REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

G. PUJOLLE

Réseaux de files d'attente à forme produit

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 14, nº 4 (1980), p. 317-330.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1980__14_4_317_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 14, n° 4, novembre 1980, p. 317 à 330)

RÉSEAUX DE FILES D'ATTENTE A FORME PRODUIT (*)

par G. PUJOLLE (1)

Résumé. — *Les réseaux de files d'attente dans lesquels la probabilité jointe à l'état stationnaire possède une forme produit, ont beaucoup été étudiés sous divers angles. Nous essayons dans cet article d'unifier les propriétés de ces réseaux. Une nouvelle classe de réseaux à forme produit est introduite qui généralise sur certains points et contredit sur d'autres les résultats déjà connus.*

Abstract. — *Networks in which the joint equilibrium distribution of queue sizes is expressed in a product form, has been widely studied. In the present paper, we try to unify the properties of these networks. A new class of product form networks is derived.*

1. INTRODUCTION

Les réseaux de files d'attente ont une très grande importance en recherche opérationnelle. Ils servent à modéliser des systèmes physiques. Ils permettent ainsi d'évaluer les performances et de mieux comprendre le comportement de ces systèmes. Peu de réseaux de files d'attente ont une solution simple. Ceci provient de la difficulté d'étudier les propriétés des flux, à l'intérieur du réseau. Les mieux étudiés sont les réseaux de Jackson [1].

Par réseaux de Jackson, nous entendons un ensemble de files d'attente reliées entre elles de façon quelconque, la distribution des temps de service étant exponentielle et le processus des arrivées de l'extérieur étant poissonien. Les files sont de capacité illimitée de telle sorte qu'il n'y ait pas de blocage; la discipline de service est premier-entré — premier-sorti. Ce type de réseau a été étudié par Jackson [1] dans le cas ouvert et par Gordon et Newell [2] dans le cas fermé, ils ont montré que la probabilité jointe, à l'état d'équilibre, défini par le nombre de clients présents dans chaque station, se présente sous la forme produit. Depuis cette époque peu d'intérêt a été porté à ce type de réseau étant donné la forme simple de sa solution. S'il est vrai que du point de vue application peu de progrès peuvent être fait, il en va tout autrement du point de vue compréhension de ce type de réseau.

(*) Reçu septembre 1979.
(1) I.N.R.I.A., 78150 Le Chesnay, France.

En effet si l'on s'intéresse aux flux entre stations, ces flux n'ont pas du tout de bonne propriété, comme on le pensait généralement jusqu'ici. Ce ne sont en général ni des processus de Poisson, ni même des processus de renouvellement.

Le but de cet article est d'une part d'apporter au lecteur un nouveau regard sur les réseaux qui ont la propriété d'avoir la forme produit comme les réseaux de Jackson et d'autre part d'essayer de caractériser la nature du processus de sortie d'une file d'attente quelconque. Ces examens nous portent à caractériser une nouvelle sorte de réseaux à forme produit qui étend les résultats classiques.

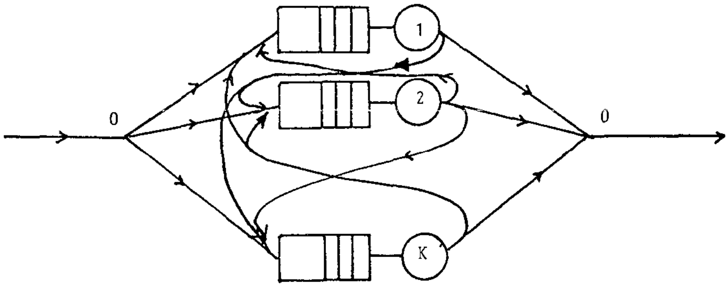

Figure 1. — Un réseau général.

