

# Решение физических задач с помощью электронных таблиц MS Excel

Майер Р.В.

*Аннотация* — В статье рассмотрена проблема использования табличного процессора MS Excel при изучении физики. Обсуждаются возможности этой программы и анализируются решения следующих задач: 1) расчет движения колебательной системы; 2) получение сечения Пуанкаре для хаотических колебаний; 3) изучение перемешивания фазового объема при колебаниях маятника Даффинга; 4) расчет излучения абсолютно черного тела (законы Планка, Стефана-Больцмана и Вина); 5) задача о теплопроводности стержня и пластины; 6) моделирование одномерной волны, решение волнового уравнения. В статье приводятся тексты 7 программ-макросов на языке Visual Basic, представлены получающиеся графики и результаты вычислений. Предлагаемые программы могут быть использованы при изучении физики и компьютерного моделирования.

*Ключевые слова* — электронные таблицы, компьютерное моделирование, программирование, методика преподавания физики, дидактика физики, решение задач.

Использование компьютерных моделей и численных методов позволяет существенно расширить круг решаемых задач [3–6]. Важно при этом использовать доступные программные средства, освоение которых не вызывает сложностей. Школьный и вузовский курсы информатики предусматривают изучение табличного процессора MS Excel. Он является мощным программным средством, которое объединяет в себе электронные таблицы, средства визуального программирования и графический модуль, позволяющий построить различные диаграммы, графики и поверхности. Поэтому при решении физических задач имеет смысл использовать именно этот программный продукт.

Хотя пакет MS Excel имеет меньше возможностей по сравнению со специализированными пакетами (MathCad, MathLab, Math и т.д.), он позволяет реализовать простейшие алгоритмы численного решения диффуравнений, создать компьютерные модели и решить достаточно широкий круг задач по физике. Известные книги и учебные пособия [1, 2, 7] не дают полного представления о возможностях использования электронных таблиц при изучении

физики. Поэтому проблема использования табличного процессора Excel для решения физических задач остается актуальной. Можно предположить, что макросы, созданные в табличном процессоре Excel, позволяют промоделировать большое количество физических систем, требующих численного решения дифференциальных уравнений и нахождения определенных интегралов. Поэтому его целесообразно использовать при изучении физики и основ компьютерного моделирования.

Ниже рассмотрены несколько примеров решения задач из различных разделов физики. Во всех анализируемых случаях соответствующее диффуравнение представляется в конечно-разностном виде [3–6] и создается макрос (небольшая программа) на языке Visual Basic [1, 2, 7]. Для написания макроса достаточно выбрать: Вид → Панели инструментов → Элементы управления → Кнопка. Необходимо кнопку Command Button1 перенести на таблицу и дважды кликнуть по ней. В появившееся окно следует записать текст программы, которая будет исполняться после запуска. Макрос считывает данные из заданных в нем ячеек электронной таблицы и, произведя расчеты, создает таблицу результатов вычислений. На ее основе стандартными средствами Excel можно построить график изучаемой зависимости [1, 2]. Макросы к некоторым задачам составлены так, что при повторном нажатии на кнопку программа увеличит время на  $\Delta t$ , повторит расчеты и построит новый график. Все физические величины в рассмотренных задачах измеряются в условных единицах.

**Задача 1.** Автоколебательная система состоит из груза массой  $m$ , подвешенного на пружине жесткостью  $k$ , и клапана, регулирующего поступление энергии от источника. При прохождении грузом положения равновесия ( $|x| < 0,5$ ) в направлении оси  $Ox$ , на него действует постоянная сила  $F$ . Необходимо рассчитать состояние системы в произвольный момент времени  $t$ , построить график автоколебаний и фазовую кривую.

Построим математическую модель:

$$a = dv/dt = (F - kx - rv)/m, \quad v = dx/dt,$$

$$F(x, v) = \begin{cases} 5, & \text{если } |x| < 0,5 \text{ и } v \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используемая программа ПР-1 состоит из цикла по времени  $t$ , в котором рассчитываются

---

Майер Роберт Валерьевич, доктор педагогических наук, профессор кафедры физики и дидактики физики ГОУ ВПО "Тлазовский государственный педагогический институт" email: robert\_maiер@mail.ru

значения координаты  $x$ , скорости  $v$  и ускорения  $a$  в следующий момент времени  $t + \Delta t$ .

Программа ПР-1.

