RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES.

par A.Grothendieck (São Paulo).

INTRODUCTION.

1. Contenu du travail.

Ce travail présente une théorie à peu près complète sur le sujet indiqué par son titre, à cela près que nous avons omis la plupart des démonstrations. Sa véritable raison d'être réside dans les résultats du §3 et surtout du §4,nºs 2, 4, 5, résultats tout à fait nouveaux sur les classiques espaces L^1, L^2, L^∞, qui justifient les développements un peu longs des §§1,2. Les idées directrices résultent de façon assez naturelle de [4] (notamment Chap.1, §4,nº6; voir [5] pour un résumé de [4]). En principe, ce travail est cependant autonôme et ne demande pas la lecture de [4] et [5]. On peut même remarquer que la théorie des produits tensoriels topologiques d'espaces localement convexes généraux gagne en clarté et simplicité à être exposée d'abord pour les espaces de Banach. (En effet, la lecture de [4] montrera que presque toutes les questions de la théorie générale, y compris la théorie des espaces nucléaires, se ramènent en réalité à des questions sur les espaces de Banach).

Jusqu'au §3, nº4 le texte ne contient presque aucune démonstration. La plupart de ses énoncés relèvent d'une technique assez standard, qui sera bien familière par exemple au lecteur de [4]. Certains résultats-clefs, notamment ceux du §2, nº1, sont traités in extenso dans [4] (et les démonstrations se trouvent déjà esquissées dans [5]). Tout au plus la démonstration de certains résultats du § 3 (Notamment le th.2, corollaire 3, et le th.3) ne se borne pas à des redites ou à une morne routine. - Par contre, j'ai donné des démonstrations essentiellement completes pour les résultats fondamentaux difficiles (§3, nº5, th.4 et §4, nº3). Je pense qu'à partir du §3, nº5, tous les raisonnements peuvent être sans difficulté reconstruits par le lecteur attentif, à l'aide des indications détaillées du texte.

A défaut de démonstrations complètes, j'ai pris le plus grand soin à bien dégager la suite logique des idées et des propositions (qui constituait l'essentiel du travail de mise au point) et de montrer comment les unes étaient conséquences naturelles des autres. Aussi je pense que ce texte devrait permettre au lecteur attentif une domination rapide de la théorie.

Les besoins d'un cadre plus vaste que dans [4] et [5] nous ont obligés de revoir complètement la terminologie et les notations antérieures dans la théorie des produits tensoriels topologiques. Celles que nous avons fini par adopeter semblent posséder toutes les propriétés désirables de simplicité, cohérence et symétrie.

Remarquons que nous aurions pu nous dispenser de développer tout le formalisme des $\otimes$-normes (§§ 1,2,3) pour formuler et démontrer les résultats fondamentaux du §4. Mais il me semble que, comme en mainte occasion analogue, cela aurait économisé encre et papier aux dépens de l'effort intellectuel du lecteur. En effet, ce n'est que par ces préliminaires que l'on arrive à donner les énoncés sous la forme concise et suggestive qui permet de saisir, d'un seul coup, les relations entre les très nombreuses variantes du théorème fondamental, et qu'on parvient à une compréhension véritable de la théorie.

Signalons enfin que d'asses nombreux résultats dignes d'intérêt, mais non indispensables pour une bonne compréhension générale, on dû être passés sous silence. On espère qu'un exposé complet d'au moins une partie de la théorie, avec des résultats divers en exercices, pourra trouver sa place dans un livre actuellement en préparation, en collaboration par L.Nachbin et l'auteur, sur la théorie des espaces localement convexes.

2. Terminologie et notations générales.

Nous supposons une bonne connaiscance de la théorie des espaces de Banach, l'algèbre multilinéaire, l'intégration, et suivons de façon générale la terminologie de N.Bourbaki (voir notamment [1], [2]).

a. <u>Généralités algébriques</u>. Tous les espaces vectoriels envisagés sont des espaces de Banach, sur le corps des réels ou des complexes. Si E, F, G sont des espaces de Banach, E' désigne le dual de E, $L(E;F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F, $B(E,F;G)$ l'espace des applications bilinéaires continues de $E\times F$ dans G; si G est le corps des scalaires, on écrit simplement $B(E,F)$. Ces espaces sont munis des normes naturelles qui en font encore des espaces de Banach. Si $A\in L(E;F)$, on désigne par ${}^tA$ la transposée de A, c'est donc un élément de $L(F';E')$.

Si $A\in B(E,F)$, on identifiera aussi A avec l'application linéaire <u>de E dans F'</u> (et non de F dans E'!) qu'elle définit: si $x\in E$, $A.x\in F'$ sera donc défini par

(1) $\langle y,A.x\rangle = A(x,y) \qquad (x\in E, y\in F, A\in B(E,F)).$

On désignera par ${}^tA$ la forme bilinéaire <u>symétrique</u> de A, forme sur $F\times E$ donnée par

(2) ${}^tA(y,x) = A(x,y) \qquad (x\in E,\ y\in F,\ A\in B(E,F)).$

Si, conformément à la convention ci-dessus, on regarde alors ${}^tA$ comme une application linéaire $F\longrightarrow E'$, ce n'est autre que la restriction à F de la transposée de l'application $A:\ E\longrightarrow F'$ (ou encore la transposée tout court, pourvu qu'on munisse F' de la topologie <u>faible</u>), ce qui montre que nos notations sont raisonnablement cohérentes. Evidemment

(3) ${}^t({}^tA) = A \qquad (A\in B(E,F)).$

$E\otimes F$ désigne le produit tensoriel de E et F au sens algébrique général [1], qui est donc engendré par les éléments du type $x\otimes y$ $(x\in E,\ y\in F)$. Pour tout espace vectoriel G, les applications bilinéaires u de $E\times F$ dans G correspondent biunivoquement aux applications linéaires v de $E\otimes F$ dans G, à v corpondant l'application $u(x,y) = v(x\otimes y)$. En particulier, $B(E,F)$ est un espace de formes linéaires sur $E\otimes F$, on a

(4) $\langle x\otimes y,A\rangle = A(x,y) \qquad (x\in E,\ y\in F,\ A\in B(E,F)).$

$E\otimes F$ et $E'\otimes F'$ sont accouplés, on a

(5) $\langle x\otimes y, x'\otimes y'\rangle = \langle x,x'\rangle \langle y,y'\rangle \quad (x\in E, y\in F, x'\in E', y'\in F').$

Cela permet de considérer $E\otimes F$ comme l'espace des formes bilinéaires faiblement séparément continues de rang fini sur $E'\times F'$, et $E'\otimes F'$ comme l'espace des formes bilinéaires continues de rang fini sur $E\times F$:

(6) $E\otimes F\subset B(E',F') \qquad E'\otimes F'\subset B(E,F).$

Avec les conventions faites plus haut, cela donne donc aussi des immersions

(7) $E\otimes F\subset L(E';F) \qquad E'\otimes F'\subset L(E;F').$

$E\otimes F$ est l'espace des applications linéaires faiblement continues de rang fini de E' dans F, $E'\otimes F'$ l'espace des applications linéaires continues de rang fini de E dans F'. Plus généralement on a une immersion canonique

(8) $E'\otimes G\subset L(E;G)$

le premier membre est l'espace des applications linéaires continues de rang fini de E dans G.

On a un <u>isomorphisme</u> <u>de</u> <u>symétrie</u> naturel noté $u\longrightarrow {}^t u$ de $E\otimes F$ sur $F\otimes E$, donné par

(9) ${}^t(x\otimes y) = y\otimes x \qquad (x\in E,\ y\in F).$

C'est la transposée de l'application donné par (2) compte tenu de l'accouplement (4):

(10) $\langle u,A\rangle = \langle {}^t u, {}^t A\rangle \qquad (u\in E\otimes F,\ A\in B(E,F)).$

De plus, les identifications (6) sont compatibles avec les deux opérations $u\longrightarrow {}^t u$ et $A\longrightarrow {}^t A$, en ce sens que la première est induite par la seconde.

Il est <u>absolument essentiel</u> pour la suite que ces conventions (où "la droite et la gauche" sont soigneusement distingués!) soient bien explicitées et respectées.

b. Applications et formes compactes et faiblement compactes. Prolongements canoniques.

On appelle application linéaire compacte (resp. faiblement compacte) de E dans F une application linéaire transformant l'image de la boule unité en une partie relativement compacte (resp. faiblement relativement compacte). Pour ceci, il faut et il suffit que la transposée ${}^tA \in L(F';E')$ possède la même propriété (en tant qu'application de l'espace de Banach F' dans l'espace de Banach E'; donc ici "faible" dans E' doit se référer à $\sigma(E',E'')$). Une forme bilinéaire $A \in B(E,F)$ est dite compacte (resp. faiblement compacte) si l'application linéaire $A: E \longrightarrow F'$ qu'elle définit l'est (même remarque pour le mot "faible" que ci-dessus). Il revient d'ailleurs au même de dire que l'application ${}^tA: F \longrightarrow E'$ l'est.

Soit $A \in B(E,F)$, A s'identifie à un élément de $L(E;F')$, or F' est plongé dans le dual de F'' (c'est l'espace des formes linéaires faiblement continues sur F'', en entendant par topologie faible sur un bidual F'' la topologie $\sigma(F'',F')$). Donc A définit canoniquement un élément de $L(E,(F'')')$, i.e. de $B(E,F'')$. D'où une immersion canonique de $B(E,F)$ dans $B(E,F'')$. L'élément $\tilde{A}$ de $B(E,F'')$ qui correspond à une $A \in B(E,F)$ est appelé le prolongement canonique de A à $E \times F''$. $\tilde{A}$ est encore caractérisée par le fait d'être une forme continue sur $E \times F''$, faiblement continue relativement à F'', qui prolonge A. On définit de même le prolongement canonique de A à $E'' \times F$. On fera attention qu'en prolongeant A d'abord à $E \times F''$, puis la forme obtenue à $E'' \times F''$, on obtient en général autre chose qu'en prolongeant d'abord à $E'' \times F$, puis à $E'' \times F''$. Pour qu'on obtienne la même chose, il faut et il suffit que A soit faiblement compacte. On peut alors parler sans ambiguité du prolongement canonique de A à $E'' \times F''$. Elle est caractérisée par le fait d'être un prolongement faiblement séparément continu de A à $E'' \times F''$ (et un tel prolongement d'ailleurs n'existe que si A est faiblement compacte).

Exemple. Appliquant la première formule (6) à E' et F' au lieu de E et F, on trouve $E' \otimes F' \subset B(E'',F'')$. Cette immersion n'est autre que celle qu'on obtient en composant l'immersion canonique de la deuxième formule (6) avec l'opération de prolongement canonique aux biduals (qui a ici un sens, car une forme bilinéaire continue de rang fini est compacte, et à fortiori faiblement compacte). Des identifications de cette nature seront monnaie courante dans toute la théorie des produits tensoriels topologiques (bien qu'on ne l'explicitera guère dans ce résumé).

c. Espaces accessibles, métriquement accessibles.

Un espace de Banach E est dit accessible (resp. métriquement accessible) si l'application identique de E sur E est limite uniforme sur tout compact d'applications linéaires continues de rang fini (resp. et de norme ≤ 1). La deuxième propriété implique d'ailleurs la première. Une étude détaillée de ces propriétés se trouve dans [4], Chap. 1, §5 (résumé dans [5], Chap. 1, Appendice 2). Signalons que tous les espaces de Banach classiques sont métriquement accessibles. Il en est en particulier des espaces L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$, $C_0(M)$ etc., ce dont nous nous servirons sans autre référence (comme de tous les résultats rappelés dans l'Introduction).

d. Espaces spéciaux.

$C_0(M)$ désigne l'espace des fonctions scalaires continues nulles à l'infini sur l'espace localement compact M, muni de la norme uniforme. On écrit simplement $C(M)$ si M est compact. $L^p = L^p(\mu)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ est l'espace L^p classique constuit sur la mesure positive quelconque μ sur l'espace localement compact M [2]. Chaque fois que dans un énoncé ou une formule, interviennent des espaces notés C, resp. L, resp. H, il s'agira d'un espace du type $C_0(M)$, resp. $L^1(\mu)$, resp. d'un espace de Hilbert (espaces que par abréviation on appelle respectivement espaces du type C, espaces du type L, espaces du type H). Si I est un ensemble sans topologie spécifiée, on convient de le munir de la topologie discrète et de la mesure μ masse +1 en chaque point. On écrit alors $c_0(I)$, $\ell^p(I)$ au lieu de $C_0(I)$, $L^p(\mu)$. Si I est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers ≥ 0, on sous-entend $\mathbb{N}$ dans les notations, et écrit simplement c_0, ℓ^p.

TABLE DES MATIÈRES.

(*) Par convenance, d'ordre typographique, on la soubstutié les lettres grasses par de lettres soulignés.

§ 1 - LES $\otimes$-NORMES.

1. Normes raisonnables. Les normes $\vee$ et $\wedge$.(1)

Définition 1. Soient E et F deux espaces de Banach. Une norme α sur $E \otimes F$ est dite raisonnable si l'application bilinéaire $x,y \longrightarrow x \otimes y$ de $E \times F$ dans $E \otimes F$ est de norme $\leqslant 1$, et si de même $x',y' \longrightarrow x' \otimes y'$ est une application bilinéaire de norme $\leqslant 1$ de $E' \times F'$ dans le dual de l'espace normé $E \otimes F$.

Désignant la norme de ce dual par α', ces conditions signifient que $\alpha(x \otimes y) \leqslant \alpha(x)\alpha(y)$ et $\alpha'(x' \otimes y') \leqslant \alpha'(x')\alpha'(y')$ pour $x \in E$, $y \in F$, $x' \in E'$, $y' \in F'$. En fait, cela implique même les égalités

$$\alpha(x \otimes y) = \alpha(x)\alpha(y); \qquad \alpha'(x' \otimes y') = \alpha'(x')\alpha'(y').$$

$E' \otimes F'$ s'identifie alors à un sous-espace vectoriel du dual de l'espace normé $E \otimes F$. La norme α' induite sur $E' \otimes F'$ par ce dual est aussi une norme raisonnable. - On désigne par $E \overset{\alpha}{\otimes} F$ le complété de $E \otimes F$ pour la norme raisonnable α.

Théorème 1.- 1. Il existe sur $E \otimes F$ une plus petite norme raisonnable $\vee$ et une plus grande norme raisonnable $\wedge$.

2. La norme $\vee$ est la norme induite sur $E \otimes F$ par $B(E',F')$:

$$|u|_{\vee} = \sup_{\substack{\|x'\| \leqslant 1 \\ \|y'\| \leqslant 1}} |\langle u, x' \otimes y' \rangle| \quad (x' \in E', y' \in F').$$

3. La norme $\wedge$ est la norme polaire de la boule unité de $B(E,F)$:

$$|u|_{\wedge} = \sup_{\substack{v \in B(E,F) \\ \|v\| \leqslant 1}} |\langle u, v \rangle| .$$

Si A (resp. B) est la boule unité de E (resp. F), $\wedge$ est aussi la norme jauge de l'ensemble $\Gamma(A \otimes B)$ enveloppe disquée de l'ensemble des $x \otimes y$ $(x \in A, y \in B)$, et est donné par la formule

$$|u|_{\wedge} = \operatorname{Inf} \sum_{i} \|x_i\| \, \|y_i\|$$

le Inf étant étendu à toutes les représentations de u sous la forme d'une somme finie $u = \sum_i x_i \otimes y_i$.

Théorème 2. Quel que soit l'espace de Banach G, on a un isomorphisme métrique $L(E\hat{\otimes}F;G) = B(E,F;G)$.

(dont on laisse la définition au lecteur). En particulier:

Corollaire - Le dual de $E\hat{\otimes}F$ est $B(E,F)$.

La définition de $\vee$ dans le th.1,2° implique que $E\check{\otimes}F$ s'identifie à l'adhérence de $E\otimes F$ dans $B(E',F')$. Si la forme bilinéaire u sur $E'\times F'$ appartient à $E\check{\otimes}F$, alors elle est compacte et faiblement continue, et la réciproque est vraie si E ou F est accessible. Donc $E\check{\otimes}F$ s'identifie aussi à un espace d'applications linéaires compactes de E' dans F, continues pour $\sigma(E',E)$ et $\sigma(F,F')$, et on obtient ainsi toutes les applications de ce type si E ou F est accessible. De façon analogue, $E'\check{\otimes}F$ s'identifie à l'adhérence dans $L(E;F)$ de l'espace $E'\otimes F$ des applications linéaires continues de rang fini de E dans F, adhérence qui est un espace d'applications linéaires compactes de E dans F; et on obtient ainsi toutes les applications linéaires compactes de E dans F si E' ou F est accessible. Enfin $E'\check{\otimes}F'$ s'identifie à l'adhérence dans $B(E,F)$ de l'espace $E'\otimes F'$ des formes bilinéaires continues de rang fini sur $E\times F$, adhérence qui est un espace de formes bilinéaires compactes sur $E\times F$; et on obtient ainsi toutes les formes de ce type si E' ou F' est accessible.

Notons enfin que si E ou F est de dimension finie, toutes les normes raisonnables sur $E\otimes F$ sont équivalentes. Si par exemple E est muni d'une base finie, $E\otimes F$ est isomorphe à F^n.

2. Définition des $\otimes$-normes.

Appelons espace normé numérique un espace normé dont l'espace vectoriel sous-jacent soit un $\underline{R}^n$, resp. $\underline{C}^n$. L'ensemble de tous les espaces normés numériques est donc défini.

Définition 2. On appelle $\otimes$-norme une fonction α qui, à tout couple de deux espaces normés numériques E,F, associe une nor me <u>raisonnable</u> (voir N°1, définition 1) sur leur produit tensoriel $E\otimes F$, norme notée $u \longrightarrow |u|_{\alpha}$, faisant de $E\otimes F$ un espace normé noté $E\overset{\alpha}{\otimes}F$, cette fonction étant assujettie à vérifier la condition suivante: Soit u_i une application linéaire de E_i dans F_i ($i=1,2$, E_i et F_i espaces normés numériques), et $u_1\overset{\alpha}{\otimes}u_2$ l'application $u_1\otimes u_2$ considérée comme application de l'espace normé $E_1\overset{\alpha}{\otimes}E_2$ dans l'espace normé $F_1\overset{\alpha}{\otimes}F_2$; alors on a

$$\|u_1\overset{\alpha}{\otimes}u_2\| \leqslant \|u_1\|\,\|u_2\|.$$

Il s'ensuit que si u_1 et u_2 sont des isomorphismes sur, il en est de même de $u_1\otimes u_2$. Cela montre qu'on peut définir $E\otimes F$ si E et F sont deux espaces normés de dimension finie quelconques (pas nécessairement numériques), et que la condition énoncée dans la définition 2 reste vérifiée pour de tels espaces. Notons aussi qu'avec l'identification usuelle de $E\otimes F$ à $L(E',F)$, comme E' peut être regardé comme un espace normé numérique si E est un espace normé numérique, la donnée d'une $\otimes$-norme α revient aussi à la donnée, pour tout couple (E,F) de deux espaces normés numériques, d'une norme raisonnable $|u|_{\alpha}$ sur $L(E;F) = E'\otimes F$, la condition de la définition 2 s'exprimant maintenant par

$$|AuB|_{\alpha} \leqslant \|A\|\,\|B\|\,|u|_{\alpha}$$

pour $u\in L(E;F)$, $A\in L(F;G)$, $B\in L(H;E)$ (E, F, G, H étant des espaces normés numériques quelconques).

<u>Exemples</u>. Si pour tout couple E,F de deux espaces normés numériques, on considère sur $E\otimes F$ la plus petite norme raisonnable $\vee$ (resp. la plus grande norme raisonnable $\wedge$), on obtient une $\otimes$-norme qu'on désigne encore par $\vee$ (resp. par $\wedge$). La norme $|u|_{\vee}$ sur un espace $L(E;F)$ n'est évidemment autre que la norme usuelle des opérateurs.

<u>Opérations fondamentales sur les</u> <u>$\otimes$-normes</u>. Soit α une $\otimes$-norme. Pour deux espaces normés numériques E et F, considérons la norme $u \longrightarrow |{}^t u|_{\alpha}$ sur $E\otimes F$. On voit aussitôt que la fonction ainsi définie, pour E et F variables est une $\otimes$-norme, qu'on note ${}^t\alpha$ et qu'on appelle la <u>$\otimes$-norme transposée</u> ou <u>symétrique</u> de α. Elle est donc définie par $|u|_{{}^t\alpha} = |{}^t u|_{\alpha}$. α est dite <u>symétrique</u> si $\alpha = {}^t\alpha$.- En second lieu, pour deux espaces normés numériques quelconques, considérons sur $E\otimes F$ la norme duale de la norme $|u|_{\alpha}$ sur $E'\otimes F'$. On voit aussitôt que pour E et F variables, on obtient ainsi une $\otimes$-nor-

me, qu'on note α' et qu'on apelle $\otimes$-norme duale de α. Donc par définition la norme $|u|_{\alpha'}$ sur $E\otimes F$ est la duale de la norme $|u'|_{\alpha}$ sur $E'\otimes F'$. On vérifie aussitôt les formules

$$^t(^t\alpha) = \alpha, \qquad (\alpha')' = \alpha$$

et $^t(\alpha') = (^t\alpha)'$. On désigne aussi par $\check{\alpha}$ la valeur commune:

$$^t(\alpha') = (^t\alpha)' = \check{\alpha}.$$

<u>Relation d'ordre</u>. Soient α et β deux $\otimes$-normes, et $\lambda \geqslant 0$. On écrira $\alpha \leqslant \lambda\beta$ si pour tout couple de deux espaces normés numériques E, F, on a $|u|_{\alpha} \leqslant \lambda |u|_{\beta}$ pour $u \in E\otimes F$. Cela implique évidemment $\lambda \geqslant 1$. En particulier, la relation $\alpha \leqslant \beta$ est une relation d'ordre dans l'ensemble des $\otimes$-normes. On a les équivalences suivantes:

$$\alpha \leqslant \lambda\beta \quad \text{équivaut à} \quad {}^t\alpha \leqslant \lambda\, {}^t\beta \quad \text{et à} \quad \beta' \leqslant \lambda\alpha' .$$

Soit (α_i) une famille de $\otimes$-normes. Pour tout couple (E,F) de deux espaces normés numériques, considérons sur $E\otimes F$ la norme $|u|_{\alpha}$ borne supérieure des normes $|u|_{\alpha_i}$ (qui sont toutes majorées par $|u|_{\wedge}$). On constate qu'on a ainsi définie une $\otimes$-norme α, qui est évidemment la borne supérieure de (α_i) dans l'ensemble ordonné de toutes les $\otimes$-normes. Comme $\alpha \longrightarrow \alpha'$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné des $\otimes$-normes sur le même ensemble muni de l'ordre inverse, on voit donc que la borne inférieure d'une famille quelconque de $\otimes$-normes existe aussi. En d'autres termes, l'ensemble des $\otimes$-normes est un ensemble complètement réticulé.

Les propriétés élémentaires des $\otimes$-normes $\vee$ et $\wedge$ dans ce contexte sont résumées dans le

<u>Théorème 3.</u> <u>$\vee$ est la plus petite, $\wedge$ la plus grande des $\otimes$-normes. $\vee$ et $\wedge$ sont symétriques, et duales l'une de l'autre</u>: $(\vee)' = \wedge$, $(\wedge)' = \vee$.

3. <u>Extension des $\otimes$-normes aux espaces de dimension infinie.</u>

Soit α une $\otimes$-norme. Soient E et F deux espaces de

Banach. Pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie M de E et N de F, $M\otimes N$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E\otimes F$, qui croit avec M et N, et les $M\otimes N$ forment une famille filtrante croissante de sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E\otimes F$ dont la réunion est $E\otimes F$. Soit $u\in E\otimes F$; si $u\in M\otimes N$, on désigne par $|u|_{M\overset{\alpha}{\otimes}N}$ la norme de u dans $M\overset{\alpha}{\otimes}N$. Elle décroit quand M et N croissent, posons

$$|u|_{\alpha} = \operatorname*{Inf}_{M,N} |u|_{M\overset{\alpha}{\otimes}N} .$$

On voit aussitôt que la fonction ainsi définie sur $E\otimes F$ est une norme raisonnable (N° 1, définition 1). Si en particulier $\alpha = \vee$ ou $\alpha = \wedge$, la définition de $|u|_{\alpha}$ donnée dans la formule ci-dessus est compatible avec les notations introduites au N°1 (i.e. notre formule redonne bien la plus petite resp. la plus grande des normes raisonnables sur $E\otimes F$). On désigne par $E\overset{\alpha}{\otimes}F$ le complété de $E\otimes F$ pour la norme $|u|_{\alpha}$.