Soit un réseau général comme celui montré sur la figure 1, qui possède K files d'attente. Les probabilités de routage p_{ij} d'aller de la file i vers la file j sont déterminées par une chaîne de Markov d'ordre 1. La station 0 est une station fictive dénomant à la fois l'entrée et la sortie du système de telle sorte que p_{0i} est la probabilité pour un client arrivant de l'extérieur d'aller vers la file i et p_{j0} est la probabilité pour qu'un client finissant son service à la station j, sorte du système. Soit $n_1, n_2, \ldots, n_K$, le nombre de clients respectivement dans la file 1, 2, ..., K. Le comportement du réseau est totalement défini par les valeurs de $p(n_1, n_2, \ldots, n_K, t)$: probabilité d'être au temps t dans l'état $n_1, n_2, \ldots, n_K$, que nous appellerons probabilité jointe. Nous emploierons la même notation pour les probabilités marginales $p(n_i, t)$ d'avoir n_i clients dans la file i au temps t. Le contexte permet de ne pas confondre entre probabilité jointe et probabilité marginale.

Nous dirons que le réseau de files d'attente est markovien si le processus $p(n_1, n_2, \ldots, n_K, t)$ est un processus de Markov avec l'espace d'état $\{N\}^K$.

Un réseau de files d'attente sera dit en équilibre s'il existe un état stationnaire. Dans ce cas, nous ôterons le temps t des probabilités jointes et marginales.

Par définition nous dirons qu'un réseau a la forme produit si

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_K) = \prod_{i=1}^{K} p(n_i).$$

Nous utiliserons la terminologie suivante : les entrées et les sorties d'une file d'attente sont constituées par les clients entrant et sortant effectivement de la file d'attente; les arrivées et les départs sont constitués par les (ou le) flots pris séparément venant d'autres stations ou de l'extérieur et partant vers d'autres stations ou vers l'extérieur. Les entrées sont une superposition d'arrivées. Les sorties donnent naissance à des départs.

2. LE PROCESSUS DE SORTIE D'UNE FILE D'ATTENTE

Un grand nombre de publications concernent ce problème. Nous en résumons les principales étapes avant d'aborder les conditions qui doivent être remplies pour que le processus de départ soit un processus de Poisson.

En 1956 Burke [3] montra que le processus de départ d'une file $M/M/s$ était Poissonien. Sa preuve consiste en la démonstration de l'indépendance d'un intervalle entre deux sorties et de l'état du système à la fin de cet intervalle.

A peu près au même moment Reich [4] montrait le même résultat en utilisant la réversibilité d'un processus stochastique stationnaire.

En 1959 Finch [5] étudia la file $M/GI/1/m$ avec une distribution des temps de service dérivable deux fois. Il montra qu'à l'état d'équilibre le seul cas où les intersorties forment un processus de Poisson indépendant du processus d'entrée est obtenu pour $GI = M$ et $m = \infty$.

Enfin Disney et Cherry [6], Disney, Farrel et de Morais [7] montrent le théorème suivant :

THÉORÈME : Une file $M/GI/1/m$ a des intersorties qui forment un processus de renouvellement si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1) les temps de service sont tous nuls avec probabilité 1;
2) $m = 1$;
3) $m = 2$ et les temps de service sont constants ($GI = O$);
4) $m = \infty$ et les temps de service sont exponentiels ($GI = M$).

Dans ces quatre cas, les distributions de probabilité des intersorties sont respectivement les suivantes :

1) la même que celle du processus d'entrée;
2) la convolution de celle du processus d'entrée et du processus de service;
3) une somme de convolutions;
4) la même que celle du processus d'entrée.

De plus, il a été démontré par Daley [8] que parmi les systèmes $GI/M/1$, le seul qui ait un processus de sortie de renouvellement est encore le système $M/M/1$. Plus récemment Laslett [9] a montré qu'aucun système $GI/M/1/m$ avec m fini, n'a un processus de renouvellement en sortie.

Par l'ensemble de ces résultats, nous pouvons conjecturer que le seul système $GI/GI/1/m$, $m > 0$ qui a un processus de sortie poissonien est le système $M/M/1/\infty$.

A partir de ce résultat nous trouvons un premier ensemble de réseaux à forme produit : ce sont les réseaux n'ayant que des files du type $M/M/1/\infty$ c'est-à-dire des réseaux possédant des files du type $./M/1/\infty$, où il n'y a jamais la possibilité pour un client de passer deux fois par la même station et où les arrivées de l'extérieur sont poissoniennes. Un tel réseau est représenté sur la figure 2.

