continue $E(x, \lambda)$ de λ, à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$, telle que $P(\lambda, D_x) E(x, \lambda) = \delta_x$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. A ce sujet, voir [16]. Tous les résultats du paragraphe 1 du présent chapitre IV sont étroitement liés à la construction de solutions élémentaires et à celle de solutions élémentaires dependant, d'une certaine façon (continûment, de manière différentiable, etc.), de paramètres, pour des opérateurs à coefficients constants en x, dépendant de ces mêmes paramètres de façon convenable.

Etant donné un opérateur différentiel $P(D)$, dont on se propose d'étudier les propriétés de domination, par rapport à une certaine définition de celle-ci, les questions qui, dès l'abord, se posent naturellement, sont, dans l'ordre :

1° $P(D)$ domine-t-il tous ses dérivés $P^{(r,0,\ldots,0)}(D)$ $(r \geqslant 1)$? ceci en admettant que la direction Ox_1 joue un rôle privilégié dans les bases de domination et dans la forme de l'opérateur;

2° Si ce qui précéde est acquis, $P(D)$ domine-t-il tous ses dérivés $P^{(p)}(D)$ $(p \in N^n,\ |p| \geqslant 1)$?

3° Enfin, $P(D)$ domine-t-il tous les opérateurs d'ordre strictement inférieur au sien?

En ce qui concerne la domination mixte que nous étudions en ce moment, nous venons de voir que la réponse à la première question est affirmative, quel que soit l'opérateur différentiel à coefficients constants $P(D)$. Nous allons considérer un cas où la réponse à la deuxième question est aussi affirmative.

THÉORÈME 4.2. *Supposons $P(D)$ hypoelliptique, et normal en x_1. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $h(y) = (h(y^0), 0, \ldots, 0)$, $h(y^0) \in L^\infty(R^{n-1})$, telle qu'on ait, pour tout $y \in R^n$ et tout $p \in N^n$, $|p| \neq 0$:*

$$|P^{(p)}(y + ih(y))| \leqslant \varepsilon \, |P(y + ih(y))|.$$

Puisque $P(D)$ est hypoelliptique, il existe $M < +\infty$ tel que $|y| \geqslant M$ $(y \in R^n)$ implique $|P^{(p)}(y)| \leqslant \varepsilon |P(y)|$ pour tout $|p| \neq 0$ (voir [2], th. 3.3 et th. 3.4).(1)

D'autre part, si $|y^0| < M$, les coefficients de $P(X_1, y^0)$, comme polynôme en X_1, restent bornés et celui de X_1^m (si m est le degré de P par rapport à X_1; necessairement $m \geqslant 1$) est une constante non nulle. Or tous les polynômes $P^{(p)}(X_1, y^0)$, $|p| \neq 0$, sont de degré $\leqslant m-1$ en X_1. Par conséquent il existe $B < +\infty$ tel que $|z_1| \geqslant B$ $(z_1 \in C)$ implique :

$$|P^{(p)}(z_1, y^0)| \leqslant \varepsilon \, |P(z_1, y^0)| \quad \text{pour tout } |y^0| < M \quad \text{et tout} \quad |p| \neq 0.$$

Définissons alors $h(y^0)$ ainsi : $h(y^0) = 0$ si $|y^0| \geqslant M$; $h(y^0) = B$ si $|y^0| < M$. On voit aussitôt que $h(y^0)$ remplit les conditions requises.

Nous allons maintenant tâcher d'apporter une réponse, dans certains cas, à notre question n° 3.

Pour ceci, il va falloir introduire une nouvelle classe d'opérateurs.

Soit $P(X) \in C[X_1, \ldots, X_n]$ de degré total m, dont nous noterons $P_m(X)$ la partie homogène de degré m.

(1) Hörmander appelle « complets et de type local » les opérateurs que nous appellons hypoelliptiques.