Soient E_i, F_i des espaces de Banach (i=1,2), soit u_i une application linéaire continue de E_i dans F_i. Considérons $u_1\otimes u_2$ comme une application linéaire de l'espace <u>normé</u> $E_1\otimes E_2$ dans l'espace <u>normé</u> $F_1\otimes F_2$, on aura encore $\|u_1\otimes u_2\| \leq \|u_1\|\,\|u_2\|$. Donc $u_1\otimes u_2$ se prolonge par continuité en une application linéaire de norme $\leq \|u_1\|\,\|u_2\|$ de $E_1\overset{\alpha}{\otimes}E_2$ dans $F_1\overset{\alpha}{\otimes}F_2$, notée $u_1\overset{\alpha}{\otimes}u_2$.

On aura encore la formule $|u|_{{}^t\alpha} = |{}^tu|_{\alpha}$. D'autre part, si on désigne par $\|u\|_{\alpha}$ la norme sur $E\otimes F$ duale de la norme $|u'|_{\alpha'}$ sur $E'\otimes F'$, on aura $\|u\|_{\alpha} \leq |u|_{\alpha}$, mais on ne sait pas si on aura toujours $\|u\|_{\alpha} = |u|_{\alpha}$. Ce sera le cas du moins si E <u>et</u> F sont <u>métriquement</u> <u>accessibles</u> (voir Introduction,II). Disons que la $\otimes$-norme α est <u>accessible</u> si on a $\|u\|_{\alpha} = |u|_{\alpha}$ dans $E\otimes F$ chaque fois que E <u>ou</u> F est de dimension finie. On montre facilement pour toutes les $\otimes$-normes connues qu'elles sont accessibles; si est accessible, il en est de même de α' et ${}^t\alpha$, donc aussi de $\check{\alpha} = {}^t(\alpha')$. Ceci posé, si α est accessible, on aura $\|u\|_\alpha = |u|_\alpha$ dans $E \otimes F$ pourvu que E ou F soit métriquement accessible. - On a dans tous les cas $\|u\|_\vee = |u|_\vee$, comme on voit aussitôt.(2)

4. Formes et applications de type α.

Soit α une $\otimes$-norme, E et F deux espaces de Banach. Comme on a $|u|_\alpha \leq |u|_\wedge$ dans $E \otimes F$, on voit que le dual de $E \overset{\alpha}{\otimes} F$ s'identifie à un sous-espace vectoriel du dual $B(E,F)$ de $E \widehat{\otimes} F$, avec une norme plus fine.

Définition 3. 1. Une forme bilinéaire u sur $E \times F$ est dite de type α, ou une α-forme, si elle appartient au dual de $E \overset{\alpha'}{\otimes} F$. L'espace de ces formes sur $E \times F$, i.e. le dual de $E \overset{\alpha'}{\otimes} F$, est noté $B^\alpha(E,F)$, la norme sur cet espace est notée $\|u\|_\alpha$ (α-norme de u).

2. Une application linéaire u de E dans F est dite de type α, ou une α-application, si la forme bilinéaire $\langle ux, y' \rangle$ sur $E \times F'$ qu'elle définit est de type α. La α-norme de cette dernière est aussi appellée α-norme de u, et notée $\|u\|_\alpha$. L'espace des α-applications de E dans F, muni de la α-norme, est noté $L^\alpha(E;F)$.

3. Dans le cas $\alpha = \wedge$, on emploie les noms: forme bilinéaire intégrale, application intégrale, norme intégrale.

On convient de regarder $\|u\|_\alpha$ comme infini si la forme ou l'application linéaire u n'est pas de type α. - Si $\alpha = \vee$, les α-formes (resp. les α-applications) sont toutes les formes bilinéaires continues (resp. toutes les applications linéaires continues), et la α-norme est leur norme usuelle: $\|u\|_\vee = \|u\|$.

Propriétés générales des α-formes. Par sa définition, la boule unité de $B^\alpha(E,F)$ est compacte pour la topologie faible définie par $E \overset{\alpha'}{\otimes} F$, laquelle topologie coïncide donc sur cette boule avec la topologie faible définie par $E \otimes F$, i.e. la topologie de la convergence simple des formes bilinéaires sur $E \times F$. Donc toute limite pour la convergence simple de formes bilinéaires de α-norme ≤ 1, (est encore de type α et) a une α-norme ≤ 1.

Soit A une α-forme sur $E\times F$, soit u une application linéaire continue d'un espace de Banach E_1 dans E, v une application linéaire continue d'un espace de Banach F_1 dans F. On notera $A\circ(u\otimes v)$ la forme bilinéaire sur $E_1\times F_1$: $A(ux_1,vy_1)$. Alors cette dernière est encore de type α, et on a

$$\|A\circ(u\otimes v)\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\alpha}\|u\|\,\|v\| .$$

En particulier, si E_1 resp. F_1 est un sous-espace vectoriel normé de E resp. F, on voit (en prennant pour u,v les applications d'inclusion) que la restriction à $E_1\times F_1$ d'une forme de type α sur $E\times F$ est de type α, et a une α-norme au plus égale.

Soit A une forme bilinéaire sur $E\times F$, ${}^tA$ la forme transposée sur $F\times E$: ${}^tA(y,x) = A(x,y)$. Pour que A soit de type α, il faut et il suffit que ${}^tA$ soit de type ${}^t\alpha$, et on a encore

$$\|{}^tA\|_{{}^t\alpha} = \|A\|_{\alpha} .$$

Voici enfin un résultat élémentaire, mais moins trivial:

<u>Théorème 4</u>. <u>Soit</u> A <u>une forme bilinéaire continue sur</u> $E\times F$, $\tilde{A}$ <u>son prolongement canonique à</u> $E\times F''$. <u>Pour que</u> A <u>soit de type</u> α, <u>il faut et il suffit que</u> $\tilde{A}$ <u>le soit, et on a alors</u>

$$\|A\|_{\alpha} = \|\tilde{A}\|_{\alpha} .$$

Par polarité, ce théorème equivaut au

<u>Corollaire 1</u>. <u>La boule unité de</u> $E\overset{\alpha}{\otimes}F$ <u>est dense dans la boule unité de</u> $E\overset{\alpha}{\otimes}F''$ <u>pour la topologie faible définie par la dualité avec</u> $B^{\alpha'}(E,F)$.

Cela implique de plus le

<u>Corollaire 2</u>. <u>Les applications canoniques</u> (produits tensoriels des applications d'inclusion) $E\overset{\alpha}{\otimes}F \longrightarrow E\overset{\alpha}{\otimes}F''$ et $E\overset{\alpha}{\otimes}F \longrightarrow E''\overset{\alpha}{\otimes}F''$ <u>sont des isomorphismes métriques</u>.

Le théorème 4 implique aussi que si on considère la norme $\|u\|_{\alpha}$ induite sur $E'\otimes F'$ par $B^{\alpha}(E,F)$, c'est aussi la norme introduite avec la même notation à la fin du Nº 3, i.e. la norme duale de la norme $|v|_{\alpha'}$ sur $E''\otimes F''$.

<u>Propriétés générales des</u> <u>α-applications</u>. Ce sont les mêmes propriétés que celles vues pour les formes, mises dans le langage des applications linéaires. Toute application de E dans F qui est limite pour la convergence simple d'applications de type α et de α-norme ≤ 1, est de type α et a une α-norme ≤ 1. A fortiori, $L^{\alpha}(E;F)$ est un espace de Banach pour sa norme $\|u\|_{\alpha}$. Si $u \in L^{\alpha}(E;F)$, $v \in L(F;G)$, on a $vu \in L^{\alpha}(E;G)$, et

$$\|vu\|_{\alpha} \leq \|v\| \, \|u\|_{\alpha} .$$

De même, $v \in L(E;F)$ et $u \in L^{\alpha}(F;G)$ implique $uv \in L^{\alpha}(E;G)$ et

$$\|uv\|_{\alpha} \leq \|u\|_{\alpha} \|v\| .$$

Soit $u \in L(E;F)$, pour que u soit de type α, il faut et il suffit que ${}^tu$ soit de type ${}^t\alpha$, et on a

$$\|{}^tu\|_{{}^t\alpha} = \|u\|_{\alpha} .$$

Appliquant ce même résultat au transposé u' et à ${}^t\alpha$ au lieu de u et α, on trouve: pour que u soit de type α, il faut et il suffit que son bitransposé $u'' \in L(E'';F'')$ le soit, et on a

$$\|u\|_{\alpha} = \|u''\|_{\alpha} .$$

Soit u une forme bilinéaire continue sur $E\times F$, pour qu'elle soit de type α, il faut et il suffit que l'application linéaire de E dans F' qui lui correspond le soit, et les deux α-normes correspondantes sont égales (résulte du théorème 4). Il s'ensuit que si $u \in L(E;F)$, pour que u soit de type α, il faut et il suffit que l'application de E dans F'' qui lui correspond le soit, et alors les deux α-normes correspondantes sont égales.

<u>Relations entre α-applications et $\check{\alpha}$-applications</u>. On a le

Théorème 5. *Soit* $u \in L^{\alpha}(E;F)$, $v \in L^{\check{\alpha}}(F;G)$, α *étant une* $\otimes$*-norme accessible* (voir fin du Nº 3) *ou les trois espaces de Banach* E, F, G *étant supposés métriquement accessibles. Alors* vu *est intégrale, et*

$$\|vu\|_{\wedge} \leqslant \|v\|_{\check{\alpha}} \|u\|_{\alpha} .$$

On a d'ailleurs une réciproque. Soient en effet E, F deux espaces de Banach, et $u \in L(E;F)$. Pour que $\|u\|_{\alpha} \leqslant 1$, il faut et il suffit que $v \in F'\otimes E$ implique $|vu|_{\wedge} \leqslant |v|_{\check{\alpha}}$, ou encore que $v \in F'\otimes E$ implique $|uv|_{\wedge} \leqslant |v|_{\check{\alpha}}$. Si alors E (resp. F) est métriquement accessible, il revient encore au même de dire que $v \in L^{\check{\alpha}}(F;E)$ implique $\|vu\|_{\wedge} \leqslant \|v\|_{\check{\alpha}}$ (resp. $\|uv\|_{\wedge} \leqslant \|v\|_{\check{\alpha}}$). (on suppose α acessible, ce qui pratiquement n'est pas une restriction). Utilisant le théorème du graphe fermé, on voit que pour que u soit de type α, il suffit déjà que pour toute $v \in L^{\check{\alpha}}(F;E)$, uv (resp. vu) soit intégrale.

5. *Formes et applications α-nucléaires.*

Soit α une $\otimes$-norme. Soient E et F deux espaces de Banach. Comme dans $E\otimes F$, on a $\|u\|_{\alpha} \leqslant |u|_{\alpha}$, on a une application linéaire canonique de norme $\leqslant 1$ de $E\overset{\alpha}{\otimes}F$ dans $B^{\alpha}(E',F')$. Cette application est biunivoque si E ou F est accessible (et même un isomorphisme métrique si E ou F est métriquement accessible). En tous cas, l'image de $E\overset{\alpha}{\otimes}F$ dans $B^{\alpha}(E',F')$ s'identifie au quotient de $E\overset{\alpha}{\otimes}F$ par le noyau de l'application précédente, et il y a lieu de la munir de la norme quotient, qui sera notée $N_{\alpha}(u)$. Pour $u \in E\otimes F$, on aura donc

$$\|u\|_{\alpha} \leqslant N_{\alpha}(u) \leqslant |u|_{\alpha} .$$

(En fait, on a dit que les deux membres extrêmes sont déjà égaux si E ou F est métriquement accessible, donc dans tous les cas importants en pratique). Si E et F sont des duals, mettons E' et F', on a aussi une application linéaire canonique de norme $\leqslant 1$ de $E'\overset{\alpha}{\otimes}F'$ dans $B^{\alpha}(E,F)$; on passe de celle-ci à l'application définie plus haut, ici $E'\overset{\alpha}{\otimes}F' \longrightarrow B^{\alpha}(E'',F'')$, en fai sant correspondre à la forme sur $E \times F$ définie par une $u \in E' \overset{\alpha}{\otimes} F'$, (forme qui est compacte comme limite pour la norme de formes de rang fini), son prolongement canonique à $E'' \times F''$. L'espace quotient envisagé plus haut peut donc aussi s'identifier ici à un sous-espace vectoriel de $B^{\alpha}(E,F)$; sa norme N_{α} sera la norme induite pourvu que E' ou F' soit métriquement accessible. On voit de même que le quotient défini plus haut, peut pour un espace $E' \overset{\alpha}{\otimes} F$ s'identifier à un sous-espace de $L^{\alpha}(E;F)$; sa norme N_{α} sera la norme induite par $L^{\alpha}(E;F)$ pourvu que E' ou F soit métriquement accessible.

<u>Définition 4. Soit</u> α <u>une</u> $\otimes$<u>-norme,</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach.</u>

1. <u>On appelle forme</u> α-nucléaire <u>sur</u> $E \times F$ <u>une forme qui appartient à l'image canonique de</u> $E' \overset{\alpha}{\otimes} F'$ <u>dans</u> $B^{\alpha}(E,F)$. <u>Muni de quotient</u> N_{α}, <u>l'espace de ces formes est noté</u> $B_{\alpha}(E,F)$.

2. <u>On appelle</u> application α-nucléaire <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>une application qui appartient à l'image canonique de</u> $E' \overset{\alpha}{\otimes} F$ <u>dans</u> $L^{\alpha}(E;F)$. <u>Muni de sa norme quotient</u> N_{α}, <u>l'espace de ces applications est noté</u> $L_{\alpha}(E;F)$.

3. <u>Dans le cas</u> $\alpha = \wedge$, <u>on emploie les noms</u>: forme nucléaire, application nucléaire. $N_{\wedge}(u)$ <u>est appelé</u> norme nucléaire (<u>ou</u> norme-trace) <u>de</u> u.

Les applications nucléaires sont aussi parfois appelés applications de Fredholm, ou applications à trace.

Dans une large mesure, les propriétés générales des formes et applications α-nucléaires sont les mêmes que celles des α-formes et α-applications (qui les généralisent), parfois sous réserve que certains des espaces considérés soient accessibles. Toutesfois, le plus souvent la boule unité de $B_{\alpha}(E,F)$ ne sera pas compacte pour la convergence simple même si $\alpha = \vee$ ou $\alpha = \wedge$ (son adhérence dans $B(E,F)$ pour la convergence simple est contenu dans la boule unité de $B^{\alpha}(E,F)$ et exactement égale à cette dernière si E ou F est métriquement accessible). P.ex. les formes $\vee$-nucléaires sont compactes, mais en général il existera sur $E \times F$ des formes bilinéaires continues (donc de type $\vee$I) non compactes.

On a énoncés exactement parallèles à ceux du Nº précédent pour la composition de formes ou applications α-nucléaires avec des applications linéaires continues, et sur les prolongements canoniques de formes ou applications α-nucléaires. De plus, il résulte aussitôt des définitions que la forme u sur $E \times F$ est α-nucléaire si et seulement si l'application linéaire de E dans F' qu'elle définit l'est, et les normes N_α correspondantes sont les mêmes. - Soit maintenant u une application α-nucléaire de E dans F, alors on vérifie aussitôt que sa transposée ${}^t u$ est ${}^t\alpha$-nucléaire, et que

$$N_{{}^t\alpha}({}^t u) \leqslant N_\alpha(u).$$

Réciproquement, dire que ${}^t u$ est ${}^t\alpha$-nucléaire, signifie que la forme bilinéaire $\langle ux, y' \rangle$ sur $E \times F'$ est α-nucléaire, ou encore que u est α-nucléaire en tant qu'application das F". Cela entraine que u est α-nucléaire (en tant qu'application <u>dans</u> F) et qu'en fait l'inégalité donnée plus haut est une égalité, pourvu qu'on suppose E' ou F" accessible (ou qu'il existe une projection de norme 1 de F" sur F). Cela résulte de l'énoncé un peu plus général: Soit $u \in L_\alpha(F', E)$, continue pour $\sigma(F', F)$ et $\sigma(E, E')$, alors u provient d'un élément de norme $N_\alpha(u)$ du quotient de $F \overset{\alpha}{\otimes} E$ par l'application canonique de cet espace dans $L_\alpha(F', E)$, <u>pourvu que</u> E <u>ou</u> F" <u>soit accessible</u>. Cette dernière condition est peut-être inutile.(3)

6. <u>Comparaison des $\otimes$-normes</u>.

Soient α et β deux $\otimes$-normes, et $\lambda \geqslant 0$, tels que $\alpha \leqslant \lambda\beta$. Si E et F sont deux espaces de Banach, on a alors $|u|_\alpha \leqslant \lambda |u|_\alpha$ pour tout $u \in E \otimes F$, en d'autres termes l'application identique de $E \otimes F$ se prolonge par continuité en une application linéaire de norme $\leqslant \lambda$ de $E \overset{\beta}{\otimes} F$ dans $E \overset{\alpha}{\otimes} F$. Si d'ailleurs E ou F est accessible, on sait à priori que cette application est biunivoque (car tous les produits tensoriels complétés $E \widehat{\otimes} F$ se plongent dans le même espace $E\overset{\vee}{\otimes}F$), on pourra alors écrire $E\overset{\beta}{\otimes}F \subset E\overset{\alpha}{\otimes}F$. - Appliquant ceci au couple β', α' qui satisfait à $\beta' \leq \lambda\alpha'$, et transposant, on trouve de même que pour toute forme bilinéaire u sur $E \times F$, on a $\|u\|_\alpha \leq \lambda\|u\|_\beta$, en particulier $B^\beta(E,F) \subset B^\alpha(E,F)$. Le résultat analogue s'ensuit aussitôt pour les applications de E dans F de type α resp. de type β, en particulier $L^\beta(E,F) \subset$ $\subset L^\alpha(E,F)$. On trouve de même $B_\beta(E,F) \subset B_\alpha(E,F)$ et $L_\beta(E;F) \subset L_\alpha(E;F)$, avec des inégalités analogues $N_\alpha(u) \leq \lambda N_\beta(u)$.

Si maintenant on a à la fois deux inégalités $\alpha \leq \lambda\beta$ et $\beta \leq \mu\alpha$, on voit que pour tout couple de deux espaces de Banach E,F, on aura un isomorphisme vectoriel-topologique $E\overset{\alpha}{\otimes}F = E\overset{\beta}{\otimes}F$, et des identités, respectant les topologies, $B^\alpha(E,F) = B^\beta(E,F)$, $L^\alpha(E;F) = L^\beta(E;F)$, $B_\alpha(E,F) = B_\beta(E,F)$, $L_\alpha(E;F) = L_\beta(E;F)$.

Il est alors naturel de dire que une $\otimes$-norme α est dominée par une autre β, s'il existe un $\lambda \geq 0$ tel que $\alpha \leq \lambda\beta$, et de dire que α et β sont équivalentes si chacune est dominée par l'autre. Il n'est d'ailleurs pas difficile de construire un espace de Banach E (réflexif, séparable, métriquement accessible, isomorphe à son dual) tel que pour deux $\otimes$-normes quelconques α et β, $E\overset{\beta}{\otimes}E \subset E\overset{\alpha}{\otimes}E$ implique que α est dominée par β (donc $E\overset{\alpha}{\otimes}E =$ $= E\overset{\beta}{\otimes}E$ implique que α et β sont équivalentes). Notons que les résultats essentiels de ce travail (§§ 3 et 4) peuvent s'exprimer précisément par des inégalités du type $\alpha \leq \lambda\beta$ entre $\otimes$-normes particulières.

Relations entre $\otimes$-normes réelles et complexes. Dans la théorie des $\otimes$-normes développée dans ce travail, il faut bien faire attention que le corps des scalaires R ou C est fixé une fois pour toutes. Il faut donc distinguer entre l'ensemble $\mathcal{T}_r$ des "$\otimes$-normes réelles" et l'ensemble $\mathcal{T}_c$ des "$\otimes$-normes complexes". Les relations entre les deux ne semblent pas si simples qu'on pourrait s'y attendre. Ainsi on remarquera que la norme intégrale d'une application linéaire d'un espace de Banach complexe E dans un autre F est plus petite (et parfois strictement plus petite) dans la "théorie complexe" que dans la "théorie réelle" (quand on regarde u comme une application linéaire réelle entre les espaces de Banach réels E_0, F_0 sous-jacents à E, F). (Il suffit à titre d'exemple de prendre l'application identique du corps des complexes C sur lui-même). De positif, nous dirons simplement ceci (qui est tout à fait satisfaisant quand on s'intéresse à l'aspect vectoriel topologique plûtôt que métrique de la théorie). Soit T_r (resp. T_c) l'ensemble des classes de $\otimes$-normes réelles (resp. complexes) modulo l'équivalence définie dans ce Nº. Alors il y a une correspondance biunivoque canonique entre T_r et T_c définie ainsi. Supposons que $\alpha \in T_r$ et $\beta \in T_c$ se correspondent. Alors une application linéaire u d'un espace de Banach complexe E dans un autre F est de type β, si et seulement si elle est de type α (en tant qu'application linéaire réelle entre les espaces de Banach réels sous-jacents); et une application linéaire u d'un espace de Banach réel E dans un autre F est de type α si et seulement si l'application linéaire complexe du complexifié E^C de E dans le complexifié F^C de F qui prolonge u, est de type β.- Bien entendu, cette identification entre T_r et T_c est compatible avec les relations d'ordre, et avec les opérations usuelles sur classes de $\otimes$-normes, telles $\alpha \longrightarrow {}^t\alpha, \alpha', \check{\alpha}$ (ainsi d'ailleurs qu'avec les opérations moins triviales étudiées au §2).

§ 2 - LES $\otimes$-NORMES LIÉES AUX ESPACES C ET L.

1. Compléments sur $\wedge$ et $\vee$.

Détermination des formes bilinéaires et applications linéaires intégrales. Soient E et F deux espaces de Banach. Par définition, les formes bilinéaires intégrales, de norme intégrale ≤ 1, sur $E \times F$, forment la boule unité du dual de $E \check{\otimes} F$. Il résulte alors du théorème des bipolaires que ce sont aussi les formes qui sont limites, pour la convergence simple, de combinaisons linéaires convexes de formes "décomposées" $x' \otimes y'$, avec $x' \in E'$ et $y' \in F'$ de norme ≤ 1. Par raison de compacité, il s'ensuit que ce sont aussi les formes qui peuvent s'écrire sous forme d'une intégrale faible

$$u = \int x'(t) \otimes y'(t)\, d\mu(t)$$

où μ est une mesure positive de norme 1 sur un espace compact K (on peut prendre pour K le produit des boules unités de E' et F' munies des topologies faibles), $t \longrightarrow x'(t)$ une application scalairement mesurable de K dans la boule unité de E', $t \longrightarrow y'(t)$ une application analogue de K dans F'. La formule intégrale écrite plus haut signifie simplement qu'on a

$$u(x,y) = \int \langle x, x'(t)\rangle \langle y, y'(t)\rangle\, d\mu(t)$$

pour tout $x \in E$, $y \in F$. On en conclut enfin facilement la réduction suivante à un type canonique bien concret de formes bilinéaires:

<u>Théorème 1. Soit</u> u <u>une forme bilinéaire sur</u> $E \times F$. <u>Pour que</u> $\|u\|_\wedge \leq 1$, <u>il faut et il suffit que l'on puisse trouver un espace compact</u> K <u>muni d'une mesure positive</u> μ <u>de norme</u> 1, <u>et des applications linéaires de norme</u> ≤ 1 α (<u>resp.</u> β) <u>de</u> E (<u>resp.</u> F) <u>dans</u> $L^\infty(\mu)$, <u>telles que l'on ait</u>

$$u(x,y) = \langle \alpha x, \beta y\rangle \qquad (x \in E,\ y \in F).$$

(Bien entendu, on pose $\langle f,g\rangle = \int fg\, d\mu$ pour $f,g \in L^\infty(\mu)$).