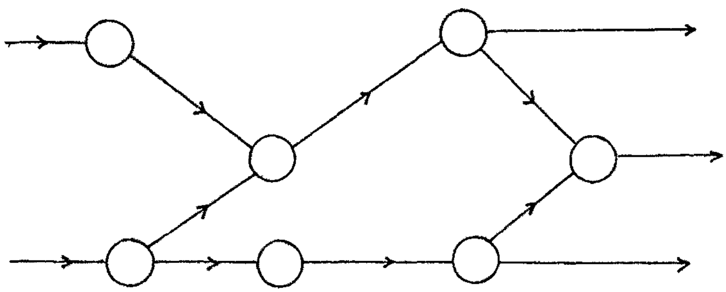

Figure 2. — Un réseau de files d'attente à flux poissonien.

Il faut noter que dans de tels réseaux tous les flux sont des processus de Poisson indépendants.

Le second type de réseaux que nous allons étudier est constitué de ceux qui satisfont aux équations de balance locale [10] : le flux des clients arrivant dans une station contenant n clients est égal au flux des clients sortant de cette même station en y laissant n clients. Chandy, Howard et Towsley [11] montrent qu'un réseau qui satisfait aux équations de balance locale a une solution en forme de produit.

La plupart des réseaux qui satisfont aux équations de balance locale sont donnés dans l'article de Baskett *et al.* [12] dont les réseaux de Jackson [1] sont un sous-ensemble. Si l'on ne regarde que le cas premier-entré — premier-sorti, les conditions de forme produit sont :

– les processus de service sont des renouvellements exponentiels;

– les processus d'arrivée de l'extérieur sont poissoniens;

– le processus de service d'une station est unique même s'il y a plusieurs classes de clients.

Pour trois autres disciplines de service (dernier-entré — premier-sorti avec priorité absolue, temps partagé, infinité de serveurs) les temps de service peuvent avoir des distributions à transformée de Laplace-Stieljes rationnelle. Pour ces cas, plusieurs classes de clients sont permises avec des temps de service différents dans une même station.

L'article de Jackson [1] démontrant la forme produit des réseaux exponentiels, contient une conclusion révélatrice : la forme produit de ces réseaux est loin d'être surprenante au regard des résultats de Reich et Burke, laissant entendre que tous les flux dans de tels réseaux étaient poissoniens. Ce qui fut démontré d'ailleurs dans un grand nombre d'articles qui sont bien évidemment faux (par exemple Nakumura [13]).

Dans la partie suivante nous allons nous intéresser plus particulièrement à ces flux dans le cas des réseaux de Jackson.

3. FLUX DANS LES RÉSEAUX DE JACKSON

Pour montrer la difficulté du problème nous allons commencer par un exemple très simple : le cas d'une file $M/M/1$ avec rebouclage que nous avons représenté sur la figure 3.

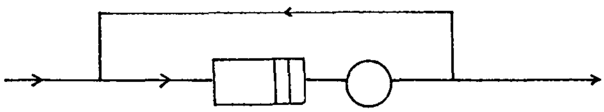

Figure 3. — Une file d'attente $M/M1$ avec rebouclage.

C'est Takacs [14] qui semble être le premier à s'être intéressé à ce type de système. Burke [15] montre que la distribution des intervalles de temps entre deux entrées dans la file d'attente n'est pas poissonienne.

Disney et McNickle [16] montrent que ce processus n'est pas non plus un processus de renouvellement.

Takacs [14] montre que le processus des départs est un processus de Poisson. Le processus des sorties est étudié par Foley [17] qui montre qu'il n'est ni Poisson ni même de renouvellement.

Il ne reste que le processus de rebouclage qui est encore mal connu. Nous montrons ici que ce processus n'est pas Poissonien ni même de renouvellement.

Soit $\Pi(i)$ la probabilité à l'état stationnaire que le nombre de clients présents dans la file soit i. Nous avons

$$\Pi(i) = \rho^i (1-\rho),$$

où $\rho = \lambda/\mu\, q$.

Introduisons la fonction $\alpha(i)$ suivante :

$\alpha(i)$ est la transformée de Laplace-Stieljes de l'intervalle de temps entre deux rebouclages sachant que la file est dans l'état i.

Juste après un instant de rebouclage, la file est dans l'état i avec la probabilité stationnaire $\Pi(i-1)$ (*voir* Disney et McNickle [16] pour la démonstration de cette propriété).