Private Sub CommandButton1\_Click()

m = 1.1: k = 1: r = 0.05: dt = 0.02

While t < 50

t = t + dt: i = i + 1

If (Abs(x) < 0.5) And (v >= 0) Then F = 5 Else F = 0

a = (F - r \* v - k \* x) / m

v = v + a \* dt: x = x + v \* dt: Cells(i, 1) = t

Cells(i, 2) = x: Cells(i, 3) = v: Cells(i, 4) = a

Wend

End Sub

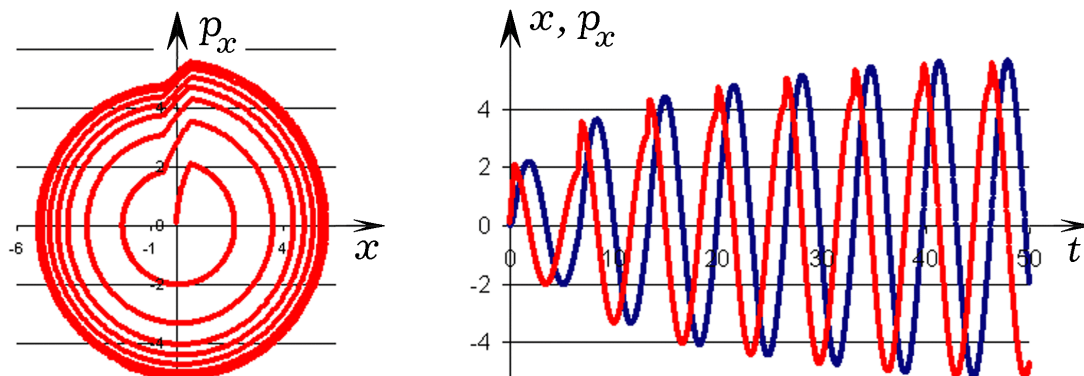


Рис. 1. Результаты моделирования автоколебательной системы.

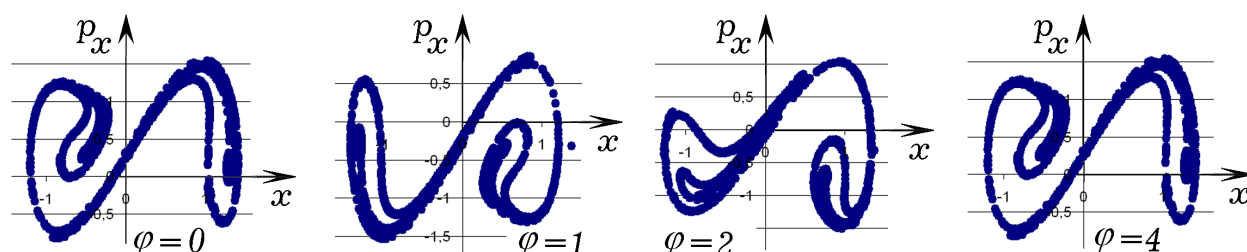


Рис. 2. Сечение Пуанкаре для маятника Даффинга при  $\varphi = 0, 1, 2, 4$  рад.

**Задача 2.** Проанализируйте колебания шарика, находящегося внутри потенциальной ямы с двумя углублениями (маятник Даффинга), если его потенциальная энергия  $U(x) = k(x^4/4 - x^2/2)$ . Получите график хаотических колебаний и сечение Пуанкаре в случае, когда на него действует периодически изменяющаяся сила.

Колебания маятника Даффинга описывается дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + k(x^3 - x) = F_m \cos(\omega \cdot t).$$

Систему можно охарактеризовать координатой  $x$ , проекцией импульса шарика  $p_x$  и проекцией силы  $F_x$ . Сечение Пуанкаре, соответствующее фазе  $\varphi$ , строится так: в момент, когда  $\cos(\omega \cdot t + \varphi)$  обращается в 0, на фазовой плоскости ставится точка с координатами  $x$  и  $p_x$ . Используется программа ПР-2, результаты моделирования приведены на рис. 2. Видно, что сечение Пуанкаре имеет фрактальную структуру, что характерно для хаотических колебаний.

Программа ПР-2.