En interprétant en termes d'applications linéaires, il vient:

<u>Corollaire 1. Pour qu'une application linéaire</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>soit de norme intégrale</u> ≤ 1, <u>il faut et il suffit qu'elle se factorise en</u>

$$E \xrightarrow{\alpha} L^\infty \xrightarrow{\beta} L^1 \xrightarrow{\gamma} F''$$

<u>où</u> α <u>et</u> γ <u>sont de norme</u> ≤ 1, <u>et</u> β <u>l'application identique d'un espace</u> $L^\infty(\mu)$ <u>dans</u> $L^1(\mu)$, <u>pour une mesure positive</u> μ <u>de norme</u> 1 <u>convenable sur un espace compact</u> K.

Signalons un cas intéressant:

<u>Corollaire 2. Soit</u> μ <u>une mesure positive sur un espace localement compact</u> M, u <u>une application linéaire continue d'un</u>

<u>espace de Banach</u> E <u>dans</u> $L^1(\mu)$. <u>Pour que</u> u <u>soit intégrale, il faut et il suffit que l'image par</u> u <u>de la boule unité de</u> E <u>soit latticiellement bornée, et alors on a</u>

$$\|u\|_\wedge = \|\sup_{\|x\|\leq 1} |ux|\,\|_\wedge \quad .$$

(où pour $f \in L^1$, $|f|$ désigne la (classe de la) fonction $t \longrightarrow |f(t)|$).

(Voir [5], Chap.1, Nº 9 pour des variantes).

<u>Propriétés spéciales essentielles des applications intégrales</u>. Elles sont résumées dans le

<u>Théorème 2</u>. <u>Soient</u> E,F, G <u>trois espaces de Banach</u>, u <u>une application linéaire de</u> E <u>dans</u> F, v <u>une application linéaire de</u> F <u>dans</u> G. <u>Si</u> u <u>est intégrale et</u> v <u>faiblement compacte</u> (<u>resp.</u> u <u>faiblement compacte et</u> v <u>intégrale</u>) <u>alors</u> vu <u>est nucléaire</u> (§1, Nº 5, <u>définition</u> 4) <u>et on a</u>

$$N_\wedge(vu) \leqslant \|v\|\,\|u\|_\wedge \qquad (\text{resp. } N_\wedge(vu) \leqslant \|v\|_\wedge \|u\|).$$

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> E <u>ou</u> F <u>est réflexif, alors les applications intégrales, ou nucléaires, de</u> E <u>dans</u> F <u>sont les mêmes, avec identité entre norme intégrale et norme nucléaire</u>.

<u>Détermination de certains produits tensoriels topologiques</u>.

Voici les deux cas les plus importants où un produit tensoriel topologique peut s'interpréter de façon simple:

<u>Théorème 3</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach</u>, M <u>un espace localement compact muni d'une mesure positive</u> μ. <u>Alors on a des isomorphismes métriques canoniques</u>:

$$L^1(\mu)\hat{\otimes} E = L^1_E(\mu); \qquad C_0(M)\check{\otimes} E = C_0(M,E).$$

$L^1_E(\mu)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions intégrables pour μ à valeurs dans E [2], et $C_0(M,E)$ l'espace des fonctions sur M continues nulles à l'infini à valeurs dans E, muni de la norme uniforme.

On se reportera à [4] et [5] pour des cas particuliers divers et certaines applications de ce théorème, (en particulier quand on fait M = ensemble discret des entiers avec la masse +1 en chaque point, L^1 et C_0 devenant alors ℓ^1 et c_0). De nombreuses autres déterminations de produits tensoriels topologiques, dans le cadre des espaces localement convexes généraux, sont donnés dans [4], Chap.2, nº 5 et [5], Chap. 2, passim. Signalons seulement encore que $\ell^1 \hat{\otimes} E$ s'interprête comme l'espace des suites sommables (unconditionnally convergent) dans E, et que si $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ désigne l'espace des fonctions m fois continûment différentiables sur le cube compact K dans R^n, avec sa topologie usuelle (qui est normable), on a $\mathcal{E}^{(m)}(K) \check{\otimes} E = \mathcal{E}^{(m)}(K,E)$ (espace des applications m fois continûment différentiables de K dans E).

2. __Propriétés vectorielles-topologiques fondamentales des espaces C et L.__

On appelle espace __C__ ou du __type__ __C__ (resp. espace __L__, ou du type __L__) un espace de Banach métriquement isomorphe à un espace $C_0(M)$ constuit sur un espace localement compact convenable (resp. à un espace $L^1(\mu)$ construit sur une mesure positive convenable). Il est classique (Kakutani) que le dual d'un espace __L__ (i.e. un espace L^∞) est un espace __C__, et que le dual d'un espace __C__ (i.e. l'espace des mesures bornées sur un espace localement compact M) est un espace __L__. L'importance à priori de ces espaces en théorie des opérations linéaires tient à leurs propriétés vectorielles-topologiques très spéciales, (et qui les caractérisent dans une large mesure(4)) aperçus pour la première fois dans un cas particulier important par L.Nachbin [9]. Ces propriétés découlent de façon naturelle de la théorie des produits tensoriels $\vee$ et $\wedge$, grâce au théorème suivant, dont la première partie est une conséquence triviale de la première partie du théorème 3, et la seconde s'en déduit facilement par dualité (en se ramenant d'abord au cas où E est de dimension finie):

<u>Théorème 4. Soit E un espace de Banach, F un sous-espace vectoriel fermé. 1. Soit L un espace du type $\mathcal{L}$. Alors l'application canonique $L \hat{\otimes} F \longrightarrow L \hat{\otimes} E$ est un isomorphisme métrique du premier espace dans le second. 2. Soit C un espace du type $\mathcal{C}$. Alors l'application canonique $C \check{\otimes} E \longrightarrow C \check{\otimes} E/F$ est un homomorphisme métrique du premier espace sur le second.</u>

(Bien entendu, les applications canoniques en question sont resp. le produit tensoriel des applications canoniques $L \longrightarrow L$ et $E \longrightarrow E$, et des applications canoniques $C \longrightarrow C$ et $E \longrightarrow E/F$). Transformant par transposition, le premier énoncé équivaut à:

<u>Corollaire 1. Toute forme bilinéaire continue sur</u> $L \times F$ <u>se prolonge en une forme bilinéaire de norme égale sur</u> $L \times E$.

Interprétant en langage d'applications linéaires, on trouve

<u>Corollaire 2. Toute application linéaire continue de F dans un espace L^{∞} se prolonge en une application linéaire de même norme de E dans L^{∞}. Toute application linéaire continue de F dans un espace C du type $\mathcal{C}$ se prolonge en une application linéaire de même norme de E dans C''.</u>

On notera qu'on ne peut remplacer C'' par C dans ce dernier énoncé: faisant en effet $E = C''$, $F = C$, il faudrait en effet que l'on puisse trouver une projection de norme 1 de C'' sur C, or on peut montrer p.ex. que si C est un espace du type <u>$\mathcal{C}$ séparable</u>, il n'est pas facteur direct dans son bidual.

Par transposition, le corollaire 2 s'énonce aussi ainsi:

<u>Corollaire 3. Soit L un espace du type $\mathcal{L}$. Toute application linéaire continue de L dans un quotient E/F se relève en une application de même norme de L dans E''.</u>

(Pour donner un sens à cet énoncé, on regarde l'application donnée comme une application de L dans le bidual de E/F, lequel s'identifie à un espace quotient du bidual E'' de E). Bien entendu, si E est un dual, et F un sous-espace vectoriel faiblement fermé, on peut trouver un relèvement de même norme à valeurs dans E lui-même. Mais on voit encore comme plus haut qu'il n'en est plus ainsi dans le cas général: l'espace L étant donné, pour que toute application linéaire continue de L dans un quotient E/F se relève en une application linéaire continue de L dans E, il faut et il suffit que L soit isomorphe à un espace $\underline{\ell}^1(I)$ construit sur un ensemble d'indices I convenable.

Appliquant le théorème 4, 2º au couple (F^o, E') au lieu de (F,E), on trouve la variante suivante du corollaire 2:

Corollaire 4. Toute application linéaire compacte de F dans C se prolonge en une application linéaire compacte de E dans C de norme arbitrairement voisine.

Appliquant le théorème 4, 2º au cas où C est le dual d'un espace L du type $\underline{L}$, on trouve la variante suivante du corollaire 3:

Corollaire 5. Toute application linéaire compacte de L dans un quotient E/F se relève en une application linéaire compacte de L dans E, de norme arbitrairement voisine.

En vertu de l'interprétation des produits tensoriels $C\check{\otimes}E$ donnée dans th.3,2º, la deuxième partie du th.4 s'énonce aussi ainsi:

Corollaire 6. Toute application continue nulle à l'infini de l'espace localement compact M dans un quotient E/F se relève en une application de M dans E de même nature, de norme arbitrairement voisine.

Signalons encore le fait bien connu: Tout espace de Banach est isomorphe à un sous-espace d'un espace du type $\underline{C}$ (p.ex. l'espace des fonctions continues sur la boule unité de son dual, munie de sa topologie faible), et à un espace quotient d'un espace du type $\underline{L}$ (p.ex. l'espace $\underline{\ell}^1(I)$ construit sur une famille d'éléments de la boule unité de E dense dans cette boule). Toutes ces propriétés sont à la base de l'utilisation intensive des espaces $\underline{C}$ et $\underline{L}$ dans la suite de la théorie, et des propriétés plus profondes de ces mêmes espaces que nous exposerons au §4.

Remarque. Toutes les propriétés vectorielles-topologiques qu'on vient de voir pour les espaces $\underline{C}$ resp. $\underline{L}$ sont manifestement encore vraies pour tout espace facteur direct dans un espace du type envisagé (à condition de faire abstraction du caractère métrique des énoncés). Or on peut montrer que l'espace $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ envisagé à la fin du Nº 1 est isomorphe à un facteur direct d'un espace $\underline{C}$ (il est même isomorphe du point de vue vectoriel-topologique à un espace $\underline{C}$ lui même). Il en résulte p.ex. que le résultat de relèvement analogue au corollaire 6 ci-dessus est valable pour les fonctions vectorielles m fois continûment différentiables sur le cube K (d'où aussitôt le résultat analogue pour des fonctions vectorielles définies sur un ouvert quelconque de $\underline{R}^n$).

3. $\otimes$-normes injectives, projectives.

Proposition 1. Soit α une $\otimes$-norme. Les conditions suivantes sur α sont équivalentes:

a. Quels que soient les espaces de Banach E, G de dimension finie, et le sous-espace F de E, l'application canonique

$$F \overset{\alpha}{\otimes} G \longrightarrow E \overset{\alpha}{\otimes} G$$

est un isomorphisme métrique dans.

b. Quels que soient E, F, G comme ci-dessus, l'application canonique

$$E \overset{\alpha'}{\otimes} G \longrightarrow E/F \overset{\alpha'}{\otimes} G$$

est un homomorphisme métrique sur.

c. Toute α'-forme sur $F \times G$ se prolonge en une α'-forme sur $E \times G$ ayant même α'-norme.

d. Pour toute α-forme sur $E \times G$ qui s'annule sur $F \times G$, la forme sur $E/F \times G$ qui s'en déduit par passage au quotient a même α-norme.

De plus, si ces conditions sont vérifiées, elles le sont encore si les espaces E, F, G ne sont plus supposés de dimension finie.

Définition 1. On dit que α est injective à gauche (resp. à droite) si les conditions équivalentes précédentes sont vérifiés pour α (resp. pour la $\otimes$-norme transposée ${}^t\alpha$). On dit que α est injective si α est à la fois injective à gauche et à droite.

Enfin α est dite projective à gauche (resp. projective à droite, resp. projective) si sa duale α' est injective à gauche (resp. injective à droite, resp. injective).

Interprétant la condition d. en termes d'applications linéaires, on voit que α est injective à gauche, si pour toute α-application d'un espace E dans un espace G, qui s'annule sur un sous-espace fermé F, l'application de E/F dans G obtenue par passage au quotient est encore de type α et a même α-norme.(Il revient au même de dire que la α-norme de u ne dépend que de l'image par u de la boule unité de E). Et que α est injective à droite si pour toute application linéaire u d'un espace G dans un sous-espace fermé F d'un espace E, telle que l'application $\tilde{u}$ de G dans E qu'elle définit soit de type α, u est elle-même de type α et a même α-norme que $\tilde{u}$. Sous réserve que certains des espaces qui interviennent dans ces énoncés soient accessibles, on peut d'ailleurs y remplacer "applications de type α" par "applications α-nucléaires".

De même, α est projective à gauche, si toute application d'un sous-espace F d'un espace E dans un espace G, peut se prolonger en une α-application de même α-norme de E dans G'' (donc même dans G s'il existe une projection de norme 1 de G'' sur G). Et α est projective à droite si toute α-application d'un espace G dans un quotient E/F peut se relever en une α-application de même α-norme de G dans E''. Les énoncés analogues avec "applications α-nucléaires" au lieu de "α-applications" sont encore valables, à cela près qu'au lieu de l'égalité des normes α-nucléaires, on peut seulement exiger que la norme N_α du prolongement ou du relèvement cherché soit arbitrairement voisine de la norme N_α de l'application donnée (en revanche, inutile de passer aux biduals).

Enfin, si α est injective (resp. projective) alors le produit tensoriel de deux isomorphismes métriques dans (resp. de deux homomorphismes métriques sur) est une application du même type pour les produits tensoriels complétés relatifs à α.

Bien entendu d'après ce qui précède, $\vee$ n'est projective ni à gauche ni à droite, donc $\wedge$ n'est injective ni à gauche ni à droite. En revanche:

Théorème 5. $\vee$ est injective, donc $\wedge$ est projective.

L'assertion relative à $\vee$ est en effet triviale. - On trouve donc d'intéressantes propriétés de prolongement et relèvement pour les formes ou applications intégrales (ou nucléaires), que le lecteur pourra expliciter. Notons d'ailleurs qu'il n'existe malheureusement pas de $\otimes$-norme à la fois injective et projective.

Remarque. Soient E,G deux espaces de Banach, F un sous-espace vectoriel fermé de E, α une $\otimes$-norme. En général, l'application canonique $F\overset{\alpha}{\otimes}G \longrightarrow E\overset{\alpha}{\otimes}G$ n'est pas un isomorphisme vectoriel topologique, l'application $E\overset{\alpha}{\otimes}G \longrightarrow E/F\overset{\alpha}{\otimes}G$ n'est pas un homomorphisme sur, une α-forme sur $E\times G$ nulle sur $F\times G$ peut donner par passage au quotient une forme sur $E/F\times G$ qui n'est plus de type α, enfin une α-forme sur $F\times G$ peut ne pas admettre de prolongement en une α-forme sur $E\times G$. (Ces deux derniers énoncés peuvent aussi s'interpréter en termes d'applications linéaires). On vient d'envisager des hypothèses sur α pour que certains de ces énoncés deviennent positifs, quels que soient E,F,G. Au Nº précédent on avait envisagé des conditions sur G (être du type $\mathcal{C}$ resp. $\mathcal{L}$) pour que certains de ces énoncés deviennent positifs quel que soit le couple $(F\subset E)$, α étant suivant les cas $\vee$ ou $\wedge$; on peut d'ailleurs voir que ces conditions sont dans une large mesure nécessaires. Enfin, on peut aussi donner des conditions sur le couple $(F\subset E)$ pour que tous ces énoncés (α et G arbitraires) deviennent positifs: il suffit que F soit facteur direct dans E, ou aussi (ce qui est moins fort) que F'' soit facteurs direct dans E'' (5). Ici encore, d'ailleurs, la condition énoncée est aussi nécessaire. On peut construire un espace G simple (le même que celui envisagé dans le §1, Nº6), tel que, si le couple d'un espace de Banach E et d'un sous-espace F satisfait à l'une des propriétés: $F\hat{\otimes}G \longrightarrow E\hat{\otimes}G$ est un isomorphisme vectoriel topologique, $E\check{\otimes}F \longrightarrow E/F\check{\otimes}G$ est un homomorphisme vectoriel-topologique, ou l'une des deux variantes de ces propriétés, - alors F'' est facteur direct dans E''.

4. Formation de nouvelles $\otimes$-normes.

Il est immédiat que la borne supérieure d'une famille quelconque de $\otimes$-normes injectives à gauche (resp. à droite) est encore injective à gauche (resp. à droite). En particulier, si α est une $\otimes$-norme quelconque, il existe une plus grande $\otimes$-norme injective à gauche (resp. à droite) majorée par α. De même, par dualité, il existe une plus petite $\otimes$-norme projective à gauche (respectivement, à droite) minorée par α.

Définition 2. Les $\otimes$-normes précédentes sont notées respectivement $/\alpha$, $\alpha\backslash$, $\backslash\alpha$, $\alpha/$.(lire: pré- α gauche, pré- α droit, pro-α gauche, pro-α droit).

Le trait altérateur de α est incliné vers le bas (en partant de α) s'il indique une $\otimes$-norme plus petite que α (injective à gauche ou à droite suivant que le trait est placé à gauche ou à droite), et au contraire incliné vers le haut s'il indique une $\otimes$-norme plus grande que α. Les noms donnés se justifient d'eux-mêmes par ce qui va suivre ("pro" signifie "prolongement"). L'une quelconque des 4 opérations sur $\otimes$-normes qu'on vient d'introduire suffit d'ailleurs à déterminer (au moyen des opérations $\alpha \longrightarrow {}^t\alpha$ et $\alpha \longrightarrow \alpha'$) toutes les autres, au moyen des formules suivantes (triviales à partir des définitions, et des propriétés de $\alpha \longrightarrow {}^t\alpha$ et $\alpha \longrightarrow \alpha'$ en relation avec la structure d'ordre):

$$^t(/\alpha) = ({}^t\alpha)\backslash, \quad {}^t(\alpha\backslash) = /({}^t\alpha), \quad {}^t(\backslash\alpha) = ({}^t\alpha)/,$$
$$^t(\alpha/) = \backslash({}^t\alpha), \quad (/\alpha)' = \backslash(\alpha'), \quad (\alpha\backslash)' = (\alpha')/,$$
$$(\backslash\alpha)' = /(\alpha'), \qquad (\alpha/)' = (\alpha')\backslash .$$

On vérifie (grâce à ce qui va suivre) que $(/\alpha)\backslash = /(\alpha\backslash) =$ plus grande $\otimes$-norme injective majorée par α, on la note simplement par $/\alpha\backslash$ et on la nomme pré-α. De même $(\backslash\alpha)/ = \backslash(\alpha/) =$ plus petite $\otimes$-norme projective minorée par α, on la note simplement par $\backslash\alpha/$, et on la nomme pro-α.

Pour que α soit injective à gauche (resp. ...) il faut et il suffit que $\alpha = /\alpha$ (resp. ...).

<u>Théorème 6. Soient</u> E <u>un espace de Banach</u>, C <u>un espace du type</u> <u>C</u>, L <u>un espace du type</u> <u>L</u>, α <u>une</u> $\otimes$-<u>norme. On a des isomorphismes métriques</u>:

$$C \overset{/\alpha}{\otimes} E = C \overset{\alpha}{\otimes} E, \qquad L \overset{\backslash\alpha}{\otimes} E = L \overset{\alpha}{\otimes} E.$$

On en conclut aussitôt les formules analogues

$$E \overset{\alpha\backslash}{\otimes} C = E \overset{\alpha}{\otimes} C, \qquad C_1 \overset{/\alpha\backslash}{\otimes} C_2 = C_1 \overset{\alpha}{\otimes} C_2,$$

$$E \overset{\alpha/}{\otimes} L = E \overset{\alpha}{\otimes} L, \qquad L_1 \overset{\backslash\alpha/}{\otimes} L_2 = L_1 \overset{\alpha}{\otimes} L_2,$$

(où les C_i sont du type <u>C</u>, les L_i du type <u>L</u>). En passant aux espaces duals des produits tensoriels envisagés, on obtient les énoncés équivalents:

<u>Corollaire 1. Pour tout forme bilinéaire</u> u <u>sur</u> $C \times E$, <u>on a</u> $\|u\|_{\backslash\alpha} = \|u\|_{\alpha}$.

De même, pour une forme u sur $C_1 \times C_2$, on a $\|u\|_{\backslash\alpha/} = \|u\|_{\alpha}$. En termes d'applications linéaires: Soit u une application linéaire $C \longrightarrow E$ (resp. $E \longrightarrow L$, resp. $C \longrightarrow L$) alors $\|u\|_{\backslash\alpha} = \|u\|_{\alpha}$ (resp. $\|u\|_{\alpha/} = \|u\|_{\alpha}$, resp. $\|u\|_{\backslash\alpha/} = \|u\|_{\alpha}$).

<u>Corollaire 2. Pour toute forme bilinéaire</u> u <u>sur</u> $L \times E$, <u>on a</u> $\|u\|_{/\alpha} = \|u\|_{\alpha}$.

De même, pour une forme u sur $L_1 \times L_2$, on a $\|u\|_{/\alpha\backslash} = \|u\|_{\alpha}$. En termes d'applications linéaires: Soit u une application linéaire $L \longrightarrow E$ (resp. $E \longrightarrow C$, resp. $L \longrightarrow C$) alors on a $\|u\|_{/\alpha} = \|u\|_{\alpha}$ (resp. $\|u\|_{\alpha\backslash} = \|u\|_{\alpha}$, resp. $\|u\|_{/\alpha\backslash} = \|u\|_{\alpha}$).

Se rappelant que tout espace de Banach E est isomorphe à un sous-espace d'un espace C, ou à un espace quotient d'un espace L (Nº 3), et utilisant le fait que $/\alpha$ est injective à gauche, $\backslash\alpha$ projective à gauche, le théorème 6 permet le calcul explicite des produits tensoriels $E \otimes F$ pour deux espaces de Banach quelconques, pour l'une quelque des $\otimes$-normes $/\alpha$, $\alpha\backslash$, $/\alpha\backslash$, $\backslash\alpha$, $\alpha/$, $\backslash\alpha/$, au moyen de produits tensoriels au sens de α :

<u>Corollaire 3.</u> E <u>étant plongé dans l'espace</u> C <u>du type</u> <u>C</u>,

la norme $|u|_{/\alpha}$ dans $E\otimes F$ est celle induite par $C\overset{\alpha}{\otimes}E$, donc $E\overset{/\alpha}{\otimes}F$ s'identifie à l'adhérence de $E\otimes F$ dans $C\overset{\alpha}{\otimes}F$.

On calcule de façon analogue $E\overset{\alpha\backslash}{\otimes}F$ et $E\overset{/\alpha\backslash}{\otimes}F$.

Corollaire 4. E étant identifié à un quotient de l'espace L du type $\underline{L}$, la norme $|u|_{\backslash\alpha}$ dans $E\otimes F$ s'identifie à la norme $|u|_{\alpha}$ de $L\otimes F$ par le noyau de l'homomorphisme $L\otimes F\to E\otimes F$, lequel se prolonge donc en un homomorphisme métrique de $L\overset{\alpha}{\otimes}F$ sur $E\overset{\backslash\alpha}{\otimes}F$.

On calcule de façon analogue $E\overset{\alpha/}{\otimes}F$ et $E\overset{\backslash\alpha/}{\otimes}F$.

Ces énoncés permettent alors de déterminer les duals des produits tensoriels $E\overset{/\alpha}{\otimes}F$ etc., i.e. les formes bilinéaires de type $\backslash\beta$ etc. (où $\beta=\alpha'$). On trouve aussitôt les deux théorèmes suivants.

Théorème 7. Soient E,F deux espaces de Banach, φ_0 un homomorphisme métrique d'un espace L_0 du type $\underline{L}$ sur E, α une $\otimes$-norme. Pour toute forme bilinéaire u sur $E\times F$, les conditions suivantes sont équivalentes:

a. u est de type $/\alpha$, et $\|u\|_{/\alpha}\leqslant 1$.

b. La forme $u\circ(\varphi_0\otimes 1)$ sur $L_0\times E$ définie par u est de type α et a une α-norme $\leqslant 1$.

c. On peut trouver un homomorphisme métrique φ d'un espace de Banach E_1 sur E de telle façon que la forme $u\circ(\varphi\otimes 1)$ sur $E_1\times F$ définie par u soit de type α, et de α-norme $\leqslant 1$.

d. Pour toute application linéaire continue φ d'un espace L (du type $\underline{L}$) dans E, la forme composée $v=u\circ(\varphi\otimes 1)$ est de type α, et de α-norme $\leqslant 1$.