Soit encore $\hat{r}(s)$ la transformée de Laplace-Stieljes de l'intervalle de temps entre deux rebouclages. Nous avons

$$\hat{r}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi(i-1)\,\alpha(i). \tag{1}$$

Pour calculer $\alpha(i)$ utilisons les équations suivantes :

$$\alpha(i) = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu+s}\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\alpha(i+1) + \frac{\mu\, q}{\lambda+\mu}\alpha(i-1) + \frac{\mu\, p}{\lambda+\mu}\right] \quad \text{si} \quad i > 0, \tag{2}$$

$$\alpha(0) = \frac{\lambda}{\lambda+s}\alpha(1) \tag{3}$$

(ces relations peuvent être vues comme une application de la propriété de Markov forte).

En sommant la relation (2) de $i = 1$ à $i = \infty$ après l'avoir multipliée par $\Pi(i-1)$ nous obtenons :

$$\hat{r}(s) = \frac{1}{\mu\, p+s}\left[\mu\, p - \frac{\mu\, p}{\lambda} s\,\Pi(0)\,\alpha(0)\right]. \tag{4}$$

La fonction $\alpha(0)$ est déterminée de la manière suivante : posons $\alpha(i) = \Gamma(i) + [\mu\, p/(\mu\, p+s)]$ et remplaçons $\alpha(i)$ par sa valeur dans (2) :

$$(\lambda+\mu+s)\,\Gamma(i) = \lambda\,\Gamma(i+1) + \mu\, q\,\Gamma(i-1), \qquad i \geqq 1. \tag{5}$$

La solution de cette équation est de la forme $\Pi(i) = ax_1^i + bx_2^i$, où x_1 et x_2 sont les solutions de $\lambda x^2 - (\lambda+\mu+s)x + \mu q = 0$.

Comme nous avons $x_1 + x_2 = 1 + (\mu+s)/\lambda$ et $x_1 x_2 = \mu q/\lambda$, une des deux racines, soit x_2, est strictement supérieure à 1.

Quand i tend vers l'infini, $\alpha(i)$ tend vers $\mu p/(\mu p+s)$, donc $b = 0$ et la solution de (5) est $\Gamma(i) = ax_1^i$.

En utilisant (3) et (5) nous en déduisons le système

$$\left\{\begin{aligned} \alpha(0) &= a + \frac{\mu p}{\mu p+s}, \\ \frac{\lambda+s}{\lambda}\alpha(0) &= ax_1 + \frac{\mu p}{\mu p+s}, \end{aligned}\right.$$

et nous obtenons :

$$\alpha(0) = \frac{\mu p}{\mu p+s}\,\frac{1-x_1}{1-x_1+(s/\lambda)}.$$

La distribution des intervalles de temps entre deux rebouclages n'étant pas exponentiel, le flux des clients rebouclés ne peut pas être un processus de Poisson.

Soit $N(t)$ le processus de comptage associé au processus de rebouclage

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ n & \text{si } n \text{ clients ont rebouclé dans l'intervalle } [0, t]. \end{cases}$$

A cause du serveur exponentiel et de l'aiguillage de Bernoulli, $N(t)$ est un processus markovien. D'après Cinlar [18] un processus markovien est poissonien si et seulement si c'est un processus de renouvellement.

Comme le processus de rebouclage n'est pas poissonien il n'est pas non plus de renouvellement.

Déjà dans le cas simple d'une file $M/M/1$ avec rebouclage, les flux ne sont pas simples.

Si nous passons maintenant à un réseau général, il a été montré par Walrand et Varaiya [34] que les flux de sortie vers l'extérieur du réseau sont des processus de Poisson mutuellement indépendants. Nous avons montré une propriété plus forte : soit $R : i \leftrightarrow j$ la relation d'équivalence définie par i et j appartiennent à la même classe si de i il est possible d'aller à j et de j il est possible d'aller à i. Les classes d'équivalence que nous appellerons sous réseaux irréductibles sont composées de stations, qui une fois quittées par les clients ne peuvent plus être atteintes. Il est montré dans Beutler et Melamed [20] et Pujolle et Soula [21] que seuls les flots qui relient les réseaux irréductibles sont des processus de Poisson mutuellement indépendants. Tous les flots intérieurs aux sous-réseaux irréductibles ne sont ni des processus de Poisson, ni des processus de renouvellement.

