PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

FRÉDÉRIC PHAM

Résurgence d'un thème de Huygens-Fresnel

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 68 (1988), p. 77-90
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1988__68__77_0>

RÉSURGENCE D'UN THÈME DE HUYGENS-FRESNEL

par FRÉDÉRIC PHAM

Dédié à René Thom.

0. Principe de Huygens-Fresnel et catastrophes élémentaires

(« ... sew the quantum flesh on the classical bones » (M. V. Berry).)

La phase d'une onde de lumière (stationnaire) de haute fréquence se propageant dans un milieu réfringent isotrope est gouvernée approximativement par l' « *équation de l'iconale* »

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 = n(q)^2 \tag{0.1}$$

où $q = (q_1, \ldots, q_r)$ est la variable de position, et $n = n(q)$ l'indice de réfraction du milieu; la fonction « iconale » S est par définition le produit de la phase de l'onde par la constante $\lambda/2\pi$ (λ = longueur d'onde dans le vide) — constante qu'il a été commode d'incorporer dans S afin que n'apparaissent dans (0.1) que des fonctions ne variant pas trop vite avec q.

Si au lieu d'une onde lumineuse on considère une « onde de matière », la fonction iconale doit être remplacée par l'*action* classique (égale selon De Broglie au produit de la phase par la constante de Planck $h/2\pi$), et l'équation de l'iconale par l'équation de Hamilton-Jacobi

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = E, \tag{0.1'}$$

$H(p, q)$ étant la fonction de Hamilton, et E l'énergie de la particule.

L'équation de l'iconale permet d'interpréter la phase de l'onde en termes d'optique géométrique : d'après le principe de Fermat, les *rayons lumineux* de l'optique géométrique sont les géodésiques de la métrique $ds = n(q)\, dq$, appelée « *distance optique* » (dq désignant la métrique euclidienne) — l'analogue pour les ondes de matière est $ds = \Sigma_i\, p(q)\, dq_i$

(où $p(q)$ est la racine positive de $H(p(q), q) = E$) ; une solution locale particulière de (0.1), appelée « *onde sphérique de centre* $\hat{q}$ », est la fonction $q \mapsto S(q, \hat{q}) =$ distance optique entre q et $\hat{q}$ (q étant assez proche de $\hat{q}$ pour que la géodésique joignant les deux points soit unique); la propagation des solutions générales de (0.1) se déduit des solutions particulières « sphériques » par le

Principe de Huygens. — Étant donné une « surface d'onde »

$$\Sigma_{w_0} = \{ q \in \mathbf{R}^r \mid S(q) = w_0 \}$$

les surfaces d'onde voisines Σ_w s'en déduisent comme enveloppes de la famille paramétrée par $\hat{q} \in \Sigma_{w_0}$ des surfaces d'onde « sphériques » $\{ q \mid S(q, \hat{q}) = w - w_0 \}$.

Dans les années soixante j'ai eu l'occasion d'entendre Thom, racontant à l'I.H.E.S. ses idées sur les « mathématiques qualitatives », rappeler le principe de Huygens et en déduire une classification des singularités génériques des fronts d'onde. Mais cette idée allait conduire à bien d'autres développements : en précisant le principe de Huygens à la manière de Fresnel, on obtient mieux qu'une description géométrique des singularités des fronts d'onde, caustiques, etc. : on peut donner des modèles locaux des *figures de diffraction* observables au voisinage des caustiques.

Le « principe de Huygens-Fresnel » ([BW] Chap. 8) conduit à écrire l'onde lumineuse comme une superposition de fonctions d'onde sphériques

$$\psi(q) \cong \int_{\Sigma_{w_0}} e^{\frac{2i\pi}{\lambda} S(q, \hat{q})} a(q, \hat{q}) \, d\hat{q}(\Sigma_{w_0}) \tag{0.2}$$

où $a(q, \hat{q})$ est une fonction pas trop rapidement variable de ses arguments (on a noté $d\hat{q}(\Sigma_{w_0})$ la mesure canonique sur l'hypersurface Σ_{w_0}). Comme λ est supposé petit, la contribution principale de (0.2) viendra d'un voisinage des « points critiques » $\hat{q}_c$, valeurs de $\hat{q}$ pour lesquelles

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{q}}(q, \hat{q}) = 0.$$

Pour q assez proche de Σ_{w_0} un seul point critique (quadratique) intervient et l'on retrouve d'après le principe de la phase stationnaire

$$\psi(q) \cong c(q) \, e^{\frac{2i\pi}{\lambda} S_c(q)}, \tag{0.2'}$$

où $S_c(q) = S(q, \hat{q}_c(q))$ n'est autre que l'iconale de la construction de Huygens.

Quand on s'éloigne de Σ_{w_0}, la fonction $\hat{q} \mapsto S(q, \hat{q})$ peut avoir d'autres types de points critiques : le lieu des points q pour lesquels cela arrive est la « *caustique* », enveloppe de la famille des rayons lumineux. On obtient des modèles locaux génériques pour le comportement de l'onde lumineuse au voisinage d'une caustique en remplaçant dans (0.2) la fonction S par l'un des modèles polynomiaux que donne Thom pour les déploiements universels de fonctions *(« catastrophes élémentaires »)*. Les plus simples de ces modèles sont bien antérieurs à Thom : pour la catastrophe « *pli* » on obtient la fonction d'Airy (1838) et pour la catastrophe « *fronce* » on obtient la fonction de Pearcey (1946); mais le cadre des idées de Thom permet d'en bien comprendre le caractère universel.