En langage d'applications linéaires: L'application linéaire u de E dans F est de $/\alpha$-norme $\leqslant 1$ (resp. de $\alpha\backslash$-norme $\leqslant 1$) si on peut trouver ùn homomorphisme métrique φ d'un espace E_1 sur E tel que $u\varphi$ soit de α-norme $\leqslant 1$ (resp. si on peut trouver un isomorphisme métrique φ de F dans un espace F_1 tel que φu soit de α-norme $\leqslant 1$). Dans cet énoncé, on peut supposer E_1 du type $\underline{L}$, F_1 du type $\underline{C}$. Caractérisation correspondante pour les $/\alpha\backslash$-applications.

Une interprétation plus maniable de ces applications est donné par le

Corollaire 1. *Soit u une application linéaire continue de E dans F. Pour que $\|u\|_{/\alpha} \leq 1$ (resp. $\|u\|_{\alpha\backslash} \leq 1$) il faut et il suffit que pour toute application linéaire continue v d'un espace L du type $\mathcal{L}$ dans E (resp. de F dans un espace C du type $\mathcal{C}$) uv (resp. vu) soit de type α et de α-norme $\leq \|v\|$.*

Corollaire 2. *Pour que $\|u\|_{/\alpha\backslash} \leq 1$, il faut et il suffit que pour toute application linéaire continue v d'un espace L du type $\mathcal{L}$ dans E, et toute application linéaire continue w de F dans un espace C du type $\mathcal{C}$, wuv soit de type α, et de α-norme $\leq \|w\|\,\|v\|$.*

Théorème 8. *Soient E,F deux espaces de Banach, on suppose E immergé dans un espace C_0 du type $\mathcal{C}$ par un isomorphisme métrique φ_0, soit α une $\otimes$-norme. Pour toute forme bilinéaire u sur $E\times F$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

a. *u est de type $\backslash\alpha$, et $\|u\|_{\backslash\alpha} \leq 1$.*

b. *u se prolonge en une α-forme v sur $C_0\times F$, de α-norme ≤ 1.*

c. *Quel que soit l'isomorphisme métrique de φ de E dans un espace E_1, u se prolonge en une α-forme v sur $E_1\times F$, de α-norme ≤ 1.*

d. *On peut factoriser u en $u = v\circ(\varphi\otimes 1)$, où φ est une application linéaire de norme ≤ 1 convenable, dans un espace C du type $\mathcal{C}$ convenable, et v une forme sur $C\times F$ de α-norme ≤ 1.*

Interprétons une partie de cet énoncé en langage d'applications linéaires: L'application linéaire u de E dans F est de $\backslash\alpha$-norme ≤ 1 (resp. de $\alpha/$-norme ≤ 1) si quel que soit l'immersion métrique de E dans un espace E_1, on peut prolonger u en une application de E_1 dans F'' de α-norme ≤ 1 (resp. si quelle que soit la façon de réaliser F comme un quotient métrique d'un espace F_1, u peut se relever en une application linéaire de E dans F_1'' de α-norme ≤ 1). En fin, $\|u\|_{\backslash\alpha/} \leq 1$ signifie que quel que soit l'immersion métrique de E dans un E_1 et la réali sation de F comme un quotient métrique d'un espace F_1, u provi ent d'une application linéaire v de E_1 dans F_1'', de α-norme ≤ 1. A cause de ces propriétés, on pourra dire aussi que les applications de type $\backslash\alpha$ (resp. de type $\alpha/$, resp. de type $\backslash\alpha/$) sont les applications qui ont la <u>propriété de</u> α-<u>prolongement</u> (resp. de α-<u>relèvement</u>, resp. de α-<u>prolongement-relèvement</u>). Une interprétation plus maniable des applications précédentes au moyen de <u>factorisations typiques</u> est donnée dans le

<u>Corollaire 1. Soit</u> u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F. <u>Pour que</u> $\|u\|_{\backslash\alpha} \leq 1$ (<u>resp.</u> $\|u\|_{\alpha/} \leq 1$) <u>il faut et il suffit que</u> u <u>se factorise en</u>

$$E \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{v} F'' \qquad (\text{resp, } E \xrightarrow{v} L \xrightarrow{\varphi} F'')$$

<u>avec</u> $\|\varphi\| \leq 1$, $\|v\|_{\alpha} \leq 1$.

<u>Corollaire 2. Pour que</u> $\|u\|_{\backslash\alpha/} \leq 1$, <u>il faut et il suffit que</u> u <u>se factorise en</u>

$$E \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{v} L \xrightarrow{\psi} F''$$

<u>avec</u> $\|\varphi\| \leq 1$, $\|\psi\| \leq 1$, $\|v\|_{\alpha} \leq 1$.

On notera d'ailleurs que pour que u soit de type $\backslash\alpha/$, <u>il ne suffit pas</u> qu'elle satisfasse simultanément aux deux conditions du corollaire 1. Par exemple, faisant $\alpha = \vee$, une application linéaire continue quelconque de L dans C satisfait aux deux conditions du corollaire 2, mais nous verrons qu'elle n'est de type $\backslash\vee/$ que si elle est intégrale, ce qui n'est pas le cas en général.

Pour finir ces généralités, signalons la conséquence immédiate suivante des critères qui précèdent (p.ex. sous forme des corollaires 3 et 4 du théorème 6): Soient α et β deux $\otimes$-normes telles que $\alpha \leq \lambda\beta$ (où λ est un scalaire donné), alors on a aussi $/\alpha \leq \lambda /\beta$, $\alpha\backslash \leq \lambda\beta\backslash$, $\backslash\alpha \leq \lambda\backslash\beta$, $\alpha/ \leq \lambda\beta/$ (donc aussi $/\alpha\backslash \leq \lambda/\beta\backslash$ et $\backslash\alpha/ \leq \lambda\backslash\beta/$).

5. <u>Compléments sur</u> $/\wedge$, $\wedge\backslash$, $/\wedge\backslash$, $\backslash\vee$, $\vee/$, $\backslash\vee/$.

Appliquant les opérations précédentes $\alpha \longrightarrow /\alpha$ etc aux

$\otimes$-normes $\vee$ et $\wedge$, mais en tenant compte du théorème 5, on trouve exactement les 6 nouvelles $\otimes$-normes indiquées dans le titre du présent Nº. On posera pour abréger

(1) $\backslash\!\vee = \underline{C}, \quad \vee\!/ = \underline{L} \qquad$ (donc ${}^t\underline{C} = \underline{L}$, ${}^t\underline{L} = \underline{C}$).

En vertu du théorème 8 corollaire 1, les applications linéaires de E dans F telles que $\|u\|_{\underline{C}} \leqslant 1$ sont exactement celles qui se factorisent en

$$E \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{v} F''$$

avec $\|\varphi\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$, l'espace C du milieu étant du type $\underline{C}$; ou encore celles qui ont la propriété suivante: quel que soit le surespace normé complét E_1 de E, u se prolonge en une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de E_1 das F''. On dit aussi que les applications de type $\underline{C}$ ont la <u>propriété de prolongement</u> (comparer avec la terminologie introduite après théorème 8; ici $\alpha = \vee$). On laisse au lecteur la caractérisation des applications linéaires telles que $\|u\|_{\underline{L}} \leqslant 1$; on dit aussi que les applications de type L ont la <u>propriété de relèvement</u>. Enfin, les applications de type $\backslash\!\vee\!/$ sont celles qui ont la <u>propriété de prolongement-relèvement</u> (ce qui est plus fort que la conjonction des deux propriétés de prolongement et de relèvement, cf. Nº 4, avant-dernier alinéa).

Les $\otimes$-normes duales de $\underline{C}$ et $\underline{L}$ sont respectivement

(2) $\underline{C}' = /\!\wedge \quad$ et $\quad \underline{L}' = \wedge\!\backslash \qquad$ (donc ${}^t\underline{C}' = \underline{L}'$, ${}^t\underline{L}' = \underline{C}'$).

La duale de $\backslash\!\vee\!/$ est $/\!\wedge\!\backslash$. Conformément à la terminologie générale, les $\underline{C}'$-applications (resp. les $\underline{L}'$-applications, resp. les $/\!\wedge\!\backslash$-applications) sont appelées <u>applications préintégrales gauches</u> (resp. <u>applications préintégrales droites</u>, resp. <u>applications préintégrales</u>), les normes correspondantes sont appelées <u>normes préintégrales gauche</u> (resp. ...). En vertu du théorème 7, une application linéaire u de E dans F a une norme préintégrale gauche $\|u\|_{\underline{C}'} \leqslant 1$ si et seulement si E est un quotient métrique d'un espace E_1 (qu'on peut alors supposer du type $\underline{L}$) tel que l'application de E_1 dans F définie par u soit de norme intégrale $\leqslant 1$. Énoncés analogues pour les applications préintégrales droites, et pour les applications préintégrales.

Proposition 2. Soit u une application linéaire de norme préintégrale gauche (resp. droite) ≤ 1, d'un espace de Banach E dans un autre F. Alors u peut se factoriser en

$$E \xrightarrow{v} L^2(\mu) \xrightarrow{i} L^1(\mu) \xrightarrow{w} F''$$

(resp. en $$E \xrightarrow{v} L^\infty(\mu) \xrightarrow{i} L^2(\mu) \xrightarrow{w} F\ )$$

où μ est une mesure positive de norme 1 sur un espace compact K convenable, v et w sont des applications linéaires de norme ≤ 1, enfin i est l'application d'injection.

(Il suffit par exemple de prouver le deuxième énoncé -dont le premier résultera par transposition - ; il se démontre en utilisant la caractérisation des applications préintégrales droites au moyen des applications intégrales, la caractérisation de ces dernières donnée dans le Nº1, théorème 1, corollaire 1, et en utilisant enfin le fait que pour tout sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$, il existe une projection de norme 1 de ce dernier sur le sous-espace; voir aussi [4], §4, Nº 6.

Corollaire. L'application composée de deux applications préintégrales gauches (resp. de deux applications préintégrales droites) u et v, est nucléaire, et on a

$$N_\wedge(vu) \leq \|v\|_{\underline{C}'} \|u\|_{\underline{C}'} \qquad (\text{resp. } N_\wedge(vu) \leq \|v\|_{\underline{L}'} \|u\|_{\underline{L}'}).$$

Prouvons par exemple la deuxième assertion. On peut supposer évidemment $\|u\|_{\underline{L}'} = \|v\|_{\underline{D}} = 1$. Factorisons v comme indiqué dans la proposition, vu s'écrit alors comme le composé de la séquence

$$E \xrightarrow{u} F \longrightarrow L^\infty \longrightarrow L^2 \longrightarrow G.$$

Mais le composé des deux premières applications est de norme intégrale ≤ 1 (en vertu de théorème 6, corollaire 2, L^∞ étant du type $\underline{C}$), donc le composé avec $L^\infty \longrightarrow L^2$ est de norme nucléaire ≤ 1 puisque L^2 est réflexif (Nº 1, théorème 2, corollaire), d'où aussitôt la conclusion.

6. Tableau des $\otimes$-normes naturelles.

On pose

(1) $\gamma = /\underline{C}$, $\lambda = \underline{L}\backslash$ (donc ${}^t\gamma = \lambda$, ${}^t\lambda = \gamma$).

Les $\otimes$-normes duales sont donc

(2) $\gamma' = \underline{C}'$, $\lambda' = \underline{L}'$ (donc ${}^t\gamma' = \lambda'$, ${}^t\lambda' = \gamma'$).

Cela donne 4 nouvelles $\otimes$-normes. La caractérisation des applications de type γ' ou λ' par factorisasions typiques est incluse dans le théorème 8, corollaire 1, et offre peu d'intérêt. Pour les applications de type γ' et λ, le théorème 7 se spécialise facilement en la

Proposition 3. Pour que l'application linéaire u *de* E *dans* F *soit de γ-norme ≤ 1 (resp. de λ-norme ≤ 1), il faut et il suffit qu'elle se factorise en*

$$E \xrightarrow{v} \gamma \xrightarrow{w} F'' \qquad (\text{resp. en } E \xrightarrow{v} \lambda \xrightarrow{w} F)$$

où γ est un espace quotient normé d'un espace du type $\underline{C}$, λ un sous-espace normé d'un espace du type $\underline{L}$, enfin v *et* w *sont des applications linéaires de norme ≤ 1.*

En même temps, cet énoncé assigne une place remarquable, par leurs propriétés vectorielles-topologiques, aux espaces quotients γ d'espaces du type $\underline{C}$ et les sous-espaces λ d'espaces du type $\underline{L}$.

Considérons le plus petit ensemble Φ de $\otimes$-normes qui contient la $\otimes$-norme fondamentale $\vee$, et est stable par les opérations $\alpha \longrightarrow \alpha'$, ${}^t\alpha$, $/\alpha$. Φ sera aussi stable sous les opérations $\alpha \longrightarrow \alpha\backslash$, $\backslash\alpha$, $\alpha/$.

Définition 3. On appelle $\otimes$-norme naturelle une $\otimes$-norme équivalente (voir §1, N°6) *à une $\otimes$-norme de l'ensemble Φ précédent (engendré par $\vee$ au moyen des opérations $\alpha \longrightarrow \alpha', {}^t\alpha, /\alpha$).*

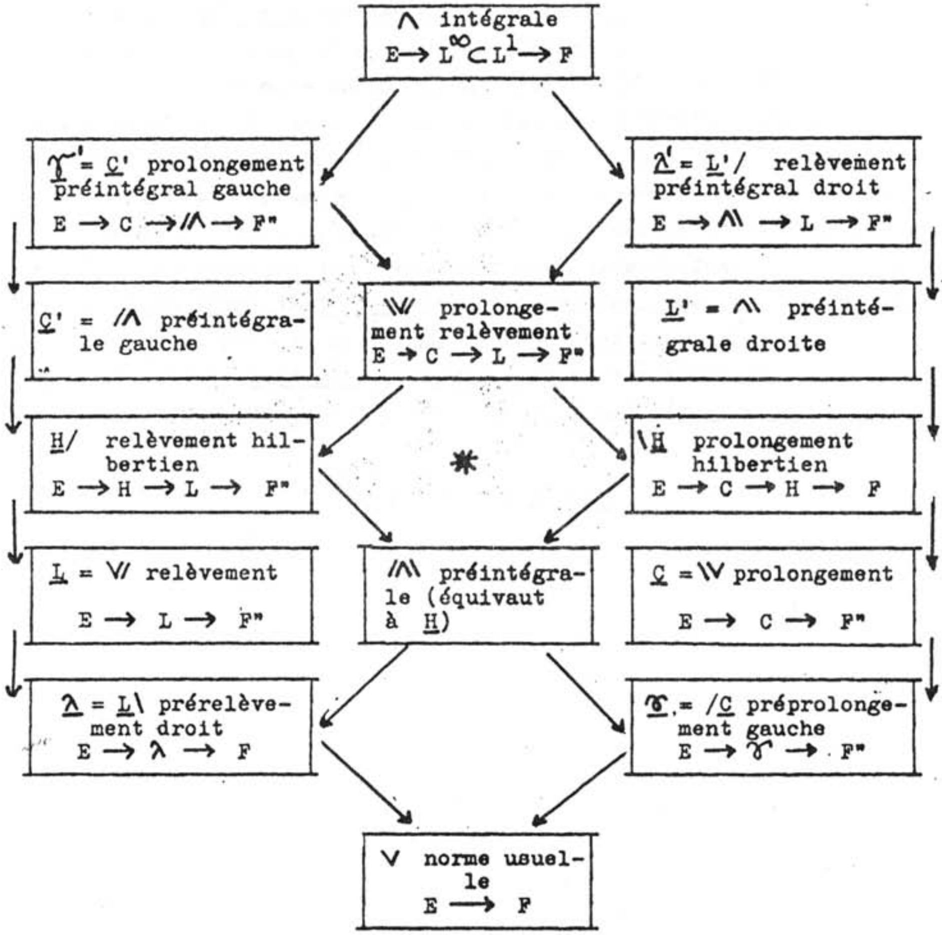
On notera qu'il existe des $\otimes$-normes non dénuées d'intérêt qui ne sont pas "naturelles" (il en existe même une infinité continue non équivalentes deux à deux). - Nous verrons qu'en outre des 12 classes de $\otimes$-normes déjà rencontrées, saboir les classes des $\otimes$-normes

$$\vee\ ,\ \wedge\ ,\ \underline{C},\ \underline{L},\ \underline{C}',\ \underline{L}',\ \backslash\!\vee\!/,\ /\!\wedge\!\backslash,\ \underline{\gamma},\ \underline{\lambda},\ \underline{\gamma}',\ \underline{\lambda}',$$

il n'en existe plus que deux autres, saboir les classes des $\otimes$-normes $\backslash\underline{H}$ et $\underline{H}/$, où $\underline{H}$ est la $\otimes$-*norme hilbertienne* qui sera définie au §3, N°1 (et dont nous verrons au §4 qu'elle est équivalente à la $\otimes$-norme préintégrale $/\!\wedge\!\backslash$). Comme nous verrons (§3, N°1) que les applications linéaires u de E dans F de norme hilbertienne $\|u\|_H \leqslant 1$ sont exactement celles qui peuvent se factoriser en $E \xrightarrow{w} H \longrightarrow F$, avec $\|u\| \leqslant 1$, $\|w\| \leqslant 1$, H étant un espace de Hilbert convenable, le théorème 8, corollaire 1, donne aussitôt une caractérisation correspondante des applications de type $\backslash\underline{H}$ resp. $\underline{H}/$, applications appelées *prohilbertiennes gauches* resp. *prohilbertiennes droites*. (On dit aussi que ce sont les applications ayant la propriété de *prolongement hilbertien*, resp., de *relèvement hilbertien*). Ainsi, la proposition 2 montre qu'on a les inégalités

$$(3) \qquad \underline{C}' \geqslant \underline{H}/, \quad \underline{L}' \geqslant \backslash\underline{H}.$$

TABLEAU DES ⊗-NORMES NATURELLES.



Explications. - 1. Désignations et factorisations typiques. Nous avons inséré les diverses ⊗-normes usuelles par leur signe usuel ou leurs signes usuels (permettant d'en reconnaitre la formation), ainsi que leur nom. Chaque fois que pour une de ces ⊗-normes, soit α, on peut caractériser les α-applications par une factorisation typique, par exemple dans le cas $\alpha = \backslash\!\backslash\!/\!/$ par la factorisation $E \to C \to L \to F''$, nous avons indiqué cette factorisation en dessous de la désignation de la $\otimes$-norme envisagée. Dans ces diagrammes, L, C, H désignent respectivement des espaces du type <u>L</u>, du type <u>C</u> ou des espaces de Hilbert, λ un sous-espace <u>L</u>, γ un quotient d'un espace <u>C</u>. Dans la factorisation typique pour $\wedge$, nous avons écrit $\underline{L}^{\infty} \subset \underline{L}^1$ pour indiquer l'application d'<u>inclusion</u> de $\underline{L}^{\infty}(\mu)$ dans $\underline{L}^1(\mu)$, où μ désigne une mesure positive de <u>masse</u> 1 sur un compact convenable. Dans la factorisation typique $E \longrightarrow C \longrightarrow /\!\wedge \longrightarrow F''$ pour $\underline{\gamma}'$, la deuxième flèche désigne une application de type $/\!\wedge$; remarque analogue pour la factorisation typique pour $\underline{\lambda}'$.

2. <u>Symétries</u>. Les $\otimes$-normes du tableau, symétriques par rapport à l'axe vertical, sont transposées l'une de l'autre. Les $\otimes$-normes symétriques par rapport au centre * du tableau sont duales l'une de l'autre. Cela se lit en effet aussitôt sur le tableau, sauf le fait que les deux $\otimes$-normes prohilbertiennes gauche et droite $\backslash\underline{H}$ et $\underline{H}/$ sont duales l'une de l'autre; en fait, on peut seulement affirmer que chacune est <u>équivalente</u> à la duale de l'autre, ce qui est un résultat non trivial qui sera obtenu au §3, Nº 5. - Des deux symétries précédentes résulte que deux $\otimes$-normes α et β, symétriques par rapport à l'axe horizontal du tableau, sont contragrédientes l'une de l'autre: $\beta \underset{\leftrightarrow}{=} \alpha^{\vee} = {}^t(\alpha') = ({}^t\alpha)'$ (cependant pour $\backslash\underline{H}$ et $\underline{H}/$, ce sera seulement vrai à une équivalence près). En d'autres termes, si on compose une α-application et une β-application, on trouve une application intégrale (§1, Nº4, théorème 5; signalons qu'on montre que les $\otimes$-normes de la famille Φ sont accessibles - car si une $\otimes$-norme est accessible, il en est de même de celles qu'on en déduit par les opérations $\alpha \longrightarrow /\alpha$ etc -, de sorte qu'on est bien dans les conditions d'applications de ce théorème).

3. <u>Implications</u>. Une flèche $\alpha \longrightarrow \beta$ signifie que α <u>domine</u> β (§1, Nº6), i.e. qu'il existe un λ tel que $\beta \leq \lambda\alpha$, ou encore que toute α-application est aussi une β-application.

Les implications indiquées par les 4 flèches du carré central ne se ront établies qu'au §4 (elles sont équivalentes entre elles d'après les symétries signalées plus haut, et signifient aussi, comme on vérifie facilement, que $/\!\wedge\!\backslash$ est équivalente à la $\otimes$-norme hilbertienne H comme nous l'avions déjà annoncé plus haut. Toutes les autres flèches $\alpha \longrightarrow \beta$ indiquent même des inégalités strictes $\beta \lneq \alpha$, et sont à peu près triviales grâce à ce qui a déjà été obtenu. (Par raison de symétrie, il suffit par exemple de vérifier les implications données dans le carré supérieur gauche, ce qu'on lit facilement sur les formules (3) et les factorisations typiques, par exemple).

Pour vérifier que le tableau contient toutes les $\otimes$-normes naturelles à des équivalences près, il suffit de vérifier qu'en appliquant à l'une quelconque d'entre elles l'opération $\alpha \longrightarrow /\alpha$, on retrouve à une équivalence près une $\otimes$-norme du tableau. Cela n'offre pas de difficultés, une fois admis les résultats fondamentaux du §4 signalés plus haut. On a donc exactement 14 classes (bien explicitées) de $\otimes$-normes naturelles. (Il est cependant bien probable que l'ensemble Φ lui-même, introduit avec la définition 3, est infini). Signalons aussi qu'on vérifie par des exemples (en considérant des applications particulières entre espaces du type L, C ou H) qu'il n'y a pas d'autres implications entre les $\otimes$-normes naturelles que celles indiquées dans le tableau, sauf qu'il est possible qu'on ait encore les relations $C' \longrightarrow C$ et $L' \longrightarrow L$. Ce sont là deux conjectures équivalentes (d'aprés les symétries du tableau des $\otimes$-normes); on lit sur le tableau qu'elles équivalent aussi à une réponse affirmative à la question: le composé d'une C'-application et d'une L'-application est-il intégral? (Comparer N°5, proposition 2). - En tous cas, de qui précède montre que les 14 classes de $\otimes$-normes obtenues sont bien distinctes.

Pour finir, signalons que si l'un des espaces E, F est du type C, L ou H (rappelons que "type H" signifie: espace de Hilbert), alors le nombre des classes d'applications linéaires de E dans F qui correspondent aux diverses $\otimes$-normes naturelles se réduit, suivant les cas, au nombre de 5 ou 6 au plus; et quand E et

F sont tous deux d'un des types C, L, H, ce nombre se réduit à deux ou trois au plus: deux si E et F sont de types distincts (donc il n'y a à considérer dans ce cas que les deux classes extrêmes de toutes les applications linéaires continues, ou des applications intégrales de E dans F), trois si E et F sont du même type. Dans ce dernier cas, la classe d'applications linéaires de E dans F intermédiaire entre les deux extrêmes est la classe des applications hilbertiennes (= préintégrales) dans le cas où E et F sont tous deux du type C ou tous deux du type L, et la classes des applications de Hilbert-Schmidt quand E et F sont tous deux des espaces de Hilbert. Toutes ces affirmations s'explicitent et se démontrent sans aucune difficulté à l'aide de ce qui a été dit, à l'exception du dernier fait, qui sera inclus dans les résultats du §3, N°6.