DÉFINITION 4.1. *Nous dirons que $P(D)$ est ultraprincipal normal si $P(D)$ est normal et si $P_m(y)$ et $(\partial/\partial y_1) P_m y$ ne s'annulent simultanément dans R^n qu'au plus au point $y=0$.*

DÉFINITION 4.2. *Nous dirons que $P(D)$ est ultraprincipal s'il est semblable à un opérateur ultraprincipal normal.*

Ces définitions admettent une interprétation géométrique. En effet, la déf. 4.2 signifie qu'il existe un vecteur non nul $a=(a_1, \dots, a_n)$ de R^n tel que le seul zéro commun dans R^n des polynômes

$$P_m(y) \text{ et } a_1 \frac{\partial P_m}{\partial y_1}(y) + \cdots + a_n \frac{\partial P_m}{\partial y_n}(y)$$

soit l'origine.

Notons Γ le cône des zéros, dans R^n, du polynôme $P_m(y)$. Convenons de considérer comme tangent à Γ le long d'une génératrice double l'espace R^n lui-même. D'après ce qui précède, dire que $P(D)$ est ultraprincipal équivaut à dire que la réunion des espaces tangents à Γ n'est pas identique à R^n; cette réunion ne contient pas le vecteur a; si $P(D)$ est ultraprincipal normal, cette réunion ne contient pas l'axe des y_1. Avec notre convention, ces propriétés impliquent l'absence de génératrices doubles. En particulier, tout opérateur ultraprincipal est principal ([2], pp. 186 et 187). La réciproque est fausse, comme on le vérifie sans peine avec l'exemple de

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}.$$

Tout opérateur elliptique, tout opérateur hyperbolique normal est ultraprincipal normal. Tout opérateur hyperbolique est ultraprincipal. Le produit d'un opérateur elliptique et d'un opérateur hyperbolique (resp. normal) est ultraprincipal (resp. normal). La réciproque est fausse comme le prouvent les exemples de

$$\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} - i \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{et de} \quad \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \left(\frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_3^4} \right).$$

Le carré d'un opérateur ultraprincipal n'est ultraprincipal que si l'opérateur est elliptique, car tout zero de $P_m^2(y)$ est un zéro de $P_m(y)$ et donc de

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(P_m^2(y)) = 2 P_m(y) \frac{\partial P_m}{\partial y_j}(y) \quad (j=1, \dots, n).$$

THÉORÈME 4.3. *Soit un opérateur $P(D)$ ultraprincipal normal. Il existe une application $y \to h(y) = (h(y^0), 0, \ldots, 0)$, $h(y^0) \in L^\infty(R^{n-1})$, et des constantes A et H finies telles que, pour presque tout $y \in R^n$ et tout $t \geqslant H$:*

$$\sum_{r=1}^{m} \left| y + i h\left(\frac{y}{t}\right) t \right|^{m-r} \leqslant \frac{A}{t} \left| P\left(y + i h\left(\frac{y}{t}\right) t\right) \right|.$$

Il est clair que nous pouvons supposer $m \geqslant 1$ et $P(y)$ homogène de degré m. Pour chaque $y^0 \in R^{n-1}$, nous noterons $r_k(y^0) = s_k(y^0) + i t_k(y^0)$, s_k, t_k réels $(1 \leqslant k \leqslant m)$, les racines de $P(X_1, y^0)$ en tant que polynôme en X_1. Au cours des pages 125–126, nous avons construit une fonction $h(y^0)$ de $y^0 \in R^{n-1}$ ayant les propriétés suivantes :

1° $h(y^0)$ est définie et continue sur un ouvert Φ de R^{n-1}, dont le complémentaire est de mesure nulle.

2° $h(y^0)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs réelles et vérifie, pour tout $y^0 \in \Phi$: $N + 1 \leqslant h(y^0) \leqslant h(y_0) \leqslant N + 4m + 3$ (N est le nombre défini p. 127; on a fait $\varepsilon = 1$ dans la construction de h).

