Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Bemerkungen zur Optimierung eines gewissen Iterationsverfahrens

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 5, 315–324

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103484`

BEMERKUNGEN ZUR OPTIMIERUNG EINES GEWISSEN ITERATIONSVERFAHRENS

Miroslav Šisler

(Eingegangen am 5. October 1972)

Die Arbeiten [3] und [4] befassten sich mit den Problemen der Konvergenz eines gewissen Iterationsverfahrens für das lineare Gleichungssystem

$$x = \boldsymbol{B}x + \boldsymbol{b}\,. \tag{1}$$

Diese Arbeit knüpft eng an die Arbeiten [3] und [4] an und befasst sich mit der Bestimmung des Optimalparameters vom Gesichtspunkt der Konvergenzgeschwindigkeit des in den Arbeiten [3], [4] untersuchten Iterationsverfahrens für einige Spezialfälle.

Es wird wieder vorausgesetzt, dass die Matrix $\boldsymbol{B}$ von der Form $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}$ ist, wo $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{U}$ die Bedingungen (5) der Arbeit [3] erfüllen. Die Iterationsvorschrift ist dann von der Form

$$\boldsymbol{x}_{\nu+1} = \boldsymbol{T}(\omega)\,\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{b}\,, \tag{2}$$

wo $\boldsymbol{T}(\omega)$ die von den Matrizen $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{U}$ und vom Parameter ω abhängende Matrix ist und die Form

$$\boldsymbol{T}(\omega) = (\boldsymbol{E} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}\,[(1 - \omega)\,\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}]$$

hat. Für $\omega = 0$ geht (wie wir schon wissen) die Formel (2) in die Form

$$\boldsymbol{x}_{\nu+1} = (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\,\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{b}$$

über (Jacobi-Verfahren) und für $\omega = 1$ bekommt man die Iterationsformel

$$\boldsymbol{x}_{\nu+1} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{L})^{-1}\,\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{b}$$

Die Arbeit [4] befasste sich mit der Frage, für welche Werte des Parameters ω das Iterationsverfahren (2) konvergiert (d. h. wann der Spektralradius $\varrho(\boldsymbol{T}(\omega))$ der Matrix $\boldsymbol{T}(\omega)$ kleiner als 1 ist). Es wurde dabei vorausgesetzt, dass das ursprüngliche Jacobi-Verfahren konvergiert, d. h. dass $\varrho(\boldsymbol{B}) = \varrho(\boldsymbol{T}(0)) < 1$ ist. In der Arbeit [4] wurde gezeigt, dass immer ein Intervall (a, b) mit $a < 0$, $1 < b$ existiert, sodass für $\omega \in (a, b)$ $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$ ist (siehe Satz 2 in [4]), wobei gilt: $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) \geqq \varrho(\mathbf{B}) > > \varrho(\mathbf{T}(1))$ für $\omega \leqq 0$ (siehe Sätze 1 und 3 in [4]). In der vorliegenden Arbeit geben wir eine Teilantwort auf die Frage über die Lage des Optimalparameters ω_b, d. h. wir geben eine solche Zahl ω_b an, für die $\varrho(\mathbf{T}(\omega))$ minimal ist. Es ist klar, dass $0 < < \omega_b < b$ ist mit $1 < b$.

In der Arbeit [3] wurde der folgende Satz bewiesen, der den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten μ der Matrix $\mathbf{B}$ und den Eigenwerten λ der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$ ausdrückt (siehe Satz 1 in [3]):

Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$, $\omega \neq 0$. Falls $\omega \neq 1$ oder $\omega = 1$, $\lambda \neq 0$ ist und falls die Zahl μ die Beziehung

$$\lambda^p = \mu^p(1 - \omega + \lambda\omega)^k \tag{3}$$

erfüllt, ist μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$. Falls dagegen μ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$ ist, dann ist jede der Gleichung (3) ($\omega \neq 0$) genügende Zahl λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$. (Die Zahlen p und k werden durch die Bedingungen (5) der Arbeit [3] gegeben).

Für den Fall, wenn $p = 2$, $k = 1$ ist und wenn für alle Eigenwerte μ_i der Matrix $\mathbf{B}$ die Ungleichungen $\mu_i^2 \geqq 0$ gelten, wurde in der Arbeit [3] der Satz 4 bewiesen. Mit dem Fall wenn für alle Werte i $\mu_i^2 \leqq 0$ ist, befasst sich der folgende Satz:

1. *Es sei $p = 2$, $k = 1$ und $\mu_i^2 \leqq 0$ für alle i. Dann gelten folgende zwei Behauptungen:*

a) Falls $1 + 1/\varrho^2(\mathbf{B}) < \omega < \frac{1}{2}(1 - 1/\varrho^2(\mathbf{B}))$ ist, ist $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$.

b) Der Parameter ω_b, für den $\varrho(\mathbf{T}(\omega))$ minimal ist, liegt im Intervall $(0,1)$ und es gilt

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - \varrho^2(\mathbf{B}))}}.$$

Dabei ist

$$\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = \frac{\varrho^2(\mathbf{B})}{1 + \sqrt{(1 - \varrho^2(\mathbf{B}))}}.$$

Den Beweis dieses Satzes werden wir nicht durchführen, da er vollständig dem Beweis des Satzes 4 in der Arbeit [3] entspricht.