Vue par un mathématicien, l'égalité (0.2) soulève bien des problèmes : les physiciens savent qu'elle n'est qu'approchée, ce qui pose à l'analyste le problème de définir ce qu'il faut entendre par « solution approchée de l'équation des ondes »; par ailleurs, devant la simplicité de l'idée de Huygens-Fresnel, et la beauté visuelle des figures de diffraction (cf. [Be] [BM] [BNW] [BU]) le géomètre ne peut s'empêcher de penser qu'il n'y a rien là qui ne soit Géométrie...; encore faut-il comprendre en quel sens!

Les dernières décennies ont vu se dessiner plusieurs types d'approches mathématiques de ces questions :

1) La plus simple, en même temps que la plus proche de l'idée physique initiale, est celle esquissée par Harthong [Ha] : la longueur d'onde λ (ou la constante de Planck h) y est considérée comme un « infiniment petit » fixé, et le signe d'égalité approchée $\cong$ signifie que les deux membres diffèrent par un infiniment petit (le cadre est bien entendu celui de l'analyse non standard).

2) La plus connue, et celle qui a inspiré toutes les autres, s'est développée autour des travaux de Maslov, Egorov, Hörmander (avec notamment Arnold, Duistermaat...) : λ (ou h) y est considéré comme un paramètre tendant vers zéro, et l'égalité approchée $\cong$ est l'égalité des séries asymptotiques (au sens de Poincaré, c'est-à-dire que l'on néglige toute fonction qui tend vers zéro plus vite que toute puissance du paramètre).

3) Les idées de Sato [SKK] suggèrent naturellement une variante de 2) ([Ph1] [Ph3]) où le cadre analytique se substitue au cadre C^∞, ce qui présente à mes yeux un double avantage : i) suggérer la possibilité d'extension au domaine *complexe*, domaine dans lequel les physiciens savent puiser des informations importantes (effet tunnel, états métastables, etc.); ii) jeter un pont avec des problèmes de géométrie algébrique (connection de Gauss-Manin, ou étude des singularités d'intégrales de fonctions rationnelles de plusieurs variables — comme par exemple les intégrales de Feynman). Accessoirement la signification de $\cong$ est ici un peu plus forte : les fonctions que l'on tient pour négligeables sont celles dont la décroissance est exponentielle (sans préjuger de leur taux de décroissance).

4) Le point de vue que je me propose d'esquisser ici est basé sur la théorie des *fonctions résurgentes* d'Ecalle, théorie qui se place complètement dans le domaine complexe. Une série formelle de puissances du paramètre ne s'y interprète plus seulement comme une série asymptotique, mais comme un codage d'une *vraie* fonction (idée déjà pressentie par Dingle). Ce codage laisse subsister certaines ambiguïtés exponentiellement petites, mais au lieu de fermer les yeux sur ces ambiguïtés on les analyse avec précision, par le jeu du « *calcul différentiel étranger* » d'Ecalle.

1. Fonctions résurgentes étendues

En 1974 R. Balian et C. Bloch [BB] ont proposé de chercher les solutions de l'équation de Schrödinger

$$\left(-x^{-2}\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}+\mathrm{V}(q_1,\ldots,q_r)\right)\psi=\mathrm{E}\psi\qquad\left(x=\frac{2i\pi}{h}\right)\tag{0}$$

sous la forme

$$\psi(q,x)=\int_\gamma e^{-x\xi}\,\Psi(q,\xi)\,d\xi\tag{1}$$

où Ψ est une fonction analytique (multiforme) se prolongeant presque partout sur $\mathbf{C}^r\times\mathbf{C}$, les obstacles au prolongement analytique étant (localement) des hypersurfaces analytiques complexes; le chemin d'intégration γ est un chemin sans fin du plan des ξ, dépendant continûment de q, et qui borde un voisinage sectoriel de l'infini Ω, d'ouverture angulaire $>\pi$, de direction précisée ci-après, dans lequel Ψ n'a aucune singularité. Les singularités de Ψ sont alors localement de la forme $\xi=\mathrm{S}(q)$, où S est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi.

Les fonctions de type (1) forment une algèbre (où la multiplication des ψ correspond à une opération de « convolution » des Ψ) : c'est l'algèbre des « *fonctions résurgentes étendues de x, dépendant holomorphiquement de q* » (cf. [CNP1] pour une étude détaillée).

Précision sur la direction du voisinage sectoriel Ω. — La fonction ψ sera définie pour $\operatorname{Arg} x\cong\theta_0$, $|x|\gg 0$ si Ω contient une union de demi-plans de la forme $\operatorname{Re}(e^{i\theta}\xi)\ll 0$ $(\theta\cong\theta_0)$; pour simplifier les notations, nous adopterons désormais la convention $\theta_0=0$, bien que celle de Balian et Bloch corresponde à $\theta_0=\pi/2$.

Exemple 1. — La variable q parcourant un ouvert où S est holomorphe, on prend pour Ψ une fonction holomorphe de q,ξ en dehors de la coupure $\operatorname{Arg}(\xi-\mathrm{S}(q))=0$, de la forme

$$\Psi(q,\xi)=\frac{\mathbf{a}_0(q,\xi)}{\xi-\mathrm{S}(q)}+\mathbf{a}(q,\xi)\operatorname{Log}(\xi-\mathrm{S}(q))\tag{2}$$

où les fonctions $\mathbf{a}_0$ et $\mathbf{a}$ sont supposées holomorphes en (q,ξ) dans un voisinage de la coupure, et de type exponentiel en ξ; le chemin d'intégration γ longe les deux lèvres de la coupure. L'intégrale (1) est alors convergente pour $\operatorname{Re} x\gg 0$, et admet un développement asymptotique en x de la forme

$$\psi(q,x)\cong a(q,x)\,e^{-x\mathrm{S}(q)}\tag{2'}$$

où a est une série formelle de puissances de x^{-1}, à coefficients holomorphes en q, déduite de $\mathbf{a}$ par transformation de Laplace.