3° Pour tout $y^0 \in \Phi$, et tout $1 \leqslant k \leqslant m$ on a : $|h(y^0) - t_k(y^0)| \geqslant 1$.

Ceci rappelé, fixons arbitrairement $1 \leqslant k \leqslant m$ et $y^0 \in \Phi$. Supposons que l'on ait : $|t_k(y^0)| \geqslant 2(N + 4m + 3)$. Alors $|h(y^0)| \leqslant \frac{1}{2} |t_k(y^0)|$ et donc :

$$[t_k(y^0) - h(y^0)]^2 \geqslant t_k^2(y^0) \left[1 - \frac{|h(y^0)|}{|t_k(y^0)|}\right]^2 \geqslant \tfrac{1}{4} [t_k^2(y^0) + h^2(y^0)].$$

Supposons maintenant $|t_k(y^0)| < 2(N + 4m + 3)$. Alors :

$$[t_k(y^0) - h(y^0)]^2 \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{5(N + 4m + 3)^2} [t_k^2(y^0) + h^2(y^0)].$$

Posons alors $c^2 = 5(N + 4m + 3)^2$. On a, dans tous les cas :

$$[t_k(y^0) - h(y^0)]^2 \geqslant c^{-2} [t_k^2(y^0) + h^2(y^0)]$$

et cela est vrai quels que soient k et y^0. Ceci dit, considérons :

$$\begin{aligned} |P(y_1 + i h(y^0), y^0)|^2 &= \prod_{k=1}^{m} \{[y_1 - s_k(y^0)]^2 + [h(y^0) - t_k(y^0)]^2\} \\ &\geqslant \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \{[y_1 - s_k(y^0)]^2 + [h(y^0) - t_k(y^0)]^2\} \end{aligned}$$

puisque $[h(y^0) - t_k(y^0)]^2 \geqslant 1$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$ et tout $y^0 \in \Phi$.

Tenons alors compte de (1) et du fait que $c>1$:

$$
\begin{aligned}
|P(y_1+ih(y^0), y^0)|^2 &\geqslant \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\{[y_1-s_k(y^0)]^2+c^{-2}[t_k^2(y^0)+h^2(y^0)]\} \\
&\geqslant \frac{1}{m\,c^{2(m-1)}}\sum_{j=1}^{m}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\{[y_1-s_k(y^0)]^2+t_k^2(y^0)+h^2(y^0)\} \\
&\geqslant c^{-2(m-1)}\left[h^{2(m-1)}(y^0)+\frac{1}{m}\sum_{\substack{j=1\\k\neq j}}^{m}\prod_{k=1}^{m}|y_1-r_k(y^0)|^2\right].
\end{aligned}
$$

On retrouve ici les $Q_j(y)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}[y_1-r_k(y^0)]$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ déjà maintes fois rencontrés; et l'expression $F(y)=\sum_{k=1}^{m}|Q_k(y)|^2$, qui est une véritable fonction de y dans R^n. Remarquons que $A\,F(y)\geqslant|P_1(y)|^2$ car $2\,i\pi\,P_1(y)=\sum_{k=1}^{m}Q_k(y)$ $(A<+\infty)$.

D'autre part, pour tout $k=1, \ldots, m$, $|y_1-r_j(y^0)|^2\,F(y)\geqslant|y_1-r_j(y^0)|^2\,|Q_j(y)|^2=$ $=|P(y)|^2$. Mais en vertu de l'homogénéité de $P(y)$, il existe une constante finie C telle que $|y_1-r_j(y^0)|\leqslant C|y|$ pour tout $y\in R^n$, d'où :

$$C|y|^2\,F(y)\geqslant|P(y)|^2.$$

Prenons $|y|=1$. On a : $(A+C)\,F(y)\geqslant|P(y)|^2+|P_1(y)|^2$. Mais le second membre de cette inégalité est une fonction continue de y sur la sphère unité de R^n, ne s'annulant jamais, d'après nos hypothèses. Il en résulte qu'il existe $b>0$ tel que $F(y)\geqslant b$ pour tout $y\in R^n$, $|y|=1$. Comme $F(y)$ est une fonction positivement homogène de y de degré $2(m-1)$, on a $F(y)\geqslant b\,|y|^{2(m-1)}$ pour tout $y\in R^n$.