Nun werden wir uns mit weiteren Spezialfällen befassen. Es gilt der folgende Satz:

2. *Es sei p eine ungerade Zahl, $k = 1$ und $\mu_i^p \geqq 0$ für alle i. Dann is der Optimalparameter ω_b gleich 1 und es gilt*

$$\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = \varrho(\mathbf{T}(1)) = \varrho^{p/(p-1)}(\mathbf{B}).$$

Bemerkung. In diesem Falle tritt die schnellste Konvergenz für das Gauss-Seidelsche Iterationsverfahren ein.

Beweis. Für einen festgewählten Wert i hat die Gleichung (3) die Form

$$\lambda^p - \mu_i^p(1 - \omega + \lambda\omega) = 0\,. \tag{4}$$

Für $\omega = 1$ ist die Gleichung (4) von der Form $\lambda^p - \mu_i^p\lambda = 0$, sodass sie eine reelle Wurzel $\lambda = 0$ hat. Die übrigen Nullstellen sind dabei $(p - 1)$-ste Wurzeln der Zahl μ_i^p. Man kann leicht beweisen, dass für $\omega < 1$ die Gleichung (4) eine reelle Wurzel $\lambda < -|\mu_i|^{p/(p-1)}$ und für $\omega > 1$ eine reelle Wurzel $\lambda > |\mu_i|^{p/(p-1)}$ hat. Für $\omega < 1$ ist nämlich der Wert der linken Seite der Gleichung (4) für $\lambda = -|\mu_i|^{p/(p-1)}$ positiv und die Gleichung muss mit Rücksicht auf ihren ungeraden Grad eine reelle Wurzel kleiner als die Zahl $-|\mu_i|^{p/(p-1)}$ haben. Ähnlicherweise für $\omega > 1$.

Es ist also $\omega_b = 1$ und $\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = \varrho(\mathbf{T}(1)) = \varrho^{p/(p-1)}(\mathbf{B})$, womit der Satz 2 bewiesen ist.

3. *Es sei $p = 3$, $k = 1$ und $\mu_i^3 \leqq 0$ für alle i. Dann ist der Optimalparameter die Zahl*

$$\omega_b = \frac{\varrho^3(\mathbf{B}) + (1 - \sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))})^3}{\varrho^3(\mathbf{B})\sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))}}$$

(*es ist offensichtlich* $0 < \omega_b < 1$) *und für den optimalen Spektralradius gilt*

$$\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = \sqrt{(2(\sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))} - 1))} < \varrho^{3/2}(\mathbf{B})$$

(*es ist also* $\varrho(\mathbf{T}(\omega_b) < \varrho(\mathbf{T}(1)))$.

Beweis. Es sei $\mu_i^3 < 0$. Für $\omega = 1$ ist dann die Gleichung (4) von der Form $\lambda^3 - \mu_i^3\lambda = 0$, sodass sie eine reelle Wurzel $\lambda_1 = 0$ und zwei komplex adjungierte Wurzeln $\lambda_{2,3} = \pm i|\mu_i|^{3/2}$ hat. Es ist also $\varrho(\mathbf{T}(1)) = \max\limits_i |\mu_i|^{3/2} = \varrho^{3/2}(\mathbf{B})$.

Es sei nun $\omega \neq 1$ (wie wir schon wissen, können wir uns auf das Intervall $\omega > 0$ beschränken). Die Gleichung (4) hat dann die Form

$$\lambda^3 - \mu_i^3\lambda\omega - \mu_i^3(1 - \omega) = 0\,. \tag{5}$$

Diese Gleichung hat genau eine reelle Wurzel $\lambda_1 = \varepsilon \neq 0$ (für $\omega > 1$ ist $\varepsilon > 0$ und für $\omega < 1$ ist $\varepsilon < 0$) und zwei komplex adjungierte Wurzeln λ_2, λ_3 $(\lambda_2 = \bar{\lambda}_3)$. Es gilt die Beziehung

$$\mu_i^3(1 - \omega) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \varepsilon|\lambda_2|^2 = \varepsilon|\lambda_3|^2$$

d.h.