Définition ([CNP1]). — Une fonction ψ du type de l'exemple 1 sera appelée *fonction résurgente pure à singularités simples, de support singulier* $\mathrm{S}(q)$: « *pure* » signifie que le support singulier se réduit à une seule valeur de ξ; « *à singularités simples* » fait référence à la forme particulière (2), d'où résulte le développement asymptotique (2').

Le second membre de (2') est appelé *symbole résurgent élémentaire* associé à ψ. Remarquons que la donnée du symbole détermine sans ambiguïté la fonction Ψ (« *transformée de Borel* » du symbole), donc la fonction ψ (« *resommée de Borel* » du symbole). En résumé, l'exemple 1 n'est autre qu'une version « avec paramètres » de la resommation de Borel usuelle.

Exemple 2 : intégrales « du type Huygens-Fresnel ». —

$$\psi(q, x) = \int_\Gamma e^{-xS(q,\hat{q})}\, \Phi(\hat{q}, x)\, d\hat{q}_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{q}_n. \tag{3}$$

On supposera pour simplifier que S est une fonction polynomiale, et Φ une fonction holomorphe sur le revêtement universel de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^*$, à croissance modérée en $\hat{q}$; le n-cycle d'intégration (non compact) Γ est supposé vérifier une condition de « descente rapide » qui assure la décroissance exponentielle de l'intégrand à l'infini. En s'inspirant de l'idée classique de la méthode du col, on peut décomposer Γ en « onglets de Lefschetz » issus des différents points critiques (cf. [Ph6]), et mettre ainsi (3) sous la forme (1), où Ψ est une fonction dont les singularités $\xi = S_c(q)$ sont les valeurs critiques de $S(q, .)$. Pour des valeurs génériques de q, la fonction ψ peut ainsi être décomposée en une somme de fonctions résurgentes pures du type de l'exemple 1 (à un facteur $x^{n/2}$ près), chacune des composantes pures étant l'intégrale sur un onglet de la décomposition de Γ.

Phénomène de Stokes et dérivations étrangères. — La décomposition d'une fonction résurgente étendue en « symboles résurgents » (sommes de symboles résurgents élémentaires) dépend de la disposition relative (dans le plan des ξ) des diverses singularités $S_c(q)$ par rapport à la direction α que l'on aura choisie pour resommer les symboles (la direction réelle positive dans notre cas). Lorsque cette disposition change (parce qu'on aura fait varier q ou bien la direction α) la décomposition peut changer : c'est le « *phénomène de Stokes* ». Ces changements de décomposition sont décrits dans l'algèbre des symboles résurgents par les *automorphismes de passage*, dont les logarithmes définissent les *dérivations étrangères* $\dot{\Delta}_{(\alpha)}$ (voir l'Appendice). Un symbole résurgent dont toutes les dérivées étrangères sont nulles est appelé *constante de résurgence* : dans le cas des singularités simples cela signifie que dans le développement (2') la série formelle $a(q, x)$ est convergente au voisinage de $x = \infty$.

Version locale. — Le point de vue exposé ci-dessus est *global dans le plan des* ξ. Il peut être intéressant d'en donner aussi une version *locale*, dans laquelle la fonction Ψ n'est étudiée qu'au voisinage d'un point (q_0, ξ_0), et en tant que *microfonction*, c'est-à-dire modulo les fonctions holomorphes au point considéré. (N.B. : parmi les nombreux avatars de la notion de microfonction de Sato, il est question ici de celui qu'utilise [KK] et qu'expose [Ph4].) La transformée de Laplace ψ de Ψ n'est alors définie que *modulo les fonctions de type exponentiel* $< -\operatorname{Re}\xi_0$. L'étude de la décomposition *locale* en symboles résurgents (où l'on ne tient compte que des symboles dont le support tend vers ξ_0 quand $q \to q_0$) conduit à un *calcul différentiel étranger local.*

L'étude locale des intégrales « du type Huygens-Fresnel » n'est pas nouvelle (cf. par exemple [Ph6]). Mais on verra au § 3 comment l'outil nouveau qu'est le calcul différentiel étranger jette une lumière tout à fait neuve sur le sujet.

2. Le problème de Cauchy résurgent

Pour préciser l'idée de Balian et Bloch, on peut énoncer la

Conjecture. — L'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy pour l'équation (0) (ou l'équation des ondes, ou... etc.) sont assurées dans l'espace des fonctions résurgentes étendues de x, à dépendance holomorphe en q. De plus, le support singulier de toute solution résurgente est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi.

Exemple. — On sait aujourd'hui que la conjecture est vraie en dimension 1 (une seule variable d'espace q), si le « potentiel » V est polynomial.

Une construction d'Ecalle (annoncée dans [E2]) permet dans ce cas de construire deux solutions résurgentes étendues « indépendantes » (en ce sens que leur Wronskien est inversible dans $\hat{\mathscr{R}}_{(x)}$ = algèbre des fonctions résurgentes étendues de x); ces deux solutions forment alors une base du $\hat{\mathscr{R}}_{(x)}$-module des solutions résurgentes de (0), et la résolution du problème de Cauchy se ramène dans cette base à un problème immédiat d'algèbre linéaire. Une rédaction détaillée est en préparation (cf. [CNP2]).