Finalement on voit qu'il existe une constante $B<+\infty$ telle que :

$$h(y^0)^{2(m-1)}+|y|^{2(m-1)}\leqslant B\,|P(y_1+i\,h(y^0), y^0|^2$$

pour presque tout $y\in R^n$ (précisément, pour tout y tel que $y^0\in\Phi$). Ceci implique immédiatement qu'il existe $B_1<+\infty$ tel que, pour ces mêmes y :

$$|y+i\,h(y)|^{m-1}\leqslant B_1\,|P(y+i\,h(y))|$$

en posant, comme dans l'énoncé, $h(y)=(h(y^0), 0, \ldots, 0)$.

Remplaçons, dans cette inégalité, y par $t^{-1}y$ $(t>0)$; on supposera dès lors que $y^0\in t\Phi$. En vertu de l'homogénéité, et compte tenu de ce que le complémentaire de $t\Phi$ est de mesure nulle, on obtient le résultat voulu.

Conséquence du th. 4.3 : si $P(D)$ est ultraprincipal normal d'ordre m, il équidomine, au sens exponentiel 1-mixte, les D^p $(|p|\leqslant m-1)$.

On remarque la très réelle analogie entre la démonstration du th. 4.3 et celles qui nous ont permis d'obtenir les propriétés de domination exponentielles des opérateurs hyperboliques et paraboliques. Entre ces deux cas cependant, outre la différence évidente concernant $h(y^0)$ qui n'est plus une constante, dans le th. 4.3, il y a ce fait que, dans le chap. II, les majorations se faisaient à l'aide de $\operatorname{Re} P(y_1 + ih) \overline{P_h(y+ih)}$, tandis que pour le th. 4.3 elles se sont faites avec $|P(y + ih(y^0))|^2$.

§ 2. Domination multiplicative en $\exp\left(\frac{1}{2}[t_1^2 x_1^2 + \cdots + t_n^2 x_n^2]\right)$

Nous allons avoir besoin de quelques résultats préliminaires de nature purement algébrique. Pour cela, nous considérons une algèbre associative $\mathfrak{A}$ sur le corps des complexes, avec unité (notée I), mais non commutative. Si $A \in \mathfrak{A}$ et si $P(X_1)$ est un polynôme à une indéterminée, à coefficients complexes, nous noterons $P(A)$ l'élément de $\mathfrak{A}$ obtenu par substitution de A à l'indéterminée X_1. De plus, contrairement aux conventions constamment adoptées jusqu'ici, pour un polynôme

$$P(X_1, \ldots, X_n) \in C[X_1, \ldots, X_n]$$

et un n-uplet $p \in N^n$, nous poserons ;

$$P^{(p)}(X_1, \ldots, X_n) = \left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial X_n}\right)^{p_n} P(X_1, \ldots, X_n).$$

Ces nouvelles notations sont mieux adaptées aux raisonnements qui vont suivre, où la transformation de Fourier ne jouera plus aucun rôle.

Lemme 4.3. *Soient A, B deux éléments de $\mathfrak{A}$, vérifiant $[A, B] = I$. Alors, quels que soient les polynômes P et Q à une indéterminée, à coefficients complexes, on a :*

$$Q(B)P(A) = \sum_p \frac{(-1)^p}{p!} P^{(p)}(A) Q^{(p)}(B).$$

Dans la somme du second membre, p désigne un entier (non un n-uplet !).