$$|\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = \frac{\mu_i^3(1 - \omega)}{\varepsilon}\,. \tag{6}$$

Da ε die Wurzel der Gleichung (5) ist, gilt ferner $\varepsilon^3 - \mu_i^3 \varepsilon\omega - \mu_i^3(1 - \omega) = 0$, d. h.

$$\omega = \frac{\mu_i^3 - \varepsilon^3}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)} \tag{7}$$

(der Fall $\varepsilon = 1$ ist ausgeschlossen, da dann $\varrho(\boldsymbol{T}(\omega)) \geqq 1$ gelten würde). Aus (6) und (7) folgt also

$$|\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = \frac{\varepsilon^2 - \mu_i^3}{1 - \varepsilon}. \tag{8}$$

Für $\omega \neq 1$ sind also die Quadrate der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (5) die Zahlen

$$|\lambda_1|^2 = \varepsilon^2, \quad |\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = \frac{\varepsilon^2 - \mu_i^3}{1 - \varepsilon}.$$

Die grösste von diesen Zahlen bezeichnen wir mit $\Lambda(\mu_i, \varepsilon)$. Ferner bezeichnen wir

$$E(\mu_i, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 - \mu_i^3}{1 - \varepsilon} \tag{9}$$

und werden den Verlauf der Funktion $E(\mu_i, \varepsilon)$ im Intervalle $\varepsilon \in (-\infty, 1)$ untersuchen. Man setze $\varepsilon_{\mu_i} = 1 - \sqrt{(1 - \mu_i^3)}$. Es ist offensichtlich $-1 < -|\mu_i|^{3/2} < \varepsilon_{\mu_i} < 0$, da $\mu_i^3 < 0$ ist. Durch Differenzieren der Funktion $E(\mu_i, \varepsilon)$ stellt man leicht fest, dass sie fallend im Intervalle $(-\infty, \varepsilon_{\mu_i}\rangle$ und wachsend im Intervalle $\langle \varepsilon_{\mu_i}, 1)$ ist, sodass sie im Intervalle $(-\infty, 1)$ ihren einzigen Minimalwert im Punkte ε_{μ_i} annimmt, welcher der Zahl

$$E(\mu_i, \varepsilon_{\mu_i}) = \frac{(1 - \sqrt{(1 - \mu_i^3)})^2 - \mu_i^3}{\sqrt{(1 - \mu_i^3)}} = 2(\sqrt{(1 - \mu_i^3)} - 1) \tag{10}$$

gleich ist. Ferner zeigt man leicht, dass im Intervalle $\langle -|\mu_i|^{3/2}, |\mu_i|^{3/2}\rangle$ die Ungleichung

$$\varepsilon^2 \leqq E(\mu_i, \varepsilon) \tag{11}$$

gilt.

Es sei nun $|\mu_{i_0}| = \max_i |\mu_i| = -M$ (es ist also $M < 0$). Da $\mu_i^3 \leqq 0$ ist für alle i, ist $\mu_{i_0}^3 = M^3 = -\varrho^3(M)$. Um nun den Optimalparameter ω_b festzustellen, muss man offensichtlich den Wert $\varepsilon \in \langle -|M|^{3/2}, |M|^{3/2}\rangle$ suchen, für den der Ausdruck $\max_i \Lambda(\mu_i, \varepsilon)$ minimal ist. Zuerst beweisen wir, dass für alle i und $\varepsilon \in \langle -|M|^{3/2}, |M|^{3/2}\rangle$ die Ungleichung

$$\Lambda(\mu_i, \varepsilon) \leqq \Lambda(M, \varepsilon)$$

gilt. Aus (11) folgt vor allem, dass für alle $\varepsilon \in \langle -|M|^{3/2}, |M|^{3/2}\rangle$ die Ungleichung

$$\varepsilon^2 \leqq E(M, \varepsilon) \tag{12}$$

gilt. Nach einigen Umformungen und mit Hilfe der Beziehung (9) beweist man ferner, dass für alle i und für $\varepsilon \in \langle -|M|^{3/2}, |M|^{3/2} \rangle$ die Ungleichung

$$E(\mu_i, \varepsilon) \leqq E(M, \varepsilon) \tag{13}$$

gilt. Aus (12) und (13) folgt ferner, dass

$$\Lambda(\mu_i, \varepsilon) = \max(\varepsilon^2, E(\mu_i, \varepsilon)) \leqq \max(\varepsilon^2, E(M, \varepsilon)) = E(M, \varepsilon) = \Lambda(M, \varepsilon)$$

für alle i gilt, und es ist also

$$\max_i \Lambda(\mu_i, \varepsilon) = \Lambda(M, \varepsilon) = E(M, \varepsilon) .$$