Commentaire. — Dire qu'une fonction ψ de la forme (1) est solution de (0), c'est dire que sa transformée de Laplace Ψ est solution de

$$\text{(4)} \qquad \left(-\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \mathrm{V}(q_1, \ldots, q_r) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \Psi = \mathrm{E} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Psi.$$

Le problème de Cauchy résurgent est ainsi un problème de Cauchy pour les fonctions analytiques multiformes, problème qui s'apparente à ceux étudiés par Hamada, Leray, Wagschall. Notons d'ailleurs que dans [W], les solutions sont données par des sommes infinies d'intégrales itérées qui semblent présenter quelque analogie avec les « monômes de résurgence », clefs de la construction d'Ecalle.

Remarques sur l'aspect microlocal du problème.

Pour étudier *localement* la propagation des singularités de la fonction Ψ, il est naturel de regarder Ψ *en tant que microfonction.* Dans ce point de vue « *microlocal* », il est agréable de travailler dans l'espace des (p, q) (*espace de phase* de la mécanique classique), où l'information locale sur le support $\{\xi = \mathrm{S}_c(q)\}$ de Ψ se traduit par la donnée du germe de *variété lagrangienne* $p_i = \partial S_c/\partial q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Parmi les diverses situations locales qui peuvent se présenter génériquement, les plus simples sont les suivantes :

1) *Variété lagrangienne lisse, à projection lisse sur l'espace des q (*S_c *fonction holomorphe de q).* — Le problème de Cauchy se résout facilement dans l'espace des symboles résurgents élémentaires du type de l'exemple 1 (§ 1) (formellement, c'est la résolution des « équations de transport » bien connues des physiciens).

2) *Variété lagrangienne lisse, à projection critique sur l'espace des q (*S_c *fonction ramifiée de q).* — Une transformation canonique permet de se ramener au cas précédent; si $S(q, \hat{q})$ est la fonction génératrice d'une transformation canonique $(p, q) \mapsto (\hat{p}, \hat{q})$ changeant la variété lagrangienne en $\hat{p} = 0$, on pourra chercher les solutions du problème de Cauchy sous la forme (3) (version *locale*). Dans les situations génériques où $S(q, \hat{q})$ est un déploiement universel de fonction à point critique isolé, on retrouve bien les intégrales de Huygens-Fresnel « canoniques » (fonctions d'Airy, de Pearcey, etc.) comme modèles locaux des solutions résurgentes de l'équation des ondes (ou de Schrödinger, ou... etc.).

Les deux cas envisagés ci-dessus sont ceux où la microfonction Ψ est solution d'un système microdifférentiel holonome à caractéristique simple (porté par la variété lagrangienne étudiée). Voici maintenant un exemple qui montre que j'ai eu tort dans [Ph4] de mélanger l'aspect « microfonction » (évidemment pertinent à notre problème) à l'aspect « système microdifférentiel holonome ».

Croisement régulier de deux variétés lagrangiennes. — Considérons l'équation de Schrödinger à une dimension au voisinage d'un « point de bifurcation d'ordre 2 », c'est-à-dire d'un point (disons, le point $q = 0$) où $E - V(q)$ a un zéro double : E est alors une valeur critique du hamiltonien classique $H(p, q)$, provenant du point critique quadratique non dégénéré $(0, 0)$; la variété lagrangienne $H(p, q) = E$ consiste en un croisement normal de deux courbes lisses (éventuellement complexes), et les solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi forment deux branches lisses $\xi = \pm S_c(q)$ en contact quadratique (car $S_c \sim q^2$). Il est alors naturel d'effectuer une transformation canonique qui transforme les deux branches lagrangiennes en $\hat{p} = 0$, $\hat{q} = 0$ respectivement. Notant $S(q, \hat{q})$ sa fonction génératrice, cherchons à résoudre l'équation de Schrödinger par des fonctions du type (3) (avec bien sûr $n = 1$) : on s'aperçoit (cf. [Ph7]) que c'est possible microlocalement à condition d'admettre pour Φ une singularité du type $(\hat{q})^{s(x)}$, où $s(x)$ est une série formelle en x^{-1}, localement sommable au sens de Borel. Le changement de variable d'intégration $\hat{q} \mapsto \xi = S(q, \hat{q})$ permet de récrire l'intégrale (3) sous la forme (1) (tout au moins localement), avec Ψ analytique multiforme en dehors de la courbe $\xi^2 - S_c(q)^2 = 0$. Mais sauf dans les cas très particuliers où $s(x) = \text{Cte}$, *la microfonction* Ψ *n'est pas solution d'un système microdifférentiel holonome* (cf. [Ph5]) : l'équation aux dérivées partielles (4), transformée de Laplace de Schrödinger, est la seule dont elle soit solution.

3. Modèles locaux de confluence

Les intégrales du type « Huygens-Fresnel » fournissent de beaux exemples de « *confluence* » de singularités de fonctions résurgentes. Le disciple de Thom qui aborde ces questions est naturellement amené à rechercher, parmi tous les exemples possibles de confluence, des modèles locaux « universels ». Nous nous limiterons ici au cas d'une seule dimension d'espace. Le théorème 1 ci-après montre en quoi la fonction d'Airy est « universelle » : on pourra y reconnaître une résurgence d'une idée qui depuis [CFU] (1957) a connu de nombreux avatars (cf. par exemple [Du]); les adeptes de [SKK] y reconnaîtront un énoncé sur la structure du module microdifférentiel de Gauss-Manin [Ph2] de l'application « fronce » de Whitney (catastrophe « pli » de Thom). Le théorème 2 donne un résultat du même type pour la fonction de Weber (comparer à [MG]). Alors que l'exemple d'Airy a pour « ossature classique » la variété lagrangienne $p^2 - q = 0$, l'exemple de Weber a pour ossature classique $p^2 - q^2 = 0$, c'est-à-dire une union de deux composantes lisses transverses $p - q = 0$, $p + q = 0$. Le lecteur de Kashiwara ([K] [KK] [KKO]) pourra y reconnaître le modèle local universel d'une « interaction analytique régulière » de deux composantes holonomes simples, mais nous avons déjà indiqué à la fin du § 2 en quoi il faut s'affranchir du cadre holonome pour bien utiliser cet exemple.