Private Sub CommandButton1\_Click()

F = 1: k = 4: r = 0.5: m = 1: w = 2.3: dt = 0.001

fi = 2.64: faza = Cells(1, 5)

While t < 5000

t = t + dt: z = Cos(w \* t + faza)

a = (F \* Cos(w \* t) - k \* (x \* x \* x - x) - r \* v) / m

v = v + a \* dt: x = x + v \* dt

If (z > 0) And (zz < 0) Then

j = j + 1: Cells(j, 1) = x: Cells(j, 2) = v

zz = z

Wend

End Sub

**Задача 3.** Проанализируйте перемешиваемость фазового объема в случае свободных колебаний маятника Даффинга.

Представим себе совокупность одинаковых маятников Даффинга, совершающих свободные колебания, которые отличаются только начальными условиями  $x_0, p_0$ . Движение маятников описывается уравнением:  $m\ddot{x} + r\dot{x} + k(x^3 - x) = 0$ . Пусть в момент  $t = 0$  фазовые точки, характеризующие начальное состояние маятников, находятся внутри прямоугольника, ограниченного интервалами  $[x, x + \Delta x]$  и  $[p, p + \Delta p]$ . Программа ПР-3 рассчитывает состояние каждого маятника в заданный момент времени  $t'$ , который заранее вводят в ячейку E1, и записывает результаты вычислений в столбцы A и B. Получается таблица из 1600 строк, на ее основе строится фазовый портрет данного ансамбля маятников в момент  $t'$ .

Программа ПР-3.

Private Sub CommandButton1\_Click()

m = 1: k = 1: r = 0.02: dt = 0.002

For i = 1 To 40: For j = 1 To 40

```

x = 0.04 * i: v = 0.04 * j
t = 0: s = s + 1
Vremya = Cells(1, 5)
While t < Vremya
t = t + dt
a = (-k * (x * x * x - x) - r * v) / m
v = v + a * dt: x = x + v * dt
Wend: Cells(s, 1) = x: Cells(s, 2) = v
Next: Next
End Sub
    
```

На рис. 3 представлены результаты вычислений для моментов  $t' = 10, 20, 60$ . Видно, что при  $t' \rightarrow \infty$  происходит расплывание фазового объема, его перемешивание в фазовом пространстве, что свидетельствует о хаотичности колебаний. Если колебания затухают ( $r > 0$ ), то фазовый объем уменьшается до 0. В случае незатухающих колебаний ( $r = 0$ ) фазовый объем ведет себя как несжимаемая жидкость (сохраняет свою величину), как того требует теорема Лиувилля.

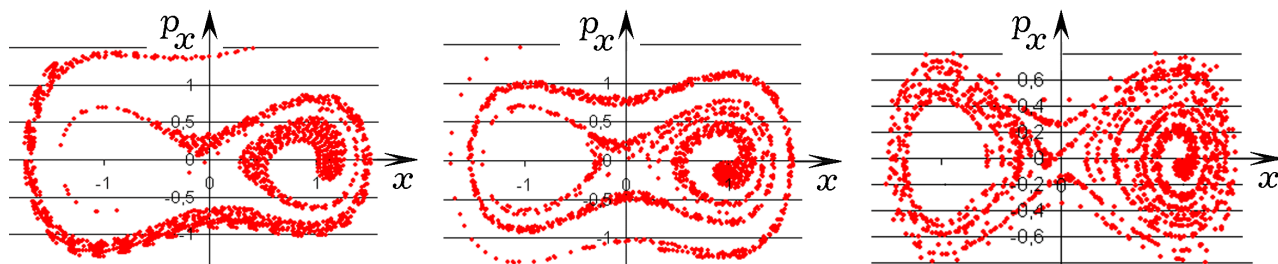


Рис. 3. Перемешивание фазового объема для маятника Даффинга в моменты  $t' = 10, 20$  и  $60$ .

**Задача 4.** Постройте график зависимости спектральной светимости  $r$  абсолютно черного тела от частоты излучения для разных температур  $T$ . Методом численного интегрирования определите интегральную светимость  $R$  абсолютно черного тела для данной температуры. Подтвердите, что  $R$  прямо пропорциональна четвертой степени  $T$  (закон Стефана–Больцмана):  $R = \sigma T^4$ .