Il suffit de démontrer le lemme lorsque $P(X) = X^a$, $Q(X) = X^b$ (a, b entiers $\geqslant 0$). Remarquons que le résultat est banal lorsque l'un des deux nombres a, b est nul (l'autre étant quelconque).

Nous allons commencer par démontrer le lemme dans le cas où $b = 1$ et a est quelconque. Nous raisonnerons par récurrence sur a, le résultat étant vrai pour $a = 0$. On a, pour $a \geqslant 1$: $Q(B)P(A) = BA^a = (BA^{a-1})A = A^{a-1}BA - (a-1)A^{a-1}$ d'après la récurrence. Mais $A^{a-1}BA = A^{a-1}(AB - 1) = P(A)Q(B) - A^{a-1}$ et ceci prouve ce que nous voulions.

En laissant a quelconque, nous ferons maintenant la récurrence sur b, ici à partir de $b=1$, puisqu'alors le résultat est vrai. On a :

$$Q(B)\,P(A)=B^b A^a = B(B^{b-1} A^a)$$

qui est égal, d'après la récurrence, à

$$B\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\,a(a-1)\,\dots\,(a-m+1)\,(b-1)\,(b-2)\,\dots\,(b-m)\,A^{a-m}B^{b-1-m}.$$

Mais, d'après ce que nous venons de voir, $BA^{a-m}=A^{a-m}B-(a-m)A^{a-m-1}$. On en déduit :

$$B^b A^a=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\,a(a-1)\,\dots\,(a-m+1)\,(b-1)\,(b-2)\,\dots\,(b-m)\,A^{a-m}B^{b-m}-$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\,a(a-1)\,\dots\,(a-m)\,(b-1)\,(b-2)\,\dots\,(b-m)\,A^{a-m-1}B^{b-m-1}.$$

Posons $m=n$ dans la première somme, $m+1=n$ dans la seconde. Il vient :

$$B^b A^a = A^a B^b+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,a(a-1)\,\dots\,(a-n+1)\,(b-1)\,\dots\,(b-n+1)\,[(b-n)+n]\,A^{a-n}B^{b-n};$$

mais ceci n'est pas autre chose que ce que nous voulions démontrer.

Lemme 4.4. *Soient* A_i *et* B_i $2n$ *éléments de* $\mathfrak{A}\,(1\leqslant i\leqslant n)$ *vérifiant les conditions de commutation suivantes :* $[A_j, B_k]=I$ si $j=k$, $=0$ si $j\neq k$, $[A_j\, A_k]=[B_j, B_k]=0$ *pour tous* $1\leqslant j,\ k\leqslant n$. *Quels que soient les polynômes* $P,\ Q\in C\,[X_1, \dots, X_n]$, *on a :*

$$Q(B_1, \dots, B_n)\,P(A_1, \dots, A_n)=\sum_{p\in N_n}\frac{(-1)^{|p|}}{p!}\,P^{(p)}(A_1, \dots, A_n)\,Q^{(p)}(B_1, \dots, B_n).$$

Il suffit de démontrer ceci pour $P(X)=X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}$, $Q(X)=X_1^{b_1}\dots X_n^{b_n}$ où les a et les b_k sont des entiers $\geqslant 0$. Mais on a :

$$Q(B_1, \dots, B_n)\,P(A_1, \dots, A_n)=B_1^{b_1}A_1^{a_1}\dots B_n^{b_n}A_n^{a_n}$$

en vertu des relations de commutation. Or le résultat est démontré pour $n=1$; on en tire aussitôt le résultat pour n quelconque.

Etant donné un polynôme $P(X)\in C\ [X_1, \dots, X_n]$ et n éléments $U_1, \dots, U_n$ de $\mathfrak{A}$ qui commutent, convenons de noter $P(U)$ l'élément $P(U_1, \dots, U_n)$ de $\mathfrak{A}$.