On trouvera un exposé plus détaillé de ce qui suit dans la thèse d'Ahmedou (Nice, en préparation).

Terminologie. — Parmi les divers symboles résurgents élémentaires considérés plus loin, on appellera *dominants* (resp. *récessifs*) ceux qui sont exponentiellement croissants (resp. décroissants). Bien entendu cette propriété dépend de la région du plan des q où l'on se place. On conviendra de partir de la région $\{ q \text{ réel} > 0 \}$: le symbole dominant (resp. récessif) y sera celui de support $\xi = -q^{3/2}$ (resp. $\xi = +q^{3/2}$) dans le cas d'Airy, et celui de support $\xi = -q^2$ (resp. $\xi = +q^2$) dans le cas de Weber.

Fonction d'Airy. — Il s'agit d'une intégrale de la forme (3), avec

$$S(q, \hat{q}) = \frac{\hat{q}^3}{3} - q\hat{q},$$
$$\Phi = 1.$$

La condition de « descente rapide » laisse une certaine liberté de choix du chemin Γ. *Notre choix sera celui qui, pour* q *réel* > 0, *est homologue à la ligne de plus grande pente de* $-\operatorname{Re} S$ *passant par le col* $\hat{q} = -\sqrt{q}$ *(orientée vers les* $\operatorname{Im} \hat{q}$ *décroissants). Nous noterons* $\mathcal{A}(q, x)$ *la fonction ainsi obtenue. On a*

$$\mathcal{A}(q, x) = x^{-1/3} \mathcal{A}(x^{2/3} q, 1);$$

$\mathcal{A}(q, 1)$ *est la fonction d'Airy traditionnellement notée* $\operatorname{Ai}(q)$.

Fonction de Weber. — Il s'agit d'une intégrale de la forme (3), avec

$$S(q, \hat{q}) = \sqrt{2}\, q\hat{q} - \frac{q^2}{2} - \frac{\hat{q}^2}{2},$$
$$\Phi = \hat{q}^s \quad (s \in \mathbf{C}).$$

Notre choix du chemin Γ *sera celui qui, pour* q *réel* > 0, *est homologue à la ligne de plus grande pente de* $-$ Re S *passant par le col* $\hat{q} = \sqrt{2}\, q$ *(orientée vers les* Im $\hat{q}$ *décroissants). Nous noterons* $\mathscr{W}_s(q, x)$ *la fonction ainsi obtenue. On a*

$$\mathscr{W}_s(q, x) = x^{-(s+1)/2}\, \mathscr{W}_s(x^{1/2}\, q, 1);$$

$\mathscr{W}_s(q, 1)$ *est la fonction de Weber ou « fonction cylindro-parabolique » notée* $D_s(q)$ *dans* [WW].

Remarque. — Notre choix du chemin Γ est celui pour lequel la fonction étudiée (Airy ou Weber) est *purement récessive* dans la région $\{ q \text{ réel} > 0 \}$ (« purement récessive » = pure, à symbole récessif).

Théorème **1.** — *Soit* ψ *une fonction résurgente étendue de* x *dépendant holomorphiquement de la variable* q, *et dont la transformée de Laplace* $\boldsymbol{\Psi}$ *n'a de singularités que sur la courbe* $\xi^2 = q^3$. *Supposons de plus que pour* $q \neq 0$ ψ *soit à singularités simples, et* purement récessive *pour* q réel > 0. *Alors* ψ *s'écrit de façon unique sous la forme*

$$\psi(q, x) = a(q, x)\, \mathscr{A}(q, x) + b(q, x)\, \partial_q \mathscr{A}(q, x),$$

où a *et* b *sont des constantes de résurgence en* x *(fonctions résurgentes à symboles convergeant au voisinage de* $x = \infty$*) dépendant holomorphiquement de* q.

Théorème **2.** — *Soit* ψ *une fonction résurgente étendue de* x *dépendant holomorphiquement de la variable* q, *et dont la transformée de Laplace* $\boldsymbol{\Psi}$ *n'a de singularités que sur la courbe* $\xi^2 = q^4$. *Supposons de plus que pour* $q \neq 0$, ψ *soit à singularités simples à un facteur* x^α *près* ($\alpha \in \mathbf{C}$), purement récessive *pour* q *réel* > 0, *et* « à monodromie simple » *en ce sens que lorsque* q *fait un tour (dans le sens positif) autour de l'origine le symbole de* ψ *est multiplié par une fonction de* x *seul (que nous noterons* $e^{2i\pi s(x)}$; $s(x)$ *est ce que nous appellerons* « l'exposant de monodromie »*). Alors* ψ *s'écrit de façon unique sous la forme*

$$\psi(q, x) = a(q, x)\, \mathscr{W}_{s(x)}(q, x) + b(q, x)\, \partial_q \mathscr{W}_{s(x)}(q, x),$$

où a *et* b *sont des constantes de résurgence en* x *(fonctions résurgentes à symboles convergents au voisinage de* $x = \infty$*) dépendant holomorphiquement de* q.

Versions locales. — Si les hypothèses sur ψ ne sont que *locales au voisinage de* ($q = 0$, $\xi = 0$), les conclusions restent les mêmes, à ceci près que les fonctions a et b sont seulement des « *constantes de résurgence locales* » (symboles localement sommables au sens de Borel, *uniformément en* q).