§ 3 - LES $\otimes$-NORMES LIÉES À L'ESPACE DE HILBERT.

1. Définitions et généralités pour H et H'.

Théorème 1. Il existe une $\otimes$-norme H et une seule ayant la propriété suivante: Si u est une forme bilinéaire sur le produit de deux espaces de Banach E et F quelconques, on a $\|u\|_{H} \leq 1$ si et seulement si il existe des applications linéaires φ, ψ de norme ≤ 1 de E resp. F dans un espace de Hilbert convenable H resp. son dual H', telles que l'on ait

$$u(x,y) = \langle \varphi x, \psi y \rangle \quad (\text{pour } x \in E,\ y \in F).$$

Corollaire. Pour qu'une application linéaire u de E dans F satisfasse à $\|u\|_{H} \leq 1$, il faut et il suffit qu'elle se factorise en

$$E \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} F \tag{1}$$

où H est une espace de Hilbert, et v et w sont de norme ≤ 1.

Définition 1. La $\otimes$-norme introduite avec le théorème 1 sera toujours notée H, et appellée $\otimes$-norme hilbertienne. Les H-formes et H-applications seront dites formes et applications hilbertiennes.

Il s'ensuit aisément que les formes hilbertiennes sur $E\times F$ sont celles qui sont encore continues quand on munit E et F de semi-normes préhilbertiennes [6] continues convenables (il suffit même que u devienne continue quand on remplace l'*une* des normes de E resp. F par une semi-norme préhilbertienne continue). Les applications hilbertiennes sont celles qui se factorisent comme dans (1), où H est un espace de Hilbert et v et w des applications linéaires continues.

De ce qui précède résulte aussitôt la

Proposition 1. $\underline{H}$ est une $\otimes$-norme symétrique (${}^t\underline{H}=\underline{H}$) et injective (§2,N°3). *Donc la $\otimes$-norme duale $\underline{H}'$ est symétrique et projective.*

On en conclut

$$\underline{H} \leqslant /\!\!\wedge\!\!\backslash\ , \qquad \underline{H}' \geqslant \backslash\!\!\vee\!\!/ \tag{2}$$

(car $/\!\!\wedge\!\!\backslash$ est la plus grande $\otimes$-norme injective, $\backslash\!\!\vee\!\!/$ la plus petite $\otimes$-norme projective); par suite:

Corollaire. Une forme ou application u préintégrale (§2, N°5) *est hilbertienne, et on a* $\|u\|_{\underline{H}} \leqslant \|u\|_{/\!\wedge\!\backslash}$.

De même, les $\underline{H}'$-applications ont la propriété de prolongement-relèvement. En utilisant les §1,N° 4, th. 5 et la caractérisation des $\underline{H}$-formes donnée dans le théorème 1, on obtient la caractérisation suivante des $\underline{H}'$-formes:

Proposition 2. Soit u une forme bilinéaire sur $E\times F$. Pour que $\|u\|_{\underline{H}'} \leqslant 1$, il faut et il suffit que pour toute application linéaire φ de norme $\leqslant 1$ d'un Hilbert H dans E, la forme $u\circ(\varphi\otimes 1)$ sur $H\times F$ soit intégrale, de norme intégrale $\leqslant 1$.

Dans cet énoncé, on peut supposer que H est l'espace de Hilbert ℓ^2 classique, on peut aussi y échanger la droite et la gauche, ou donner l'énoncé "bilatère" correspondant, avec des applications linéaires φ et ψ de H dans E resp. F. On laisse aussi au lecteur la caractérisation correspondante des $\underline{H}'$-applications.

Signalons comme conséquence du §2, N°1, th.2 que le composé d'une $\underline{H}$-application u et d'une $\underline{H}'$-application v est nucléaire (et non seulement intégral), et qu'on a $N_{\wedge}(vu) \leq \|u\|_{\underline{H}} \|v\|_{\underline{H}'}$. Dans cet énoncé, on peut échanger $\underline{H}$ et $\underline{H}'$.

2. H-formes hilbertiennes.

Soient E et F deux espaces vectoriels. Une fonction scalaire $u(x,y)$ sur $E \times F$ est dite forme sesquilinéaire si elle est linéaire par rapport à x et antilinéaire par rapport à y. Cela signifie aussi que c'est une forme bilinéaire sur $E \times \bar{F}$, où $\bar{F}$ est l'espace vectoriel dont le groupe additif coincide avec celui de F, mais où la multiplication par le scalaire λ est la multiplication par $\bar{\lambda}$ dans le vectoriel F (de sorte que l'application identique $F \longrightarrow \bar{F}$ est antilinéaire[7]). Les formes sesquilinéaires sur $E \times F$ peuvent donc aussi être regardées comme les formes linéaires sur le produit tensoriel $E \otimes \bar{F}$. Si maintenant E et F sont des espaces de Banach, $\bar{F}$ est un espace de Banach, et si α est une $\otimes$-norme, une forme sesquilinéaire u sur $E \times F$ est dite de type α, si elle est de type α en tant que forme bilinéaire sur $E \times \bar{F}$. La α-norme de cette dernière est encore notée $\|u\|_{\alpha}$. L'espace des formes sesquilinéaires de type α sur $E \times F$ est donc le dual de l'espace de Banach $E \overset{\alpha'}{\otimes} \bar{F}$. - En particulier, si α est la $\otimes$-norme hilbertienne $\underline{H}$, le th.1 montre que si u est une forme sesquilinéaire sur $E \times F$, on a $\|u\|_{\underline{H}} \leq 1$ si et seulement si on a $u(x,y) = (\varphi x, \psi y)$, où φ et ψ sont des applications linéaires de norme ≤ 1 de E resp. F dans un espace de Hilbert convenable H (où le produit scalaire est noté (a,b) comme usuellement).

Supposons maintenant $E = F$. On munit $E \otimes \bar{E}$ d'une involution antilinéaire naturelle $v \longrightarrow v^*$, faisant correspondre $y \otimes \bar{x}$ à $x \otimes \bar{y}$ (on désigne par une barre au dessus de la lettre d'un élément de E, le même élément, mais considéré comme élément de $\bar{E}$). Dans l'espace des formes sur $E \otimes \bar{E}$, i.e. l'espace des formes sesquilinéaires sur $E \times E$, il lui correspond une involution antilinéaire naturelle $u \longrightarrow u^*$, donnée par

$$\langle v^*,u\rangle = \overline{\langle v,u^*\rangle}$$

ce qui s'écrit aussi, en terme des formes sesquilinéaires:

$$u^*(x,y) = \overline{u(y,x)}.$$

Un élément u d'un espace vectoriel P muni d'une involution antilinéaire $u \longrightarrow u^*$ est dit hermitien si $u = u^*$. En particulier, cela redonne ici la notion usuelle de forme hermitienne sur $E\times E$. - Supposons maintenant que E est un espace de Banach, alors pour toute $\otimes$-norme α, l'involution $v \longrightarrow v^*$ sur $E\otimes\bar{E}$ est une isométrie pour $|v|_\alpha$, il en résulte que si u est une forme sesquilinéaire de type $\beta = \alpha'$ sur $E\times E$, alors u^* est encore de type β et a même β-norme que u. Donc, pour que u soit de type β, il faut et il suffit que ses composantes hermitienne $(u+u^*)/2$ et antihermitienne $(u-u^*)/2$ le soient. (Cela ramène en principe la détermination des formes sesquilinéaires de type β à la détermination des formes hermitiennes de type β, du moins dans le cas des scalaires complexes, auquel on peut d'ailleurs toujours se ramener). Enfin, signalons que, le dual de $E\overset{\alpha}{\otimes}\bar{E}$ étant l'espace des formes sesquilinéaires de type $\beta = \alpha'$ sur $E\times E$, il en résulte aussitôt que le dual du sous-espace hermitien de $E\overset{\alpha}{\otimes}\bar{E}$ s'identifie, avec sa norme, à l'espace des formes hermitiennes de type β sur $E\times E$.

On appelle forme positive sur $E\times E$ une forme sesquilinéaire u telle que $u(x,x) \geqslant 0$ pour tout $x\in E$. Une telle forme est hermitienne. Si u et v sont deux formes hermitiennes, on écrit $u \ll v$ ou $v \gg u$ pour indiquer que $v-u$ est positive. On a là une relation d'ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel. Enfin, supposons de nouveau que E soit un espace de Banach, alors un élément de $E\overset{\alpha}{\otimes}\bar{E}$ est dit positif s'il est hermitien, et si la forme hermitienne sur $E'\times E'$ qu'il définit est positive.

Théorème 2. Soit E un espace de Banach. 1. Soit u une forme positive continue sur $E\times E$. Alors u est hilbertienne, et on a

$$\|u\|_{\underline{H}} = \|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |u(x,x)| .$$

2. *Soit* u *une forme hermitienne sur* $E \times E$. *Pour que* $\|u\|_{\underline{H}} \leqslant 1$, *il faut et il suffit que l'on puisse trouver une forme positive* v *sur* $E \times E$, *de norme* $\leqslant 1$, *telle que* $-v \ll u \ll v$.

Ces énoncés résultent aussitôt du th.1, quand on remarque que la relation $-v \ll u \ll v$ signifie précisément que $|u(x,y)| \leqslant$ $\leqslant v(x,x)^{1/2}\, v(y,y)^{1/2}$ pour tout $x \in E$, $y \in E$, comme on vérifie sans difficulté.

Corollaire 1. *Les formes hermitiennes sur* $E \times E$ *qui sont hilbertiennes sont exactement celles qui sont différence de deux formes positives continues, ou encore celles qui sont majorées par une forme positive continue.*

De façon précise, si $u \ll v$ avec $v \gg 0$, on a $u = v-(v-u)$, où $v \gg 0$, $v-u \gg 0$, d'où $\|u\|_{\underline{H}} \leqslant \|v\| + \|v-u\| \leqslant 2\,\|v\| + \|u\|$.
- Variante utile du théorème 2:

Corollaire 2. *Soit* u *un élément* hermitien *de* $E \check{\otimes} \bar{E}$. *Conditions équivalentes*: a. $u \in E \hat{\otimes} \bar{E}$; b. u *est différence de deux éléments positifs de* $E \check{\otimes} \bar{E}$; c. u *est majoré par un élément positif de* $E \check{\otimes} \bar{E}$; d. *Il existe un élément positif* v *dans* $E \check{\otimes} \bar{E}$ *tel que* $-v \ll u \ll v$. - *De plus*, $|u|_{\underline{H}} = \|u\|_H$ *est la borne inférieure des* $|v| = \|v\|$ *pour les* v *envisagées dans la condition* d. (7 bis)

3. *H'-formes hermitiennes.*

Par polarité, on tire du théorème 2 le

Théorème 3. *Soit* u *une forme hermitienne sur* $E \times E$. *Supposons qu'il existe une H'-forme hermitienne* v *sur* $E \times E$ *telle que* $-v \ll u \ll v$, *alors* u *est de type H' et* $\|u\|_{\underline{H}'} \leqslant \|v\|_{\underline{H}'}$. *Réciproquement, si* u *est de type H', on peut trouver une forme hermitienne* positive intégrale v *sur* $E \times E$ *qui majore* u.

En fait dans ce dernier énoncé, on peut même prendre v de la forme

(1) $$v = \int_B x \otimes \bar{x} \, d\mu(x)$$

où B est la boule unité de E' avec sa topologie faible, μ une mesure positive sur B de norme $\leqslant \|u\|_{\underline{H}'}$. (J'ignore si on peut même choisir cette v de façon que l'on ait $-v \ll u \ll v$). Appliquant aussi la deuxième partie du théorème 3 à -u, on trouve:

Corollaire 1. Pour que la forme hermitienne u sur $E \times E$ soit de type $\underline{H}'$, il faut et il suffit que l'on puisse trouver une forme positive intégrale v sur $E \times E$ telle que $-v \ll u \ll v$. On peut choisir cette v telle que

(2) $$\|v\|_{\wedge} \leqslant 2 \; \|u\|_{\underline{H}'} .$$

En fait on peut même choisir v de la forme (1), avec $\|\mu\| \leqslant 2 \; \|u\|_{\underline{H}'}$.

Corollaire 2. Soit u une forme hermitienne positive sur $E \times E$. Pour que u soit de type $\underline{H}'$, il faut et il suffit qu'elle soit majorée par une forme positive intégrale v. $\|u\|_{\underline{H}'}$ est la plus petite des normes intégrales de ces v.

C'est d'ailleurs aussi la plus petite des normes des mesures positives μ sur la boule unité B de E', telles que $u \ll v$, où v est donnée par (1).

La deuxième partie du théorème 3 se précise de façon remarquable dans le cas où E est un espace $\underline{C}_0(M)$:

Corollaire 3. Soit u une $\underline{H}'$-forme hermitienne sur $E \times E$, où $E = \underline{C}_0(M)$. Alors il existe une mesure positive μ sur M, de norme $\leqslant \|u\|_{\underline{H}'}$, telle que $u \ll v_\mu$, où on pose

$$v_\mu(f,g) = \int f\bar{g} \, d\mu$$

(pour $f, g \in \underline{C}_0(M)$).

Noter d'ailleurs que v_μ est précisément de la forme (1), où on identifierait M à une partie de la boule unité du dual de $C_0(M)$ à la façon usuelle: $v_\mu = \int_M \varepsilon_x \otimes \bar{\varepsilon}_x \, d\mu(x)$ (intégrale faible).

(En fait, on peut démontrer d'abord directement le corollaire 3, et on conclure aussitôt le th.3 grâce au fait que, $\underline{H}'$ étant projective, u se prolonge en une forme hermitienne de même $\underline{H}'$-norme sur un produit $C \times C$, lorsqu'on plonge E dans un espace C du type $\underline{C}$). On trouve aussi l'analogue du corollaire 1: on peut trouver sur M une mesure positive μ telle que

$$(3) \qquad -v_\mu \ll u \ll v_\mu \qquad \text{avec} \qquad \|\mu\| \leq 2\,\|u\|_{\underline{H}'}.$$

La première inégalité s'écrit aussi:

$$(4) \qquad |u(x,y)| \leq \left(\int |x|^2 d\mu\right)^{1/2} \cdot \left(\int |y|^2 d\mu\right)^{1/2} \qquad (x,y \in C_0(M))$$

en d'autres termes u se prolonge par continuité en une forme de norme ≤ 1 sur $L^2(\mu) \times L^2(\mu)$. Si maintenant u est une $\underline{H}'$-forme sesquilinéaire quelconque sur un produit $C_0(M) \times C_0(N)$, soit P un espace somme topologique de M et N, alors u est la restriction de la forme hermitienne $U(x+y, x'+y') = u(x,y') + \overline{u(x',y)}$ sur $C_0(P) \times C_0(P)$, forme qui satisfait à $\|U\|_{\underline{H}'} \leq 2\,\|u\|_{\underline{H}'}$ et à laquelle on peut donc appliquer le résultat précédent. Cela donne:

<u>Corollaire 4. Pour toute forme sesquilinéaire</u> (<u>donc aussi toute forme bilinéaire</u>) u <u>de type</u> $\underline{H}'$ <u>sur</u> $C_0(M) \times C_0(N)$ <u>on peut trouver sur</u> M <u>une mesure positive</u> μ, <u>sur</u> N <u>une mesure positive</u> ν, <u>de normes</u> $\leq 2\,\|u\|_{\underline{H}'}$, <u>telles que</u> u <u>se prolonge par continuité en une forme de norme</u> ≤ 1 <u>sur</u> $L^2(\mu) \times L^2(\nu)$.

(A fortiori H est hilbertienne et de norme hilbertienne $\leq 2\,\|u\|_{\underline{H}'}$). Ces deux corollaires ainsi que les suivants prennent tout leur intérêt en vertu des résultats du §4, Nº2, qui impliquent en particulier que <u>toute</u> forme continue sur le produit de deux espaces du type $\underline{C}$ est une $\underline{H}'$-forme.

Variante du corollaire 4:

<u>Corollaire 5. Soit</u> u <u>une forme bilinéaire</u> (<u>ou sesquilinéaire</u>) <u>de type</u> $\underline{H}'$ <u>et faiblement séparément continue sur</u> $L^\infty(\mu) \times L^\infty(\nu)$, <u>alors il existe une forme bilinéaire</u> v <u>de nor-</u>

me $\leqslant 1$ *sur* $L^2(\mu)\times L^2(\nu)$, *et des éléments* f *resp.* g *de* $L^2(\mu)$ *resp.* $L^2(\nu)$, *de norme* $\leqslant 2\ \|u\|_{\underline{H}'}$, *tels que l'on ait*

(5) $$u(x,y) = v(xf,yg) \qquad (x\in L^\infty(\mu),\ y\in L^\infty(\nu)).$$

On en conclut ceci:

Corollaire 6. Soit $u\in L^1(\mu)\otimes L^1(\nu)$, *alors il existe un* $v\in L^2(\mu)\otimes L^2(\nu)$, $|v|_\vee \leqslant 1$ *et des éléments* $f\in L^2(\mu)$ *et* $g\in L^2(\nu)$ *de norme* $\leqslant 2\ \|u\|_{\underline{H}'}$, *tels que*

(6) $$u = v(f\otimes g)$$

(où le produit est un produit multiplicatif ordinaire de classes de fonctions mesurables pour $\mu\otimes\nu$).

4. *Premières relations entre* $\underline{H}$, $\underline{H}'$, *etc.*.

Le corollaire 4 du théorème précédent donne facilement compte tenu que $\underline{H}'$ est projective, la

Proposition 3. On a

(1) $$\underline{H} \leqslant \rho\,\underline{H}'$$

où la meilleure constante possible ρ *satisfait à* $1\leqslant\rho\leqslant 2$.

(Il n'est d'ailleurs pas exclu qu'on ait même $\rho = 1$). Comme $\underline{H}'$ est projective, on en conclut, compte tenu de la fin de §2, N° 4, les inégalités

(2) $$\backslash\underline{H}\ ,\ \underline{H}/\ ,\ \backslash\underline{H}/ \leqslant \rho\,\underline{H}'$$

(ρ est encore la meilleure constante dans chacune de ces trois inégalités). On a donc le diagramme d'implications

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{H}' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underline{H}/ \arrow[dr] & & \underline{H} \arrow[dl] \\
 & \underline{H} &
\end{tikzcd}$$

où les flèches ont la même signification que dans le tableau du §2, N° 6.

D'autre part, la démonstration de §2, N° 5, prop. 2 prouve aussi la

<u>Proposition 4</u>. $\underline{H}/$ <u>est injective à gauche, donc</u> $\backslash\underline{H}$ <u>est injective à droite:</u>

(3) $$/(\underline{H}/) = \underline{H}/\ , \qquad (\backslash\underline{H})\backslash = \backslash\underline{H}.$$

Conjuguant avec le première inégalité (2), on trouve $\backslash\underline{H} \leqslant \rho\,\underline{H}'\backslash$, or $\underline{H}'\backslash = (\underline{H}/)' = (\backslash\underline{H})^{\vee}$, d'où

(4) $$\backslash\underline{H} \leqslant \rho(\backslash\underline{H})^{\vee} = \rho(\underline{H}/)' \qquad \text{(donc aussi } \underline{H}/ \leqslant \rho(\underline{H}/)^{\vee} = \rho(\backslash\underline{H})'\text{)}.$$

(Ici encore, ρ est la meilleure constante). Au Nº suivant, nous obtenons des inégalités en sens inverse $(\backslash\underline{H})^{\vee} \leqslant \sigma\backslash\underline{H}$ et $(\underline{H}/)^{\vee} \leqslant \sigma\underline{H}/$, ce qui prouvera qui $\backslash\underline{H}$ et $\underline{H}/$ sont chacune équivalente à la duale de l'autre, i.e. à sa propre contragrédiente, comme nous l'avions annoncé au §2, Nº6.

5. <u>Relations plus profondes entre les</u> $\otimes$<u>-normes liées à l'espace de Hilbert</u>.

Soit H l'espace $\underline{R}^n$ avec sa structure usuelle d'espace de Hilbert [(8)]. Soit u la forme produit scalaire sur $H\times H$, on va calculer $\|u\|_{/\underline{H}'\backslash}$, ce qui est aussi la $/\underline{H}'\backslash$-norme de l'application identique de H sur lui-même. Soit $G = \underline{O}(n)$ le groupe des transformations orthogonales de H, muni de sa mesure de Haar m ($m(1) = 1$), soit a un point fixe de H de norme 1. Si $f\in \underline{L}^1(m)$, soit U_f "l'opérateur de composition"

$$U_f = \int_G f(s)s\ dm(s)$$

et posons

$$\varphi(f) = U_f a = \int f(s)s.a\ dm(s).$$

On voit aussitôt que φ est un <u>homomorphisme métrique</u> de L^1 sur H. Soit v la forme $v(f,g) = u(\varphi f, \psi g)$ sur $L^1\times L^1$, alors en vertu de §2, Nº4, th.7, on a

(1) $$\|u\|_{/\underline{H}'\backslash} = \|v\|_{\underline{H}'}.$$

On a $v(f,g) = (U_f a, U_g a) = (U_g^* U_f a, a) = (U_{\tilde{g}*f}a, a)$ (où suivant l'usage, $*$ désigne le produit de convolution, et $\tilde{g}(s)=\bar{g}(s^{-1})$). On obtient donc

(2) $$v(f,g) = \langle \tilde{g}*f, \alpha \rangle \quad \text{où} \quad \alpha(s) = (s.a,a).$$

D'après le théorème 3, corollaire 2, $\|v\|_{\underline{H}'}$ est la plus petite des normes des mesures positives μ sur la boule unité B du dual L^∞ de L^1, telle que $v \ll v_\mu = \int_B f \otimes \bar{f} \, d\mu(f)$. Comme la forme v est invariante par translation, on peut supposer μ invariante par translation, alors on voit aussitôt que

(3) $$v_\mu(f,g) = \langle \tilde{g}*f, \beta_\mu \rangle \quad \text{où} \quad \beta_\mu = \int_B \tilde{f}*f \, d\mu(f) \quad \text{(intégrale faible).}$$

Donc $v \ll v_\mu$ équivaut à $\alpha \ll \beta$ (au sens de la relation d'ordre usuelle entre fonctions de type positif sur le groupe compact G). Comme α est une fonction de type positif "<u>élémentaire</u>", associée à la représentation unitaire irréductible de G obtenue à partir de la représentation identique par complexification de H, que β_μ est de type positif, et que pour vérifier une inégalité $\alpha \ll \beta$ il suffit de vérifier que $V_\alpha \leqslant V_\beta$ pour toute représentation unitaire irréductible V de G, dans le cas actuel l'inégalité envisagée équivaut simplement à $U_\alpha \leqslant U_{\beta_\mu}$ (inégalité entre opérateurs hermitiens dans H). Or $U_\alpha = \frac{1}{n} \bar{a} \otimes a$, où $\bar{a} \otimes a$ désigne la projection orthogonale de H sur la droite engendrée par a; compte tenu de l'expression (3) de β_μ, notre inégalité devient:

(4) $$\frac{1}{n} \bar{a} \otimes a \leqslant \int_B U_f^* \, U_f \, d\mu(f).$$

$\|v\|_{\underline{H}'}$ est la plus petite des normes des mesures positives μ sur B telles qu'on ait (4). Or (4) implique, en calculant $(A.a,a)$ quand A est l'un ou l'autre membre de cette inégalité:

(5) $$\frac{1}{n} \leqslant \int_B \|U_f\|^2 \, d\mu(f).$$

Soit M_n la norme de l'application $f \to U_f a$ de L^∞ dans H induite par φ. (5) donne $1/n \leqslant M_n^2 \|\mu\|$, i.e. $\|\mu\| \geqslant \frac{1}{n} M_n^2$, donc

(6) $$\|v\|_{\underline{H}'} \geqslant \frac{1}{n} M_n^2.$$

D'autre part, on va prouver l'inégalité en sens inverse. On a $U_f a = U_{f*\varepsilon_s} a$ pour tout $s \in G$ tel que $U_{\varepsilon_s} a = a$, i.e. $s.a = a$. On en conclut aisément que pour calculer $M_n = \operatorname{Sup}_{f \in B} \|U_f a\|$, on peut se borner aux $f \in B$ qui sont invariantes par translations droites sous le groupe H stabilisateur de a, i.e. qui peuvent être regardées comme des fonctions mesurables bornées de norme $\leqslant 1$ sur

l'espace homogène $G/H = S$ (sphère unité de H), muni de la mesure m' image de m(caractérisée par le fait d'être invariante par rotations, et de masse totale 1). On a donc $M_n =$
$= \operatorname{Sup} \| \int_S f(x) x\, dm'(x) \|$, f parcourant la boule unité de $L^\infty(m')$.
On voit facilement, par raisons de symétrie, que le maximum est atteint pour la fonction

$$f_o(x) = \operatorname{sgn}(a,x) \tag{7}$$

pour laquelle on obtient

$$U_{f_o} a = M_n a \quad \text{d'où} \quad M_n = (U_{f_o} a, a) = \int_S |(x,a)|\, dm'(x). \tag{8}$$

De plus, $U_{f_o} \circ s = U_{f_o}$ pour tout $s \in H$, ce qui prouve que U_f est proportionnel à $\bar{a} \otimes a$, donc compte tenu de (8) on obtient

$$U_{f_o} = M_n \bar{a} \otimes a. \tag{9}$$

Prenons alors pour μ la masse $1/n\, M_n^2$ au point f_o de B, le deuxième membre de (4) est alors $\|\mu\|\, U^*_{f_o} U_{f_o} = \frac{1}{n}\, \bar{a} \otimes a$, donc l'inégalité (4) est vérifiée. Par suite $\|v\|_{\underline{H}'} \leqslant \frac{1}{n} M_n^2$, d'où, compte tenu de (1) et (6):

$$\|v\|_{\underline{H}'} = \|u\|_{/\underline{H}'\backslash} = \frac{1}{n} M_n^2. \tag{10}$$

Le calcul explicite de M_n par la formule (8) n'offre pas de difficulté. On prouve

$$M_n = \frac{2}{S_{n-1}} \int_{S^+} x_n d\sigma(x) = \frac{2}{S_{n-1}} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta \cos^{n-2}\theta\, S_{n-2}\, d\theta =$$

$$= 2\, \frac{S_{n-2}}{S_{n-1}} \int_0^1 x^{n-2}\, dx = \frac{2}{n-1} \frac{S_{n-2}}{S_{n-1}}$$

(où $d\sigma$ est la mesure euclidienne usuelle sur S, et où S_k désigne la surface de la sphère euclidienne de dimension k). Cela donne

$$M_n = \frac{2}{(n-1)\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}. \tag{11}$$

On en conclut, en utilisant les inégalités de convexité sur la fonction Γ :

$$(12) \qquad \frac{1}{n} M_n^2 < \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} M_n^2 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Se rappelant qu'en vertu de (10), $\frac{1}{n} M_n^2$ est la $/H'\backslash$ -norme de l'application identique de l'espace de Hilbert de dimension n sur lui-même, on conclut de (12) le

Théorème 4. Soit H un espace de Hilbert. Alors la $/\underline{H}'\backslash$-norme de l'application identique de H sur lui-même, identique à la $/\underline{H}'\backslash$-norme de la forme (x,y) sur $H \times H$, est finie et $\leq \sigma = \frac{\pi}{2}$, l'égalité ayant lieu si et seulement si H est de dimension infinie.