Une autre propriété des réseaux de Jackson qui a été démontrée dans [22], est l'égalité des distributions des interentrées et des intersorties de chaque station du réseau. Cette propriété que nous reprendrons par la suite est le point de départ de la nouvelle classe de réseaux à forme produit que nous allons introduire.

4. FLOTS DANS LES RÉSEAUX A FORME PRODUIT CLASSIQUE

Les principaux réseaux à forme produit connus sont ceux décrits par Baskett, Chandy, Muntz, Palacios (BCMP) [12] et Kelly [35]. Des extensions ont été proposées par Barbour [23], Kelly [19], Chandy, Howard, Towsley [11], Stoyan [24], Schassberger [25]. En ne considérant qu'une classe de clients, les principaux types de serveurs permettant la forme produit sont les suivants :

1) $./M/s$ et FIFO;
2) $./GI/$Temps partagé, distribution quelconque;
3) $./GI/\infty$, distribution quelconque;
4) $./GI/s$ avec dernier arrivé, premier sorti, distribution quelconque;
5) $./GI/s/s$, où les clients perdus sont servis avec un temps nul (il continue à circuler dans le réseau).

Pour cet ensemble de réseaux à forme produit Stoyan [24] et Schassberger [26, 25] montrent qu'ils ont une propriété intéressante : l'« insensibilité ». Cette propriété peut se caractériser de deux façons distinctes :

1) la probabilité d'état ne dépend que des premiers moments des distributions de service;

2) les processus ponctuels déterminés par les instants d'entrée dans la file et les instants de sortie de la file ne dépendent pas du type de stations utilisés.

Tous les réseaux que nous venons de définir et que nous nommerons par réseaux classiques (²) à forme produit, ont grâce à la propriété d'« insensi-

(²) Les réseaux markoviens à forme produit est dense dans l'ensemble des réseaux classiques à forme produit.

bilité » les mêmes propriétés que les réseaux de Jackson. C'est-à-dire que les seuls flux poissoniens sont les flux interréseaux irréductibles. Tous les autres flux ne sont pas même de renouvellement. De plus si l'on prend une file quelconque du réseau, la distribution des interentrées dans la file est la même que celle des intersorties de la file.

Une question reste ouverte dans les réseaux classiques à forme produit : y a-t-il équivalence et indépendance des processus d'entrée et de sortie? Dans le cas de la file $M/M/1$ avec rebouclage, Bremaud [27] montre que le processus d'entrée est équivalent au processus de sortie inversé.

L'auteur pense cependant que la conjecture suivante est exacte : dans les réseaux classiques à forme produit, les processus d'entrée et de sortie sont à l'état d'équilibre équivalents et indépendants de la file d'attente.

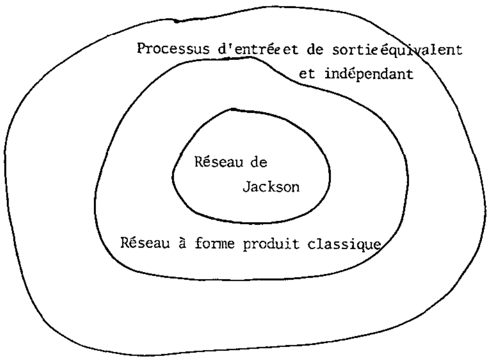

Figure 4. — Réseau à forme produit.

L'égalité des distributions d'entrée et de sortie ainsi que l'équivalence en processus est peut-être une des explications de la forme produit. Maintenant nous sommes capables d'obtenir une classe de réseaux à forme produit plus grande que celle déjà connue. En effet, les réseaux dans lesquels les processus d'entrée sont équivalents et indépendants des processus de sortie ont une forme produit. La démonstration est simple : soit i une file quelconque du réseau, n_i le nombre de clients dans cette file à l'état d'équilibre et $\bar{n}$ le nombre de clients dans le reste du réseau. Considérons la file i comme une boîte noire. Le comportement du reste du réseau ne dépend pas du nombre de clients dans cette boîte noire, puisque les processus d'entrée et de sortie sont équivalents. Donc $p(\bar{n}, n_i) = p(\bar{n})\, p(n_i)$. Le réseau a une forme produit. Les réseaux à forme produit peuvent être décomposés dans les classes représentées sur la figure 4.