Esquisse de démonstration. — Notons α la direction du plan des ξ (direction dépendant de q) dans laquelle un observateur placé sur la singularité dominante voit la singularité récessive. Soit ψ^r le symbole élémentaire (récessif) de la fonction ψ dans la région de départ $\{ q \text{ réel} > 0 \}$. En étudiant comment évolue, quand q tourne autour de l'origine, la configuration topologique des singularités dans le plan des ξ, on montre que **sous les hypothèses du théorème 1** le symbole ψ^r vérifie le système d'équations de résurgence (système différentiel étranger) du second ordre

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{(e^{i\pi}\alpha)}\, \psi^r &= \psi^d, \\ \dot{\Delta}_{(\alpha)}\, \psi^d &= -\, \psi^r, \end{aligned}$$

où ψ^d (« d » pour « dominant ») est un symbole résurgent élémentaire de support $\xi = -\, q^{3/2}$ (c'est en substance ce que dit le § 6 de Voros [V]). Ce système d'équations de résurgence est donc vérifié en particulier par le symbole $\mathscr{A}^r$ de la fonction d'Airy $\mathscr{A}(q, x)$. Ecrivant l'une au-dessous de l'autre la décomposition annoncée

$$\psi^r(q, x) = a(q, x)\, \mathscr{A}^r(q, x) + b(q, x)\, \partial_q\, \mathscr{A}^r(q, x)$$

et l'équation qui s'en déduit par dérivation étrangère $\dot{\Delta}_{(e^{i\pi}\alpha)}$

$$\psi^d(q, x) = a(q, x)\, \mathscr{A}^d(q, x) + b(q, x)\, \partial_q\, \mathscr{A}^d(q, x),$$

on obtient un système linéaire de deux équations à deux inconnues a et b que l'on saura résoudre si le déterminant en est inversible (dans l'algèbre des fonctions résurgentes étendues); mais ce déterminant, qui mérite le nom de « Wronskien étranger » de $\mathscr{A}^r$, $\partial_q \mathscr{A}^r$, est aussi le « Wronskien » au sens usuel de $\mathscr{A}^r$, $\mathscr{A}^d$, Wronskien dont l'inversibilité se déduit aisément du fait que $\mathscr{A}^r$ (resp. $\mathscr{A}^d$) est une solution récessive (resp. dominante) d'une équation différentielle ordinaire du second ordre (l'équation d'Airy). On vérifie par un calcul (différentiel étranger!) immédiat que les fonctions a, b solutions du système linéaire ci-dessus ne peuvent être que des constantes de résurgence.

Sous les hypothèses du théorème 2, le raisonnement est analogue mais les équations de résurgence, de la forme

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{(e^{i\pi}\alpha)}\, \psi^r &= \psi^d, \\ \dot{\Delta}_{(\alpha)}\, \psi^d &= (1 - e^{2i\pi s(x)})\, \psi^r, \end{aligned}$$

font intervenir « l'exposant de monodromie » $s(x)$. Pour imiter la démarche précédente il faut remplacer la fonction d'Airy par une fonction spéciale vérifiant les hypothèses du théorème 2 avec le même exposant de monodromie : une telle fonction est $\mathscr{W}_{s(x)}(q, x)$, la « fonction de Weber d'indice $s(x)$ ».

Problème : comment continuer le début de classification amorcé ici ? — Dans le cas de r dimensions d'espace un mouvement classique ayant *localement* r constantes du mouvement en involution définit sur l'espace de phase à $2r$ dimensions ce que j'ai envie d'appeler un « feuilletage lagrangien ». Je pose donc aux spécialistes la question préliminaire suivante : *quelles sont, en dimension* $r > 1$, *les singularités génériques des feuilletages lagrangiens ?* (Nous avons nettoyé ici le cas $r = 1$: une seule constante du mouvement $\mathrm{E} = \mathrm{H}(p, q)$, à singularités génériques du type « Morse », ce qui donne le modèle « de Weber ».)

APPENDICE : DÉRIVATIONS ÉTRANGÈRES

Nous introduisons ici ce qu'il faut savoir sur les dérivations étrangères pour comprendre les énoncés du paragraphe précédent.

On se placera une fois pour toutes dans le *modèle convolutif*, dont les objets sont définis par des fonctions analytiques de la variable ξ « *à prolongement sans fin* » c'est-à-dire se prolongeant partout sauf en des points singuliers « isolés » (cf. [CNP]; dans le cas présent nos fonctions se prolongeront sur le revêtement universel du plan privé d'un nombre fini de points, ce qui est un cas particulier trivial de « prolongement sans fin »). Pour ne travailler qu'avec des fonctions d'une seule variable, on a fixé (à une valeur générique proche de 0) le paramètre q des paragraphes précédents.

Un *symbole résurgent élémentaire* φ_α^ω *de support* ω est défini dans le modèle convolutif par la donnée, modulo les fonctions holomorphes en ω, d'un germe en ω de fonction $\boldsymbol{\Phi}_\alpha^\omega$ holomorphe dans un disque fendu de centre ω, à prolongement sans fin; l'indice α sert à désigner la direction de la coupure, appelée *direction du symbole* φ_α^ω. La fonction $\boldsymbol{\Phi}_\alpha^\omega$ est appelée « *majeur* » du symbole φ_α^ω. On appelle « *mineur* » du symbole élémentaire φ_α^ω le germe $\boldsymbol{\varphi}_\alpha^\omega$ de fonction holomorphe dans un voisinage sectoriel de ω, de direction α, définie par la différence des prolongements analytiques, par la droite et par la gauche, de $\boldsymbol{\Phi}_\alpha^\omega$: le mineur ne dépend évidemment que du symbole, et pas du choix du majeur qui a servi à le définir. Dans le cas d'une singularité logarithmique le mineur est holomorphe en ω, et suffit à déterminer le symbole.