Nach (10) gilt weiter

$$\min_{\varepsilon \in \langle -|M|^{3/2}, |M|^{3/2} \rangle} \max_i \Lambda(\mu_i, \varepsilon) = \min_\varepsilon E(M, \varepsilon) = E(M, \varepsilon_M) = \tag{14}$$
$$= 2(\sqrt{(1 - M^3)} - 1) = 2(\sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))} - 1) .$$

Nach (7) und (14) ist also

$$\min_\omega \varrho(\mathbf{T}(\omega)) = \varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = 2(\sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))} - 1) < \varrho^{3/2}(\mathbf{B}) ,$$

wo

$$\omega_b = \frac{M^3 - \varepsilon_M^3}{M^3(1 - \varepsilon_M)} = \frac{M^3 - (1 - \sqrt{(1 - M^3)})}{M^3 \sqrt{(1 - M^3)}} =$$
$$= \frac{\varrho^3(\mathbf{B}) + [1 - \sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))}]^3}{\varrho^3(\mathbf{B}) \sqrt{[1 + \varrho^3(B)]}} < 1 ,$$

ist, was zu beweisen war.

Zum Schluss beweisen wir noch die folgende Behauptung:

4. *Es sei $p = 3$, $k = 2$ und $\mu_i^3 \geqq 0$ für alle i. Dann ist der Optimalparameter ω_b die einzige Lösung der Gleichung*

$$4\varrho^3(\mathbf{B})\, \omega^3 - 27(\omega - 1) = 0$$

die im Intervalle $(1, \frac{3}{2})$ liegt, und der optimale Spektralradius gleicht der Zahl

$$\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = 9 \left(\frac{\omega_b - 1}{\omega_b} \right)^2 .$$

Beweis. Ähnlicherweise wie im Beweise von Satz 3 wird vorausgesetzt, dass $\omega > 0$ ist. Für $\omega = 1$ und für ein festgewähltes i ist die Gleichung (3) von der Form $\lambda^3 - \mu_i^3 \lambda^2 = 0$, sodass sie eine zweifache Wurzel $\lambda = 0$ und eine reelle Wurzel $\lambda = \mu_i^3$ hat. Es ist also $\varrho(\mathbf{T}(1)) = \max_i \mu_i^3 = \varrho^3(\mathbf{B})$.

Es sei $0 < \omega < 1$ und $\mu_i^3 > 0$. Dann ist die Gleichung (3) von der Form

$$\lambda^3 - \mu_i^3(1 - \omega + \lambda\omega)^2 = 0 . \tag{15}$$

Diese Gleichung hat offensichtlich eine reelle Wurzel $\lambda > \mu_i^3$, da für $\lambda = \mu_i^3$ ihre linke Seite der Zahl $\mu_i^3(1 - \omega)(\mu_i^6 - 1) < 0$ gleicht. Für $0 < \omega < 1$ ist also $\varrho(\boldsymbol{T}(\omega)) > \varrho(\boldsymbol{T}(1))$, sodass der Optimalparameter ω_b in diesem Intervalle nicht liegen kann.

Wir können uns also auf das Intervall $\omega > 1$ beschränken. Es sei $\mu_i^3 > 0$. Die Gleichung (15) schreiben wir in der Form

$$\lambda^3/\mu_i^3 = (1 - \omega + \lambda\omega)^2$$

und definieren die Funktionen $m(\mu_i, \lambda) = \lambda^3/\mu_i^3$, $g(\omega, \lambda) = (1 - \omega + \lambda\omega)^2$. Die graphische Darstellung der Funktion m ist eine Parabel dritten Grades mit dem Scheitelpunkt $[0,0]$ und die Funktion g stellt eine Parabel zweiten Grades dar, die durch den Punkt $[1,1]$ geht, die Achse λ im Punkte $(\omega - 1)/\omega$ berührt und deren Tangente im Punkte $\lambda = 1$ den Anstieg 2ω hat.