Remarque : Il faut qu'il y ait indépendance entre le processus de sortie et l'état de la file. Par exemple, deux files $D/D/1$ en série ont des processus d'entrée et de sortie équivalents, mais ils ne sont pas indépendants.

Nous allons donner l'exemple d'un réseau appartenant à la plus grande des catégories mais n'appartenant pas aux réseaux à forme produit classique. Soit le système représenté figure 5, de 4 files d'attente en série, toutes avec des temps de service exponentiellement distribuées et une arrivée extérieure suivant une loi de Poisson. C'est un réseau de Jackson sans rebouclage. Tous les flux sont poissoniens. Les deux premières stations réunies ensemble ainsi que les deux dernières peuvent être remplacées par des files équivalentes de telle sorte que les probabilités à l'état d'équilibre soient conservées : $p(n_1, n_2) = p(n_1)\, p(n_2)$.

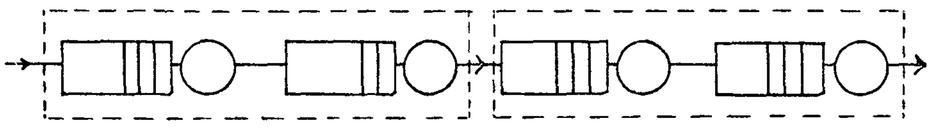

Figure 5. — Réseau à forme produit non classique.

Le calcul du nouveau processus de service a été effectué par Bremaud [28]. En particulier ce processus n'est pas de renouvellement. Nous obtenons un réseau de deux stations en série, visiblement pas du type classique, qui pourtant a la forme produit.

Remarque : Cet exemple montre également qu'il existe des files d'attente $M/G/1$ qui ont un flux de sortie de Poisson et telles que les temps de service ne soient pas exponentiellement distribués. Ceci n'est pas vraiment en contradiction avec le théorème de Burke [3] et Reich [4] qui montre que la seule file $M/G/1$ ayant une sortie poissonienne est du type $M/M/1$; l'hypothèse de temps de service généraux *indépendants* étant implicite.

5. PROPRIÉTÉ DES RÉSEAUX A FORME PRODUIT

Une première condition suffisante pour obtenir un réseau à forme produit a été introduite par Muntz en 1973 [20]. Il s'agit de la propriété $M \to M$ (Markov implique Markov) : une file à la propriété $M \to M$ si en lui appliquant un processus poissonien en entrée, le processus de sortie est aussi poissonien. Les réseaux dont les files d'attente vérifient la propriété $M \to M$ ont une forme produit.

Soit $A(n)$ l'ensemble de tous les états tel qu'une transition de $n' \in A(n)$ à n soit accompagnée d'un départ. La condition $M \to M$ s'écrit :

$$\forall n, \quad \sum_{n' \in A(n)} p_{n'n}\, p(n') = \lambda\, p(n).$$

S'il y a plusieurs classes de clients la propriété $M \to M$ doit s'appliquer à chaque classe.

La réciproque de la propriété énoncée précédemment est sûrement fausse : un réseau à forme produit implique la propriété $M \to M$ pour chaque file du réseau. L'auteur cependant ne connaît pas de contre exemple explicite.

La propriété $M \to M$ est essentiellement la même que la propriété de complétude de Gelenbe et Muntz [30] ou la propriété « pointwise independent » de Melamed [31].

Les files d'attente des réseaux de Baskett *et al.* [12] et de Kelly [19] possèdent la propriété $M \to M$ ou ses équivalents (*voir* Melamed [31]).

Une autre propriété des réseaux à forme produit classique est la satisfaction des équations de balance locale introduites par Chandy [10] : le flux des clients arrivant dans une station contenant n clients est égal au flux des clients sortant de cette même station en y laissant n clients. Muntz [29] et Chandy, Howard et Towsley [11] montrent qu'un réseau markovien qui satisfait aux équations de balance locale a la propriété $M \to M$ pour ses stations et à une probabilité jointe sous forme produit.