Un *symbole résurgent* (dans la direction α) est une somme formelle de symboles résurgents élémentaires dont les supports ω parcourent un ensemble discret entièrement contenu dans un secteur angulaire d'ouverture $< \pi$ et de direction bissectrice α. L'ensemble de tous ces symboles forme une algèbre commutative dont la loi de multiplication est en fait une *convolution*; l'élément unité de cette convolution est le *symbole de Dirac* δ, symbole résurgent élémentaire de support 0 défini par le majeur $1/2\pi i\xi$.

C'est sur cette algèbre de convolution $\mathscr{R}_\alpha$ que sont définies les dérivations étrangères $\dot{\Delta}_{(\alpha)}$.

Définition des dérivations étrangères $\dot{\Delta}_{(\alpha)}$

On a $\dot{\Delta}_{(\alpha)} = \operatorname{Log} \dot{\mathbf{S}}_{(\alpha)}$, où $\dot{\mathbf{S}}_{(\alpha)}$ est l' « *automorphisme de passage* » de $\mathscr{R}_\alpha$ évoqué au § 1, automorphisme que l'on peut expliciter ainsi : tout symbole résurgent élémentaire φ_α^ω admet un majeur $\boldsymbol{\Phi}_\alpha^\omega$ holomorphe dans le plan fendu $\mathbf{C}\backslash\omega\alpha$ et « nettoyé à gauche », c'est-à-dire n'ayant aucune singularité autre que ω le long du bord gauche de la coupure; $\dot{\mathbf{S}}_{(\alpha)}\, \varphi_\alpha^\omega$ est alors défini comme le symbole résurgent dont le support Ω_+ est l'ensemble des singularités de $\boldsymbol{\Phi}_\alpha^\omega$ le long du bord droit de la coupure, et dont chaque composante élémentaire a pour majeur le prolongement analytique de $\boldsymbol{\Phi}_\alpha^\omega$ au point considéré; *en particulier la composante en* ω *de* $\dot{\mathbf{S}}_{(\alpha)}\,\varphi_\alpha^\omega$ *coïncide avec* φ_α^ω, *ce qui permet de définir le « logarithme » formel* $\dot{\Delta}_{(\alpha)}$ *de* $\dot{\mathbf{S}}_{(\alpha)}$.

Explicitons-en l'action sur un symbole résurgent élémentaire φ_α^ω de support ω : le résultat, dont le support est inclus dans la demi-droite ouverte $]\omega\alpha$, s'exprime en termes de prolongements analytiques du mineur $\boldsymbol{\varphi}_\alpha^\omega$ le long de cette demi-droite; la propriété de prolongement sans fin implique l'existence d'un sous-ensemble discret Ω' de $]\omega\alpha$, l'ensemble des « singularités entrevues » de $\boldsymbol{\varphi}_\alpha^\omega$ dans la direction α, tel que l'on puisse prolonger analytiquement $\boldsymbol{\varphi}_\alpha^\omega$ le long de tout chemin qui longe d'assez près la demi-droite $\omega\alpha$ en évitant Ω' (par la droite ou par la gauche indifféremment, mais sans retour en arrière). Le support de $\dot{\Delta}_{(\alpha)}\,\varphi_\alpha^\omega$ est alors inclus dans Ω', et sa composante en ω' a pour majeur une moyenne convenablement pondérée des prolongements analytiques de $\boldsymbol{\varphi}_\alpha^\omega$ le long de tous les chemins du type indiqué ci-dessus aboutissant en ω' (dans nos exemples du § 3 il n'y a jamais qu'une seule singularité entrevue, de sorte que la pondération est triviale; tout se passe dans ce cas comme si l'on avait $\dot{\mathbf{S}}_{(\alpha)} = 1 + \dot{\Delta}_{(\alpha)}$, les itérées supérieures de $\dot{\Delta}_{(\alpha)}$ agissant trivialement).

Dans ce qui précède nous avons privilégié une direction α. Mais la propriété de prolongement sans fin implique évidemment la possibilité, pour tout symbole résurgent élémentaire, de varier α à volonté. Il est donc commode de choisir une *direction de base* α_0 (par exemple la direction réelle positive) et de « ramener » tous les symboles résurgents élémentaires à cette direction de base, par prolongement analytique autour de ω : on définit ainsi des isomorphismes $\mathscr{R}_\alpha^\omega \to \mathscr{R}_{\alpha_0}^\omega$ qui dépendent non seulement de $\alpha = e^{i\theta}\infty$ mais aussi du choix de l'argument θ. Autrement dit, pour pouvoir faire agir les dérivations étrangères *dans toutes les directions* sur un symbole résurgent élémentaire de direction α_0, il faut prendre garde à les indexer par des directions $\widetilde{\alpha}$ *dans le revêtement universel du cercle à l'infini* (cette précaution est superflue pour les fonctions résurgentes n'ayant que des singularités logarithmiques, puisque les mineurs en sont localement holomorphes, donc univalués).

RÉFÉRENCES

[Ai] G. I. AIRY, On the Intensity of Light in the neighbourhood of a caustic, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **6** (1838), 379-402.

[Ar1] V. I. ARNOLD, Integrals of rapidly oscillating functions and singularities of the projections of Lagrangean manifolds, *Funct. Anal. and its Appl.*, **6**, 3 (1972), 61-62.

[Ar2] V. I. ARNOLD, Remarks on the method of stationary phase and Coxeter numbers, *Usp. Mat. Nauk*, **28**, 5 (1973), 17-44.

[BB] R. BALIAN, C. BLOCH, Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths, *Ann. of Physics*, **85** (1974), 514-545.