Зависимость спектральной светимости  $r$  абсолютно черного тела от частоты  $\nu$  и температуры  $T$  выражается формулой Планка:

$$r(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (\exp(h\nu/kT) - 1)}$$

От абсолютной температуры  $T$  и частоты  $\nu$  перейдем к параметрам

$$T' = T \frac{k}{h} \left( \frac{2\pi h}{c^2} \right)^{1/3} \quad \text{и} \quad \nu' = \nu \left( \frac{2\pi h}{c^2} \right)^{1/3}$$

Тогда формула Планка приобретет простой вид:

$$r(\nu', T') = \nu'^3 / (\exp(\nu'/T') - 1)$$

Нахождение интегральной светимости черного тела может быть осуществлено методом численного интегрирования. Используемая программа ПР – 4 позволяет построить графики  $r = r(\nu')$  при различных  $T'$  и рассчитать интегральную светимость  $R$  по формуле:

$$R = \sum_{i=1}^n r(\nu'_i) \Delta \nu' = \sum_{i=1}^n \frac{\nu'^3_i \Delta \nu'}{\exp(\nu'_i/T') - 1}$$

где  $\nu'_i = i \Delta \nu'$ . Перед ее запуском значение  $T'$  следует записать в ячейку D1. После нажатия на кнопку запуска программа создает таблицу из двух столбцов  $\nu'$  и  $r$ , содержащую 20000 строк, в ячейке E1 появляется значение интегральной светимости  $R$ . На основе полученных результатов строится график  $r = r(\nu')$ . Программа позволяет заполнить таблицу 1 и доказать, что  $\sigma = R/T^4 = const$ , то есть  $R$  растет пропорционально  $T^4$ .

Таблица 1.

$T$	$R$	$\lambda_m$	$\sigma = R/T^4$	$b = \lambda_m T$
100	$649 \cdot 10^6$	0,00355	6,49	0,355
200	$10400 \cdot 10^6$	0,00177	6,50	0,354
300	$52600 \cdot 10^6$	0,00118	6,49	0,354
400	$166000 \cdot 10^6$	0,000885	6,48	0,354
500	$405000 \cdot 10^6$	0,000709	6,48	0,355
600	$841000 \cdot 10^6$	0,00059	6,49	0,354

**Задача 5.** Найдите длину волны  $\lambda_m$ , соответствующую максимуму спектральной светимости  $r = r(\nu')$  абсолютно черного тела, имеющего температуру  $T$ . Подтвердите, что эта длина волны  $\lambda_m$ , обратно пропорциональна его температуре:  $\lambda_m = b/T$  (закон смещения Вина).

Используется та же программа ПР–4. Температуру  $T'$  записывают в ячейку D1, после запуска макроса получающиеся значения  $\lambda_m$  появляются в ячейке E2. С помощью программы можно рассчитать  $b = \lambda_m T$  и заполнить таблицу 1. Из нее видно, что по мере увеличения  $T$  длина волны  $\lambda_m$ , соответствующая максимуму спектральной светимости, уменьшается так, что величина  $b = \lambda_m T$  остается постоянной.

## Программа ПР – 4.

```
Private Sub CommandButton1_Click()
t = Cells(1, 4): h = 1: Max = 0
For nu = 1 To 20000
F = nu * nu * nu / (Exp(nu / t) - 1)
Cells(nu, 1) = nu
Cells(nu, 2) = F
R = R + F * h
If F > Max Then wm = nu: Max = F
Next
Cells(1, 5) = R
Cells(2, 5) = 1 / wm
End Sub
```

**Задача 6.** Имеется однородный стержень длиной  $L$  с коэффициентом теплопроводности  $\alpha$ . Задано начальное распределение температуры  $T(x)$  и мощности источников тепла  $q(x)$ . Необходимо рассчитать температуру различных точек стержня в произвольный момент времени  $t'$ .

Уравнение теплопроводности для стержня:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{c\rho}.$$

Построим одномерную сетку с шагом  $h = \Delta x$ . В конечных разностях получаем:

$$T_i^{t+1} = T_i^t + \alpha \frac{T_{i-1}^t - 2T_i^t + T_{i+1}^t}{\Delta x^2} \Delta t + \frac{q_i}{c\rho} \Delta t.$$

Используется программа ПР-5. Время  $t'$  следует записать в ячейку E1. При запуске макроса, он создает таблицу из двух столбцов  $x$  и  $T(x)$ , на основе которой можно построить график  $T = T(x)$  (рис. 4). Содержимое ячейки E1 увеличивается на 500. При повторном нажатии на кнопку, соответствующим образом изменяются результаты вычислений, и строится новый график для момента  $t'+500$ .