Supposons alors qu'il existe une involution $U\to\tilde{U}$ dans $\mathfrak{A}$, i.e. une application anti-linéaire de $\mathfrak{A}$ dans lui-même, telle que $\tilde{I}=I$ et que $(AB)^{\sim}=\tilde{B}\tilde{A}$.

Du lemme 4.4 découle immédiatement

LEMME 4.5. *Soit n éléments A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\mathfrak{A}$ possédant les propriétés suivantes :* $[\tilde{A}_j, A_k] = I$ si $j = k$, $= 0$ si $j \neq k$, $[A_j, A_k] = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j, k \leqslant n$. *Alors, quel que soit le polynôme* $P \in C[X_1, \ldots, X_n]$, *on a :*

$$[P(A)]^{\sim} P(A) = \sum_{p \in N^n} \frac{1}{p!} P^{(p)}(A) [P^{(p)}(A)]^{\sim}.$$

Il suffit d'appliquer le lemme 4.4 en prenant $B_i = -\tilde{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $Q(X) = = \overline{P}(-X)$; $\overline{P}$ est le polynôme obtenu en remplaçant les coefficients de P par leurs complexes conjugués. Remarquer que $[P(A)]^{\sim} = \overline{P}(\tilde{A})$.

Nous supposerons maintenant que $\mathfrak{A}$ est une algèbre d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathfrak{H}$. Nous placerons sur $\mathfrak{H}$ une structure pré-hilbertienne séparée, à l'aide d'un produit hermitien $(\ , \ )$; la norme associée sera notée $\| \ \|$. Nous ferons l'hypothèse suivante : pour tout élément B de $\mathfrak{A}$, il existe un autre élément de $\mathfrak{A}$, noté $\tilde{B}$ (et nécessairement unique) tel que :

$$(Bh_1, h_2) = (h_1, \tilde{B}h_2) \quad \text{pour tous } h_1, h_2 \in \mathfrak{H}.$$

$\tilde{B}$ sera appelé l'adjoint de B et $B \to \tilde{B}$ sera l'involution dans $\mathfrak{A}$. En remarquant que si $B \in \mathfrak{A}$, $(\tilde{B}Bh, h) = (Bh, Bh) = \|Bh\|^2$ pour tout $h \in \mathfrak{H}$, on déduit banalement du lemme 4.5 :

LEMME 4.6. *Sous les hypothèses du lemme 4.5, on a, pour tout polynôme* $P \in C[X_1, \ldots, X_n]$ *et tout élément h de $\mathfrak{H}$:*

$$\|P(A)h\|^2 = \sum_{p \in N^n} \frac{1}{p!} \|[P^{(p)}(A)]^{\sim} h\|^2.$$

Remarquons alors que, quel que soit $q \in N^n$, $P^{(q)}$ possède la même propriété que P, c'est-à-dire qu'on a :

$$\begin{aligned} \|P^{(q)}(A)h\|^2 &= \sum_{p \in N^n} \frac{1}{p!} \|\widetilde{P^{(p+q)}(A)}\, h\|^2 \\ &= q! \sum_p \binom{p+q}{p} \frac{1}{(p+q)!} \|\widetilde{P^{(p+q)}(A)}\, h\|^2 \\ &\leqslant q!\, 2^m \sum_p \frac{1}{(p+q)!} \|\widetilde{P^{(p+q)}(A)}\, h\|^2 \leqslant q!\, 2^m \|P(A)h\|^2, \end{aligned}$$

en appelant m le degré total du polynôme $P(X)$. La dernière majoration résulte directement du lemme 4.6. Nous pouvons donc énoncer

LEMME 4.7. *Sous les hypothèses du lemme 4.6, on a, pour tout polynôme* $P \in C[X_1, \ldots, X_n]$ *de degré m, tout $q \in N^n$ et tout élément h de $\mathfrak{H}$:*

$$\frac{1}{q!}\|P^{(q)}(A)h\|^2 \leqslant 2^m \|P(A)h\|^2.$$

Reste à appliquer ces résultats. Posons, pour simplifier, $D_j = \partial/\partial x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Nous choisirons

comme espace $\mathfrak{H}$: $\mathcal{D}(R^n)$ avec la norme de L^2;

comme opérateurs A_j : les $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{t_j}D_j - t_j x_j\right)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ où les t_j sont des nombres >0 quelconques.