Man untersuche jetzt die Frage, für welche Werte $\omega > 1$ sich die Graphen beider Funktionen m und g berühren. Wenn man einen solchen Wert mit ω_t bezeichnet und wenn λ_t der entsprechende Berührungspunkt ist, müssen gleichzeitig die Bedingungen

$$\lambda_t^3/\mu_i^3 = (1 - \omega_t + \lambda_t\omega_t)^2 , \tag{16}$$

$$3\lambda_t^2/\mu_i^3 = 2\omega_t(1 - \omega_t + \lambda_t\omega_t) \tag{17}$$

erfüllt sein. Wenn man die erste bzw. zweite Gleichung durch die Zahl $2\omega_t$ bzw. $1 - \omega_t + \lambda_t\omega_t$ multipliziert und die resultierenden Gleichungen addiert, bekommt man die Gleichung

$$(3\lambda_t^2/\mu_i^3)(1 - \omega_t + \lambda_t\omega_t) = 2\omega_t(\lambda_t^3/\mu_i^3) . \tag{18}$$

Diese Gleichung ist vor allem für $\lambda_t = 0$ erfüllt (dann ist allerdings nach (16) $1 - \omega_t = 0$ oder $\omega_t = 1$, was ausgeschlossen wurde). Solange $\lambda_t \neq 0$ ist, ist die Gleichung (18) erfüllt, wenn

$$3 - 3\omega_t + \lambda_t\omega_t = 0 \tag{19}$$

gilt. Der Fall $\lambda_t = 3$ ist mit Rücksicht auf (18) ausgeschlossen. Es ist also $\lambda_t - 3 \neq 0$ und aus (19) folgt dann

$$\omega_t = \frac{3}{3 - \lambda_t} . \tag{20}$$

Nach Einsetzen von (20) in (16) bekommt man leicht die Gleichung

$$f(\lambda_t) = (\lambda_t - 3)^2 \lambda_t - 4\mu_i^3 = 0 . \tag{21}$$

Da $f(0) = -4\mu_i^3 < 0, f(1) = 4 - 4\mu_i^3 > 0, f(3) = -4\mu_i^3 < 0$ ist, hat die Gleichung (21) eine reelle Wurzel in den Intervallen $(0,1)$, $(1,3)$ und $(3, \infty)$. Aus (20) folgt ferner, dass der Wurzel $\lambda_t \in (0,1)$ (man bezeichtet sie mit $\lambda_{t_1}(\mu_i)$) der Parameterwert $\omega_{t_1}(\mu_i) \in (1, \frac{3}{2})$ entspricht. Ähnlicherweise entspricht der Wurzel $\lambda_{t_2}(\mu_i) \in (1,3)$ bzw. $\lambda_{t_3}(\mu_i) \in (3, \infty)$ der Parameterwert $\omega_{t_2}(\mu_i) \in (\frac{3}{2}, \infty)$ bzw. $\omega_{t_3}(\mu_i) \in (-\infty, 0)$. Im Intervalle $\omega > 1$ liegen also nur die Werte $\omega_{t_1}(\mu_i)$ und $\omega_{t_2}(\mu_i)$. Um nun den Optimalparameter ω_b zu bestimmen, werden wir zuerst die Frage lösen, für welchen Wert $\omega > 1$ das Maximum der Quadrate der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (15) minimal ist. Es gilt dabei, dass $1 < \omega_{t_1}(\mu_i) < \omega_{t_2}(\mu_i)$.

Für $\omega \geqq \omega_{t_2}(\mu_i)$ stellt man leicht fest, dass die Gleichung (15) eine reelle Wurzel hat, die grösser oder gleich der Zahl $\lambda_{t_2}(\mu_i) > \lambda_{t_1}(\mu_i) > 1$ ist. Dazu genügt zu beweisen, dass für $\omega \geqq \omega_{t_2}(\mu_i)$ und $\lambda = \lambda_{t_2}(\mu_i)$ die linke Seite der Gleichung (15) nichtpositiv ist, d. h. dass $\lambda_{t_2}^3(\mu_i) - \mu_i^3(1 - \omega + \lambda_{t_2}(\mu_i)\,\omega)^2 \leqq 0$ gilt. Das folgt aus der Tatsache, dass für $\omega = \omega_{t_2}(\mu_i)$ die Gleichheit eintritt und dass die Ableitung der Funktion auf der linken Seite der Ungleichung der negativen Zahl $-2\mu_i^3[\omega(\lambda_{t_2}(\mu_i) - - 1) + 1]$ gleicht. Wir können uns also auf das Intervall $1 < \omega < \omega_{t_2}(\mu_i)$ beschränken. Zur Abkürzung werden wir im weiteren λ_{t_i} und ω_{t_i} statt $\lambda_{t_i}(\mu_i)$ und $\omega_{t_i}(\mu_i)$ schreiben.

Es sei jetzt $1 < \omega < \omega_{t_1}$. Wir werden beweisen, dass dann die Gleichung (15) eine reelle Wurzel $\lambda > \lambda_{t_1}$ besitzt. Es genügt zu beweisen, dass die linke Seite dieser Gleichung für $\lambda = \lambda_{t_1}$ negativ ist. Würde die umgekehrte Ungleichung $\lambda_{t_1}^3 - \mu_i^3(1 - - \omega + \lambda_{t_1}\omega)^2 \geqq 0$ gelten, würde mit Rücksicht auf (16) $\omega_{t_1} \leqq \omega$ gelten, was aber ein Widerspruch ist.