## Программа ПР – 5.

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Dim t(100) As Single
Dim t1(100) As Single
dx = 1: dt = 0.01
For i = 1 To 100: Cells(i, 1) = i * dx
If i < 20 Then t(i) = 4 Else: t(i) = 0
Next i: Vremya = Cells(1, 5)
For k = 1 To Vremya: For i = 2 To 99
If (i > 75) And (i < 80) Then q = 0.2 Else q = 0
t1(i) = t(i) + 1.5 * (t(i - 1) - 2 * t(i) + t(i + 1)) * dt / dx / dx + q * dt
Next i
For i = 1 To 100: t(i) = t1(i): Next i
t(1) = 4: t(100) = t(99): Next k
For i = 1 To 100: Cells(i, 2) = t(i): Next i
Cells(1, 5) = Cells(1, 5) + 500
End Sub
```

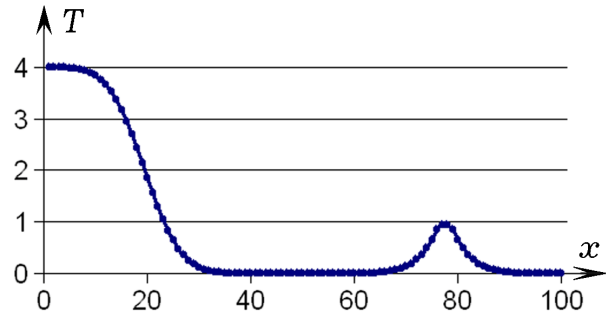


Рис. 4. Распределение температуры вдоль стержня.

**Задача 7.** Имеется однородная пластина размером  $L_x \times L_y$  с коэффициентом теплопроводности  $\alpha$ . Задано начальное распределение температуры  $T(x, y)$  и мощности источников тепла  $q(x, y)$ . Необходимо рассчитать температуру различных точек пластины в произвольный момент  $t'$ .

Уравнение теплопроводности для пластины:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q}{c\rho}.$$

Задача решается аналогично. Дискретизируют двумерную область, переходя к сетке  $N \times M$  с шагом  $h = \Delta x = \Delta y$  и записывают конечно-разностное уравнение. Используется программа ПР-6. Время  $t'$  записывают в ячейку A33 и нажимают на кнопку запуска макроса. На экране появляется двумерная матрица значений температуры в узлах сетки в момент  $t'$  (рис. 5). При повторном запуске программы она пересчитывает значения  $T(i, j)$  в узлах двумерной сетки для момента  $t'+25$ . На рис. 5 отрегулирована ширина столбцов и вручную изменен цвет ячеек, температура которых находится в заданных диапазонах.

## Программа ПР-6.

```
Private Sub CommandButton1_Click()
N = 30: M = 30: h = 1: dt = 0.01
Dim t(30, 30) As Single
Dim t1(30, 30) As Single
For i = 1 To N: For j = 1 To M
If i < 20 Then t(i, j) = 10 Else t(i, j) = 0
Next j: Next i: Vremya = Cells(33, 1)
For k = 1 To Vremya
For i = 2 To N - 1: For j = 2 To M - 1
If (Abs(i - 12) < 5) And (Abs(j - 15) < 6)
Then q = 10 Else q = 0
AA = t(i - 1, j) - 4 * t(i, j) + t(i + 1, j) + t(i, j - 1) + t(i, j + 1): t1(i, j) = t(i, j) + 0.5 * (AA) * dt / h / h + q * dt
Next j: Next i
For i = 2 To N: For j = 2 To M
t(i, j) = t1(i, j): Next j: Next i: Next k
For i = 2 To N: For j = 2 To M
Cells(i, j) = t(i, j): Next j: Next i
Cells(33, 1) = Cells(33, 1) + 25
End Sub
```



## **The solution of physical tasks with use of tabular MS Excel processor**

**Mayer R.V.**

*Abstract* - In article the problem of use of the tabular MS Excel processor when studying physics is considered. Possibilities of the program are discussed, solutions of the following tasks are considered: 1) calculation of movement of oscillatory system; 2) obtaining Poincare section for chaotic fluctuations; 3) studying of a mixing of phase volume at fluctuations of Dufing's pendulum; 4) tasks on laws of radiation of absolutely black body (Plank, Stephan-Boltsman and Vina law); 5) calculation of heat conductivity of a bar and a plate; 6) modeling of an one-dimensional wave, solution of the wave equation. Texts of 7 programs (macros) are provided in article in the Visual Basic language, turning-out schedules and results of calculations are submitted. Offered programs can be used when studying physics and computer modeling.

*Keywords:* spreadsheets Excel, computer modeling, programming, a technique of teaching of physics, didactics of physics, the solution of tasks.