[Be] M. V. BERRY, Cusped rainbows and incoherence effects in the rippling-mirror model for particle scattering from surfaces, *J. Phys.*, **A 8,** 4 (1975), 566-584.

[BM] M. V. BERRY, K. E. MOUNT, Semiclassical approximations in wave mechanics, *Rep. Progr. Phys.*, **35** (1972), 315-397.

[BNW] M. V. BERRY, J. F. NYE and F. J. WRIGHT, The Elliptic Umbilic Diffraction Catastrophe, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A 291** (1979), 453-484.

[BU] M. V. BERRY, C. UPSTILL, Catastrophe Optics: Morphologies of Caustics and their Diffraction Patterns, *Progress in Optics*, **18** (1980), 258-346.

[BW] M. BORN and E. WOLF, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1975.

[CNP1] B. CANDELPERGER, C. NOSMAS et F. PHAM, *Une approche de la résurgence* (livre à paraître).

[CNP2] B. CANDELPERGER, C. NOSMAS et F. PHAM, *Résurgence et Développements semi-classiques* (livre en préparation).

[CFU] C. CHESTER, B. FRIEDMAN and F. URSELL, An Extension of the Method of Steepest Descent, *Proc. Camb, Phil. Soc.*, **53** (1957), 599-611.

[Di] R. B. DINGLE, *Asymptotic Expansions: their derivation and interpretation*, Acad. Press, 1973.

[Du] J. J. DUISTERMAAT, Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities, *Comm. Pure and Applied Maths.*, **27** (1974), 207-281.

[E1] J. ECALLE, *Les fonctions résurgentes* (Publ. math. Université de Paris-Sud : en plusieurs tomes).

[E2] J. ECALLE, Singularités irrégulières et résurgence multiple, in *Cinq applications des fonctions résurgentes* (preprint 84T 62, Orsay), 2-42.

[Eg] I. V. EGOROV, On canonical transformations of pseudo-differential equations, *Usp. Mat. Nauk*, **24,** 5 (1969), 235-236.

[FM] M. V. FEDORIUK, V. P. MASLOV, *Semi-classical Approximation in Quantum Mechanics*, Reidel Publ. Company, 1981.

[GS] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG, Geometric Asymptotics, *A.M.S. Math. Surveys*, **14** (1977).

[Ha] J. HARTHONG, La propagation des ondes, in *Etudes sur la mécanique quantique* (Astérisque, **111,** 1984). 92-208.

[Hö] L. HÖRMANDER, Fourier integral operators I, *Acta Math.*, **127** (1971), 79-183.

[K] M. KASHIWARA, Microlocal calculus, in *Mathematical problems in Theoretical Physics* (Lecture Notes in Physics, **39,** 1975).

[KK] M. KASHIWARA, T. KAWAI, On holonomic systems of microdifferential equations III, *Publ. R.I.M.S.*, Kyoto Univ., **17,** 3 (1981), 813-979.

[KKO] M. KASHIWARA, T. KAWAI, T. OSHIMA, A study of Feynman integrals by microdifferential equations, *Commun. Math. Physics*, **60** (1978), 97-130.

[Ma] V. MASLOV, *Theory of perturbations and asymptotic methods* (Moscow State University, 1965).

[MG] S. C. MILLER and R. H. GOOD, Jr., A WKB-type Approximation to the Schrödinger Equation, *Phys. Rev.*, **91,** 1 (1953), 174-179.

[Mi] Th. MILLER, *Verallgemeinerte Airyfunktionen*, Dissertation, Bonner Math. Schriften, 1988.

[Pe] T. PEARCEY, The Structure of an Electromagnetic Field in the Neighbourhood of a Cusp of a Caustic, *Phil. Mag.*, **37** (1946), 311-317.

[Ph1] F. PHAM, Caustiques, phase stationnaire, et microfonctions, *Acta Mathematica Vietnamica*, **2,** 2 (1977), 35-101.

[Ph2] F. PHAM, *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Progress in Math. 2, Birkhäuser (1980).

[Ph3] F. PHAM, Calcul microdifférentiel complexe et méthode semi-classique, *R.C.P.* nº 25, vol. 32, I.R.M.A., Strasbourg, 1983, 59-72.

[Ph4] F. PHAM, Transformées de Laplace des microsolutions de systèmes holonomes, *L'enseignement mathématique*, **30** (1984), 57-84.

[Ph5] F. PHAM, Exercice semi-classique, *in* Actes du colloque *Méthodes semiclassiques en mécanique quantique*, Publ. Univ. Nantes, Hellfer, Robert & Sjöstrand ed., 1985, 75-77.

[Ph6] F. PHAM, La descente des cols par les onglets de Lefschetz, avec vues sur Gauss-Manin, in *Systèmes différentiels et singularités*, Astérisque, **130** (1985), 11-47.

[Ph7] F. Pham, Resurgence, Quantized canonical transformations and multi-instanton expansions, in *Prospect in Algebraic Analysis*, R.I.M.S. Kyoto (à paraître).

[SKK] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, Microfunctions and pseudodifferential equations, *Lecture Notes in Mathematics*, **287** (1973), 265-529.

[V] A. Voros, The return of the quartic oscillator (the complex WKB method), *Ann. Inst. H. Poincaré*, **29**, 3 (1983), 211-338.

[W] C. Wagschal, Problème de Cauchy ramifié, à caractéristiques multiples, holomorphes de multiplicité variable, *J. Math. pures et appl.*, **62** (1983), 99-127.

[WW] E. Whittaker and G. Watson, *Modern Analysis*, New York, The Macmillan Company, 1947.

Laboratoire de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
F-06034 Nice Cedex.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1988.