Nach einer Zusammenfassung der höher angeführten Fälle bekommt man die Behauptung, dass der Maximalwert der Quadraten der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (15) für $\omega \in (0, \omega_{t_1})$ und $\omega \in \langle\omega_{t_2}, \infty)$ grösser als die Zahl $|\lambda_{t_1}|^2$ ist. Es bleibt der Fall zu untersuchen, wenn $\omega_{t_1} \leqq \omega < \omega_{t_2}$ ist.

Es sei zuerst $\omega = \omega_{t_1}$. Wir beweisen jetzt, dass der Maximalwert der Quadraten der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (15) der Zahl $|\lambda_{t_1}|^2$ gleicht. Aus (16) und (17) folgt, dass die Gleichung (15) für $\omega = \omega_{t_1}$ eine zweifache reelle Wurzel λ_{t_1} und eine weitere reelle Wurzel $\varepsilon_{t_1}(\mu_i)$ (im weiteren schreiben wir kurz ε_{t_1}) hat. Aus der Beziehung $\mu_i^3(1 - \omega_{t_1})^2 = \lambda_{t_1}^2\varepsilon_{t_1}$ folgt, dass

$$\varepsilon_{t_1} = \frac{\mu_i^3(1 - \omega_{t_1})^2}{\lambda_{t_1}^2} \tag{22}$$

ist. Es gilt dabei, dass $\varepsilon_{t_1} < \lambda_{t_1}$ ist. Wenn nämlich die umgekehrte Ungleichung gelten würde, würde nach (22) $\lambda_{t_1}^3 - \mu_i^3(1 - \omega_{t_1})^2 \leqq 0$ gelten und nach (16) würde ferner $\mu_i^3\lambda_{t_1}^2\omega_{t_1}^2 - 2\mu_i^3(1 - \omega_{t_1})\,\lambda_{t_1}\omega_{t_1} \leqq 0$ gelten. Aus dieser Ungleichung und aus (20) würde nach Umformungen die Ungleichung $\lambda_{t_1} \leqq 0$ folgen, was ein Widerspruch ist; dadurch ist die Behauptung bewiesen.

Es sei jetzt $\omega_{t_1} < \omega < \omega_{t_2}$. Da die linke Seite der Gleichung (15) für $\lambda = 0$ negativ und für $\lambda = (\omega - 1)/\omega$ $(0 < (\omega - 1)/\omega < 1)$ positiv ist, hat die Gleichung (15) eine reelle Wurzel $\lambda_1 = \varepsilon < (\omega - 1)/\omega < 1$ (ε hängt allerdings von μ_i und ω ab). Das ist aber die einzige reelle Wurzel im Intervalle $(0, (\omega - 1)/\omega)$, da die Funktion m hier wachsend und die Funktion g fallend ist. Es ist offensichtlich $0 < \varepsilon_{t_1} < \varepsilon < < \varepsilon_{t_2} < 1$, wo ε_{t_2} die einzige reelle Wurzel der Gleichung (15) für $\omega = \omega_{t_2}$ bezeichnet. Die Wurzel $\lambda_1 = \varepsilon$ ist ferner die einzige Wurzel der Gleichung (15). Das kann man folgenderweise beweisen: Die Diskriminante der Gleichung (15) (das ist eine Gleichung dritten Grades) gleicht der Zahl $4\mu_i^3\omega^3 - 27(\omega - 1)$. Die Zahlen ω_{t_1}, ω_{t_2} und ω_{t_3} sind ferner die reellen Wurzeln der Gleichung $4\mu_i^3\omega^3 - 27(\omega - 1) = 0$ mit Rücksicht auf die Beziehungen (20) und (21). Da $\omega_{t_3} < \omega_{t_1} < \omega_{t_2}$ ist, muss für $\omega_{t_1} < \omega < \omega_{t_2}$ die Ungleichung $4\mu_i^3\omega^3 - 27(\omega - 1) < 0$ gelten. Da die Diskriminante der kubischen Gleichung (15) negativ ist, muss diese Gleichung für $\omega_{t_1} < < \omega < \omega_{t_2}$ ausser der reellen Wurzel $\lambda_1 = \varepsilon$ noch zwei komplex adjungierte Wurzeln λ_2, λ_3 ($\lambda_2 = \bar{\lambda}_3$) besitzen, die für $\omega \to \omega_{t_1}$ offensichtlich in die zweifache Wurzel λ_{t_1} übergehen.