De plus il est montré dans [11] qu'un réseau à forme produit implique les équations de balance locale. S'il y a plusieurs classes de clients, les disciplines entre classes doivent être indépendantes. De nouveau la démonstration de ce théorème sous entend que les temps de service sont des variables aléatoires indépendantes. Dans sa généralité ce théorème est faux comme le montre l'exemple de réseau à forme produit non classique.

Une troisième propriété a été remarquée dans les réseaux à forme produit classique par Sevcik et Mitrani [32] et Lavenberg et Reiser [33] : lorsqu'un client sort d'une file d'attente, il voit le réseau dans son état d'équilibre dans le cas d'un réseau ouvert et dans son état d'équilibre en enlevant un client dans le cas d'un réseau fermé. Les réseaux classiques à forme produit ont cette propriété. L'exemple que nous avons donné de réseau à forme produit non classique a aussi cette propriété. Nous pensons pouvoir conjecturer sans avoir été capable de le démontrer que cette dernière propriété est une condition nécessaire et suffisante de forme produit.

6. CONCLUSION

Nous avons introduit une nouvelle classe de réseaux à forme produit; malheureusement nous ne sommes pas en mesure actuellement de caractériser les réseaux qui y appartiennent.

Cet ensemble n'est pas nul car étant donné un processus d'entrée GI et un processus de sortie équivalent et indépendant, on peut déterminer pas par pas le processus de service de la file. Sauf si $GI = M$, il semble que ce processus de service ne soit pas de renouvellement.

Il faut encore citer pour être complet quelques extensions récentes des réseaux de Jackson, et BCMP qui conservent la forme produit. Les travaux de Pellaumail [36] et Le Ny [37] considèrent des probabilités de routage qui dépendent de l'état du réseau : moyennant une hypothèse d'« échangeabilité par classes » la forme produit est conservée.

Les travaux de Lam [38] qui étend les réseaux BCMP à des cas de pertes de clients. Enfin Kobayashi [39] montre que la forme produit est encore vraie pour des classes de réseaux beaucoup plus grandes lorsque l'étude est faite par des approximations par les processus de diffusion.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Jackson, *Jobshop-Like Queueing Systems*, Management Sciences, vol. 10, 1963, p. 131-142.
2. W. I. Gordon et G. F. Newell, *Closed Queueing Systems with Exponential Servers*, Operations Res., vol. 15, 1967, p. 254-265.
3. P. J. Burke, *The Output of a Queueing system*, Operations Res., vol. 4, 1956, p. 699-704.
4. E. Reich, *Waiting Times when Queues are in Tandem*, Ann. Math. Statist., vol. 28, 1957, p. 768-773.
5. P. O. Finch, *The Output Process of the Queueing System $M/G/1$*, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, vol. 21, 1959, p. 375-380.
6. R. L. Disney et W. P. Cherry, *Some Topics in Queueing Network Theory*, in *Mathematical Methods for Queueing Theory*, Springer-Verlag, 1974, p. 23-44.
7. R. L. Disney, R. L. Farrel et P. R. de Morais, *A Characterization of $M/G/1/N$ Queues with Renewal Departure Processes*, Management Sciences, vol. 19, 1973, p. 1222-1228.
8. D. J. Daley, *The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems*, Ann. Math. Statist., vol. 39, 1968, p. 1007-1019.
9. G. M. Laslett, *Characterizing the Finite Capacity $GI/M/1$ Queue with Renewal Output*, Management Sciences, vol. 22, 1975, p. 106-110.

10. K. M. CHANDY, *The Analysis and Solutions for General Queueing Networks*, Proc. Sixth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, Princeton University, 1972.

11. K. M. CHANDY, J. H. HOWARD et D. F. TOWSLEY, *Product Form and Local Balance in Queueing Networks*, J. A.C.M., vol. 24, n° 2, 1977, p. 250-263.

12. F. BASKETT, K. M. CHANDY, R. R. MUNTZ et F. G. PALACIOS, *Open, Closed and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers*, J. A.C.M., vol. 22, 1975, p. 248-260.

13. G. NAKUMURA, *A Feedback Queueing Model for an Interactive Computing Systems*, A.F.I.P.S. Proceedings of the Fall Joint Computer Conference, 1971, p. 57-64.