Si α est une $\otimes$-norme quelconque, l'inégalité $\alpha \leq \lambda \underline{H}$ (ou encore $\underline{H}' \leq \lambda \alpha'$) est équivalente, en vertu de la caractérisation des $\underline{H}$-applications, à l'assertion que pour tout espace de Hilbert H, l'application identique de H sur lui-même a une α-norme $\leq \lambda$. Donc le théorème 4 équivaut au

Corollaire 1. On a

$$(13) \qquad /\underline{H}'\backslash \leq \sigma \underline{H} \qquad (\text{d'où } \underline{H}' \leq \sigma \backslash \underline{H}/)$$

($\sigma = \pi/2$ est la meilleure constante possible).

La deuxième formule implique à fortiori $\underline{H}' \leq \sigma \backslash \underline{H}$, d'où $\underline{H}'\backslash \leq \sigma (\backslash \underline{H})\backslash$. Compte tenu de prop.4, on a donc $\underline{H}'\backslash \leq \sigma \backslash \underline{H}$, i.e.

Corollaire 2. On a

$$(14) \qquad (\underline{H}/)' = (\backslash \underline{H})^{\vee} \leq \sigma \backslash \underline{H}$$

et la formule transposée

$$(14\text{ bis}) \qquad (\backslash \underline{H})' = (\underline{H}/)^{\vee} \leq \sigma \underline{H}/.$$

(Ce sont les formules promises à la fin de N°4). Il n'est d'ailleurs pas difficile de voir que $\sigma = \pi/2$ est encore la meilleure constante.

Corollaire 3. Sur le produit de deux espaces du type $\underline{L}$ (resp. de deux espaces du type $\underline{C}$) les $\underline{H}$-formes et les $\underline{H}'$-formes sont les mêmes, et on a

(15) $$\|u\|_{\underline{H}'} \leqslant \sigma \|u\|_{\underline{H}}, \qquad \|u\|_{\underline{H}} \leqslant \rho \|u\|_{\underline{H}'}.$$

(On voit en effet facilement que ces inégalités sont équivalentes respectivement au corollaire 1 précédent, et à la prop.3). - Donc pour une application linéaire d'un espace $\underline{C}$ dans un espace $\underline{L}$ ou d'un espace $\underline{L}$ dans un espace $\underline{C}$, il revient au même d'être de type $\underline{H}$, ou de type $\underline{H}'$.

Soit u une application linéaire de norme $\leqslant 1$ d'un espace $C = \underline{C}_0(M)$ dans un espace de Hilbert H. Alors la forme (ux,uy) sur $C \times C$ a une norme hilbertienne $\leqslant 1$, donc en vertu du corollaire précédent une $\underline{H}'$-norme $\leqslant \sigma$, donc en vertu du th.3, corollaire 3, il existe sur M une mesure positive μ de norme $\leqslant \sigma$ telle que $(ux,ux) \leqslant \int x\bar{x}\, d\mu$ pour tout $x \in C$. D'où aussitôt le

<u>Corollaire 4</u>. <u>Soit</u> u <u>une application linéaire de norme</u> $\leqslant 1$ <u>de</u> $\underline{C}_0(M)$ <u>dans un espace de Hilbert</u> H, <u>alors</u> u <u>se factorise en</u>

$$\underline{C}_0(M) \xrightarrow{i} L^2(\mu) \xrightarrow{v} H$$

<u>où</u> μ <u>est une mesure positive de norme</u> $\leqslant \sigma$ $(=\frac{\pi}{2})$ <u>sur</u> M, <u>où</u> i <u>est l'application canonique, et</u> v <u>une application linéaire de norme</u> $\leqslant 1$.

Par transposition, cela donne facilement:

<u>Corollaire 5</u>. <u>Soit</u> u <u>une application linéaire de norme</u> $\leqslant 1$ <u>d'un espace de Hilbert</u> H <u>dans un espace</u> $L^1(\mu)$, <u>alors</u> u <u>se factorise en</u>

$$H \xrightarrow{v} L^2(\mu) \xrightarrow{j} L^1(\mu)$$

<u>où</u> v <u>est une application linéaire de norme</u> $\leqslant 1$, <u>et où</u> j <u>est l'opération de multiplication par une</u> $f \in L^2(\mu)$ <u>convenable, de norme</u> $\leqslant \sigma$ $(=\pi/2)$.

Dans ces corollaires encore, on voit facilement que la meilleure constante est σ. Tous les corollaires qui précèdent sont en fait équivalents au théorème 4, dont on peut donner nombreux énoncés équivalents; nous en verrons encore quelques-uns particulièrement intéressants au Nº suivant, th. 6.

6. Les classes naturelles d'opérations linéaires dans l'espace de Hilbert.

Si H est un espace de Hilbert, son dual H' s'identifie à l'espace $\bar{H}$ défini au Nº 2, donc si E est un espace de Banach, $H\otimes E$ s'identifie à l'espace des applications linéaires continues de rang fini de $\bar{H}$ dans E. Soit maintenant α une $\otimes$-norme; pour tout couple H_1, H_2 de deux espaces de Hilbert $|u|_\alpha$ est une norme raisonnable sur $H_1\otimes H_2$, invariante par transformations unitaires dans H_1 et H_2. D'après les résultats de Schatten [10] Chap. (8 bis) cette norme est de la forme

$$|u|_\alpha = N_\alpha((\rho_i(u)) \tag{1}$$

où pour $u\in H_1\check{\otimes} H_2$, $(\rho_i(u))$ désigne la suite décroissante infinie des valeurs propres de $(u^*u)^{1/2}\in L(\bar{H}_1)$ (chacune répétée suivant sa multiplicité; on rajoute des zéros si la suite des valeurs propres est finie, i.e. H_1 de dimension finie), et où N_α est une "gauge-function" de Schatten, i.e. une norme sur $\underline{R}^{(\underline{N})}$ ($\underline{N}$, ensemble des entiers naturels) invariante par permutations de N et par multiplication, dans $\underline{R}^{(\underline{N})}$, par des suites "unitaires" (i.e. dont tous les termes sont de module 1). N_α est bien déterminée par si on veut que la formule (1) soit valable pour tout couple de deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 (9), et on vérifie aisément les formules

$$N_\alpha = N_{t_\alpha}, \qquad N_{\alpha'} = (N_\alpha)' \tag{2}$$

(où $(N_\alpha)'$ est la norme de Schatten polaire de N_α, $\underline{R}^{(\underline{N})}$ étant mis en dualité avec lui-même de la façon usuelle). On en conclut pour toute $u\in H_1\otimes H_2$:

$$|u|_\alpha = |u|_{t_\alpha} = |u^*|_\alpha = |u^*|_{t_\alpha} \tag{3}$$

d'où par dualité, pour des opérateurs $u\in L(H_1,H_2)$:

$$\|u\|_\alpha = \|u\|_{t_\alpha} = \|u^*\|_\alpha = \|u^*\|_{t_\alpha} \text{ (10)}. \tag{4}$$

Nous allons déterminer les diverses classes d'applications linéaires entre espaces de Hilbert, définies par les $\otimes$-normes naturelles (§2, Nº 6). $\vee$ ne demande pas d'autre commentaire. D'autre par, le théorème suivant est bien connu:

Théorème 5. Soit u un opérateur linéaire de H_1 dans H_2. Si $H_1 = H_2$ et si u est hermitien, alors u est nucléaire (ou encore: intégral) si et seulement si il est compact, et la suite (λ_i) de ses valeurs propres sommables. On a

$$\|u\|_\wedge = N_\wedge(u) = |u|_\wedge = \sum |\lambda_i| . \tag{5}$$

2. Si u est quelconque, u est nucléaire si et seulement si l'opérateur hermitien $(u^*u)^{1/2}$ est nucléaire, et on a $\|u\|_\wedge = \|(u^*u)^{1/2}\|_\wedge$.

En fait, pour toute $\otimes$-norme α, et tout $u \in L(H_1;H_2)$, on a

$$\|u\|_\alpha = \|(u^*u)^{1/2}\|_\alpha \tag{6}$$

comme il résulte aussitôt du fait que chacun des opérateurs u, $(u^*u)^{1/2}$ s'obtient à partir de l'autre par multiplication avec un opérateurs partiellement isométrique.

Rappelons qu'une application linéaire u de H_1 dans H_2 est dite application de Hilbert-Schmidt si $(u^*u)^{1/2}$ est compact et la suite $(\rho_i(u))$ de ses valeurs propres de carré sommable. On pose alors

$$\|u\|_2 = \|(\rho_i)\|_2 = (\textstyle\sum \rho_i^2)^{1/2} . \tag{7}$$

$\|u\|_2$ est une norme sur l'espace $L^2(H_1,H_2)$ des applications de Hilbert-Schmidt de H_1 dans H_2, qui en fait un espace de Hilbert. Le produit scalaire y est donné par $(u,v) = \mathrm{Tr}\, v^*u$, en particulier

$$\|u\|_2^2 = \mathrm{Tr.}\, u^*u = \|u^*u\|_\wedge . \tag{8}$$

Ces formules ont un sens, car (comme bien connu) le produit de deux applications de Hilbert-Schmidt $u: H_1 \longrightarrow H_2$ et $v: H_2 \rightarrow H_3$ est nucléaire, et

$$\|vu\|_\wedge \leq \|v\|_2 \|u\|_2 . \tag{9}$$

Théorème 6. Soit $u \in L(H_1;H_2)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a. u est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

b. u est du type $\underline{L}$ (resp. du type $\underline{C}$).

c. u est du type $\underline{L'}$ (resp. du type $\underline{C'}$).

De plus, on a les inégalités:

$$\|u\|_{\underline{L}} = \|u\|_{\underline{C}} \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{\sigma}\|u\|_{\underline{L}} = \sqrt{\sigma}\|u\|_{\underline{C}} \tag{10}$$

$$\|u\|_2 \leq \|u\|_{\underline{L'}} = \|u\|_{\underline{C'}} \leq \sqrt{\sigma}\|u\|_2 \tag{11}$$

où $\sigma = \pi/2$ est la meilleure constante possible.

Les deuxièmes inégalités dans (10) signifient aussi:

Corollaire. Tout composé $H_1 \xrightarrow{v} E \xrightarrow{w} H_2$, où E est du type $\underline{L}$ ou $\underline{C}$, est une application de Hilbert-Schmidt et on a $\|wv\|_2 \leq \sqrt{\sigma}\|w\|\,\|v\|$.

Les formules (11) sont simplement transformées par dualité des formules (10). On a $\|u\|_{\underline{L}} = \|u\|_{\underline{C}}$ en vertu de (4), il suffit donc de prouver $\|u\|_{\underline{L}} \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{\sigma}\|u\|_{\underline{L}}$. En vertu de (6), on est ramené au cas où u est hermitien positif. Si u est alors du type de Hilbert-Schmidt, on se ramène aussitôt au cas où u est l'opérateur de multiplication, dans $H = \ell^2$, par une suite de carré sommable (ρ_i) telle que $\|(\rho_i)\|_2 = \|u\|_2$. Mais alors, c'est même une application de norme $\|u\|_2$ de ℓ^2 dans $\ell^1 \subset \ell^2$; d'autre part l'application identique de ℓ^1 dans ℓ^2 est de norme 1, d'où $\|u\|_{\underline{L}} \leq \|u\|_2$. Supposons maintenant $\|u\|_{\underline{L}} = 1$, d'où $\|u^*\|_{\underline{C}} = 1$. On a en vertu de (8) $\|u\|_2^2 = \|u^*u\|_\wedge$, or u se factorise en $H \longrightarrow L \longrightarrow H$, u^* en $H \longrightarrow C \longrightarrow H$ (où les flèches désignent des applications linéaires de norme ≤ 1), donc u^*u se factorise en $H \longrightarrow L \longrightarrow H \longrightarrow C \longrightarrow H$. L'application identique $H \rightarrow H$ ayant une /H'\-norme $\leq \sigma$ (théorème 4), le composé $L \rightarrow H \rightarrow C$ a une H'-norme $\leq \sigma$, donc (comme $H' = H^\vee$) son composé avec l'application hilbertienne $H \rightarrow L$ a une norme intégrale $\leq \sigma$. A fortiori $\|u^*u\|_\wedge \leq \sigma$, d'où $\|u\|_2^2 \leq \sigma$, d'où enfin $\|u\|_2 \leq \sqrt{\sigma}\|u\|_{\underline{L}}$. Le même raisonnement en sens inverse montre que est la meilleure constante possible dans cette inégalité.

Il est trivial que pour $u \in L(H_1;H_2)$, on a $\|u\| = \|u\|_{\underline{H}}$, d'où $\|u\|_\wedge = \|u\|_{\underline{H'}}$. De plus on a trivialement $\|u\|_{\underline{H}} = \|u\|_{\underline{C}}$ et

$\|u\|_{\underline{H}/} = \|u\|_{\underline{L}'}$, donc ces 4 normes sont égales, et équivalentes à $\|u\|_2$. Enfin les $\otimes$-normes $\underline{\lambda}, \underline{\gamma}, \underline{\lambda}', \underline{\gamma}'$, se calculent ici grâce au

<u>Théorème 7. Soit H un espace de Hilbert. H est isomorphe (avec sa norme) à un sous-espace d'un espace L du type $\underline{L}$, ou encore (transposition) à un espace quotient d'un espace C du type $\underline{C}$.</u>

Cela équivaut en vertu de §2, N°6, prop.3 au

<u>Corollaire 1. L'application identique φ d'un espace de Hilbert non nul sur lui-même satisfait à $\|\varphi\|_{\underline{\lambda}} \leq 1$ (donc à $\|\varphi\|_{\underline{\gamma}} \leq 1$).</u>

Pour le voir, on peut supposer H de dimension finie. Soit S sa sphère unité, munie de la mesure m invariante par rotation et de masse totale égale à 1. Si à chaque $x \in H$, on fait correspondre la fonction $f_x(y) = (x,y)$ sur S, on obtient un isomorphisme métrique de H dans $L^1(m)$, ce qui prouve $\|\varphi\|_{\underline{\lambda}} \leq 1$.

Conformément à la remarque qui suit l'énoncé du théorème 4, le corollaire 1 équivaut aussi au

<u>Corollaire 2. On a</u>

(11) $\quad \underline{H} \geq \underline{\lambda}, \quad \underline{H} \geq \underline{\gamma}$ d'où

(12) $\quad \underline{\lambda}' \geq \underline{H}', \quad \underline{\gamma}' \geq \underline{H}'$.

Le corollaire 1 implique aussi que si E ou F est un espace de Hilbert, on a $\|u\|_{\underline{\lambda}} = \|u\|_{\underline{\gamma}} = \|u\|$ pour toute application linéaire continue de E dans F. Par dualité, cela donne $\|u\|_{\underline{\lambda}'} = \|u\|_{\underline{\gamma}'} = \|u\|_{\wedge}$. - On peut énoncer le théorème 7 de bien d'autres manières encore, par exemple la suivante:

<u>Corollaire 3. Une application linéaire continue u d'un espace de Hilbert H dans un espace C du type $\underline{C}$ a la propriété de relèvement, et $\|u\|_{\underline{L}} \leq \|u\|$. Une application linéaire continue u d'un espace L du type $\underline{L}$ dans l'espace de Hilbert H a la propriété de prolongement, et $\|u\|_{\underline{C}} \leq \|u\|$.</u>

Pour finir, signalons que la détermination des $/\!\!\wedge\!\!\backslash$-applications (applications préintégrales) et des $\backslash\!\!\vee\!\!/$-applications d'un espace de Hilbert dans un autre résultera de ce qui précède, une fois connu le résultat (qui sera établi au §4, N°2) que $/\!\!\wedge\!\!\backslash$ est équivalente à $\underline{H}$, donc $\backslash\!\!\vee\!\!/$ équivalente à $\underline{H}'$.

§4. Les relations entre les deux groupes de $\otimes$-normes. Applications.

1. Fonctions de type α.

Soient M (resp. N) un espace localement compact muni d'une mesure positive μ (resp. ν). Alors $L^1(\mu)\otimes L^1(\nu) = L^1(\mu\otimes\nu)$(§2, N°1, th. 3), donc l'espace des formes bilinéaires continues sur $L^1(\mu)\times L^1(\nu)$ s'identifie au dual $L^\infty(\mu\otimes\nu)$ de $L^1(\mu\otimes\nu)$. La forme u_f définie par f est donné par

$$\text{(1)}\qquad u_f(\varphi,\psi) = \iint f(s,t)\,\varphi(s)\,\psi(t)\,d\mu(s)\,d\nu(t).$$

Définition 1. Avec les notations précédentes, soit de plus α une $\otimes$-norme. Une $f\in L^\infty(\mu\otimes\nu)$ est dite fonction de type α ou une α-fonction, si la forme u_f sur $L^1(\mu)\times L^1(\nu)$ qu'elle définit est de type α. On note $\|f\|_\alpha$ et on appelle α-norme de f, la α-norme $\|u_f\|_\alpha$ de u_f (10 bis). En particulier, on dit que f est intégrale, resp. hilbertienne etc. si $\alpha = \wedge$, resp. $\alpha = \underline{H}$, etc.

Signalons d'ailleurs qu'on a, en vertu de §2, N°4, th.6, cor. 2:

$$\text{(2)}\qquad \|f\|_\alpha = \|f\|_{/\alpha\backslash}\ .$$

Notons aussi que si $\tilde{u}_f$ désigne la forme sesquilinéaire

$$\text{(3)}\qquad \tilde{u}_f(\varphi,\psi) = u_f(\varphi,\overline{\psi}) = \iint f(s,t)\,\varphi(s)\,\overline{\psi}(t)\,d\mu(s)\,d\nu(t)$$

on a aussi $\|\tilde{u}_f\|_\alpha = \|u_f\|_\alpha = \|f\|_\alpha$.

Si M et N sont deux ensembles discrets, on dit qu'une fonction f sur $M\times N$ est de type α, si les conditions de définition 1 sont satisfaites, quand μ resp. ν consiste en la masse +1 en chaque point de M resp. N, en d'autres termes si f est bornée, et la forme bilinéaire u_f qu'elle définit sur $\underline{\ell}^1(M)\times\underline{\ell}^1(N)$ est de type α.

Proposition 1. Soient M et N deux espaces localement compacts, f une fonction continue et bornée sur $M\times N$, w_f la forme bilinéaire sur $\mathcal{M}^1(M)\times\mathcal{M}^1(N)$ définie par

$$(4)\qquad w_f(\mu,\nu) = \iint f(s,t)\,d\mu(s)\,d\nu(t).$$

Considérons $\ell^1(M)$ et $\ell^1(N)$ comme des sous-espaces de $\mathcal{M}^1(M)$ resp. $\mathcal{M}^1(N)$, soit v_f la forme restriction de w_f à $\ell^1(M)\times\ell^1(N)$: $v_f((\lambda_m),(\mu_n)) = \sum_{(m,n)\in M\times N} f(m,n)\lambda_m\mu_n$. Alors (pour toute $\otimes$-norme α) on a $\|w_f\|_\alpha = \|v_f\|_\alpha$. Si μ est une mesure positive sur M de support M, ν une mesure positive sur N de support N, u_f la restriction de w_f à $L^1(\mu)\times L^1(\nu)$ (donnée par (1)), on a aussi $\|u_f\|_\alpha = \|w_f\|_\alpha$.

(En particulier, il revient au même de dire que f est de type α, en tant qu'élément de $\ell^\infty(M\times N)$ ou en tant qu'élément de $L^\infty(\mu\otimes\nu)$).

Proposition 2. Soient E, F deux espaces de Banach, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E dont l'enveloppe disquée fermée est la boule unité de E, $(y_j)_{j\in J}$ une famille analogue dans F, α une $\otimes$-norme, u une forme bilinéaire continue sur $E\times F$. Soit f_u la fonction sur $I\times J$ définie par $f_u(i,j) = u(x_i,y_j)$. Alors on a $\|u\|_{/\alpha\backslash} = \|f\|_\alpha$.

Cela résulte aussitôt de §2, N°4, th. 7, critère b (énoncé pour $/\alpha\backslash$ au lieu de $/\alpha$) et du fait que E resp. F s'identifie à un quotient métrique de $\ell^1(I)$ resp. $\ell^1(J)$.