Les adjoints se définiront au sens des opérateurs non bornés de L^2, dont le domaine de définition contient $\mathcal{D}$. L'adjoint $\tilde{A}_j$ de A_j sera donc $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{t_j}D_j + t_j x_j\right)$ défini lui aussi sur $\mathcal{D}$. On prend ensuite les restrictions à $\mathcal{D}$.

Il est facile de vérifier que $\tilde{A}_j A_j - A_j \tilde{A}_j = I$ et que les autres conditions d'application du lemme 4.7 sont satisfaites.

Soit alors $P(X) \in C[X_1, \ldots, X_n]$ de degré m. Posons :

$$P_t(X) = P(\sqrt{2}\,t_1 X_1, \ldots, \sqrt{2}\,t_n X_n).$$

Le lemme 4.7 énonce que l'on a, pour tout $p \in N^n$ et toute $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\frac{1}{p!}\|(P_t)^{(p)}(A)\varphi\|_{L^2}^2 \leqslant 2^m \|P_t(A)\varphi\|_{L^2}^2.$$

Mais $$(P_t)^{(p)}(X) = 2^{|p|/2} t_1^{p_1} \ldots t_n^{p_n} P^{(p)}(\sqrt{2}\,t_1 X_1, \ldots, \sqrt{2}\,t_n X_n).$$

On a donc :

$$\frac{1}{p!}\|P^{(p)}(D_1 - t_1^2 x_1, \ldots, D_n - t_n^2 x_n)\varphi\|_{L^2}^2 \leqslant 2^{m-p} t_1^{-2p_1} \ldots t_n^{-2p_n} \|P(D_1 - t_1^2 x_1, \ldots, D_n - t_n^2 x_n)\varphi\|_{L^2}^2$$

pour tout $p \in N^n$ et toute $\varphi \in \mathcal{D}$.

Remarquons alors que $(D_j - t_j^2 x_j)[\exp(\frac{1}{2}t_j^2 x_j^2)\varphi] = \exp(\frac{1}{2}t_j^2 x_j^2) D_j \varphi$.

Comme la majoration précédente est valable pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, nous avons le droit d'y remplacer φ par $\exp\{\frac{1}{2}(t_1^2 x_1^2 + \cdots + t_n^2 x_n^2)\}\varphi$, et par conséquent d'énoncer :

THÉORÈME 4.4. *Soit un opérateur différentiel $P(D)$ à coefficients constants sur R^n, d'ordre m. On a, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, pour tout $p \in N^n$ et tout $t \in R^n$:*

$$\frac{2^{|p|}}{p!}\|\exp\{\tfrac{1}{2}(t_1^2 x_1^2 + \cdots + t_n^2 x_n^2)\} P^{(p)}(D)\varphi\|_{L^2}^2$$
$$\leqslant 2^m t_1^{-2p_1} \ldots t_n^{-2p_n} \|\exp\{\tfrac{1}{2}(t_1^2 x_1^2 + \cdots + t_n^2 x_n^2)\} P(D)\varphi\|_{L^2}^2.$$

Que ce théorème ait une signification de domination est évident : il suffit de prendre les t_j^2 suffisamment grands pour que le facteur devant le second membre soit aussi petit qu'on l'aura voulu :

COROLLAIRE 1. *Soit un opérateur différentiel $P(D)$ à coefficients constants sur R^n, par ailleurs quelconque; $P(D)$ équidomine multiplicativement tous ses dérivés $P^{(p)}(D)$, $|p| \neq 0$. On peut prendre comme bases de domination des suites quelconques de fonctions* $\exp(t_k^2 |x|^2)$, *où les nombres t_k tendent vers l'infini.*

Le résultat énoncé par le corollaire 1 va un peu en sens contraire de celui énoncé par le th. 1.4 : il implique en effet que tout opérateur différentiel à coefficients constants est multiplicativement dominant.