14. L. TAKACS, *A Single Server Queue with Feedback*, Bell Systems Technical Journal, vol. 42, 1963, p. 505-519.

15. P. J. BURKE, *Proof of a Conjecture on the Interarrival Time Distribution in an M/M/1 Queue with Feedback*, I.E.E.E. Trans. on Communications, vol. 24, 1976, p. 575-576.

16. R. L. DISNEY et D. C. MCNICKLE, *The M/G/1 Queue with Instantaneous Bernoulli Feedback*, Research Report 77-3, University of Michigan, 1977.

17. R. D. FOLEY, *Queues with Feedback*, Ph. D. Dissertation, University of Michigan, 1977.

18. E. CINLAR, *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1975.

19. F. P. KELLY, *Networks of Queues*, Adv. Appl. Prob., vol. 8, 1976, p. 416-432.

20. F. J. BEUTLER et B. MELAMED, *Decomposition and Customer Streams of Feedback Networks of Queues in Equilibrium*, Operations Research, vol. 26, n° 6, 1978, p. 1059-1072.

21. G. PUJOLLE et C. SOULA, *A Study of Flows in Queueing Networks and an Approximate Method for Solution*, Proc. of the 4th International Congress on Modelling, Vienne, 1979.

22. J. LABETOULLE, G. PUJOLLE et C. SOULA, *Distribution of the Flows in a General Jackson Network*, Mathematics of Operations Research, November 1980.

23. A. D. BARBOUR, *Networks of Queues and the Method of Stages*, Adv. Appl. Prob., vol. 8, 1976, p. 584-591.

24. D. STOYAN, *Queueing Networks. Insensitivity and a Heuristic Approximation*, Elektion-Informations verarbeit, Kybernetik, vol. 14, n° 3, 1978.

25. R. SCHASSBERGER, *The Insensitivity of Stationary Probabilities in Networks of Queues*, Adv. Appl. Prob., vol. 10, 1978, p. 906-912.

26. R. SCHASSBERGER, *Insensitivity of Steady-State Distributions of Generalized Semi-Markov Processes with Speeds*, Adv. Appl. Prob., vol. 10, 1978, p. 836-851.

27. P. BREMAUD, *Dynamical Point Processes and Ito Systems in Communications and Queueing* (à paraître).

28. P. BREMAUD, *A Counter Example to a Converse of Burke-Reich Theorem*, Research Report E.N.S.T.A., 1979.

29. R. R. MUNTZ, *Poisson Departure Processes and Queueing Networks*, Proc. 7th Annual Conf. Information Sciences and Systems, Princeton University, 1973, p. 435-440.

30. E. GELENBE et R. R. MUNTZ, *Probabilistic Models of Computer Systems*, Acta Informatica, vol. 7, 1976, p. 35-60.
31. B. MELAMED, *On Poisson Traffic Processes in Discrete-State Markovian Systems with Applications to Queueing Theory*, Adv. Appl. Prob., vol. 11, 1979, p. 218-239.
32. K. SEVCIK et I. MITRANI, *The Distribution of Queueing Network States at Input and Output Instants*, Proc. of Int. Symp. on Performance of Computer Systems, Vienne 1979.
33. S. LAVENBERG et M. REISER, *The State Seen by an Arriving Customer in Closed Multiple Chain Queueing Networks*, Rapport de Recherche I.B.M. Yorktown Heights, 1979.
34. J. WALRAND et P. VARAIYA, *The Outputs of Jacksonian Networks are Poissonian*, Research Report ERL-M 78/60, University of Berkeley, 1978.
35. F. P. KELLY, *Networks of Queues with Customers of Different Types*, J. Appl. Prob., vol. 12, 1975, p. 542-554.
36. J. PELLAUMAIL, *Regimes stationnaires quand les routages dépendent de l'état*, Actes du 1er Colloques A.F.C.E.T.-S.M.F. de Mathématiques Appliquées, Palaiseau, 1978.
37. L. M. LE NY, *Étude analytique de réseaux de files d'attente multi-classes à routages variables*, Thèse de 3e cycle, Rennes-I, 1979.
38. S. S. LAM, *Store-and-Forward Buffer Requirements in a Packet Switching Network*, I.E.E.E. Trans. on Com., vol. 24, 1976, p. 394-399.
39. H. KOBAYASHI, *Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks*, J. A.C.M., vol. 21, 1974, p. 316-328.