Soit M un espace localement compact muni d'une mesure $\mu\geqslant 0$, et soit $f\in L^\infty(\mu\otimes\mu)$. Considérons la forme sesquilinéaire continue $\tilde u_f$ sur $L^1\times L^1$ définie par (3). On di que f est hermitienne, resp. de type positif, si $\tilde u_f$ est hermitienne resp. positive. Si on ne suppose plus nécessairement donnée une mesure μ sur M, et si f est une fonction continue bornée sur $M\times M$, on dit que f est de type positif si la forme sesquilinéaire sur $\mathcal{M}^1(M)\times\mathcal{M}^1(M)$ définie par f: $\tilde w_f(\mu,\nu) = \iint f(s,t)d\mu(s)d\bar\nu(t)$, est positive. On a encore une proposition de compatibilité analogue à la proposition 1, dont l'énoncé est laissé au lecteur. - En vertu de §3, N°2, th. 2, on a la

Proposition 3. Si $f \in L^{\infty}(\mu \otimes \mu)$ est de type positif, on a $\|f\|_H = \|f\|$ (voir définition 1). Si f est un élément hermitien de $L^{\infty}(\mu \otimes \mu)$, alors f est hilbertienne si et seulement si elle est différence de deux fonctions $\in L^{\infty}(\mu \otimes \mu)$ de type positif. Donc une $f \in L^{\infty}(\mu \otimes \mu)$ quelconque est hilbertienne si et seulement si elle est combinaison linéaire de fonctions $\in L^{\infty}(\mu \otimes \mu)$ de type positif.

2. Le théorème fondamental et ses variantes.

Théorème 1 (théorème fondamental de la théorie métrique des produits tensoriels). Soit H un espace de Hilbert. L'application identique φ de H sur lui-même est préintégrale, et

$$\|\varphi\|_{/\!\wedge\!\backslash} \leq h \tag{1}$$

où h est une constante universelle. La meilleure valeur possible de h (égale à $\|\varphi\|_{/\!\wedge\!\backslash}$ quand H est de dimension infinie) satisfait à

$$\tag{2} \begin{aligned} &\pi/2 \leq h \leq \operatorname{sh} \pi/2 \quad \text{(théorie réelle)} \\ &\pi/2 \leq h \leq 2 \operatorname{sh} \tfrac{\pi}{2} \quad \text{(théorie complexe).} \end{aligned}$$

($\operatorname{sh} x$ désigne la fonction $(e^{x}-e^{-x})/2$).

Explicitant la notion d'application préintégrale (voir §2, N°4, th. 7), on trouve les énoncés équivalents suivants:

Corollaire 1. Une application $u: L \longrightarrow H$ (resp.: $v: H \longrightarrow C$) est préintégrale droite (resp. préintégrale gauche) et on a

$$\|u\|_{/\!\wedge\!\backslash} \leq h\,\|u\| \quad (\text{resp. } \|v\|_{/\!\wedge\!\backslash} \leq h\|v\|). \tag{3}$$

Corollaire 2. Les applications composées $L \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} C$, $H \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} L$, $C \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} H$ sont intégrales, et on a

$$\|vu\|_{\wedge} \leq h\|v\|\,\|u\|. \tag{4}$$

Les deux dernières applications sont d'ailleurs même nucléaires, en vertu de §2, Nº1, th.2, corollaire.

En vertu de la remarque qui suit l'énoncé de §3, Nº5, th.4, le théorème 1 équivaut aussi au

Théorème 2. On a la formule

(5) $$/\!\wedge\!\backslash \leq h\,\underline{H}.$$

Par dualité, cette formule équivaut d'ailleurs à

(6) $$\underline{H}' \leq h\,\backslash\!\vee\!/.$$

Comparant avec §3, Nº1, formule (2) on voit donc que $/\!\wedge\!\backslash$ est équivalente à $\underline{H}$, donc $\backslash\!\vee\!/$ équivalente à $\underline{H}'$. En d'autres termes:

Corollaire 1. Il y a identité entre formes (ou applications) préintégrales et hilbertiennes, et on a

(7) $$\|u\|_{\underline{H}} \leq \|u\|_{/\wedge\backslash} \leq h\,\|u\|_{\underline{H}}.$$

En particulier:

Corollaire 2. Sur le produit de deux espaces L_1 et L_2 du type L, les formes intégrales et les formes hilbertiennes sont les mêmes, et on a $\|u\|_{\underline{H}} \leq \|u\|_{\wedge} \leq h\,\|u\|_{\underline{H}}$. En d'autres termes, il y a identité entre fonctions $f \in L^{\infty}(\mu\otimes\nu)$ intégrales et hilbertiennes (Nº 1, définition 1), i.e. (si $\mu=\nu$) les fonctions qui sont combinaisons linéaires de fonctions $\in L^{\infty}(\mu\otimes\mu)$ de type positif.

Pour une forme bilinéaire u sur un produit $C_1\times C_2$ (C_1 et C_2 du type $\underline{C}$) on a $\|u\|_{\backslash\vee/} = \|u\|$ (§2, Nº4, th.6, cor. 1), d'où en vertu de (6) $\|u\|_{\underline{H}'} \leq h\,\|u\|$. On peut donc appliquer §3, Nº 3, th.3, corol.3,4,5, on trouve en particulier:

Théorème 3. Soit $C = C_0(M)$, soit u une forme hermitienne continue sur $C\times C$, alors il existe une mesure positive μ sur M, de norme $\leq h\|u\|$, telle que $u \ll v_{\mu}$, où $v_{\mu}(f,g) = \int f\bar{g}\,d\mu$.

(on montre que h est encore la meilleure constante dans cet énoncé, qui n'est qu'un transformé du théorème 1 par polarité).

Conjuguant (6) avec la formule $\underline{H} \leq \rho\,\underline{H}'$ (§3, Nº 4, prop. 3) on trouve le

Corollaire 1. On a une inégalité

(8) $\quad \underline{H} \leq k \;\backslash\!\backslash\!/\!/ \quad$ (ou encore $/\!/\!\backslash\!\backslash \leq k\underline{H}'$)

où $1 \leq k \leq \rho h \leq 2\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}$.

En d'autres termes, une forme ou application qui a la propriété de prolongement-relèvement est hilbertienne, et $\|u\|_{\underline{H}} \leq k\,\|u\|_{\backslash\!\backslash\!/\!/}$. Enoncé équivalent:

Corollaire 2. Toute application linéaire continue $C \longrightarrow L$ (C du type $\underline{C}$, L du type $\underline{L}$) est de norme hilbertienne $\leq k\|u\|$, i.e. se factorise en $C \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} L$, où H est un espace de Hilbert et $\|v\|\,\|w\| \leq k\|u\|$. (La constante k est celle du corollaire 1).

(On peut d'ailleurs expliciter encore v et w en appliquant directement §3, N°3, th.3, cor.4).

La conjonction des formules (5) et (8) donne le

Corollaire 3. On a une inégalité

(9) $\quad /\!/\!\backslash\!\backslash \leq \ell \;\backslash\!\backslash\!/\!/ \quad$ (où $1 \leq \ell \leq hk \leq 2\,\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}$).

En d'autres termes, toute application linéaire continue u: $C \rightarrow L$ (C du type $\underline{C}$, L du type $\underline{L}$) est préintégrale, et $\|u\|_{/\!/\!\backslash\!\backslash} \leq \ell\|u\|$. Donc des applications composées $L \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} L \xrightarrow{w} C$ et $C \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} L$ sont intégrales, et on a $\|wvu\|_{\wedge} \leq \ell\,\|w\|\,\|v\|\,\|u\|$.

(En fait, la deuxième application est même nucléaire, comme on voit en factorisant u en $C \longrightarrow H \longrightarrow L$ (corollaire 2) et en notant que $H \longrightarrow C \longrightarrow L$ est nucléaire (th.1,cor.2)).

En vertu des formules

$$C_1 \hat{\otimes} C_2 = C_1 \overset{/\!/\!\backslash\!\backslash}{\otimes} C_2, \qquad L_1 \check{\otimes} L_2 = L_1 \overset{\backslash\!\backslash\!/\!/}{\otimes} L_2$$

(§2, N°4, th.6), on obtient, compte tenu du théorème 2

(10) $$C_1 \hat{\otimes} C_2 = C_1 \overset{H}{\otimes} C_2$$

(11) $$L_1 \check{\otimes} L_2 = L_1 \overset{H'}{\otimes} L_2 \; .$$

En particulier, dans le cas $C_1 = C_2$, conjuguant (10) avec §3, N°2, cor. 2, on trouve le

<u>Théorème 4. Soit</u> M <u>un espace localement compact. Alors</u> $C_0(M)\hat{\otimes}C_0(M)$ <u>s'identifie à l'espace des combinaisons linéaires de fonctions</u> $f\in C_0(M\times M)$ de type positif.

De même, la formule (11) permet, compte tenu de §3, N°3, th. 3, cor. 5 de donner une interprétation de $L^1(\mu)\check{\otimes}L^1(\nu)$, en supposant connu l'espace $L^2(\mu)\check{\otimes}L^2(\nu)$.

Signalons que chacun des résultats précédents était équivalent au théorème 1 (en y faisant abstraction, le cas échéant, de la valeur de la constante h). Au N° 4 nous verrons encore diverses conséquences moins fortes. Notons seulement ici que comme on a $\|\underline{H}'\|\leq\|\wedge\|$, la formule (5) implique $\|\underline{H}'\|\leq h\,\underline{H}$: c'est le théorème 4 de § 3, N° 4, sauf qu'on n'obtient pas ici la valeur de la meilleure constante σ de ce théorème. On aura à priori $\sigma\leq h$; comme on a vu que $\sigma=\frac{\pi}{2}$, cela prouve $h\geq\frac{\pi}{2}$ (première des inégalités (1)).

3. <u>Démonstration du théorème fondamental</u>.

Pour fixer les idées, on se placera dans la théorie "réelle". Soit h_n la norme préintégrale de l'application identique de l'espace de Hilbert H de dimension n sur lui-même. Il faut prouver que $h=\lim. h_n<+\infty$, et la limite en question sera la meilleure constante dans le théorème 1. h_n est aussi la norme préintégrale de la forme $u(x,y)=(x,y)$ sur $H\times H$, donc (N° 1, prop.2 et formule (2)) h_n <u>est la norme intégrale de la fonction</u> $(x,y)=\cos\theta(x,y)$ <u>sur</u> $S\times S$, où S désigne la sphère unité de H, et $\theta(x,y)$ l'angle compris entre 0 et π de deux vecteurs unitaires x,y. Pour faire le calcul, reprenons la démonstration du §3, N°5, th.4. Nous y avons introduit de façon naturelle une fonction f_0 sur le groupe orthogonal G de H, par

$$f_0(s)=\operatorname{sgn}(s.a,a) \tag{1}$$

(a, point fixé de S), fonction qui ne dépend que de $s.a$ et peut donc aussi être regardée comme une fonction de norme 1 sur la sphère unité S. (On avait vu que

$$\varphi\ll\left(\frac{1}{nM_n^2}\right)\tilde{f}_0*f_0\ll\frac{\pi}{2}\tilde{f}_0*f_0 \quad \text{où on pose} \quad \varphi(s)=(s.a,a)). \tag{2}$$

Calculons $\tilde{f}_o * f_o$. On voit aussitôt que $\tilde{f}_o = f_o$, d'où

(3) $$\tilde{f}_o * f_o(t) = \int_G f_o(s)\, f_o(s^{-1}t)\, dm(s) =$$

$$= \int_G \mathrm{sgn}(s.a,a)\ \mathrm{sgn}(t.a,s.a)\ dm(s) = \int_S \mathrm{sgn}(a,x)\ \mathrm{sgn}(y,x)\ dm'(x)$$

où $x = s.a$, $y = t.a$, m' désignant la mesure sur S image de la mesure de G par l'application $s \longrightarrow s.a$. L'intégrande dans le dernier membre ne dépend que de la projection de la demi-droite Ox sur le plan E défini par a,y, qu'on peut prendre pour plan coordonnées. On en conclut que l'intégrale est égale à

$$\frac{1}{\pi}\int_{S^1} \mathrm{sgn}(a,x)\mathrm{sgn}(y,x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sgn}.\cos\lambda\ \mathrm{sgn}.\cos(\lambda-\theta)d\lambda$$

où on pose $\theta = \theta(a,y)$, S^1 étant la circonférence unité du plan E. On trouve aussitôt pour l'intégrale du dernier membre la valeur $\frac{\pi}{2} - \theta$, d'où

(4) $$\tilde{f}_o * f_o = f_o * f_o = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad \text{où} \quad \theta(s) = \theta(s.a,a).$$

Or, de façon générale, si $f,g \in L^{\infty}(m)$, considérons la fonction $\tilde{g}*f(t^{-1}s)$ sur $G\times G$, c'est la moyenne sous G, dans $L^{\infty}(G\times G)$ faible, des translatées de la fonction $f\otimes\bar{g}(s,t) = f(s)\,\bar{g}(t)$, donc elle est intégrale (définition 1) et de norme intégrale $\leqslant \|f\|_{\infty}\|g\|_{\infty}$. En particulier, $\tilde{f}_o * f_o(t^{-1}s) = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \theta(s.a,t.a))$ est de norme intégrale $\leqslant 1$. De plus elle est de type positif. Comme elle ne dépend que des classes $s.a$ et $t.a$ de s et t, on peut énoncer le résultat équivalent:

<u>Proposition 4. Soit</u> S <u>la sphère unité d'un espace de Hilbert</u> H. <u>Considérons la fonction</u>

(5) $$\varphi_o(x,y) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x,y)\right)$$

<u>sur</u> $S\times S$, $\theta(x,y)$ <u>étant l'angle (compris entre</u> 0 <u>et</u> $\pi/2$) <u>des vecteurs unitaires</u> x,y. <u>Alors</u> φ_o <u>est intégrale et de type positif, et on a</u>

(6) $$\|\varphi_o\|_{\wedge} = 1.$$

(Il n'est d'ailleurs plus nécessaire maintenant de supposer H de dimension finie). On a vu en effet que $\|\varphi_o\|_{\wedge} \leqslant 1$, mais on a aussi $\|\varphi_o\|_\wedge \geq \|\varphi_o\|_\infty = 1$, d'où l'égalité dans (6). De (5) on tire

$$(7) \qquad (x,y)=\cos\theta(x,y) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\varphi_o = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}(\frac{\pi}{2}\varphi_o)^k.$$

D'autre part, on vérifie sans peine que le produit de deux fonctions intégrales f,g sur un produit $M\times N$ est intégrale, et $\|fg\|_\wedge \leq \|f\|_\wedge\|g\|_\wedge$ (en d'autres termes l'espaces des fonctions intégrales sur $M\times N$ forme une algèbre normée complète sous la multiplication ordinaire). De ceci et de (7) on conclut que la norme intégrale de la fonction (x,y) est

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{\pi}{2}\|\varphi_o\|)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{\pi}{2})^k = \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}.$$

Comme nous l'avions dit au début, cela prouve $h \leq \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}$, et achève la démonstration du théorème fondamental. Signalons aussi que dans le cas où H est de dimension finie, les formules (4), (5), (7) permettent d'exprimer la fonction (x,y) sur $S\times S$ <u>canoniquement</u> à l'aide d'une mesure de norme $\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}$ sur $B\times B$, où B désigne la boule unité de $L^\infty(m')$.

On a obtenu en passant, compte tenu de (2), (4) et de la définition (5), la relation intéressante en elle-même

$$(8) \qquad 0 \ll (x,y) \ll \frac{\pi}{2}\varphi_o(x,y)$$

i.e. le premier membre de (7) est majoré, pour $\ll$, par le premier terme de son développement en série. (Rappelons d'ailleurs que ce résultat contient précisément le th.4 de §3, Nº 5).

4. <u>Conséquences diverses dans la théorie des opérations linéaires.</u>

a. <u>Détermination des applications linéaires continues entre espaces</u> $\underline{C}$, $\underline{L}$, $\underline{H}$.

Elle est ramenée théoriquement à la détermination des opérations linéaires continues entre espaces de Hilbert (qu'on est en droit de supposer connue!). En effet, des théorèmes classiques permettent de déterminer concrètement les applications $E \longrightarrow C$ et (de façon transposée) $L \longrightarrow E'$ d'un espace de Banach quelconque E dans un espace $C_o(M)$ ou L^∞, et d'un espace L^1 dans un dual d'un espace de Banach [11]. D'autre part, les applications $C \longrightarrow H$ et $H \longrightarrow L$ se ramènent aux applications $L^2 \longrightarrow H$ et $H \longrightarrow L^2$ grâce au §3, N°5, th.4, cor.4 et 5. Les applications $C \longrightarrow L$ se factorisent en $C \longrightarrow H \longrightarrow L$ (N°2, th.3, corollaire), et d'après ce qui précède $C \longrightarrow H$ et $H \longrightarrow L$ se ramènent à des applications linéaires entre espaces de Hilbert.

De plus, comme signalé à la fin de §2, N°6, on sait maintenant déterminer explicitement les diverses classes "naturelles" d'applications linéaires entre deux espaces dont chacun est du type $\underline{C}$ ou $\underline{L}$ ou $\underline{H}$, on trouve au plus deux ou trois classes différentes (suivant les cas). Les applications de chaque classe se concrétisent encore aisément de façon bien explicite.

b. <u>Amélioration des opérateurs par composition</u>.

Pour la commodité du lecteur, nous allons regrouper ici dans un tableau récapitulatif les résultats obtenus dans ce sens. Pour simplifier, dans une même séquence, telle $H \longrightarrow C \longrightarrow H$, la même lettre peut désigner deux espaces différents (du type indiqué par la lettre). Par ailleurs, la signification du tableau est claire.

(1)	$H \to C \to H,\ H \to L \to H$	Hilbert-Schmidt	(§3, N°6, th. 6, cor.1)
(2)	$H\to C\to H\to C,\ C\to H\to C\to H$ $H\to C\to H\to L,\ C\to H\to L\to H$ $H\to L\to H\to C,\ L\to H\to C\to H$ $H\to L\to H\to L,\ L\to H\to L\to H$	nucléaires	(§3, N°6, th.6)
(3)	$L \to H \to C$ $H \to C \to L$ $C \to L \to H$	intégral nucléaire nucléaire	(N°2, th.1, cor.)
(4)	$L \to C \to L \to C$ $C \to L \to C \to L$	intégral nucléaire	(N°2, th.3, cor.3)

On voit ainsi qu'en composant 4 (resp.5) opérateurs linéaires entre espaces du type $\underline{C}$, $\underline{L}$, $\underline{H}$ dont deux consécutifs appartiennent à des types différents, on obtient toujours une application intégrale (resp. nucléaire). En composant dans les mêmes conditions un nombre plus élevé d'opérateurs, on obtient donc des "opé rateurs, on obtient donc des "opérateurs de puissance p.ème sommable", avec p $(0 < p \leq 1)$ d'autant plus petit qu'on aura composé plus d'opérateurs ([4], Chap. 2, §1, N°1 et N°3).

c. Caractérisations vectorielles-topologiques de l'espace de Hilbert.

Proposition 5. Soit E un espace de Banach, φ l'application identique de E sur E. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a. La norme de E est équivalente à une norme hilbertienne.
b. φ est hilbertienne.
c. φ est préintégrale.
d. H est isomorphe à la fois à un quotient d'un espace du type $\underline{C}$ et à un sous-espace d'un espace du type $\underline{L}$.

En effet, a. équivaut à b. trivialement, b. équivaut à c en vertu de th.2, cor. 1, a implique d en vertu de §3, N° 6, th.7, enfin d implique b en vertu de th.3, corollaire 2. - Il semble que les critères de la proposition 5 soient les premières caractérisations vectorielles-topologiques (et non métriques) connues pour l'espace de Hilbert. Signalons qu'il y a une variante métrique évidente pour l'équivalence de a et b; il serait intéressant de prouver de même la variante métrique de l'équivalence entre a et d (un Banach qui est métriquement isomorphe à un quotient d'un espace du type $\underline{C}$ et á un sous-espace d'un espace du type $\underline{L}$, est il un espace de Hilbert?)

d. Le théorème de Littlewood.

Le théorème 1, corollaire 1 prouve en particulier que l'application d'inclusion $\mathfrak{L}^2 \longrightarrow c_0$ est préintégrale gauche, et l'application d'inclusion $\mathfrak{L}^1 \longrightarrow \mathfrak{L}^2$ (transposée de la précédente) est préintégrale droite. La $\underline{C}'$-norme (resp. la $\underline{L}'$-norme) de cette application est $\leq h$; en fait, une méthode directe tout à fait différente, qui se trouve implicitement dans Littlewood [8], montre que cette norme est exactement $\sqrt{2}$. L'énoncé obtenu peut s'énoncer d'ailleurs de bien d'autres manières équivalentes, par exemple:

Théorème 5 (Littlewood)[12]. Soit L un espace du type L. On a

(5) $$\ell^1 \check{\otimes} L \subset \ell^2 \hat{\otimes} L$$

et l'application d'inclusion est de norme $\leq \sqrt{2}$. A fortiori, toute suite sommable dans L a une suite de normes qui est de carré sommable.

(Se rappeler l'interprétation de $\ell^1 \check{\otimes} E$ donnée au § 2, fin du Nº 1). Dualement, cet énoncé équivaut au

Corollaire 1. Soit C un espace du type C. On a

(6) $$\ell^2 \check{\otimes} C \subset c_0 \hat{\otimes} C$$

et l'application d'inclusion est de norme $\leq \sqrt{2}$.

Signalons que dans l'énoncé du théorème 5, $\sqrt{2}$ est la meilleure constante possible, même pour majorer la norme de l'application d'inclusion $\ell^1 \check{\otimes} L \longrightarrow \ell^2_L$. - Comme $\ell^2 \longrightarrow c_0$ est préintégrale gauche, sa composée avec l'application d'inclusion $\ell^1 \longrightarrow \ell^2$ est intégrale. Cela peut d'ailleurs se voir aussi directement de façon bien élémentaire, on trouve même:

Corollaire 2. L'application d'inclusion de ℓ^1 dans c_0 est intégrale, et de norme intégrale 1.

(Voir [7], Nº 3 pour la démonstration et diverses formulation équivalentes intéressantes).

Du théorème 5, on déduit par exemple très simplement la généralisation suivante d'un théorème classique de Littlewood:

Proposition 6. Soit G un groupe abélien discret, f une fonction sur G telle que le produit de f par toute fonction sur G ne prenant que les valeurs +1 et -1 soit combinaison linéaire de fonctions de type positif. (i.e. transformée de Fourier d'une mesure sur le groupe dual $\hat{G}$. Alors f est de carré sommable.

On montre en effet par un raisonnement bien standard d'Analyse Fonctionnelle que la famille des $f(s).s$, considérées comme fonctions sur $\hat{G}$, est sommable dans $L^1(\hat{G})$. Donc la famille des normes, qui est $(|f(s)|)$, est de carré sommable en vertu du théorème 5.

e. Compléments sur les fonctions intégrales.

Soient M et N deux espaces localement compacts, munis de mesures positives μ resp. ν. Soient $1 \leqslant p,q \leqslant +\infty$. On vérifie que $L^p(\mu) \widehat{\otimes} L^q(\nu)$ peut se réaliser de façon naturelle comme sous-espace de l'espace des fonctions localement $\mu \otimes \nu$-sommables sur $M \times N$. Si donc $g \in L^p(\mu) \widehat{\otimes} L^q(\nu)$, et si f est une classe de fonctions mesurables sur $M \times N$, fg est une classe de fonctions mesurables sur $M \times N$.

Proposition 7. Sous les conditions précédentes, si $1 < q < +\infty$, et si f est une fonction intégrale sur $M \times N$ (N°1, définition 1), alors $L^p(\mu) \widehat{\otimes} L^q(\nu)$ est stable sous multiplication par f. Réciproquement, si la fonction mesurable f sur $M \times N$ est telle que $L^2(\mu) \widehat{\otimes} L^2(\nu)$ est stable sous multiplication par f, alors f est intégrale.

La partie directe résulte facilement du fait que f est limite faible dans $L^\infty(\mu \otimes \nu)$ de combinaisons linéaires convexes de fonctions $g \otimes h$ (g et h dans la boule unité de $L^\infty(\mu)$ resp. $L^\infty(\nu)$). Si réciproquement $L^2(\mu) \widehat{\otimes} L^2(\nu)$ est stable sous multiplication par f, cette opération de multiplication dans cet espace est continue (th. du graphe fermé). Utilisant §3, N°3, th.3, cor. 6, on en conclut facilement que f définit une forme linéaire continue sur $L^1(\mu) \overset{H'}{\otimes} L^1(\nu)$, donc que f est du type H. Or on sait que cela implique même que f est intégrale (th.2, cor.2).

5. Applications à l'Analyse Harmonique.

(Dans tout ce N°, on se place dans la théorie avec coéfficients complexes).