Nun gilt die Beziehung $\mu_i^3(1 - \omega)^2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \varepsilon|\lambda_2|^2 = \varepsilon|\lambda_3|^2$, d. h.

$$|\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = \frac{\mu_i^3(1 - \omega)^2}{\varepsilon}. \tag{23}$$

Da ε eine Wurzel der Gleichung (15) ist, gilt die Beziehung

$$\varepsilon^3 - \mu_i^3\varepsilon^2\omega^2 - 2\mu_i^3\varepsilon\omega(1 - \omega) - \mu_i^3(1 - \omega)^2 = 0$$

d. h. (mit Rücksicht auf $\varepsilon \neq 1$)

$$\omega^2 - \frac{2}{1 - \varepsilon}\,\omega + \frac{\mu_i^3 - \varepsilon^3}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)^2} = 0\,.$$

Die quadratische Gleichung für ω hat die Wurzeln

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{1 - \varepsilon}\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^3}{\mu_i^3}\right)}\right) = \frac{\mu_i^3 \pm \sqrt{(\varepsilon^3\mu_i^3)}}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)}\,.$$

Da die Wurzel ε, wie wir schon wissen, im Intervalle $(0, (\omega - 1)/\omega)$ liegt, kommt nur die Wurzel

$$\omega = \frac{\mu_i^3 + \sqrt{(\varepsilon^3\mu_i^3)}}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)} \tag{24}$$

in Betracht. (Für die zweite Wurzel gilt nämlich die Ungleichung $(\omega - 1)/\omega < \varepsilon$, was nicht möglich ist.) Aus (23) und (24) folgt

$$|\lambda_2|^3 = |\lambda_3|^3 = \frac{\varepsilon(\mu_i^3 + \sqrt{(\varepsilon\mu_i^3)})^2}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)^2}\,. \tag{25}$$

Man führe folgende Bezeichungen an

$$(26) \qquad E(\mu_i, \varepsilon) = \frac{\varepsilon(\mu_i^3 + \sqrt{(\varepsilon\mu_i^3)})^2}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)^2}$$

und bezeichne den Maximalwert der Quadrate der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (15) mit $\Lambda(\mu_i, \varepsilon)$. Es ist also

$$\Lambda(\mu_i, \varepsilon) = \max(\varepsilon^2, E(\mu_i, \varepsilon)) .$$

Untersucht man nun den Verlauf der Funktion $E(\mu_i, \varepsilon)$ im Intervalle $\langle \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2})$ (das dem Intervalle $\omega_{t_1} \leqq \omega < \omega_{t_2}$ entspricht), ist diese Funktion im Intervalle $(0,1)$ (und umsomehr im Intervalle $\langle \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2}\rangle$) wachsend, wie man leicht durch Differenzieren der Funktion E feststellt, und es gilt ferner, dass

$$(27) \qquad \varepsilon^2 < E(\mu_i, \varepsilon)$$

ist (aus der Ungleichung $\varepsilon^2 \geqq E(\mu_i, \varepsilon)$ und aus (26) folgt nämlich die Ungleichung $\varepsilon^2(\varepsilon - 2) > \mu_i^3 + \sqrt{(\varepsilon\mu_i^3)}$, was zu einem Widerspruch führt, da $\varepsilon - 2 < 0$ ist).

Da für $\omega \to \omega_{t_1}$ die komplex adjungierten Wurzeln λ_2, λ_3 in die zweifache Wurzel λ_{t_1} übergehen und $\varepsilon \to \varepsilon_{t_1}$, gilt offensichtlich nach (25), dass

$$(28) \qquad E(\mu_i, \varepsilon_{t_1}) = \frac{\varepsilon_{t_1}(\mu_i^3 + \sqrt{(\varepsilon_{t_1}\mu_i^3)})^2}{\mu_i^3(1 - \varepsilon_{t_1})^2} = \lambda_{t_1}^2$$

ist. Im Intervalle $\langle \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2})$, das dem Intervalle $\langle \omega_{t_1}, \omega_{t_2})$ entspricht, gelten nach (27) und (28) die Beziehungen

$$\min_{\varepsilon \in \langle \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2})} \Lambda(\mu_i, \varepsilon) = \min_{\varepsilon \in \langle \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2})} E(\mu_i, \varepsilon) = E(\mu_i, \varepsilon_{t_1}) = \lambda_{t_1}^2 .$$

Der Maximalwert der Quadrate der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (15) nimmt also im Intervalle $\omega_{t_1} \leqq \omega < \omega_{t_2}$ für $\omega = \omega_{t_1}$ sein Minimum an, das der Zahl $\lambda_{t_1}^2$ gleicht.