COROLLAIRE 2. *Soit, pour chaque $p \in N^n$, une fonction $a_p(x)$ localement $-L^\infty$. Pour tout ouvert Ω borné de R^n, on peut trouver une constante C_Ω finie qu'on ait, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:*

$$\| P(D)\varphi \|_{L^2} \leqslant C_\Omega \| P(D)\varphi + \sum_{p \in N^n} a_p(x) P^{(p)}(D)\varphi \|_{L^2}.$$

Cela résulte immédiatement du corollaire 1 et du théorème 1.3.

Cette inégalité permet, de la facon classique, d'obtenir des résultats d'inversibilité, au sens de $L^2(\Omega)$ (et éventuellement d'autres espaces, si $P(D)$ a les propriétés requises), pour l'opérateur $P(D) + \sum_p a_p(x) P^{(p)}(D)$.

Signalons que le lemme 2.7 d'Hörmander [2] implique l'inégalité du coroll. 2 dans le cas d'un ouvert de diamètre assez petit, cet « assez petit » pouvant facilement se préciser par la connaissance des fonctions $a_p(x)$.

Le théorème 4.4 lui-même constitue, en quelque sorte, une extension du lemme 2.7 de Hörmander : en effet il prouve que la majoration des $P^{(p)}(D)$ ($p \in N^n$) par $P(D)$ peut être rendue globale (i.e. valable pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$) à condition de remplacer la norme de L^2 relativement à la mesure dx, par la norme de l'espace L^2 relatif à la mesure $\exp |x|^2 \, dx$ (ou aux mesures analogues précisées dans l'énoncé). On peut évidemment remplacer $\mathcal{D}(R^n)$ par un complété convenable.

Références bibliographiques

[1]. L. GÅRDING, *Cauchy problem for hyperbolic equations.* Spring quarters 1957, Univ. of Chicago.
[2]. L. HÖRMANDER, Thèse, *Acta Math.*, 94 (1955), 161–248.
[3]. ——, *Uniqueness in Cauchy Problems.* Mimeograph of the University of Stockholm, 1958.

[4]. J. L. LIONS, Thèse, *Acta Math.*, 94 (1955), 13–153.
[5]. ——, *Boundary value problems.* Univ. of Kansas, 1957.
[6]. ——, *C. R. Acad. Sci Paris*, 242 (1956), 3028–3030.
[7]. L. NIRENBERG, Uniqueness in Cauchy problems for differential equations with constant leading coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.*, X, No. 1 (1957), 89–105.
[8]. L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions.* Paris, Hermann, 1950.
[9]. ——, Séminaire, Inst. H. Poincaré, 1953–1954.
[10]. ——, Distributions à valeurs vectorielles. *Annales de l'Institut Fourier*, 1958.

F. TRÈVES, Notes aux *C. R. Acad. Sci. Paris* :

[11]. ——, Sur les correspondances vectorielles. 245 (1957), 1200–1203.
[12]. ——, Sur les correspondances vectorielles. 245 (1957), 1288–1291.
[13]. ——, Domination et problèmes aux limites de type mixte. 245 (1957), 2454–2457.
[14]. ——, Domination et opérateurs hyperboliques. 246 (1958), 680–683.
[15]. ——, Domination et opérateurs paraboliques. 246 (1958), 867–870.
[16]. ——, Solution élémentaire d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre. 242 (1956), 1250–1252.