Soit A une algèbre involutive, φ une forme linéaire sur A, on désigne par u_φ la forme sesquilinéaire sur $A \times A$ définie par

$$(1) \qquad u_\varphi(x,y) = \varphi(y^* x).$$

On a $u_{\varphi^*} = (u_\varphi)^*$ (où φ^* est défini par $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^*)}$, et où $u^*(x,y) = \overline{u(y,x)}$). Par définition, la forme φ est dite positive, si elle est hermitienne et si u_φ est positive. Si on suppose maintenat que A est une algèbre <u>normée complète</u> involutive, et que la forme φ est <u>positive</u> et <u>continue</u>, alors u_φ sera une forme sesquilinéaire positive continue, donc hilbertienne (§3, N° 2, th.2). Donc u_φ sera encore hilbertienne si φ est une combinaison linéaire de formes linéaires positives continues sur A. En particulier, supposons que A soit une C^*-algèbre, alors il est connu que toute forme linéaire continue sur A est combinaison linéaire de formes positives (d'ailleurs automatiquement continues) (13). Donc alors u_φ est hilbertienne pour toute $\varphi \in A'$. En fait, il n'est pas difficile de prouver qu'on a même

(2) $$\|u_\varphi\|_{\underline{H}} = \|u_\varphi\| = \|\varphi\|.$$

Soit A une $*$-algèbre normée complète, il est bien connu (Gelfand) que si pour tout $x \in A$, on pose $\rho(x) = \operatorname{Sup} \|U_x\|$, le Sup étant pris pour toutes les représentations unitaires U de A, ρ est une semi-norme sur A compatible avec la structure d'algèbre involutive, plus petite que la norme donnée sur A, et l'algèbre involutive complétée A_ρ est une C^*-algèbre, qu'on pourra appeler la <u>C^*-algèbre enveloppante de</u> A. On a une $*$-représentation canonique (de norme $\leqslant 1$) de A dans la C^*-algèbre A_ρ(qui est "universelle" dans un sens évident), l'image de A dans A_ρ est dense. Donc l'application transposée est une application linéaire <u>biunivoque</u> de norme $\leqslant 1$ de A'_ρ dans A', qui permet donc d'écrire $A'_\rho \subset A'$. Les éléments de A'_ρ sont des combinaisons linéaires de formes positives "unitaires et bornées" sur A (14), et si on suppose A^2 dense dans A, c'est la une <u>caractérisation</u> du sous-espace A'_ρ de A'. D'où une norme naturelle sur l'espace des combinaisons linéaires de formes positives unitaires et bornées sur A (savoir la norme du dual de A_ρ), qu'on notera $\|\varphi\|_{\underline{H}}$. Avec cette convention, il est immédiat d'après (2) que l'inégalité $\|u_\varphi\|_{\underline{H}} \leqslant \|\varphi\|_{\underline{H}}$ sera valable pour toute φ comme ci-dessus.

Dans le cas où A est l'algèbre de composition $L^1(G)$ sur un groupe localement compact unimodulaire G, les formes positives sur A sont automatiquement continues, unitaires et bornées, et celles s'identifient aux <u>fonctions continues de type positif</u>

sur G. Ce qui précède définit donc une norme naturelle sur l'espace des combinaisons linéaires de fonctions continues de type positif sur G, norme notée encore $\|\varphi\|_{\underline{H}}$. D'ailleurs, si φ est un élément du dual $L^{\infty}(G)$ de $L^1(G)$, la forme sesquilinéaire u_φ sur $L^1 \times L^1$ est définie par la fonction $\varphi(t^{-1}s)$ de $L^{\infty}(G\times G)$ par la formule usuelle:

$$(3) \qquad u_\varphi(f,g) = \langle \tilde{g}*f, \varphi \rangle = \iint f(s)\bar{g}(t)\,\varphi(t^{-1}s)\,ds\,dt.$$

On désignera donc encore par u_φ la fonction $u_\varphi(s,t) = \varphi(t^{-1}s)$ sur $G\times G$. On voit donc que si φ est combinaison linéaire de fonctions continues de type positif, alors la fonction u_φ sur $G\times G$ est hilbertienne (Nº 1, définition 1) et $\| u_\varphi\|_{\underline{H}} \leq \|\varphi\|_{\underline{H}}$. Réciproquement, si u_φ est hilbertienne et hermitienne, alors il existe une f dans $L^{\infty}(G\times G)$ telle que $-f \ll u_\varphi \ll f$ et $\|f\|_\infty \leq \|u_\varphi\|_{\underline{H}}$ (§3, Nº2, th.2). L'ensemble des f qui satisfont à ces propriétés est d'ailleurs une partie convexe faiblement compacte de $L^{\infty}(G\times G)$, invariante sous les translations par le groupe diagonal G: $\tau_s f(r,t) = f(s^{-1}r, s^{-1}t)$. Si alors on suppose que le groupe G admet une "moyenne invariante"(15), on pourra dans ce convexe trouver une f invariante sous G, donc de la forme u_ψ, avec $\psi \in L^{\infty}(G)$. On aura alors $-\psi \ll \varphi \ll \psi$ et $\|\psi\|_\infty \leq \|u_\varphi\|_{\underline{H}}$. ψ sera de type positif, et on voit alors aussitôt que φ sera différence de deux fonctions $\in L^{\infty}(G)$ de type positif, et de façons plus précise qu'on aura $\|\varphi\|_{\underline{H}} \leq \|u_\varphi\|_{\underline{H}}$. On a donc obtenu (indépendamment des résultats des Nºs antérieurs de ce §4) la

<u>Proposition 8. Soit G un groupe localement compact unimodulaire, $\varphi \in L^{\infty}(G)$. Si φ est combinaison linéaire de fonctions continues de type positif, alors la fonction $u_\varphi(s,t) = \varphi(t^{-1}s)$ sur $G\times G$ est hilbertienne, et $\|u_\varphi\|_{\underline{H}} \leq \|\varphi\|_{\underline{H}}$. La réciproque est vraie si on admet que G admet une "moyenne invariante", en particulier si G est compact, ou abélien, ou admet une suite de composition formée de tels groupes. Dans ce cas, si φ est hermitienne $(\varphi(s) = \overline{\varphi(s^{-1})})$ on aura même $\|u_\varphi\|_{\underline{H}} = \|\varphi\|_{\underline{H}}$.</u>

En transformant par dualité, on obtient une caractérisation des éléments de la C^*-algèbre enveloppante de $L^1(G)$:

Corollaire 1. L'application linéaire de $L^1(G) \otimes L^1(G)$ dans $L^1(G)$ définie par l'application bilinéaire $(f,g) \longrightarrow g*f$, se prolonge par continuité en une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de $L^1(G) \overset{H'}{\otimes} L^1(G)$ dans la C^*-algèbre enveloppante de L^1. Si G admet une "moyenne invariante", c'est même là un homomorphisme sur (qui induit un homomorphisme métrique pour les sous-espaces hermitiens).

Ce corollaire s'interprète de façon particulièrement concrète (laissée au lecteur) quand G est discret. Rappelons d'ailleurs que quand G est abélien, la C^*-algèbre enveloppante de $L^1(G)$ n'est autre que l'espace "transformé de Fourier" de $C_0(\hat{G})$ (où $\hat{G}$ est le groupe dual de G), qui s'interprète par exemple comme un espace de distributions sur G (16).

Ces énoncés se transforment de façon remarquable, si on tient compte maintenant du th.2 (N°2). Ainsi, sous les conditions indiquées, une fonction $\varphi \in L^\infty(G)$ est combinaison linéaire de fonctions continues de type positif si et seulement si la fonction $\varphi(t^{-1}s)$ sur $G \times G$ est intégrale; alors sa norme intégrale est $\leqslant h\|\varphi\|_H$, où h est la constante du N°2 (qui est ici encore la meilleure possible, car on voit que l'énoncé présent est en fait équivalent au théorème fondamental du N°2). D'ailleurs, si G est abélien, les fonctions envisagées sont (d'après le classique théorème de Bochner-Godement) les transformées de Fourier des mesures bornées sur le groupe dual $\hat{G}$. Si φ est transformée de μ, on a $\varphi(t^{-1}s) = \int_{\hat{G}} \hat{s}(t^{-1}s)\, d\mu(\hat{s}) = \int_{\hat{G}} \hat{s}(s)\, \overline{\hat{s}(t)}\, d\mu(\hat{s})$,

d'où $u_\varphi = \int_{\hat{G}} \hat{s} \otimes \bar{\hat{s}}\, d\mu(\hat{s})$, d'où aussitôt l'inégalité

$$\|u_\varphi\|_\wedge \leqslant \|\mu\| \tag{4}$$

si φ est transformée de Fourier de la mesure bornée μ. On en conclut que si on suppose φ hermitienne, on a même

$$\|u_\varphi\|_\wedge = \|u_\varphi\|_H = \|\varphi\|_H = \|\mu\|. \tag{5}$$

De même le corollaire 1 est encore valable si on y remplace $L^1 \overset{H'}{\otimes} L^1$ par l'espace plus sympathique $L^1 \overset{\vee}{\otimes} L^1$, en vertu de Nº2, formule (11).

Enfin, nous obtenons une dernière formulation équivalente intéressante du théorème fondamental:

Corollaire 2. Soit G un groupe compact, u une forme bilinéaire continue sur $C(G)\times C(G)$ invariante par translations gauches: $u(f,g) = u(\tau_s f, \tau_s g)$ pour tout f et $g \in C(G)$ et tout $s \in G$. Alors u peut s'étendre par continuité en une forme bilinéaire continue v sur $L^2(G)\times L^2(G)$, de norme $\leqslant h\|u\|$.

Soient en effet f et g deux éléments de $C(G)$, on a $u(f,g) = \langle u_{\check{g}*f}, \rangle$, (on pose $\check{g}(s) = g(s^{-1})$ où $u_{\check{g}*f}$ est regardé comme un élément de $C(G) \hat{\otimes} C(G)$. Or on a $\|\check{g}*f\|_{\underline{H}} \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$ comme il est bien connu (17), donc d'après ce qu'on a dit $\|u_{\check{g}*f}\|_\wedge \leqslant h\|\check{g}*f\|_{\underline{H}} \leqslant h\|f\|_2\|g\|_2$. On en conclut $|u(f,g)| \leqslant$ $\leqslant h\|f\|_2\|g\|_2\|u\|$, c.q.f.d.

J'ignore si dans la proposition 8, deuxième partie, la restriction sur G est nécessaire. De même, il est peut-être inutile de supposer φ hermitienne dans la formule $\|u_\varphi\|_{\underline{H}} = \|\varphi\|_{\underline{H}}$.

6. Quelques questions ouvertes.

Citons d'abord, pour mémoire, la plus importante de toutes:

1. Problème d'approximation: tout espace de Banach est-il accessible, ou même métriquement accesible? Cela semble improbable. Voir pour des détails sur cette question et ses variantes les notes (2) et (3), ainsi que [4], Chap.1, §5.

2. Relations entre $\otimes$-normes naturelles. Rappelons qu'on ignore si $\underline{C}$ est dominée par $\underline{C}'$ (ou ce qui revient au même, $\underline{L}$ dominée par $\underline{L}'$), voir §2, Nº6.

3. Meilleures constantes. Pour exprimer les relations entre les $\otimes$-normes naturelles, nous avons introduit 5 constantes: ρ (§3, Nº4), σ(§3, Nº5), h, k, ℓ (§4, Nº2). Seule la valeur $\sigma = \frac{\pi}{2}$ est connue, pour les autres constantes on n'a que des inégalités.

D'ailleurs sauf ρ, aucune de ses constantes ne peut être égale à 1. Il n'est d'ailleurs par certains que ces constantes soient les mêmes dans la "théorie réelle" et la "théorie complexe".

4. Propriétés algébrico-topologiques des C^*-algèbres. Soit A une C^*-algèbre. Le théorème 3 du Nº2 suggère la conjecture suivante: Soit u une forme sesquilinéaire continue sur $A \times A$, peut on trouver une forme positive φ sur A telle que $u \ll u_\varphi$ (où on pose, comme au nº5, $u_\varphi(x,y) = \varphi(y^* x)$)? S'il on était toujours ainsi, on pourrait trouver une constante universelle λ (peut on prendre même $\lambda = h$?) telle que l'on puisse choisir cette φ de norme $\leqslant \lambda \|u\|$. Il suffirait de prouver alors l'énoncé sous cette forme pour le cas où A est du type $L(H)$, H étant un espace de Hilbert de dimension finie. Cette conjecture peut s'énoncer de diverses autres façons équivalentes dignes d'intérêt. Signalons qu'elle impliquerait que toute forme bilinéaire continue sur le produit de deux C^*-algèbres est hilbertienne. Quand l'une des deux C^*-algèbres est prise égale à $\underline{c}_0$, on obtient facilement la conséquence suivante: toute suite sommable dans le dual A' d'une C^*-algèbre a une suite de normes qui est de carré sommable. Cela permettrait par exemple de prouver la proposition 6 du Nº4 sans supposer le groupe G abélien.

5. Réciproques diverses. On a vu un grand nombre de propriétés bien spéciales pour les espaces $\underline{C}$, $\underline{L}$, $\underline{H}$, $\underline{\Lambda}$, $\underline{\mathfrak{T}}$. On peut se poser la question si elles sont caractéristiques dans une certaine mesure, par exemple: Si un espace de Banach E est tel que $\underline{\mathfrak{L}}^1 \check{\otimes} E \subset \underline{\mathfrak{L}}^2 \hat{\otimes} E$, l'application identique de E sur lui-même est-elle de type $\underline{L}$? (Comparer Nº 5, th.5). Un résultat très particulier de ce genre, mais de nature métrique, est donné dans [6]. On peut aussi remarquer que les propriétés auxquelles il est fait allusion ci-dessus peuvent aussi s'exprimer comme des propriétés pour des applications du type correspondant $\underline{C}$, $\underline{L}$, $\underline{H}$, $\underline{\Lambda}$, $\underline{\mathfrak{T}}$. On peut se demander pour chacune si elle implique déjà que l'application linéaire en question est d'un type $\underline{C}$ etc. déterminé. De telles questions se posent de façon impérative quand on veut par exemple résoudre la question suivante.

6. <u>Comparaison de</u> $E \widehat{\otimes} F$ <u>et</u> $E \overset{\vee}{\otimes} F$. Il est bien probable que si ces deux espaces sont identiques, E ou F est de dimension finie. Des résultats partiels dans ce sens sont donnés dans [7]. Une question plus fine, posée par la théorie des espaces nucléaires (voir [4], question non résolue 3 - après le Chap.2-), est la suivante: Déterminer un entier $n > 0$ tel que, si on a deux séquences d'opérateurs linéaires continus entre espaces de Banach: $E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \dots E_n \longrightarrow E_{n+1}$ et $F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow \dots F_n \rightarrow F_{n+1}$ telles que l'application correspondante $E_i \otimes F_i \longrightarrow E_{i+1} \otimes F_{i+1}$ soit continue quand le premier espace est muni de $|u|_\vee$ et le deuxième de $|u|_\wedge$ $(i=1,\dots,n)$, alors le composé de l'une au moins de ces séquences est intégral.

Alors que les résultats de ce travail, en dernière Analyse, concernent plûtôt les espaces C, L, H que les espaces de Banach les plus généraux, la solution des questions 1,2,5,6 apporterait des progrès décisifs dans la connaissance de la structure vectorielle-métrique fine des espaces de Banach <u>généraux</u>. Jusqu'à présent, l'unique résultat de ce genre est un théorème de Dvoretzky-Rogers, et ses conséquences les plus immédiates [3],[7].

BIBLIOGRAPHIE.

1 N. Bourbaki, Algèbre multilinéaire, Act. Sc. Ind. 1044, Paris, (Hermann).

2 N. Bourbaki, Intégration, Act. Sc. Ind. 1175, Paris (Hermann).

3 A. Dvoretzky-C.A.Rogers, Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. Vol. 36 (1950) p. 192-197.

4 A. Grothendieck, Thèse, à paraitre dans Memoirs of Amer. Math. Soc.

5 A. Grothendieck, Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, Annales de l'Institut Fourier, t. IV (1952), p.73-112.

6 A. Grothendieck, Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1, à paraitre dans Canadian Journal of Math.

7 A. Grothendieck, Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Boletim da Sociedade de Matemática de S. Paulo, vol.9º(1954).

8 J.E. Littlewood, On Bounded bilinear forms in an infinity of variables, Quart. Journal of Math. (2), 2, (1930) p. 164-174.

9 L. Nachbin, A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. Am. Math. Soc. t.68 (1950), p. 28-46.

10 R. Schatten, A theory of cross-spaces, Princeton University Press, 1950.

11 H. Weyl, Proc. Nat. Acad. Sc. 35, 408-411 (1949).

REMARQUES.

(1) --- Les notions et résultats de ce N° sont dûs à Schatten [10]. Ils avaient été retrouvés indépendamment par l'auter. [10] est la première étude systématique des produits tensoriels d'espaces de Banach.

(2) --- Mais la question de savoir si $\|u\|_\wedge = |u|_\wedge$ offre déjà des difficultés essentielles, et sa solution par l'affirmative dans le cas général équivaudrait au fait que tout espace de Banach E est métriquement accessible ([4],§5) d'où résulterait donc $\|u\|_\alpha = |u|_\alpha$ pour tout α, dans tous les cas.

(3) --- La question est liée à la suivante: Soit $E \overset{\alpha}{\tilde{\otimes}} F$ le quotient de $E \overset{\alpha}{\otimes} F$ envisagé au début de ce N°; on a une application linéaire canonique de norme $\leqslant 1$ de $E \overset{\alpha}{\tilde{\otimes}} F$ dans $E \overset{\alpha}{\tilde{\otimes}} F''$, est-ce même un isomorphisme métrique? Je l'ignore même si $\alpha = \wedge$, i.e. j'ignore si une application nucléaire a même norme nucléaire que sa transposée. La théorie se simplifierait beaucoup (grâce en particulier au N° 4, th. 4, cor. 2) si on savait qu'on a toujours $N_\alpha(u) = \|u\|_\alpha$ i.e. que l'application canonique $E \overset{\alpha}{\otimes} F \longrightarrow B^\alpha(E',F')$ est un homomorphisme métrique. Il suffirait d'ailleurs d'établir ce résultat pour $\alpha = \wedge$. Cela aurait de nombreuses conséquences. Par exemple, tout espace de Banach accessible serait déjà métriquement accessible.

(4) --- Voir [6] pour plus de détails.

(5) --- Il revient au même de dire que le polaire F^0 de F est facteur direct dans E'. Cette condition est d'ailleurs suffisante dans la plupart des question où d'habitude on exige l'existence d'un supplémentaire de F. Elle est par exemple vérifiée chaque fois que F est un espace $C_0(M)$ (voir §2, N° 2), tandis qu'il se peut fort bien que $C_0(M)$ ne soit pas facteur direct dans E. (Ainsi, si $C_0(M)$ est de dimension infinie et séparable, il n'est pas facteur direct dans son bidual).

(6) --- On appelle semi-norme <u>préhilbertienne</u> sur un espace vectoriel E, une semi-norme du type $(u(x,x))^{1/2}$, où u est une forme hermitienne positive sur $E \times E$.

(7) --- L'introduction de l'espace $\overline{F}$, commode dans toutes les question d'antilinéairité, est due, sauf erreur, à J. Dixmier.

(7 bis)-Il ne faut pas croire cependant que tout élément hermitien de $E \check{\otimes} \overline{E}$, tel que la forme hermitienne sur $E' \times E'$ qu'il définit soit hilbertienne, soit dans $E \overset{H}{\otimes} \overline{E}$. Cela est déjà faux dans le cas où E est du type $\underline{C}$, par exemple l'espace $\underline{c}_0$; en ce cas, nous verrons d'ailleurs - §4, Nº 2 - qu'on a $E \overset{H}{\otimes} \overline{E} = E \hat{\otimes} \overline{E}$, et les <u>H</u>-formes sur $E' \times E'$ sont identiques aux formes intégrales. Cela montre donc en même temps qu'une application linéaire <u>intégrale</u> et <u>compacte</u> peut ne pas être nucléaire.

(8) --- On va pour fixer les idées nous placer dans la théorie à scalaires réels. Le résultat (th. 4) sera encore valable dans la théorie à scalaires complexes, par une variante facile de la démonstration donnée ici.

(8 bis)-Une théorie de la dualité pour les opérateurs dans l'espace de Hilbert, englobant les résultats de Schatten, peut se déduire par exemple bien simplement de la formule suivante:

$$\sum \rho_i(uv) \leq \sum \rho_i(u)\, \rho_i(v)$$

(où u et v sont deux opérateurs compacts). Cette formule, sans doute bien connue, se démontre simplement par l'élégante méthode de convexité de H. Weyl [11]. L'exploitation systématique de l'idée de Weyl a fait l'objet d'un séminaire à l'Université de São Paulo en 1954 (non rédigé). Sa méthode, convenablement adaptée, peut servir aussi pour les traces sur des algèbres involutives générales, voir le séminaire Bourbaki Décembre 1954.

(9) --- On montre que réciproquement toute "gauge-function" est du type N_α. Cela montre en particulier qu'il existe une infinité continue de $\otimes$-normes non équivalentes.

(10) --- En fait, on prouve que, sauf le cas où N_α est équivalente à la norme $\sup_i |\rho_i|$, i.e. $\|u\|_\alpha$ équivalente à la norme usuelle des opérateurs sur $L(H_1;H_2)$, les α-applications d'un Hilbert dans un autre sont compactes, et que $\|u\|_\alpha = N_\alpha(\rho_i(u))$, où pour une suite positive quelconque (ρ_i), on pose $N_\alpha((\rho_i)) =$
$= \lim_{n\to\infty} N_\alpha(\rho_1,\dots,\rho_n,0,0,\dots)$. (Mais bien entendu, cela ne prouve pas que u soit α-nucléaire, bien qu'il en soit ainsi dans les cas usuels, notamment dans le cas des p-normes classiques).

(10 bis)-Rappelons (§1, N°6) que dans le cas où f est réelle, $\|f\|_\alpha$ n'est pas la même suivant qu'on se place dans la théorie à scalaires réelles, ou complexes.

(11) --- Il s'agit notamment du théorème de Dunford-Pettis, valable par exemple si E ou L^1 est séparable. Remarquons qu'on n'a pas d'énoncé simple correspondant pour les applications linéaires continues d'un espace L^1 dans un espace de Banach quelconque. Déjà l'application identique de L^1 sur lui-même ne peut s'obtenir (si la mesure μ n'est discrète) par une application mesurable de M dans L^1.

(12) --- A la terminologie près, ce théorème figure dans [8] pour $L = \ell^1$. Faute d'une terminologie suggestive, Littlewood ne semble pas s'être aperçu de la généralité de son résultat. Contrairement à son habitude, il ne donne pas non plus la meilleure constante.

(13) --- Ce résultat a été publié par Takeda, Proc. Japan Acad. 30 (1954), 90-95. Il avait été obtenu à peu près simultanément par l'auteur, avec une démonstration voisine, en même temps que divers résultats connexes.

(14) --- Pour toutes ces notions, voir Gelfand-Naimark, "Rings with involution", ...

(15) --- Nous dirons avec J. Dixmier qu'un groupe topologique G admet une "moyenne invariante" si, dans le convexe faiblement compact formé des formes linéaires positives de norme 1 sur l'espace $C^{\infty}(G)$ des fonctions continues sur G, existe un élément invariant par translations. Alors pour toute représentation $s \longrightarrow U_s$ de G par des opérateurs continus dans un espace localement convexe E, telle que les fonctions $\langle U_s x, x' \rangle$ soient continues pour tout $x \in E$, $x' \in E'$, et tout ensemble convexe faiblement compact K dans E stable sous G, existe dans K un élément invariant sous G.

(16) --- Ces distributions ne seront pas en général des mesures, si G n'est pas discret. C'est pourquoi c'est surtout le cas G discret qui s'interprète de façon bien simple.

(17) --- En fait, d'après une formule de décomposition classique, toute fonction $f*g$ (f et g dans $L^2(G)$) est combinaison linéaire de fonctions du type $\tilde{h}*h$ ($h \in L^2(G)$) qui sont continues et de type positif. L'inégalité précise $\|f*g\|_H \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$ est par exemple une conséquence de la théorie des algèbres unitaires, voir Godement, Théorie des caractères, Annals of Math. vol. 59 (1954) p.55, th.3.