Es sei jetzt $|\mu_{i_0}| = \max_i |\mu_i| = M$. Es ist also $\mu_{i_0}^3 = M^3 = \varrho^3(\boldsymbol{B})$. Man untersucht nun die Gleichung (15), wo $\mu_i = \mu_{i_0}$ ist, d. h. die Gleichung

$$\lambda^3 - M^3(1 - \omega + \lambda\omega)^2 = 0 .$$

Der Maximalwert der Quadrate der Absolutbeträge der Wurzeln dieser Gleichung hat, wie wir schon wissen, sein Minimum im Punkte $\omega_{t_1}(M)$, und dieses Minimum gleicht der Zahl $\lambda_{t_1}^2(M)$. Wir zeigen nun, dass für den der Zahl $\omega_{t_1}(M)$ entsprechenden Wert $\varepsilon_{t_1}(M)$ die Ungleichung $\Lambda(\mu_i, \varepsilon_{t_1}(M)) \leqq \lambda_{t_1}^2(M)$ für alle i gilt. Aus (21) folgt nämlich, dass für alle i $\lambda_{t_1}(\mu_i) \leqq \lambda_{t_1}(M)$ ist. Aus (20) folgt ferner, dass für alle i $\omega_{t_1}(\mu_i) \leqq \omega_{t_1}(M)$ ist. Aus (22) und (20) folgt nun, dass $\varepsilon_{t_1}(\mu_i) = \frac{1}{9}(\mu_i^3\omega_{t_1}^2(\mu_i))$ ist; d. h. es gilt

$$(29) \qquad \varepsilon_{t_1}(\mu_i) \leqq \varepsilon_{t_1}(M)$$

für alle i. Ferner gilt für alle i die Ungleichung

$$E(\mu_i, \varepsilon_{t_1}(M)) \leqq E(M, \varepsilon_{t_1}(M)) . \tag{30}$$

Wenn nämlich für ergendein i die umgekehrte Ungleichung gelten würde, würde man aus (26) nach Umformungen die Ungleichung

$$\mu_i^3 + 2\sqrt{(\varepsilon_{t_1}(M)\,\mu_i^3)} > M^3 + 2\sqrt{(\varepsilon_{t_1}(M)\,M^3)}$$

bekommen, was ein Widerspruch ist, da $\mu_i^3 \leq M^3$ für alle i gilt.

Aus (29) und (30) folgt nun, dass

$$\Lambda(\mu_i, \varepsilon_{t_1}(M)) = E(\mu_i, \varepsilon_{t_1}(M)) \leqq E(M, \varepsilon_{t_1}(M)) = \lambda_{t_1}^2(M)$$

ist für alle i. Der Optimalparameter gleicht also der Zahl $\omega_b = \omega_{t_1}(M)$, was die einzige reelle Wurzel der Gleichung $4M_i^3\omega^3 - 27(\omega - 1) = 0$ im Intervalle $(0, \frac{3}{2})$ ist, und der optimale Spektralradius ist dann die Zahl $\lambda_{t_1}^2(M)$ und nach (20) ist $\lambda_{t_1}^2(M) = 9((\omega_{t_1}(M) - 1)/\omega_{t_1}(M))^2$. Dadurch ist der Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] *Kjellberg, G.:* On the successive over-relaxation method for cyclic operators. Numerische Math., 3, 1961, 87—91.

[2] *Varga, R. S.:* Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, INC, 1962.

[3] *Šisler, M.:* Über ein Iterationsverfahren für zyklische Matrizen. Aplikace Matematiky, 17, 1972, 225—233.

[4] *Šisler, M.:* Über die Konvergenz eines gewissen Iterationsverfahrens für zyklische Matrizen. Aplikace matematiky, 18, 1973, 89—98.

Souhrn

POZNÁMKY K OPTIMALIZACI JISTÉ ITERAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

Práce se zabývá jistou iterační metodou pro řešení soustavy lineárních rovnic s cyklickou maticí, která byla definována a zkoumána v pracích [3] a [4] téhož autora. Iterační předpis je tvaru $\boldsymbol{x}_{\nu+1} = \boldsymbol{T}(\omega)\,\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{T}(\omega)$ je jistá matice závislá na reálném parametru ω. Pro $\omega = 0$ přechází tato metoda v Jacobiho a pro $\omega = 1$ v Gauss-Seidelovu metodu. Práce se zabývá optimalisací této iterační metody v jistých speciálních případech. Optimální parametr, tj. parametr ω, pro který je spektrální poloměr matice $\boldsymbol{T}(\omega)$ minimální, je vyjádřen jako funkce spektrálního poloměru matice $\boldsymbol{T}(0)$ odpovídající Jacobiho metodě.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Miroslav Šisler*, CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, 115 67 Praha 1.